

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

57e jaargang

1981/1982

no. 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens - W.P. de Porto - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:

F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie bedraagt *f* 45,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,—; contributie zonder Euclides *f* 25,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 40,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 23,55. (Tussentijdse prijsverhoging door EZ toegestaan). Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6,65 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.

Tel. 01720-620 78/620 79. Telex 33014.

Ten Geleide

In het leerplan en het examenprogramma van het vwo komen de onderwerpen krommen, differentialen en differentiaalvergelijkingen voor. Al in een vroeg stadium is met name tegen de differentialen gefulmineerd. Naar aanleiding van de kritiek, die zowel vanuit de wiskundige als de didaktische hoek kwam, is in feite niets gebeurd. In het licht van de aanstaande herverkaveling wiskunde I en II tot wiskunde A en B is het goed de kritiek en de mogelijke aanpassingen nog eens de revue te laten passeren.

In het vorige nummer ging A. C. M. van Rooij in zijn artikel *Differentialen op de middelbare school?* in op de manier waarop in een aantal schoolboeken de differentialen worden gepresenteerd. Zijn advies luidt de differentialen uit te bannen.

In dit nummer treft u het volgende aan:

H. Moet, *Wie is er bang voor differentiaalvergelijkingen?*, geeft zijn al eerder geformuleerde kritiek op de huidige manier van doen met de differentiaalvergelijkingen nog eens. Tevens geeft hij aan hoe het wel zou moeten. Mevr. S. H. Cheng, *Parametervoorstellingen van krommen en differentialen*, geeft aan hoe zij op dit moment het voor haar leerlingen probeert te doen, terwijl haar man, J. W. Nienhuys, *Differentiaalvergelijkingen*, vooral op het praktische gebruik van differentiaalvergelijkingen ingaat.

De redactie hoopt op reacties van collega's, die hun ervaringen in de klas met deze onderwerpen willen publiceren, en op reacties van de commissie die de genoemde herverkaveling begeleidt.

Het is de bedoeling, dat een en ander ertoe leidt dat er een programma uitkomt dat wiskundig korrekt is, dat didactisch goed doordacht is, maar dat vooral voor de leerlingen relevant is.

De redactie

Wie is er bang voor differentiaalvergelijkingen?

H. J. K. MOET

Inleiding

De nomenclatuur die in het vwo met betrekking tot differentiaalvergelijkingen wordt gehanteerd is verwerpelijk. In de eerste plaats omdat deze nomenclatuur de door deskundigen op het gebied van differentiaalvergelijkingen gebruikte terminologie uitsluit, in het bijzonder, in eindexamenopgaven verbiedt. In de tweede plaats omdat de theorie der differentiaalvergelijkingen gebaseerd op de vwo-terminologie defecten bevat waardoor zij de toets op wiskundige elegance niet kan doorstaan.

Een zeer bizar defect is wel dat een beginwaardeprobleem binnen de vwo-terminologie nooit een unieke oplossing heeft (zie [1]). Dit verschijnsel en het gedoe met dx -en en dy -en plaatsend tegen de achtergrond van hedendaagse opvattingen over differentiaalvergelijkingen durf ik te stellen dat wat er in het vwo onder de naam 'differentiaalvergelijkingen' behandeld wordt in wezen geen differentiaalvergelijkingen zijn.

Ik wil het bij het voorgaande alleen niet laten. Hieronder geef ik een schets van de wijze waarop de grondslagen van differentiaalvergelijkingen op eigentijdse, zinvolle wijze in het vwo behandeld zou kunnen worden en ik spreek hierbij de wens uit dat de vwo-nomenclatuur in overeenstemming wordt gebracht met de door deskundigen gebruikte terminologie.

Basisbegrippen

Door deskundigen worden de volgende begrippen gehanteerd. Een differentiaalvergelijking is een vergelijking

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

waarin f een reële continue functie is met als domein een open samenhangende verzameling $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Onder een oplossing of integraalkromme van de differentiaalvergelijking (1) verstaan we een differentieerbare functie y gedefinieerd in een open interval $I \subset \mathbb{R}$ zodanig dat

1) H. J. K. Moet, Over differentiaalvergelijkingen, Euclides 51-ste jaargang 1975/1976, 355-362.

$$\begin{aligned}(x, y(x)) &\in D && \text{voor alle } x \in I; \\ y'(x) &= f(x, y(x)) && \text{voor alle } x \in I.\end{aligned}$$

Een oplossing y gedefinieerd in I is dus een differentieerbare functie waarvan de grafiek in elk van zijn punten (x, y) een raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt $f(x, y)$. Bij een willekeurig punt $(x_0, y_0) \in D$ kunnen we vragen of er een oplossing y van (1) bestaat met de eigenschap $y(x_0) = y_0$. Een dergelijk probleem heet een beginwaardeprobleem.

Belangrijke vragen zijn:

- bestaat er voor een gegeven beginwaardeprobleem een oplossing?
- zo ja, is deze oplossing de enige?

Deze vraagstelling lijkt beperkt als men denkt aan het begrip algemene oplossing, maar zij lijkt mij vanuit didactisch oogpunt gewenst en zij is in het kader van de hier behandelde eerste orde vergelijkingen vanuit wetenschappelijk oogpunt aanvaardbaar.

Met behulp van het lijnelementenveld kan inzicht verkregen worden in het globale en het locale gedrag van oplossingen; $(x, y, f(x, y))$ is het lijnelement in $(x, y) \in D$ en $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ is het lijnelementenveld. In het algemeen verdient het aanbeveling te beginnen met het gedrag van een oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

te onderzoeken in een begrensde omgeving van (x_0, y_0) , bij voorkeur in een rechthoek van de vorm $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, a en b positief geschikt gekozen. Een eerste inzicht in het gedrag van een oplossing y van (2) met definitiegebied I , voorzover de grafiek van y in R ligt, vinden we in de volgende ongelijkheden:

$$\begin{aligned}-M(x - x_0) + y_0 &\leq y(x) \leq M(x - x_0) + y_0, \\ x &\in I \cap [x_0 - a, x_0 + a] \text{ met } x \geq x_0; \\ M(x - x_0) + y_0 &\leq y(x) \leq -M(x - x_0) + y_0, \\ x &\in I \cap [x_0 - a, x_0 + a] \text{ met } x < x_0; \\ \text{waarin } M &= \max\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in R\}.\end{aligned}$$

Bestaan en eenduidigheid van oplossingen

Het bestaan van een oplossing van een beginwaardeprobleem zal in het vwo moeten worden aangetoond door berekening. We beginnen met het onderzoek van een eenvoudige lineaire vergelijking:

$$y' = f(x)y, \quad y(x_0) = y_0. \quad (3)$$

Hierin is $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegeven met $y_0 > 0$ en is f een gegeven continue functie met domein $\mathbb{R}$.

Als een functie y aan dit beginwaardeprobleem voldoet, dan is er een interval I het punt x_0 bevattend, zodanig dat $y(x) > 0$ voor alle $x \in I$. Derhalve kunnen we de differentiaalvergelijking $y'(x) = f(x)y(x)$ delen door $y(x)$, we vinden

$$\frac{1}{y(x)} y'(x) = f(x) \quad x \in I.$$

Hieruit volgt

$$(\ln y)'(x) = f(x) \quad x \in I,$$

zodat we na primitiveren vinden

$$\ln y(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds + A \quad x \in I,$$

de constante A bepalen we door invulling van de beginvoorwaarde, dit levert

$$A = \ln y_0.$$

De oplossing y vinden we nu uit

$$\ln y(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds + \ln y_0 \quad x \in I$$

en wel

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(s) ds} \quad x \in I.$$

De uitdrukking die we voor y op I gevonden hebben, heeft zin voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en voldoet voor iedere $x \in \mathbb{R}$ aan de gegeven differentiaalvergelijking. We hebben derhalve een oplossing van (3) gevonden die bestaat in $\mathbb{R}$.

Voor het beginwaardeprobleem

$$y' = f(x)y, y(x_0) = y_0 \text{ met } y_0 < 0,$$

vinden we analoog

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(s) ds}, x \in \mathbb{R},$$

als oplossing. Het beginwaardeprobleem

$$y' = f(x)y, y(x_0) = 0,$$

heeft als oplossing $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, hetgeen door invulling eenvoudig is na te gaan.

We komen nu toe aan de eenduidigheid van deze oplossingen. Veronderstel dat $\tilde{y}$ een tweede oplossing is van $y' = f(x)y$, $y(x_0) = y_0$ met y_0 gegeven in $\mathbb{R}$, gedefinieerd op een interval I , mogelijk gelijk aan $\mathbb{R}$, dan voldoet de functie

$$x \rightarrow \tilde{y}(x)e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds}, x \in I,$$

aan

$$(\tilde{y}e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds})' = \tilde{y}'e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} - \tilde{y}(x)e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds}f(x) = 0, x \in I,$$

waaruit volgt

$$\tilde{y}(x)e^{-\int_{x_0}^x f(s)ds} = C, \quad x \in I,$$

zodat door invulling van $x = x_0$, volgt $C = y_0$, waarmee is aangetoond

$$\tilde{y}(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(s)ds} = y(x), x \in I.$$

We merken op dat de functie $x \rightarrow z e^{\int_{x_0}^x f(s)ds}$, $x \in \mathbb{R}$, waarin z een element van $\mathbb{R}$ is

aan de vergelijking $y' = f(x)y$ voldoet.

Het beginwaardeprobleem

$$y' = f(x)y + g(x), y(x_0) = y_0, \quad (4)$$

waarin f en g continue functies zijn met een gemeenschappelijk domein I , kan nu met behulp van de methode van variatie van de constante worden opgelost. Hiervoor hebben we gezien dat

$$\phi(x) = z e^{\int_{x_0}^x f(s)ds}$$

met z een constante uit $\mathbb{R}$ aan de vergelijking $\phi' = f(x)\phi$ voldoet. De methode van variatie van de constante bestaat in het bepalen van een functie $x \rightarrow z(x)$ zodanig dat

$$x \rightarrow z(x) e^{\int_{x_0}^x f(s) ds}, \quad x \in I, \quad (5)$$

aan (4) voldoet.

Invullen van (5) in de vergelijking $y' = f(x)y + g(x)$ en enige herleiding leiden tot de volgende vergelijking voor z :

$$z'(x) = g(x) e^{-\int_{x_0}^x f(s) ds},$$

terwijl uit $y(x_0) = y_0$ de beginvoorwaarde $z(x_0) = y_0$ volgt.

We vinden derhalve voor z

$$z(x) = \int_{x_0}^x g(t) e^{-\int_{x_0}^t f(s) ds} dt + y_0,$$

waaruit volgt

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(s) ds} + e^{\int_{x_0}^x f(s) ds} \int_{x_0}^x g(t) e^{-\int_{x_0}^t f(s) ds} dt, \quad x \in I.$$

De eenduidigheid van deze oplossing volgt eenvoudig uit de opmerking dat het verschil w van twee oplossingen van (4) voldoet aan

$$w' = f(x)w, \quad w(x_0) = 0.$$

De differentiaalvergelijkingen die we tot nu toe hebben besproken zijn lineair, dat wil zeggen van de vorm $y' = f(x)y + g(x)$. We zullen hieronder niet-lineaire vergelijkingen onderzoeken.

Het opbouwen van een algemene existentie- en eenduidigheidstheorie zal binnen het vwo niet kunnen geschieden; voor ieder beginwaardeprobleem apart zal existentie van een oplossing door berekening moeten worden aangetoond en voor het bewijs van de eenduidigheid van deze oplossing zal gebruik moeten worden gemaakt van de expliciete vorm van de gegeven differentiaalvergelijking. We zullen deze problematiek aan de hand van een tweetal voorbeelden schetsen. Beschouw

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Laat y een oplossing zijn van (6), dan moet er een interval I zijn waarop geldt $y(x) > 0$ voor iedere $x \in I$. We vinden

$$\frac{1}{y^2(x)} y'(x) = 1 \quad x \in I,$$

waaruit volgt

$$\left(-\frac{1}{y}\right)'(x) = 1 \quad x \in I,$$

zodat voor zekere $A \in \mathbb{R}$ geldt

$$-\frac{1}{y(x)} = x + A, \quad x \in I.$$

De constante A vinden we uit de beginvoorwaarde $y(0) = 1$, hiermee wordt

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in I$$

Het grootste interval waarop de gevonden oplossing kan worden voortgezet is $\langle \leftarrow, 1 \rangle$.

Veronderstel nu dat $\tilde{y}$ een tweede oplossing is van (6) gedefinieerd in I , dan voldoet $w = y - \tilde{y}$ op $I \cap \langle \leftarrow, 1 \rangle$ aan

$$w' = y^2 - \tilde{y}^2 = (y + \tilde{y})w, \quad w(0) = 0. \quad (7)$$

De differentiaalvergelijking voor w is lineair.

Hiervoor hebben we gezien dat de enige oplossing van (7) luidt $w(x) = 0$ voor iedere $x \in I \cap \langle \leftarrow, 1 \rangle$, en dus geldt in $I \cap \langle \leftarrow, 1 \rangle$ $y = \tilde{y}$. We hebben hiermee aangetoond dat er één en precies één oplossing y bestaat van het beginwaardeprobleem (6), dit noemen we lokale eenduidigheid.

De vraag rijst nu of de gevonden oplossing $y(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle$, globaal eenduidig is, of wel gaat er door ieder punt van de grafiek van deze y hoogstens één oplossing.

Bovenstaande analyse leert ons via de vergelijking $w' = (y + \tilde{y})w$ en de juiste daarbijbehorende beginwaarde dat dit inderdaad het geval is.

Tussen haakjes: het beginwaardeprobleem $y' = y^2 s^3$, $y(0) = 1$, heeft lokaal een unieke oplossing gegeven door

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{3}(x+3))^3 & \text{als } x \geq -3 \\ 0 & \text{als } x < -3. \end{cases}$$

We merken op dat deze functie y naast de functie $\tilde{y}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, voldoet aan $y' = y^{2/3}$, $y(-3) = 0$.

Als laatste voorbeeld onderzoeken we

$$yy' = -x, \quad y(0) = 1. \quad (8)$$

De vergelijking $yy' = -x$ herleiden we tot $(y^2)' = -2x$, waaruit door primitive-

ren volgt $y^2 = -x^2 + A$. Door substitutie van de beginvoorwaarde vinden we $A = 1$, zodat $y^2 = -x^2 + 1$. De oplossing y die we onderzoeken voldoet aan $y(0) = 1$, derhalve bestaat er een interval I waarop y positief is zodat $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ voor alle $x \in I$. Eenvoudig volgt nu dat de gevonden oplossing kan worden voortgezet tot

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1. \quad (9)$$

De eenduidigheid van deze oplossing verkrijgen we als volgt. Laat $\tilde{y}$ nog een oplossing zijn van (8), dan geldt in een omgeving I van 0 $y > 0$ en $\tilde{y} > 0$, en

$$(y^2)' - (\tilde{y}^2)' = -2x - (-2x) = 0$$

waaruit volgt

$$y^2 - \tilde{y}^2 = A \quad x \in I,$$

substitutie van $x = 0$ levert nu $A = 0$, waardoor wegens de positiviteit van y en $\tilde{y}$ in I is verkregen $y = \tilde{y}$ in I .

Evenals hiervoor kunnen we aantonen dat de oplossing y gegeven in (9) globaal eenduidig is.

De laatste voorbeelden tonen aan dat het gedrag van oplossingen van niet-lineaire vergelijkingen wezenlijk verschilt van het gedrag van oplossingen van lineaire vergelijkingen: de oplossing van een lineaire vergelijking bestaat overal waar de coëfficiënten van de vergelijking bestaan, terwijl dit voor een oplossing van een niet-lineaire vergelijking in het algemeen niet geldt. Het is van belang voor het inzicht van de scholier dat hem dit verschil wordt bijgebracht.

Parametervoorstellingen van krommen en differentialen

S. H. CHENG, PH. D.

1 Inleiding

Leerlingen van het vwo vinden parametervoorstellingen en differentialen moeilijk. Het eerste van deze twee onderwerpen is nog wel onder de knie te krijgen, maar het tweede onttaardt al vlug in een goocheltruc die zonder begrip wordt toegepast. Deze twee onderwerpen hangen samen.

Ik zal de volgende problemen behandelen:

(1) Hoe kunnen we de leerlingen beter uitleggen hoe een geparametriseerde kromme verloopt?

(2) Hoe kunnen we differentialen omzeilen?

Van Rooij [2] legt uit dat de diverse leerboekjes door ondoorzichtig taalgebruik verwarring stichten over differentialen. Hij stelt dat we de differentialen maar het beste kunnen afschaffen. Een andere formulering voor (2) is dan ook: hoe kunnen we Van Rooij's advies het beste opvolgen?

Ik ga ook nog in op het nut van differentialen in het vwo.

2 Parametervoorstellingen van krommen

Als een leerling gevraagd wordt een functie te onderzoeken en de grafiek ervan te tekenen, dan moet hij of zij het volgende onderzoeken:

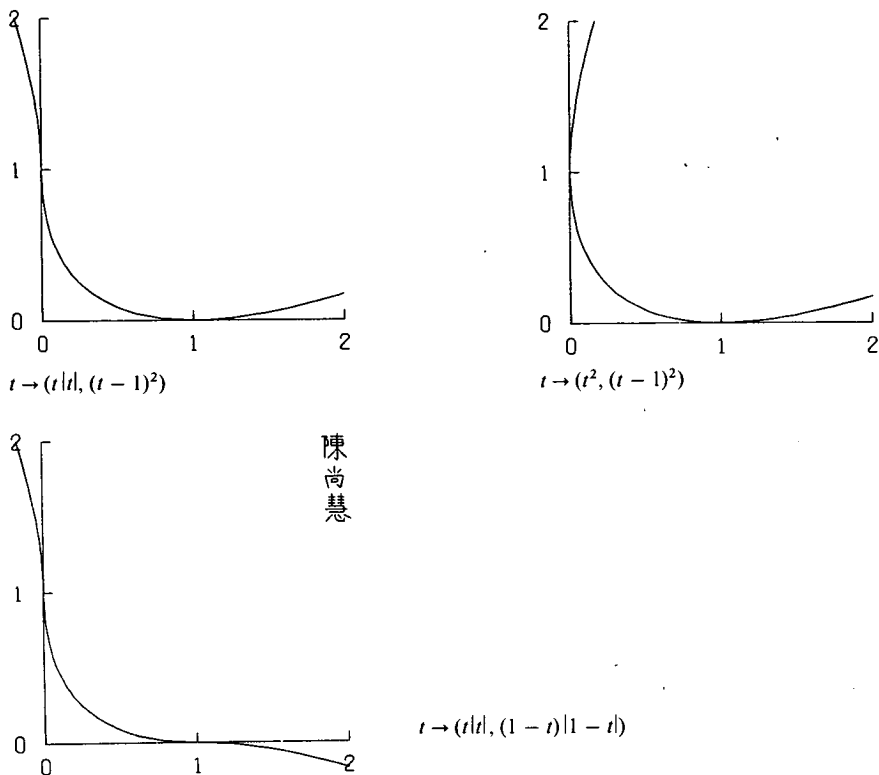
- (1) domein
- (2) snijpunten met assen en tekenverloop van de functie
- (3) tekenverloop afgeleide en extreme waarden
- (4) asymptoten
- (5) nog enkele punten.

De meeste boeken gebruiken nooit het woord 'onderzoeken' voor een parametervoorstelling. Volgens de meeste leerboeken moet men voor het tekenen van een kromme het volgende bepalen:

- (1) snijpunten met de assen
- (2) punten waar de raaklijn aan de kromme evenwijdig loopt met een der assen
- (3) horizontale en verticale asymptoten
- (4) een aantal punten.

Na de eerste vier stappen van het functieonderzoek is de grafiek globaal bekend. De extra punten zijn een soort van verfijning en controle. Maar na de eerste drie

stappen van het tekenen van een geparametriseerde kromme is het vaak moeilijk om die kromme te schetsen. Bijvoorbeeld, de volgende drie krommen hebben geen asymptoten, en in de snijpunten met de assen zijn die assen tevens raaklijn. In alle drie gevallen zijn dat dezelfde snijpunten. Zie figuur 1.^{o)}



Figuur 1

De krommen verschillen totaal van aard.

Een 'aantal punten' bepalen om de loop van de grafiek te bepalen is voor de leerlingen een willekeurige en onduidelijke aanwijzing. Je kan hier ook gemakkelijk rekenfouten maken. Wegens gebrek aan inzicht in het verloop van de kromme kunnen zulke rekenfouten nu rampzalige gevolgen hebben. Daarom gebruik ik de volgende methode om de leerlingen uit te leggen hoe je een geparametriseerde kromme kunt tekenen. De methode is voor leerlingen gemakkelijk te begrijpen.

Het principe is als volgt.

Te bepalen: het verloop van $K: x = x(t), y = y(t)$.

(1) Het verloop van de kromme. Vat in één diagram het tekenverloop van $x'(t)$ en $y'(t)$ samen.

Waar $x'(t) > 0$ en $y'(t) > 0$, daar loopt de grafiek zó: ↗

Waar $x'(t) > 0$ en $y'(t) < 0$, daar loopt de grafiek zó: ↘

Waar $x'(t) < 0$ en $y'(t) < 0$, daar loopt de grafiek zó: ↙

Waar $x'(t) < 0$ en $y'(t) > 0$, daar loopt de grafiek zó: \

Opmerking: het is duidelijk dat als voor zekere t_0 geldt $x'(t_0) \neq 0$, dan is $y'(t_0)/x'(t_0)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(x(t_0), y(t_0))$. Verder, als voor zekere t_0 geldt $x'(t_0) = 0$ en ook $y'(t_0) \neq 0$, dan is er een verticale raaklijn in $(x(t_0), y(t_0))$.

Als voor zekere t_0 geldt $x'(t_0) = 0$ en $y'(t_0) = 0$, dan is er toch een raaklijn in $(x(t_0), y(t_0))$ als de limiet van $y'(t)/x'(t)$ of van $x'(t)/y'(t)$ bestaat voor t nadert tot t_0 .

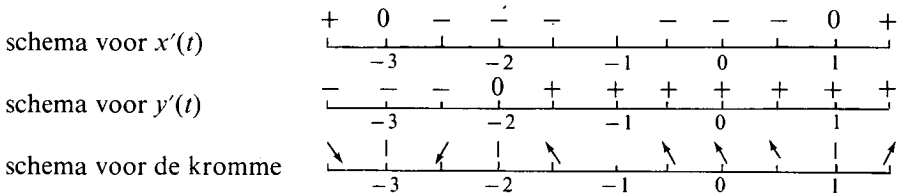
Merk op dat ik geen notaties zoals $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dx}{dy}$ gebruik.

Ik geef nu een voorbeeld.

De kromme K wordt gegeven door $x(t) = \frac{t^2 + 3}{t + 1}$, $y(t) = t^2 + 4t$. Eerst bepalen we $x'(t)$ en $y'(t)$. We vinden

$$x'(t) = \frac{(t+3)(t-1)}{(t+1)^2}, y'(t) = 2(t+2).$$

We bepalen het tekenverloop van $x'(t)$ en van $y'(t)$ en vatten dat met het verloop van de kromme in een tabel samen, aldus:



We zien dat er voor $t = -3$ en voor $t = 1$ verticale raaklijnen zijn. De bijbehorende punten op de kromme zijn respectievelijk $(-6, -3)$ en $(2, 5)$.

We zien verder dat er voor $t = -2$ een horizontale raaklijn is. Het bijbehorende punt op de kromme is $(-7, -4)$.

De snijpunten met de x -as zijn $(3, 0)$ en $(-19/3, 0)$, voor respectievelijk $t = 0$ en $t = -4$.

Er is geen snijpunt met de y -as, want $t^2 + 3 \neq 0$ voor alle t .

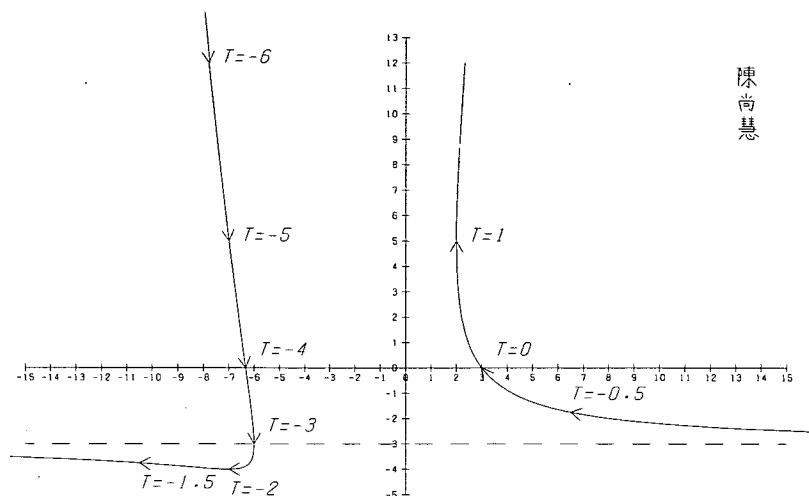
Als t stijgt naar -1 , dan gaat $x(t)$ naar min oneindig en $y(t)$ naar 3, als t daalt naar -1 , dan gaat $x(t)$ naar plus oneindig en $y(t)$ naar 3, dus de lijn $y = 3$ is een horizontale asymptoot.

Het globale gedrag van de kromme is nu bekend. We berekenen nog wat punten, namelijk de punten die behoren bij $t = -5, t = -6, t = -1,5, t = -0,5$, om een idee te krijgen van de manier waarop de kromme van het papier afloopt.

We vatten de gegevens in een 'visgraattabel' samen.

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1,5	-0,5	0	1
x	-6,6	-7	-19/3	-6	-7	-10,5	6,5	3	2
y	12	5	0	-3	-4	-3,75	-1,75	0	5

We kunnen nu de grafiek van de kromme tekenen. Zie figuur 2. In de figuur zijn de punten uit bovenstaande visgraattabel aangegeven door pijltjes. De pijltjes wijzen in de richting van toenemende parameter langs de kromme.



Figuur 2

De kromme $t \rightarrow \left(\frac{t^2 + 3}{t + 1}, t^2 + 4 \right), t \neq -1$

3 Differentialen

Als het onderwerp differentialen aan de orde komt, dan raken de leerlingen in de war. Van Rooij [2] legt uit hoe de diverse leerboekjes elk hun eigen bijdrage leveren tot de verwarring, door hun ondoorzichtig taalgebruik.

Wat de leerlingen volgens mij in de war brengt is het volgende:

- 1 Als x verandert, dan verandert behalve y ook het verband tussen dx en dy . Als y een functie is van x dan is dy eigenlijk een functie van twee variabelen, namelijk dx en x . Dus je kan niet dy schrijven zonder dx te gebruiken in een relatie, bijvoorbeeld $x^2 + ydy = 0$ is fout.
- 2 De symbolen x en y komen ook voor in dx en dy . Verder komt het symbool dx ook voor in integralen (waar het overigens een veelal onbegrepen rol speelt).
- 3 De leerlingen vinden het vreemd dat je van een punt van de grafiek $(x, y(x))$ overspringt naar de raaklijn in dit punt en dan weer naar dx en dy .
- 4 Het verband tussen manipulaties met formules zoals $d(x^2 + y) = 2xdx + dy$ enerzijds en de meetkundige betekenis van dx en dy anderzijds (namelijk via raaklijnen gekoppelde verplaatsingen van x en y) is voor de leerlingen zoek. De meetkundige betekenis is ook niet nodig voor het correct manipuleren. Van Rooij stelt voor dat we de differentialen maar het beste kunnen afschaffen.

Aan de andere kant, we moeten de leerlingen goed voorbereiden op het eindexamen en daar komen voorlopig nog vragen over differentiaalvergelijkingen in voor. Die vragen zijn geformuleerd in differentialen-notatie. Verder behandelen alle boeken (voor zover ik weet) parametervoorstellingen met differentialen. Het lijkt wel alsof 'differentialen' onmisbaar zijn. Dit is eigenlijk niet waar, want men kan alle schoolsommen met notaties dx , dy enzovoorts oplossen door consequent 'd' te veranderen in 'afgeleide naar een verborgen parameter'. Ik zal dat hieronder voordoen. Tegelijkertijd blijkt dan dat differentialen feitelijk overbodig zijn.

4 Een voorbeeld van een differentiaalvergelijking

De belangrijkste reden dat differentialen worden verteld in het vwo is dat je leerlingen dan ook kunt uitleggen wat differentiaalvergelijkingen zijn, en hoe je ze oplost. Dus begin ik met een voorbeeld van een eindexamenvraagstuk (herexamen 1978). De lezers zullen zelf wel in kunnen zien dat de hier gevolgde manier ook toepasbaar is op alle andere differentiaalvergelijkingen in het vwo.

'Gegeven is de differentiaalvergelijking $ydy = (xy^2 - x)dx$.

a. Bereken de coördinaten van het singuliere punt.

Teken de verzameling H van de punten waarin de lijnelementen die aan de differentiaalvergelijking voldoen, evenwijdig aan de x -as zijn.

Teken de verzameling V van punten waarin de lijnelementen die aan de differentiaalvergelijking voldoen, evenwijdig aan de y -as zijn. Geef door arcering aan in welke delen van het vlak de lijnelementen die aan de differentiaalvergelijking voldoen een positieve richtingscoëfficiënt hebben.

b. Bereken de coördinaten van de niet-singuliere punten waarin een integraalkromme de lijn met vergelijking $y = x$ raakt.

c. Los de differentiaalvergelijking op.'

Oplossing met uitleg

We interpretern deze vergelijking als een vergelijking voor een geparametriseerde kromme, met parameter t . Dus $x = x(t)$, $y = y(t)$. We veranderen dx in $x'(t)$ en dat korten we af met x' en evenzo schrijven we y' voor dy .

De vergelijking waaraan de geparametriseerde kromme moet voldoen luidt dus:

$$* \quad yy' = (xy^2 - x)x'$$

Dus in het algemeen is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan een oplossing (integraalkromme) door (x, y) , met $y \neq 0$, gelijk aan:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{x(y^2 - 1)}{y},$$

bijvoorbeeld, in $(1, 2)$ is $\frac{y'}{x'}$ gelijk aan $1,5$. In $(x, 0)$, voor $x \neq 0$ geldt $\frac{x'}{y'} = 0$, dus

daar is een verticale raaklijn. In $(0, 0)$ geldt $x' \cdot 0 = y' \cdot 0$ voor alle getallen x' en y' . Daar kan je dus niet een enkele richtingscoëfficiënt vinden. Zo'n punt noemen we een *singulier* punt. Een *lijnelement* is gewoon zo'n verwachte raaklijn door een bepaald punt. We kunnen al lijnelementen tekenen zonder te weten wat de oplossing is. Bijvoorbeeld, in het punt $(1, 2)$ is het lijnelement de rechte met vergelijking:

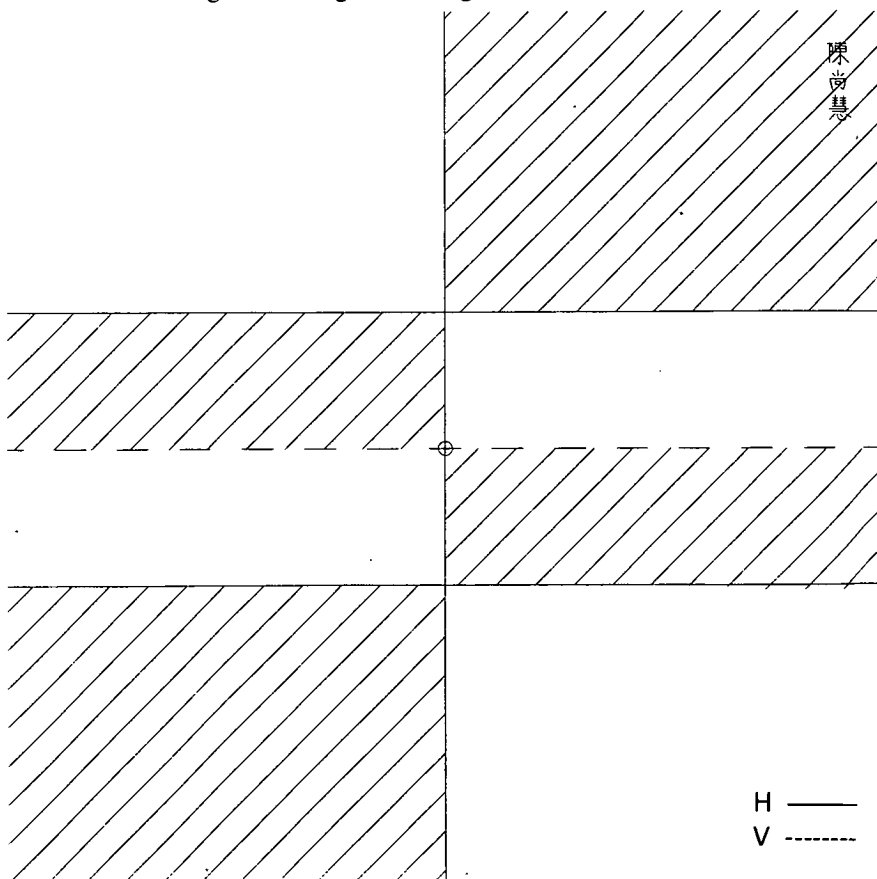
$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1).$$

Zo vinden we H en V . In figuur 3 is H de verzameling aangegeven door de drie getrokken lijnen, met uitzondering van $(0, 0)$, en V is de x -as zonder $(0, 0)$, dat wil zeggen de gestreepte lijn.

Het gebied waar de richtingscoëfficiënt positief is, vinden we door op te lossen:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{x(y^2 - 1)}{y} > 0.$$

Zo vinden we het gearceerde gebied in figuur 3.



Figuur 3

De oplossing van vraag a.

Voor onderdeel b lossen we de volgende twee vergelijkingen tezamen op:

$$(1) \quad y = x$$

$$(2) \quad \frac{x(y^2 - 1)}{y} = 1$$

De oplossingsparen stellen juist de punten voor waar een integraalkromme raakt aan de rechte $y = x$. We vinden $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ als antwoord.

Voor onderdeel c schrijven we de vergelijking in een iets andere vorm, namelijk

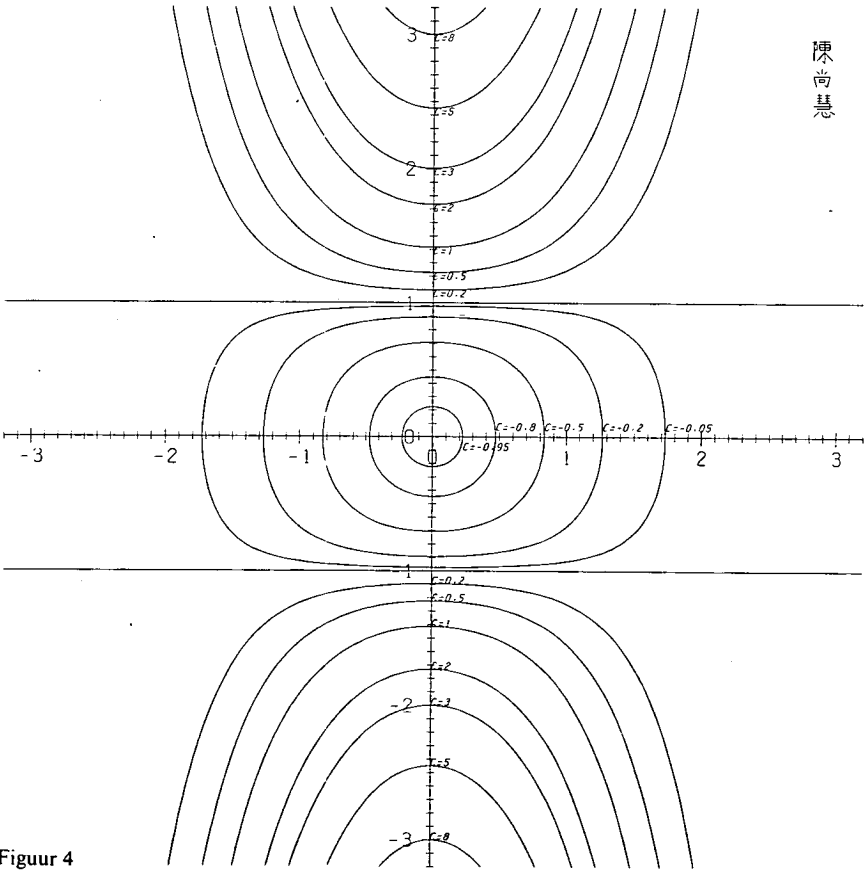
$$** \quad \frac{y'y}{y^2 - 1} = xx'$$

We veronderstellen daarbij dat $y^2 \neq 1$.

We vinden dan $\ln|y^2 - 1| = x^2 + C$, met $C \in \mathbb{R}$.

Een standaardredenering geeft ons dan voor oplossing van *:

$$y^2 = 1 + Cex^2, \text{ met } C \in \mathbb{R} \text{ en } C > -1.$$



Figuur 4

Een aantal oplossingskrommen van $yy' = (xy^2 - x)x'$

陳尚慧

Merk op dat deze relatie een breder definitiegebied heeft dan **. Er zijn drie soorten integraalkrommen, namelijk krommen die horen bij

I) $C \geq 0$ en $y \geq 1$

II) $-1 < C < 0$ en dus $y^2 < 1$

III) $C \geq 0$ en $y \leq -1$.

Deze drie laten zich allemaal parametriseren. Voor de eerste en de derde is x de voor de handliggende parameter, maar voor de middelste is noch x , noch y een natuurlijke keus. De middelste soort laat zich beter met periodieke functies parametriseren¹⁾. Zie figuur 4.

5 Voorbeelden van andere toepassingen

Ik gebruik 'Getal en Ruimte' als voorbeeld van hoe de meeste leerboeken $\frac{dy}{dx}$ benaderen. Dit boek gebruikt de notatie dy en de notatie dx om de notatie $\frac{dy}{dx}$ te verklaren. Eerst wordt dan bewezen dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in t_0 aan de kromme $t(x(t), y(t))$ gelijk is aan

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

indien $x'(t_0) \neq 0$. Vervolgens wordt dan de teller en de noemer vermenigvuldigd met de mysterieuze dt , en dan blijkt het quotiënt gelijk te zijn aan de geheimzinnige $\frac{dy}{dx}$. Voor de berekening moet de leerling onmiddellijk weer terug naar $\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Het differentiaalquotiënt is een onnodige omweg. Ik geef een voorbeeld van een vraagstuk, namelijk vraagstuk 23 op pag. 76 van 5/6V2 van 'Getal en Ruimte'.

'Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling

$$x = t \ln t$$

$$y = 2 + \ln t \quad \text{waarbij } t \in \mathbb{R}^+ \text{ is.}$$

a. Bereken $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$ en $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$.

b. Onderzoek welke waarden $\frac{dy}{dx}$ kan aannemen.

c. Bereken de coördinaten van het buigpunt van K .

d. Teken de kromme K .

Om dit vraagstuk op te lossen veranderen we in het hele vraagstuk overal dy in $y'(t)$ en dx in $x'(t)$.

In onderdeel b wordt nu gevraagd naar het bereik van $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ ($= (t + t \ln t)^{-1}$).

Voor onderdeel c hoeven we alleen maar deze functie van t te differentieren, maar dat is ook al nodig voor b.

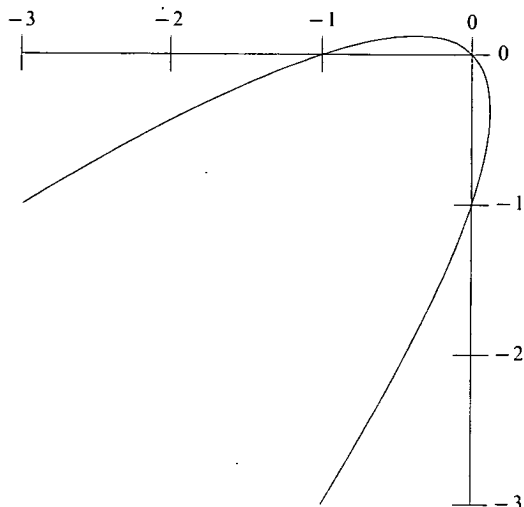
De afgeleide is: $\frac{y'(t)}{x'(t)}' = -\frac{2 + \ln t}{t^2(1 + \ln t)^2}$. Aan het tekenverloop van deze

uitdrukking zien we dat de richtingscoëfficiënt van de kromme een maximum heeft voor $t = e^{-2}$. Alle waarden kleiner of gelijk aan dit maximum (namelijk $-e^2$) en alle positieve waarden worden door de richtingscoëfficiënt aangenomen. Omdat de richtingscoëfficiënt een lokaal extremum heeft voor $t = e^{-2}$ correspondeert met die waarde ook het buigpunt, namelijk $(-2e^{-2}, 0)$.

De analyse van impliciet gegeven krommen gaat analoog. We geven een voorbeeld. Te bepalen de kromme met vergelijking

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0.$$

Zie figuur 5.



Figuur 5 Grafiek van $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$

Deze kromme kan gemakkelijk geparametriseerd worden, bijvoorbeeld met $t \rightarrow (t - 2t^2, -t - 2t^2)$, en op nog heel veel andere manieren. We willen de vraag beantwoorden of er een punt is, zo ja welk, waar de richtingscoëfficiënt -1 is. Deze vraag kan beantwoord worden zonder een parametrisering expliciet te kennen. We denken ons de kromme geparametriseerd, en dan hebben we

$$x^2(t) - 2x(t)y(t) + y^2(t) + x(t) + y(t) = 0,$$

en differentiatie van linker- en rechterlid geeft nu:

$$2x'(t)x(t) - 2x'(t)y(t) - 2x(t)y'(t) + 2y(t)y'(t) + x'(t) + y'(t) = 0.$$

We nemen nu aan dat de kromme vloeiend verloopt. In punten waar de raaklijn niet verticaal staat mag men wel aannemen dat $x'(t) \neq 0$. Als we nu delen door $x'(t)$ dan vinden we dat de richtingscoëfficiënt in $(x(t), y(t))$ gelijk is aan

$$\frac{2y(t) - 2x(t) - 1}{2y(t) - 2x(t) + 1}$$

mits natuurlijk de noemer van deze uitdrukking niet nul is.

Als we overal (t) weglaten wordt de hele berekening wat minder schrijfwerk. We vinden nu gemakkelijk dat de richtingscoëfficiënt -1 is in het punt $(0, 0)$. Eigenlijk is het verschil met de andere methoden alleen maar dat dx en dy veranderd zijn in x' en y' .

Primitieven van functies vinden met de methoden van differentialen is ook een gekunstelde manier van doen. Als we bijvoorbeeld de primitieve van $2(x^2 + 1)^4 x$ willen vinden (waarin x de identieke functie op $\mathbb{R}$ voorstelt), dan gaat dat heel eenvoudig als volgt:

$$\begin{aligned} 2(x^2 + 1)^4 x &= (x^2 + 1)^4 \cdot 2x = (x^2 + 1)^4 (x^2 + 1)' = \\ &= y^4 y' = \left(\frac{1}{5} y^5\right)' = \frac{(x^2 + 1)^5}{5} \end{aligned}$$

waarin we $x^2 + 1$ hebben afgekort met y . Dus de primitieve van $2(x^2 + 1)^4 x$ is gelijk aan $(x^2 + 1)^5 / 5$.

Het lijkt me niet nuttig nog allerlei voorbeelden te geven. Ik hoop dat de lezer begrijpt dat het recept 'verander dx in x' en dy in y' ' alle schoolsommen moeiteloos oplost, en het uitleggen van wat differentialen nu eigenlijk zijn, totaal overbodig maakt.

6 Nogmaals differentiaalvergelijkingen

De reden dat differentialen in het vwo terecht zijn gekomen ligt bij de differentiaalvergelijkingen. Nu kan je differentiaalvergelijkingen op allerlei manieren opvatten, afhankelijk van wat je onder een oplossing zult verstaan.

Elders [1] staat uitgelegd dat voor de meeste toepassingen een oplossing is: een definitiegebied met daarop gedefinieerd een functie, meestal het definitiegebied een zo groot mogelijk interval.

In sommige specialistische wiskundige vakgebieden is de oplossing van een probleem niet zozeer een functie, maar een kromme in het XY -vlak, waarvan de parametrisering er niet toe doet.

De vwo-differentiaalvergelijkingen zijn typisch – door de vorm waarin ze gesteld zijn – dingen waarvan de oplossing een kromme is in het XY -vlak. Ik heb zelfs wel horen beweren dat vwo-differentiaalvergelijkingen zelfs als hoofddoel het onderzoek hebben van relaties die geen functies zijn. Ik ga niet verder op deze zienswijze in, maar verwijs u naar [1].

Noten

0) De figuren in dit artikel zijn getekend met behulp van de B7700 van de THE en programma's van J. W. Nienhuys.

1) Voor I en III wordt de parametrisering gegeven door

$$x \rightarrow (x, \pm (1 + Ce^{x^2})^{\frac{1}{2}}), \text{ + voor I en - voor III}$$

Voor II is een mogelijke parametrisering:

$$t \rightarrow ((-\ln(-C))^{\frac{1}{2}} \cos t, \operatorname{sign}(\sin t)(1 - (-C)^{\sin^2 t})^{\frac{1}{2}}), \text{ waarin}$$

$\operatorname{sign}(x) = 1$ als x positief, -1 als x negatief en 0 als $x = 0$.

Literatuur

[1] J. W. Nienhuys, *Differentiaalvergelijkingen*, pag 139 e.v.

[2] A. C. M. van Rooij, *Differentialen in het vwo*, Euclides, jrg 57, nr 3, blz. 81.

Differentiaalvergelijkingen

J. W. NIENHUYS

1 Inleiding

Differentiaalvergelijkingen in het vwo komen vrijwel alleen maar voor in differentiaalvorm. De oplossingen zijn dan krommen in het XY -vlak. De parametrisatie van zulke krommen is niet belangrijk. Als de oplossingen van zo'n vergelijking te vinden zijn, dan is zo'n oplossing meestal een impliciet gegeven kromme of een vereniging van zulke dingen. Of zo'n kromme ook de grafiek van een functie is, is meestal van ondergeschikt belang.

Deze methode van behandelen heeft twee nadelen:

- 1 Ze maakt de behandeling van differentiaalvergelijkingen bijna onvermijdelijk. Dit onderwerp is eigenlijk niet geschikt voor het vwo.
- 2 In toepassingen staan differentiaalvergelijkingen zelden in differentiaalvorm. De onbekende in toepassingen is nooit een kromme-sec, maar altijd een functie, meestal van de tijd.

In het navolgende zal ik deze twee nadelen bespreken. Over het eerste nadeel zal ik proberen kort te zijn. Dit staat in paragraaf 2.

In paragraaf 3 zal ik het tweede nadeel uitvoerig toelichten met eenvoudige voorbeelden van toepassingen. Ik heb de toepassingen zo gekozen, dat ze een goed beeld geven van de differentiaalvergelijkingen die een student in het Hoger Onderwijs in zijn of haar eerste jaar zou kunnen tegenkomen.

In paragraaf 4 bespreek ik kort waarin deze toepassingen verschillen van de vwo-differentiaalvergelijkingen.

In paragraaf 5 signaleer ik de vaagheid van het oplossingsbegrip van de vwo-differentiaalvergelijkingen.

2 Differentialen zijn te moeilijk

Van Rooij [4] betoogt dat schoolboekjes vrijwel zonder uitzondering slecht uitleggen wat differentialen zijn. Het stelt voor differentialen gewoon maar af te schaffen.

S. H. Cheng [1] laat zien hoe men dit kan doen. Ze legt uit dat je met het recept:

'verander dx in x' en dy in y' '

alle schoolvraagstukken kunt oplossen. Ze geeft een paar voorbeelden ter illustratie. Ze vertelt ook waarom volgens haar de leerlingen zo'n moeite hebben met het differentiaal-begrip.

J. van Tiel [6], schrijvende uit ervaringen met studenten van de universiteit, heeft bedenkingen tegen differentialen op vwo-niveau.

P. G. J. Vredenduin [8] meldt dat zijn aanvankelijk enthousiasme voor differentialen verdwenen is, toen hij met de didactische problemen kennismakte die dit begrip met zich meebrengt.

Ik wil een poging wagen om op mijn manier ook nog eens uit te leggen waarom differentialen zo moeilijk zijn.

In de eenvoudigste definitie van differentialen zeg je dat ' dx ' het *eerste lid* is van een verhouding $dx : dy$. Wat is een *verhouding* $dx : dy$ nu? Dit wil zeggen dat het paar (dx, dy) een *representant* is van de *klasse* van alle $(a, b) \neq (0, 0)$ met de eigenschap $ady = bdx$. Hier is kennelijk sprake van een *equivalentierelatie*, namelijk de relatie 'gelijke verhouding'. Rationale getallen kunnen ook als verhoudingen worden ingevoerd en begrepen. Begripsmatig zijn rationale getallen eenvoudiger, omdat er één mooiste representant is voor elk rationaal getal, namelijk die met de kleinste positieve noemer. Zo mooi kan het niet bij de differentiaalverhoudingen, omdat zowel het eerste als het tweede lid nul mogen zijn (ze mogen niet beide nul zijn).

Nu moeten we nog een betekenis geven aan een formule zoals:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

Door formules van de bovenstaande vorm wordt telkens voor elk paar (x, y) waarvoor $(A(x, y), B(x, y)) \neq (0, 0)$ een koppeling uitgevoerd, namelijk van een *richting* van een rechte lijn met een *verhouding*.

Het is mijn ervaring met onderwijs aan wiskundestudenten, dat *equivalentierelatie*, *klasse*, *representant* moeilijke begrippen zijn. Deze begrippen worden er niet makkelijker op, wanneer je ze verstoppt. Voor een goed begrip van differentialen is nodig dat je inziert dat – bij deze aanpak – een losse dx nog minder betekenis heeft dan 'de noemer van een reëel getal'.

Wanneer men aan formules zoals:

$$d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$$

ook een betekenis wil toekennen, dan moet men de bovenstaande eenvoudige aanpak verlaten en helemaal opnieuw beginnen en op differentiaalvormen overstappen. Dan worden linker- en rechterlid beide afbeeldingen die aan elk punt van $\mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding toevoegen die aan elke vector in $\mathbb{R}^2$ een reëel getal toevoegt. Nu hebben dx en dy wel afzonderlijke betekenissen, maar de prijs is dat het nu zo mogelijk nog moeilijker en abstracter is geworden.

Ik hoop dat ik door deze oppervlakkige schets van de theoretische achtergrond van het differentiaalbegrip heb duidelijk gemaakt waarom differentialen te moeilijk zijn voor het vwo.

3 Eenvoudige toepassingen van differentiaalvergelijkingen

Voordat ik met de behandelingen van de voorbeelden begin, wil ik vast wijzen op een gemeenschappelijk aspect: alle vergelijkingen worden opgesteld, geformuleerd en opgelost zonder van het differentiaalbegrip gebruik te maken.

3.1 Bevolkingsgroei

Veel verschijnselen in toepassingen worden beschreven door de vergelijking

$$x' = ax \quad (1)$$

Daarin is x een functie van de tijd. Deze functie voldoet aan (1).

In woorden luidt de vergelijking:

de toename per tijdseenheid is evenredig met de bestaande hoeveelheid.

Voorbeelden van situaties die met zulke differentiaalvergelijkingen beschreven kunnen worden, zijn: populaties van mensen, algen, bacteriën, van kankercellen in een gezwel, van guldens in een kapitaal of van C^{14} -atomen in een stuk hout. De oplossing is:

$$x(t) = x(t_0) e^{a(t-t_0)}.$$

3.2 Geremde groei

Voor positieve a beschrijft vergelijking (1) vaak een proces maar redelijk gedurende een korte tijd. Vaak gaat de groei langzamer naarmate een limiet L dichter benaderd wordt.

Een voorbeeld van een vergelijking voor een dergelijk proces is de volgende:

$$x' = ax \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2)$$

waar a positief is en x tussen 0 en L in ligt. L is positief.

Deze vergelijking kunnen we ook schrijven als

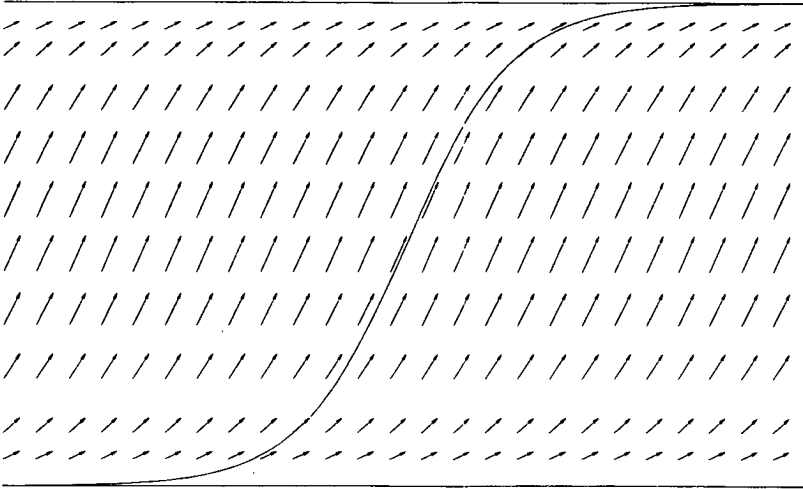
$$\frac{x'}{x} + \frac{x'}{L-x} = a$$

en dan kunnen we inzien dat de oplossing is

$$x(t) = x(0) e^{at} \left(1 - \frac{x(0)}{L} (e^{at} - 1)\right)^{-1} \quad (2A)$$

$$x(t) = L \left(1 + e^{-at} \left(\frac{L}{x(0)} - 1\right)\right)^{-1} \quad (2B)$$

Aan (2A) ziet men dat de oplossing voor kleine $x(0)$ aanvankelijk exponentieel verloopt, en aan (2B) ziet men dat voor grote t de oplossing tot L nadert. Bij deze vergelijking kunnen we ook een richtingsveld tekenen in het (x, t) -vlak.



Figuur 1
Richtingsveld bij de vergelijking

$$x' = 9 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right).$$

L is de afstand tussen de twee horizontale lijnen.

De schalen in de x -richting (verticaal) en de t -richting (horizontaal) zijn gelijk.⁹⁾

In elk punt (x, t) tekenen we een vectortje evenredig met $(1, aL \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}))$. We kunnen nu met het blote oog zien dat een oplossing die eenmaal positief is, dat ook blijft, en dat oplossingen limiet L hebben, voor t naar oneindig. Heel belangrijk is dat eigenlijk alleen het nul worden van het rechterlid van (2), voor $x = L$ al garandeert dat de oplossingen naar L gaan voor t naar oneindig.

3.3 Allometrische verhoudingen

Wanneer we een mierenhoop nauwkeurig bestuderen, kunnen we opmerken dat er mieren van verschillende afmetingen zijn. Bovendien zien de grotere mieren er heel anders uit als de kleine mieren. De grootste mieren (de koninginnen) zien er totaal anders uit als de werksters. Hoe kan dat?

Huxley heeft dit verschijnsel verklaard, met een beroep op een ‘verborgen’ parameter. Later is door anderen die verborgen parameter ook in bepaalde gevallen ontdekt. Ik zal de geschiedenis nu achterstevoren vertellen.

Wanneer men in larven en poppen van mieren meet hoe snel de zogeheten kiemschijven van de vleugels en de poten groeien, dan vinden we het volgende paar differentiaalvergelijkingen dat die groei beschrijft:

$$\begin{aligned} v' &= af(t)v \\ p' &= bf(t)p \end{aligned} \tag{3}$$

Hier is v de grootte van de vleugelkiemschijf en p de grootte van de pootkiemschijf, en f is een bepaalde functie van de leeftijd van het insect. Deze functie is nul voor een volwassen insect. Voor elk insect is die functie verschillend, zelfs voor elk individu uit een mierenhoop. De functie geeft ongeveer aan hoeveel het insect te eten krijgt op tijdstip t .

Wat wel voor elk insect gelijk is, is de verhouding van a en b . Men kan zich voorstellen dat de verhouding van a en b weergeeft welke porties van de voedingsstoffen door vleugel- respectievelijk pootkiemcellen worden opgeëist voor de groei.

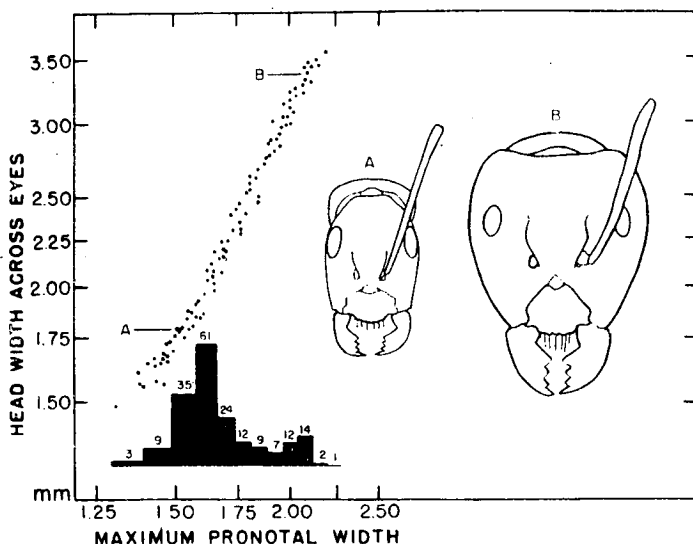
Uit dit paar vergelijkingen volgt:

$$\frac{1}{a} \frac{v'}{v} = \frac{1}{b} \frac{p'}{p},$$

dus op elk ogenblik van de groei van het insect geldt

$$\frac{1}{a} \ln v = \frac{1}{b} \ln p + C,$$

waarin C een constante is die de toestand bij aanvang van de groei karakteriseert. Omdat deze relatie ook geldt bij het bereiken der volwassenheid, kunnen we



Figuur 2

Voorbeeld van allometrische verhoudingen bij mieren.

Dit diagram geeft aan hoe de breedte van het pronotum en de breedte van het hoofd variëren bij werksters van de mierensoort *Camponotus castaneus*.

Sommige lichaamsdelen hebben altijd afmetingen die een constante verhouding hebben tot de breedte van het pronotum. Men noemt deze isometrisch ten opzichte van het pronotum. Andere delen, bijvoorbeeld de kop, variëren allometrisch, dat wil zeggen dat de verhouding evenredig is met een bepaalde macht (ongelijk nul) van de breedte van het pronotum. (Figuur met toestemming overgenomen uit: E. O. Wilson, *The Insect Societies*, Belknap Press, 1971.)

begrijpen waarom bij het vergelijken van vleugels en poten van koninginnen en darren (andere kasten in de mierenhoop hebben geen vleugels) blijkt dat er een lineair verband is tussen de logaritmen van de afmetingen.

Al veel eerder was zulk een lineair verband tussen de logaritmen van afmetingen van allerlei lichaamsdelen van gelijksoortige insecten opgemerkt. Er is zelfs een speciale naam voor dit verschijnsel. Als de evenredigheidscoëfficiënt in zo'n verhouding van logaritmen 1 is, dan spreekt men van isometrische groei; wanneer er een lineair verband tussen de logaritmen is met evenredigheidscoëfficiënt ongelijk 1, dan spreekt men van allometrische groei.

Het idee dat vergelijking (3) de verklaring vormt van het bestaan van allometrische verhoudingen is veel ouder dan de feitelijke verificatie in een speciaal geval. Dit idee is van Huxley, en vergelijking (3) heet dan ook wel de allometrische vergelijking van Huxley.

Volgens deze theorie zou dus de veelvormigheid van individuen, zelfs binnen één mierenhoop verklaard kunnen worden door een differentiaalvergelijking waarin zowel omgevingsfactoren (de functie f) als genetische factoren (de verhouding $a:b$) tot uitdrukking komen.

3.4 Een massa aan een veer

Het volgende verschijnsel komt in allerlei vormen voor, we bespreken het eenvoudigste geval.

Een massa aan een veer ondervindt een kracht evenredig met een uitwijking ten opzichte van een ruststand. De richting van de kracht is tegengesteld aan de richting van de uitwijking. Voor de afgeleide van de uitwijking schrijven we v , dus v is de snelheid van de massa. Uit de $K = M \times A$ -wet volgt nu:

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= -\frac{c}{m}x \end{aligned} \tag{4}$$

In deze vergelijkingen is m de massa en c is de zogeheten veerconstante. Uit deze vergelijking kunnen we opmaken dat

$$\frac{c}{m}xx' + vv' = 0$$

en dus

$$\left(\frac{c}{2m}x^2 + \frac{1}{2}v^2 \right)' = 0,$$

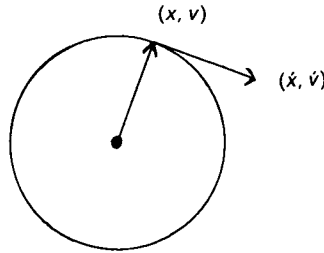
waaruit weer volgt dat

$$\frac{c}{2m}x^2 + \frac{1}{2}v^2 = E,$$

waarin E niet van de tijd afhangt. E is de energie per massa-eenheid.

We gaan nu een extra veronderstelling maken, namelijk dat $c = m$ in de gekozen eenheden. Deze veronderstelling is ook nog op een andere manier acceptabel te maken.

Voor geschikte p schrijven we $t = ps$, met andere woorden we gaan over op een nieuwe tijdschaal, en dan gaat met betrekking tot de nieuwe tijd s vergelijking (4) over in een soortgelijke, maar dan met $c = m$. In dat geval doorlopen de oplossingen $(x(t), v(t))$ cirkels met straal $\sqrt{(2E)}$.



Figuur 3
Een baan van de oplossingen van de slingervergelijking.

De vector (x', v') is gelijk aan $(v, -x)$. Deze staat dus loodrecht op (x, v) en heeft dezelfde lengte als deze laatste. Dit betekent dat de cirkels met constante snelheid doorlopen worden en wel eenmaal per 2π tijdseenheden.

Hieraan zien we dat als $x(0) = 0$ en $x'(0) = A$, dan geldt dat $x(t) = A \sin t$, en dus $v(t) = A \cos t$.

Als we op dit voorbeeld willen doorborduren, dan brengen we eerst wrijvingskrachten in rekening en daarna periodieke uitwendige krachten. Elektrische netwerken (en niet alleen mechanische veren) geven tot dit type vergelijking aanleiding. Bij wat ingewikkelder netwerken kom je al gauw tot hogere orde lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten, maar dan zijn grafische methoden niet meer zo praktisch. Het inzicht in wat er gebeurt bij ingewikkelde systemen is alleen mogelijk na begrip van de tweede orde systemen.

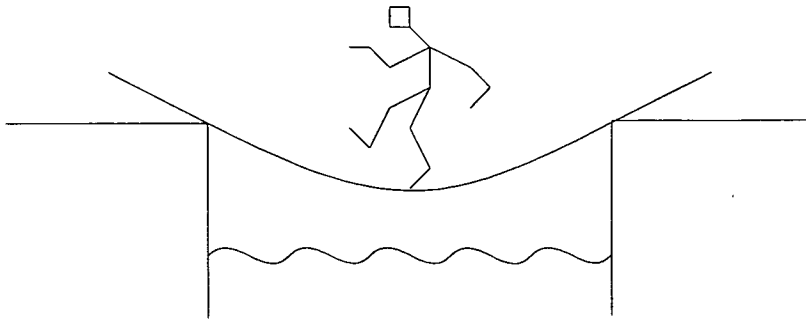
3.5 Doorbuiging van een brug uit één plank

Voor een balk die op diverse punten wordt belast geldt in goede benadering

$$z'' \cdot E \cdot I = \text{plaatselijk moment bij } x \quad (5)$$

Hier is E een konstante die van het materiaal afhangt waar de balk van gemaakt is (rubber, hout, staal) en I is een konstante die afhangt van vorm en grootte van de dwarsdoorsnede van de balk.

We stellen ons x voor als gemeten in de lengterichting van de balk, en z geeft de afwijking aan van de balk ten opzichte van een horizontale lijn. Zie figuur 4.



Figuur 4
Een balk, ondersteund aan de einden, buigt door onder een belasting in het midden.

We stellen ons nu een concreet geval voor van een plank die over een sloot ligt, in het midden belast met een gewicht G . Er werken nu drie krachten op de balk, namelijk G (naar beneden in 0), en $\frac{1}{2}G$ naar boven in $\frac{1}{2}$ en in $-\frac{1}{2}$.

Het plaatselijk moment bij een punt x vinden we als volgt: het is de som van alle momenten (kracht maal arm) uitgeoefend door de krachten rechts van x , en ook ten opzichte van x . Omdat de balk in rust is, is dit tevens op het teken na het totaal van alle momenten links van x .

Als we deze regels toepassen, vinden we voor het plaatselijk moment bij x in dit geval:

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}G|x| + \frac{1}{4}G & \text{voor } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

De vergelijking $z'' \cdot E \cdot I = M(x)$, met als extra voorwaarden

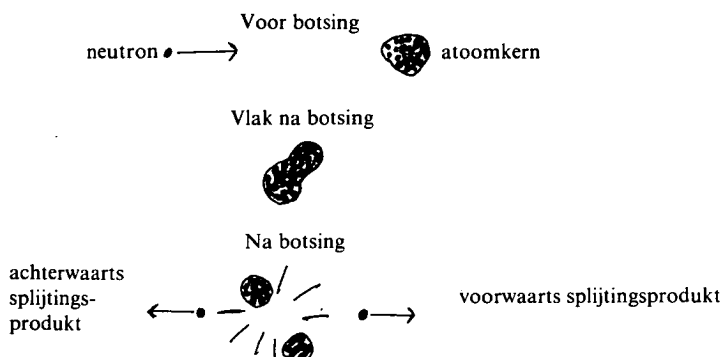
$$z(-\frac{1}{2}) = 0 = z(\frac{1}{2})$$

heeft als oplossing

$$z(x) = \begin{cases} (x^2(6 - 4|x|) - 1) \frac{G}{48 \cdot E \cdot I} & \text{voor } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ (|x| - \frac{1}{2}) \frac{G}{16 \cdot E \cdot I} & \text{elders} \end{cases}$$

3.6 De kritische massa

We beschouwen een bol van Uranium-235, met straal r . Neutronen in ons voorbeeld vliegen naar buiten of naar binnen in radiale richting. Bij het doorlopen van een eenheid van afstand is hun kans een kern te treffen gelijk aan p . Bij het treffen vindt er een splijting plaats, met als resultaat dat er precies twee neutronen komen in plaats van dat ene dat de splijting veroorzaakte. Deze twee neutronen vliegen in tegenovergestelde richting weg, een in radiale richting naar binnen en de andere in radiale richting naar buiten toe. Zie figuur 5.

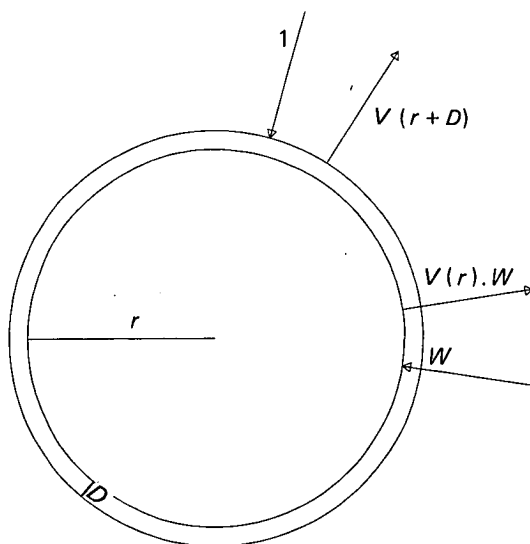


Figuur 5

De lezer wil misschien wel geloven dat dit model zeer sterk versimpeld is. We willen nu weten hoe groot de zogeheten versterkingsfactor is: gegeven een gestage instroom van neutronen van buiten naar binnen, hoeveel maal zoveel komt er van binnen naar buiten? Deze versterkingsfactor hangt van de straal r van de bol af, we noemen hem $V(r)$.

We gaan nu een differentiaalvergelijking voor $V(r)$ opstellen en oplossen. Aan een bol met straal r voegen we nu een dunne bolschil met dikte D toe. Als er een eenheid neutronen van buiten $r + D$ naar binnen stroomt, dan komt er $V(r + D)$ uit.

Hoe is de toestand binnen in die bol, op het grensvlak tussen de oorspronkelijke bol van straal r en de toegevoegde bolschil? We weten (nog) niet hoeveel daar naar binnen gaat, laten we het even W noemen. Dan komt er door het grensvlak $W \cdot V(r)$ weer in buitenwaartse richting terug. Zie figuur 6.



Figuur 6

Overzicht van de diverse grootheden bij het opstellen van vergelijking voor de kritische massa.

Waar is die W nu uit opgebouwd?

W bestaat uit in de eerste plaats de instroom 1 van buiten, en verder nog uit wat de stroom $W \cdot V(r)$ nog aan achterwaartse splijtingsprodukten bijdraagt. Dit laatste is $D \cdot p \cdot W \cdot V(r)$. We vinden dus dat

$$W = 1 + D \cdot p \cdot W \cdot V(r).$$

Hieruit leiden we af dat

$$W = (1 - D \cdot p \cdot V(r))^{-1}.$$

We kunnen nu ook uitrekenen wat $V(r + D)$ is:

$$V(r + D) = V(r) \cdot W + \text{achterwaartse splijtingsprodukten van de instroom}$$

Met andere woorden,

$$V(r + D) = V(r) \cdot W + D \cdot p.$$

Nu kunnen we hieruit berekenen dat

$$\frac{V(r + D) - V(r)}{D} = p \cdot \frac{1 + (V(r))^2}{1 - D \cdot p \cdot V(r)}.$$

Als we nu D naar nul laten gaan, vinden we de vergelijking:

$$\begin{aligned} V' &= p(1 + V^2) \\ V(0) &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Deze vergelijking is gemakkelijk te integreren en de oplossing luidt:

$$V(r) = \tan\left(\frac{1}{4}\pi + p \cdot r\right).$$

Als r nadert tot $\pi/(4p)$, dan stijgt $V(r)$ boven alle grenzen, met andere woorden, $\pi/(4p)$ is een kritische straal: bij die afmeting is er geen evenwichtstoestand meer bij instroom ongelijk nul.

4 Het verschil met de schoolpraktijk

De vergelijkingen van 3.1 tot en met 3.6 geven een redelijke indruk van wat een vwo-leerling in een vervolgopleiding tegen kan komen, als eerste differentiaalvergelijking. Natuurlijk komen er in het Hoger Onderwijs en in het Hoger Beroeps Onderwijs nog wel andere en moeilijker differentiaalvergelijkingen voor, maar dan wordt meestal in de kontekst veel uitvoeriger op differentiaalvergelijkingen ingegaan. Veel leerlingen zullen één of twee van de bovenstaande

vergelijkingen ontmoeten. Men bedenke dat de helft van de B-leerlingen naar een min of meer technisch-wetenschappelijke vervolgopleiding gaat.

Wat is nu het kenmerk van deze vergelijkingen? Wat is het verschil met de vergelijkingen die de leerlingen op school leren?

Eerste kenmerk. Het gaat er telkens om een *functie* als oplossing te vinden. Dit is meestal een functie van de tijd, soms van een afstand of lengte en altijd een functie van een parameter met een duidelijke fysische betekenis. In sommige gevallen gaat het niet om een enkele functie, maar om een *paar* van functies, dat wil zeggen een geparametriseerde kromme.

Tweede kenmerk. De vergelijkingen staan niet in differentiaalvorm. Dit hangt samen met het eerste kenmerk. Immers bij een vergelijking in differentiaalvorm is het gevraagde een kromme, zonder richting of parametrisering. Als die kromme de grafiek van een functie blijkt te zijn, dan is dat eigenlijk toeval (men zegt dan dat die functie oplossing van de vergelijking is). In het geval van een algemene kromme heeft het ding zelfs niet eens een richting waarin hij doorlopen wordt. Dit kan ook moeilijk anders, want aan het lijnelementenveld dat bij de vergelijking in differentiaalvorm hoort kan je niet zien in welke richting de oplossingskromme doorlopen wordt, en welke delen snel en welke delen langzaam doorlopen worden.

Vergelijk dat eens met de redenering waarmee we een oplossing van de slingervergelijking vonden: de cirkels worden met eenparige snelheid doorlopen en daarom was de oplossing $x(t) = A \sin t$.

Derde kenmerk. Het opstellen van de vergelijkingen is geen triviale bezigheid, hoe eenvoudig de vergelijking ook is. Men ziet dit aan 3.5 en 3.6. Ook het veranderen van de tijdschaal is voor beginners best nog wel een leerzaam puzzeltje. H. Steur [5] wijdt 11 pagina's tekst (p. 247-258) aan het opstellen en oplossen van 9 versies van onze vergelijking 3.1.

5 Waar komen differentialen voor?

Nu zal de lezer misschien tegenwerpen: in afleidingen zoals in 3.6 komen toch differentialen voor? Zulke afleidingen zijn toch heel gebruikelijk in de natuurkunde? Pleit dat niet voor differentialen?

Dat er in 3.6 differentialen voorkomen is maar schijn. Of men nu D schrijft of dr , de betekenis is in feite hetzelfde: een *kleine* toename, zo klein dat alle termen waar hogere machten van dr of D in voorkomen, verwaarloosd mogen worden.

Een deel van zulke verwaarlozingen hebben wij gedaan door een limietovergang. Een ander deel van de verwaarlozingen zit in redeneringen zoals

$$\text{'achterwaartse splijtingsprodukten van instroom} = D \cdot p'.$$

Er is een beetje ervaring voor nodig om te weten wat je kunt verwaarlozen en wat niet. Je moet begrijpen wat je doet.

Voor natuurkundigen en andere toepassers van de differentiaalrekening is zo'n

formule $\frac{dy}{dx}$ dan ook niet het quotiënt van twee reële getallen – zoals de leerlingen

van het vwo het leren zien – nee, het is een limiet van een quotiënt waarvan zowel teller en noemer tot nul naderen, of, voor wat zorgelozer geesten, het quotiënt van twee oneindig kleine grootheden. Met andere woorden, in toepassingsgebieden gaat men met dr en met dx en dy op een heel andere manier om dan in het vwo. De vwo-differentialentheorie is geheel wereldvreemd.

De lezer vraagt zich langzamerhand natuurlijk af waar dan differentialen of vergelijkingen in differentiaalvorm voorkomen.

Het antwoord luidt: differentialen komen voor bij specialistische meetkundige problemen, bij problemen in meer variabelen, bijvoorbeeld bepaalde oplossings technieken voor partiële differentiaalvergelijkingen. In de natuurkunde kom je differentialen tegen bij de thermodynamica. In dat laatste vak komen echter geen differentiaalvergelijkingen in differentiaalvorm voor. De differentialen in de thermodynamica zijn zogeheten differentiaalvormen. Ze worden langs krommen geïntegreerd die processen voorstellen, bijvoorbeeld Carnot-cyclussen.

Dan komen er ook nog differentiaalvormen voor in de wiskundige formulering van de Algemene Relativiteitstheorie. Om dat goed te begrijpen moet je beslist een van die geavanceerde specialistische wiskundige onderwerpen bestuderen waar hierboven al sprake van was.

Om kort te gaan, differentialen komen wel voor in vervolgoopleidingen, maar dan is het meteen zo moeilijk, dat je aan de vwo-theorie toch niets hebt. Bovendien komen ze niet in het eerste jaar, dus van enige noodzaak om ze in het vwo uit te leggen is ook al geen sprake.

6 De vaagheid van het oplossingsbegrip op het vwo

We hebben wat voorbeelden besproken van differentiaalvergelijkingen in 3. Telkens was duidelijk wat er met een oplossing bedoeld: een functie. Iets preciezer: een definitie-gebied en een daarop gedefinieerde functie. Meestal is er bij gegeven begin-voorwaarden maar precies een oplossing, die overigens niet altijd onbepikt hoeft te kunnen worden voortgezet, denk maar aan de kritische massa van 3.6.

Hoe staat het met het begrip oplossingskromme in het vwo?

Bezie eens het voorbeeld:

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= 2y\end{aligned}$$

Dit is een wel erg eenvoudig stelsel, en de oplossingen hiervan die een zo groot mogelijk definitiegebied hebben zijn de krommen

$$t \rightarrow (C_1 e^t, C_2 e^t), \text{ met } (C_1, C_2) \text{ willekeurig in } \mathbb{R}^2$$

Als we deze vergelijking in differentiaalvorm schrijven, dan is die vorm niet eens eenduidig bepaald, maar we zouden er van kunnen maken

$$2ydx = xdy$$

bijvoorbeeld.

Wat hebben we nu gewonnen? De Y -as is nu ook oplossingskromme, maar de oplossing die correspondeerde met $(C_1, C_2) = (0, 0)$ mag opeens niet meer meedoen. Dit is nu het singuliere punt.

Hoe staat het met de krommen $y = x^2$ en $y = x|x|$? Zijn dit ook oplossingen? Is de vereniging daarvan een oplossing? Hoe is het met $|y| = x^2$? Het begrip oplossingskromme is zo vaag dat je hierover niets kunt beslissen.

Om de een of andere reden behoren singuliere punten wel tot oplossingskrommen (hoewel ze in hun eentje niet 'kromme' mogen spelen). Een oplossingskromme mag ook best door een singulier punt gaan. Tenminste zo luidt het voorschrift dit jaar. Waarschijnlijk is dit gedaan om te zorgen dat *formules* die tevoorschijn komen uit *formele* manipulaties meestal meteen 'goed' zijn.

Hiertoe wordt een redenering opgehangen die ongeveer als volgt verloopt:

In een singulier punt worden 'alle' lijnelementen toegelaten. Een kromme die door het singuliere punt gaat en daar een raaklijn heeft voldoet daar dus.

Daarnaast moet de arme leerling onthouden dat als er sprake is (in een opgave natuurlijk, waar anders?) van *het* lijnelement, dan doet het singuliere punt (het!, het!) niet mee want daar zijn er meer. Dat is toch gewoon studentje pesten! Dat is toch geen wiskunde meer.

Hoe het nou moet als we bovenstaande vergelijking hadden geschreven in de vorm

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$$

weet ik ook niet. Waarschijnlijk mogen de oplossingen nu niet door het singuliere punt, omdat daar geen enkele richting voldoet. Ik laat de discussie daarover aan de schriftgeleerden over, ik vind dat ik nu wel duidelijk genoeg heb uitgelegd hoe onzinnig ik dit hele gedoe met singuliere punten vind.

Overigens zijn opmerkingen van soortgelijke strekking al eerder gemaakt, men zie H. J. K. Moet [3] en P. G. J. Vredenduin [7].

7 Samenvatting en conclusie

Differentiaalvergelijkingen zijn een onderwerp dat zich goed laat behandelen met grafische methoden, waarin de differentiaalrekening echt wordt gebruikt, en dat zelf ook interessante toepassingen heeft.

Dit vak behoeft beslist niet te bestaan uit een portie flauwe trucjes¹⁾ en het kan helemaal worden gepresenteerd in het raamwerk van functies, en geparametriseerde krommen, dat wil zeggen afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar ofwel $\mathbb{R}$ ofwel $\mathbb{R}^2$.

Maar dit onderwerp wordt op het vwo behandeld zonder toepassingen, met behulp van een onbegrijpelijk formalisme, op zo'n manier dat als je niet beter wist je zou denken dat het vak Wiskunde I op het vwo een vooropleiding was voor een nakandidaatscollege zuivere wiskunde.

Tenslotte, het vak heeft – zoals nu gegeven – geen intellectuele bekoring. Hoe kan van zo'n samenraapsel van halfverteerde differentiaalmeetkunde en negentiende eeuwse differentiaalvergelijkingen, afgekookt en naverteld voor de jeugd, nu enige inspiratie uitgaan.

Ik begrijp dat niet.

Als besloten zou worden om enige maanden in 6vwo bij het vak Scheikunde de leerlingen te onderrichten in de Taoïstische Alchemie²), dan zou iedereen terecht protesteren. Waarom doet dan niemand zijn mond open als het om Wiskunde gaat?

Noten

- 0) De figuren 1, 4 en 6 zijn getekend met behulp van de B7700 van de THE.
- 1) Wie denkt dat het oplossen van $z'' = M(x)$ maar flauw werk is, wil ik wijzen op het feit dat maar ongeveer $\frac{1}{3}$ van de eerstejaars-studenten in de technische wetenschappen in staat is om een juiste oplossing van $z' = |x|$ aan te wijzen in een rijtje van vier mogelijkheden, in september van hun eerste jaar.
- 2) Hier zijn vijf uitstekende redenen voor Taoïstische Alchemie in 6vwo:
 - (i) Voorbereiding voor bepaalde doctoraalcolleges Chinese Taal en Letterkunde.
 - (ii) Idem Vergelijkende Godsdienstwetenschappen.
 - (iii) Onsterfelijkmakende medicijnen zijn maatschappelijk relevant.
 - (iv) Aardige toepassing van het vak Scheikunde op het vwo, al dat kwik.
 - (v) Het onderwerp is gewoon leuk, het kan intellectueel bekoren.

Literatuur

- [1]S. H. Cheng, *Parametervoorstellingen van krommen en differentialen*, pag 129 e.v.
- [2]H. J. K. Moet, *Over differentiaalvergelijkingen*, Euclides 51 (1975-1976), p. 355--362.
- [3]H. J. K. Moet en P. Terlouw, *Differentiaalvergelijkingen of differentiaalachtige vergelijkingen?* Euclides 49 (1973-74), p. 91-94, met een naschrift van A. van der Tooren.
- [4]A. van Rooij, *Differentialen in het vwo*, Euclides 57 (1981-1982), p. 81-92.
- [5]H. Steur, *Levende wiskunde: Toepassingen, geordend naar wiskundig onderwerp*, Educaboek. Tjeenk Willink/Noorduijn, 1980.
- [6]J. van Tiel, *Differentiaal-calculus*, Euclides 52 (1976-77), p. 125-134.
- [7]P. G. J. Vredenduin, *Rectificatie definitie differentiaalvergelijking*, Euclides 52 (1976-77), p. 301-302.
- [8]P. G. J. Vredenduin, *Differentiaalvergelijkingen, maar geen differentialen*, Euclides 53 (1977-78), p. 262-266.

Over de auteur:

Jan Willem Nienhuys studeerde aan de Rijksuniversiteit Utrecht (1960-65) en promoveerde daar in 1970. Sinds 1973 geeft hij les, voornamelijk aan eerstejaars studenten wiskunde en informatica, aan de THE. Hij is gehuwd met Cheng Shan Hwei.

Het nulde, het eerste, het hoogste? . . . ja, welk niveau nou eigenlijk?

(voor de laatste maal Anuchka's rok)

JEANET VAN DE RIET

Zo heel af en toe kom ik in Euclides een opvatting over wiskunde onderwijs tegen die me aanspreekt, ook al staat mijn praktijk nog ver af van uitvoering van dergelijke opvattingen.

Aan de hand van de rok van Anuchka (Euclides, 56ste jaargang, nr 10, pag 429 e.v.) wordt het nu eindelijk eens hardop gezegd: het niveau van de dagelijkse werkelijkheid is het hoogste niveau. Dat is voor veel wiskundigen misschien een pijnlijke werkelijkheid . . . die we als onderwijsgevendens dagelijks aan den lijve ervaren. Veel leerkrachten en alle wiskundemethodes willen van wiskunde de werkelijkheid maken. De kollega's die andere vakken geven, willen datzelfde doen met hun vak . . . Een gevolg van het in vakken opgesplitste voortgezet onderwijs. Zoals Kees van Baalen al in z'n reactie op Bram Lagerwerf stelt, wordt het middel-karakter van wiskunde genegeerd. Kees geeft dan een aantal lesvoorbeelden + sfeerbeschrijving, waardoor bij mij het idee ontstond: verdraaid, als er van nu af aan in Euclides steeds van dergelijke voorbeelden stonden, dus voorbeelden van hoe je als leerkracht inspeelt op problemen waar leerlingen mee komen, dan zou ik – en samen met mij vele anderen – eindelijk ook wat hebben aan Euclides.

Het artikel van Anuchka's rok wordt besloten met een kort weerwoord van Bram Lagerwerf. Het viel mij op dat Bram graag wil dat Kees in z'n eigen opvattingenwereldje past. Met andere woorden, Bram spreekt erg veel waardering uit voor de aanpak van Kees. Toch gaat hij de mist in als hij zegt het niet eens te zijn met de meest fundamentele uitspraak van Kees, dat de dagelijkse werkelijkheid het hoogste niveau is. Hij probeert zich daar met de mooie frase 'leerlingen leren, op ieder moment het adequate niveau te kunnen kiezen' uit te redden. Maar op die manier blijven de leerlingen in onzekerheid over wat nu belangrijker is: de dagelijkse werkelijkheid of de wiskunde . . . Hoe red je je daar uit, Bram? Ook in 'Van A tot Z' zit diezelfde ambiguïteit. Het komt er steeds op neer dat de methode aangeeft welke problemen de dagelijkse werkelijkheid oplevert. Het zijn dus niet de problemen van de leerlingen, nee, je wordt als leerkracht geacht ze tot de problemen van de leerlingen te maken, zodat de leerlingen wiskunde – met als doel wiskunde – gaan maken. Ik zoek naar andere wegen en ik denk met mij meer mensen.

Vandaar nogmaals mijn voorstel + oproep om lesvoorbeelden in Euclides te publiceren van lessen waarin de leerkracht wiskunde vastknoopt aan door leerlingen gestelde problemen.

Over de auteur:

Jeanet van de Riet is lerares leao

Korrel

Het ladenprobleem van Bertrand en het knikkerprobleem van Carroll

1 Schuh vermeldt in zijn boek 'Hoe bepaal ik mijn kans' (Agon Bibliotheek, 1964) het volgende aardige probleem van Bertrand (1823-1900):

Drie gelijke kasten A, B, en C hebben elk twee laden. A bevat in elk van de beide laden een goudstuk, C heeft in elke lade een zilverstuk, terwijl de ene lade van B een goudstuk en de andere een zilverstuk bevat. Iemand opent op goed geluk een lade en vindt daarin een goudstuk. Hoe groot is de kans, dat ook de andere lade van dezelfde kast een goudstuk bevat?

In zijn 'Pillow Problems' (1895), een bundel van 72 vraagstukken, bedacht en opgelost in 'wakeful hours', vermeldt Lewis Carroll de volgende opgave:

Een vaas bevat een knikker, die wit is of zwart. We voegen een witte knikker toe en nemen daarna aselekt een knikker uit de vaas. Deze blijkt wit te zijn. Hoe groot is de kans, dat de overblijvende knikker ook wit is?

Bij beide genoemde problemen wil het nog al eens voorkomen, dat men zich vergist in het aantal gelijkwaardige mogelijkheden. Men is namelijk geneigd als volgt te redeneren: Ik heb kennelijk kast A of kast B geopend, waarvan het eerste geval gunstig is, dus de gevraagde kans is $\frac{1}{2}$. Evenzo bij het vraagstuk van Carroll: Ik heb de witte knikker getrokken uit ww of uit zw, waarvan het eerste geval weer gunstig is, dus een kans van $\frac{1}{2}$.

In beide oplossingen verliest men uit het oog, dat de genoemde eerste gevallen niet één maar twee (gelijkwaardige) mogelijkheden inhouden: Open getrokken kan zijn de ene lade van A of de andere lade c.q. gepakt kan zijn de ene witte knikker of de andere uit ww. Beide mogelijkheden zijn gunstig, zodat de gevraagde kans in beide vraagstukken $\frac{2}{3}$ is.

Het foutieve antwoord $\frac{1}{2}$ kan ook, zo bleek mij in de klas en onder familieleden, gevonden worden door heel simpel te stellen, dat de andere lade of een goudstuk of een zilverstuk bevat, dus een kans $\frac{1}{2}$. Bij collega's kwam ik nog het antwoord $\frac{2}{3}$ tegen, maar dat is het antwoord op een heel andere vraag.

Het behoeft na het voorafgaande nauwelijks betoog, dat beide problemen gelijkwaardig zijn.

2 Van elk probleem geven we nog een oplossing, waarbij we met voorwaardelijke kans werken, de aangewezen aanpak bij dit type vraagstukken.

a Het aselekt kiezen van een bepaalde kast heeft de kans $\frac{1}{3}$; de kans op een lade met een goudstuk is $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, zodat

$$P(\text{tweede lade goud} | \text{eerste lade goud}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

b Voor het pakken van een knikker zijn vier mogelijkheden: w, z over; z, w over; w_1 , w_2 over en w_2 , w_1 over, zodat

$$P(\text{wit overleest wit}) = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

- 3 We maken van de gelegenheid gebruik ook het laatste Pillow-problem uit de verzameling van de schrijver van 'Alice in Wonderland' te vermelden:

In een vaas bevinden zich twee knikkers, waarvan elk wit is of zwart. Stel zonder een knikker uit de vaas te pakken, de kleur van de knikkers vast.

Bij de 'oplossing' van deze onmogelijke opgave, die Carroll dan ook wijselijk in zijn inhoudsopgave onder 'Transcendente kans' laat vallen, gaat hij als volgt te werk: Voor de twee knikkers hebben we de drie mogelijkheden ww, wz en zz. We voegen een zwarte knikker toe, zodat we de mogelijkheden wwz, wzz en zzz krijgen, met opv. de kansen $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ en 1 op een zwarte knikker. Denken we bij elke mogelijkheid een vaas, dan is dus de kans op een zwarte knikker $\frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1) = \frac{2}{3}$, zijnde juist de kans op zwart in het genoemde geval wzz. Dus de oorspronkelijke vaas bevatte een witte en een zwarte knikker!? Gelijke kansen, gelijke situaties, zo zit dat! De lezer mag nagaan, dat Carroll met één knikker in de vaas niet zo gelukkig geweest zou zijn.

R. Kooistra

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

445. Uitgaande van de getallen 1, 9, 8, 2 kunnen we nieuwe getallen vormen door middel van bewerkingen. Bijv.

$$16 = 1 + 9 + 8 - 2$$

$$60 = (1 + 9)(8 - 2)$$

De vier getallen moeten in deze volgorde voorkomen.

Geoorloofd zijn de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken ($\sqrt{\quad}$), nemen van het entier. Niet geoorloofd is achterelkaarschrijven van cijfers, waardoor bijv. uit 1 en 9 ontstaat 19.

Vorm op deze manier de getallen 1 tot en met 100.

Bedenk een methode die voor de rest van de eeuw ook werkt. Ik kom dan niet in de verleiding u een soortgelijk voorspoedig 1983, 1984 enz. toe te wensen.

Mathematical Morsels by Ross Honsberger, Dolciani Mathematical Expositions no. 3, published by The Mathematical Association of America 1978, XII + 249 blz., \$ 15,85.

Mary P. Dolciani, hoogleraar in wiskunde aan het Hunter College te New York, heeft het door een gift mogelijk gemaakt een serie boeken uit te geven, de Dolciani Mathematical Expositions, die 'are selected for their lucid expository style and stimulating mathematical content'.

In dit boek, het derde deel uit de serie, worden 91 problemen behandeld die boeiend en niet te moeilijk zijn. Ze zijn in hoofdzaak overgenomen uit American Mathematical Monthly 1894-1975. Om een indruk te geven van de aard van de problemen heb ik bij wijze van steekproef het eerste tential gekozen. Daaruit bleken er zeven geschikt te zijn voor weergave in de rubriek recreatie.

Hieronder volgen ze. In het volgende nummer vindt u een korte samenvatting van de oplossingen. Volledigheidshalve vermeld ik dat de eerste twee delen van de serie getiteld zijn: *Mathematical Gems*, en eveneens verzameld door Rons Honsberger.

446. The chess tournament.

There are more chess masters in New York City than in the rest of the U.S. combined. A chess tournament is planned to which all American masters are expected to come. It is agreed that the tournament should be held at the site which minimizes the total intercity traveling done by the contestants. The New York masters claim that, by this criterion, the site chosen should be their city. The West Coast masters argue that a city at or near the center of gravity of the players would be better. Where should the tournament be held?

447. The ordered partitions of n .

The number 3 can be expressed as the sum of one or more natural numbers in 4 ways, taking into account the order of the terms:

$$3, 1 + 2, 2 + 1, 1 + 1 + 1.$$

How many such expressions are there for the number n ?

448. Regions in a circle.

Place n points around a circle and draw the chords which join them in pairs. Suppose that no three of the chords are concurrent inside the circle. Into how many regions is the interior of the circle divided?

449. The ferry boats.

Two ferry boats ply back and forth across a river with constant speeds, turning at the banks without loss of time. They leave opposite shores at the same instant, meet for the first time 700 feet from one shore, continue on their way to the banks, return and meet for the second time 400 feet from the opposite shore. As an *oral* exercise, determine the width of the river.

450. Coloring the plane.

Suppose each point of the plane is colored red or blue. Show that some rectangle has its vertices all the same color.

451. An obvious maximum.

P is a variable point on the arc of a circle cut off by the chord AB . Prove the intuitively obvious property that the sum of the chords AP and PB is a maximum when P is at the midpoint of the arc AB .

Geef een zuiver meetkundige oplossing zonder verkapt infinitesimaalrekening.

452. $\cos 17x = f(\cos x)$

If f denotes the function which gives $\cos 17x$ in terms of $\cos x$, that is,

$$\cos 17x = f(\cos x),$$

then show that it is the same function f which gives $\sin 17x$ in terms of $\sin x$:

$$\sin 17x = f(\sin x)$$

Oplossingen

443. In een zaal bevinden zich een oneven aantal personen op onderling verschillende afstanden. Ieder gooit degen die het dichtst bij hem staat, een bananepudding naar het hoofd.

a Iemand krijgt geen enkele pudding naar zijn hoofd.

Onderstel de grootste afstand waarover een pudding gegooid wordt, is die tussen A en B . A gooit

B. Als *B* ook *A* gooit, laten we verder *A* en *B* buiten beschouwing.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

We kunnen dit procédé voortzetten, totdat er slechts één persoon overblijft. Die blijft dan ongedeerd.

Zo voortgaande komen we aan *P* en *Q* waarvan *P* naar *Q* gooit, maar *Q* niet naar *P*. Dan gooit niemand naar *P*. Immers zou *R* naar *P* gooien, dan stond *R* dicht bij *P* dan *Q*.

b De puddingbanen vormen geen enkel gesloten circuit.

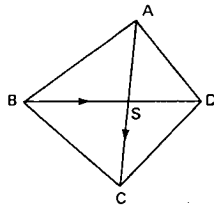
Zou een dergelijk circuit *ABCDEA* zijn, dan was bijv.

$$AB > BC > CD > DE > EA > AB$$

hetgeen niet kan.

c Twee puddingbanen snijden elkaar niet.

Onderstel dit was wel het geval. We krijgen dan de volgende situatie:



$$BD < BA \text{ en } BD < BC$$

$$AC < AB \text{ en } AC < AD$$

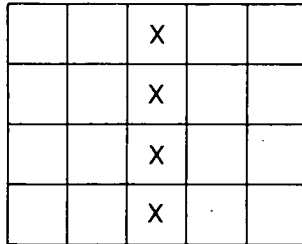
$$AC + BD = AS + SD + BS + SC > AD + BC$$

Contradictie.

d *A* wordt niet door meer dan 5 puddingen getroffen.

Want als *B* en *C* naar *A* gooien, dan is *BC* de grootste zijde van $\triangle ABC$ en dus $\angle BAC > 60^\circ$.

444. Een rechthoek van 5 bij 4 is verdeeld in 20 vierkanten. *A* en *B* kruisen om beurten 1, 2, 3 of 4 vierkanten aan die een samenhangend geheel vormen. *A* begint. Wie het laatst aankruist, wint. Kan *A* winst forceren?



Wat *B* doet, is irrelevant. *A* kruist het spiegelbeeld t.o.v. de kruisjeslijn aan van hetgeen *B* aankruist heeft. Zo voortgaande wint hij.

Boekbesprekingen

M. K. Jain, *Numerical solution of differential equations*, Wiley Eastern Limited New Delhi, 1979, 443 blz.

Dit boek is gewijd aan een zeer uitgebreid onderwerp, n.l. de numerieke oplossing van differentiaalvergelijkingen.

Na een inleidend hoofdstuk worden in de hoofdstukken 2 en 3 numerieke technieken behandeld voor het oplossen van beginwaarde problemen voor gewone differentiaalvergelijkingen. Hier komen o.a. Runge-Kutta methoden, (gegeneraliseerde) lineaire 'multistep' methoden, en bijbehorende stabiliteitsgebieden aan de orde.

Hoofdstuk 4 handelt over de oplossing van 2e en 4e orde twee-punts randwaarde problemen. Als numerieke methode wordt alleen de differentie methode besproken.

De hoofdstukken 5, 6 en 7 betreffen parabolische, hyperbolische en elliptische differentiaalvergelijkingen. Uitgebreid worden hier een aantal differentie methoden behandeld, waarmee deze vergelijkingen numeriek opgelost kunnen worden.

Het laatste hoofdstuk geeft een kort overzicht van de eindige elementen methode.

Het boek richt zich tot lezers die basis kennis hebben van de analyse en ook al wat op de hoogte zijn met numerieke wiskunde. In dit boek wordt meer aandacht besteed aan praktische dan aan theoretische kwesties.

Zowel de keuze als de presentatie van de stof vind ik in veel onderdelen van dit boek niet gelukkig. Zo is het jammer dat de schrijver veel plaats inruimt voor een beschrijving van hybride methoden, die toch maar van betrekkelijk belang zijn. Beter had hij iets meer kunnen ingaan op moderne technieken voor het oplossen van stijve differentiaalvergelijkingen.

Voorts presenteert de schrijver vaak stellingen zonder bewijs, zonder duidelijke literatuurverwijzing, en zonder de draagwijdte aan te duiden.

Als voorbeeld van slechte presentatie haal ik tenslotte de bijzin op blz. 6 aan, waarin de schrijver het orde symbool O denkt te definiëren: 'where the notation $O(h)$ means that the first term neglected is of order h '.

Prof. dr. M. N. Spijker

M. Grossman, *The first nonlinear system of differential and integral calculus*, Mathco, Rockport (Massachusetts, 1979, X + 85 p., \$ 15,-.

Zoals bekend, wordt door $x \leftrightarrow \exp x$ een omkeerbaar eenduidige afbeelding van $\mathbb{R}$ op de verzameling der positieve getallen gegeven. Als $\exp x$ even met x^* aangeduid wordt, dan gaat $x + y$ over in x^*y^* en xy in $\exp\{(\log x^*)(\log y^*)\}$. Indien men nu in de verzameling der positieve getallen een nieuwe optelling $+$ en vermenigvuldiging $*$ definieert door

$$x^* + y^* = x^*y^*,$$

$$x^* \circ y^* = \exp\{(\log x^*)(\log y^*)\},$$

dan krijgt men een commutatieve ring met nulelement $0^* = 1$ en eenheidselement $1^* = e$. Het rekenen in deze ring wordt door de schrijver 'exponential arithmetic' genoemd. Met het rekenkundig gemiddelde in $\mathbb{R}$ correspondeert het meetkundig gemiddelde in de beeldruimte. Evenals de integraal van een continue functie door limietovergang uit een rekenkundig gemiddelde ontstaat, ontstaat er een 'exponentiële integraal' door limietovergang uit een meetkundig gemiddelde.

Ook de 'exponentiële afgeleide' wordt ingevoerd; als f een positieve differentieerbare functie is, dan is dit (in gewone notatie) de functie $\exp\{f'(x)/f(x)\}$. Als argument om deze gekunstelde 'calculus' in te voeren wordt gewezen op de aangroei van een kapitaal en op het uiteenvallen van een radioactieve stof; dit zijn immers exponentieel verlopende processen. Het boekje is doorsprenkeld met bespiege-

lingen waaruit blijkt dat de schrijver gelooft, in samenwerking met zijn leermeester R. Katz, iets nieuws op het spoor te zijn gekomen.

A. C. Zaanen

E. Hlawka, *Theorie der Gleichverteilung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, DM 38, —.

In 1884 bewees Kronecker dat voor irrationale α de getallen $n\alpha - [n\alpha]$ voor $n = 1, 2, \dots$ dicht liggen in het interval $(0, 1)$. Hierbij is $[n\alpha]$ het grootste gehele getal $\leq n\alpha$.

Uit deze stelling heeft H. Weyl de theorie van de 'gelijkverdeling' van rijen ontwikkeld (1916). Na hem hebben Hongaarse en Nederlandse wiskundigen belangrijke bijdragen geleverd aan de theorie. Deze ontwikkelingen vormen het onderwerp van het eerste deel van Hlawka's boek. In het tweede deel behandelt Hlawka de abstracte theorie der uniform verdeelde rijen in compacte ruimten, waarvan de schrijver zelf een der grondleggers is. In het derde deel komt de kwalitatieve theorie van de gelijkverdeling ter sprake, terwijl in dit deel ook de toepassingen op het gebied van de getaltheorie, de analyse en de numerieke wiskunde worden besproken. Voor de niet ingewijde lezer vormt dit boek een uitstekend overzicht van de gelijkverdelingstheorie vanaf het ontstaan tot heden. Aangezien de vereiste wiskundige voorkennis niet boven het elementaire niveau uitgaat, verdient het hier besproken werk alleszins het predikaat aanbevelenswaardig.

M. van der Vlugt

S. L. Salas, C. G. Salas, *Precalculus*, tweede druk, John Wiley & Sons, New York, 1979, 356 blz., £9,00.

Uit de titel van dit leerboek blijkt al dat het bedoeld is voor hen, die na de High School de studie van de analyse ter hand willen nemen, maar eerst nog een cursus willen volgen om zich daar beter op voor te bereiden. Als zodanig is het boek zeer zeker geschikt, alhoewel men zich afvraagt of een groot deel van de behandelde stof niet reeds op de High School behandeld zal zijn.

Het boek is in zeven hoofdstukken ingedeeld:

1. Numbers and algebraic expressions
2. Quadratic equations, inequalities, absolute value
3. Analytic geometry
4. Functions
5. Trigonometry
6. The conic sections
7. Some additional topics

In dit laatste hoofdstuk komen o.a. aan de orde poolcoördinaten, de stelling van de bovenste grens en complexe wortels van kwadratische vergelijkingen. Enkele tabellen, een lijstje van antwoorden en aanwijzingen voor de oplossingen van de belangrijkste vraagstukken van en een index completeren het boek.

Het bevreemdt enigszins dat in het boek nergens limieten ter sprake komen; men heeft blijkbaar een strenge scheiding willen aanbrengen tussen dit boek en het boek, waarnaar op blz. 142 wordt verwezen: S. L. Salas and E. Hille: *Calculus*, Wiley, New York. Van dit laatste boek vindt u een bespreking in *Euclides*, 54e jaargang (1978/1979), no. 8.

Precalculus is keurig uitgevoerd; drukfouten of slordigheden komen nagenoeg niet voor (de figuur op blz. 267 is niet geheel correct). Uit de behandeling van de stof blijkt dat de schrijvers weten dat de studenten, die het boek gebruiken, behoefte hebben aan een didactisch verantwoorde indeling van de leerstof en een regelmatige opklimming van de moeilijkheidsgraad; niet voor niets hebben ze het manuscript ook laten beoordelen door een student/gebruiker.

Het wil me voorkomen dat er voor geïnteresseerde leerlingen uit de hoogste klassen van onze scholen voor v.w.o. en h.a.v.o. aardige zaken in dit boek te vinden zijn (o.a. poolcoördinaten en in verband hiermee cardioïde, lemniscaat van Bernoulli; bovenste grens; functie van Dirichlet). Hieruit volgt m.i. dat het boek zeer zeker een plaatsje verdient in de leerlingenbibliotheek.

G. M. Hogewij

Mededelingen

Zevende gemeenschappelijke studiedag NVvW en VVWL

De gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL zal ditmaal plaats hebben op *zaterdag 20 maart* a.s. in 's-Hertogenbosch.

Als *thema* is gekozen: *Tendensen in het wiskundeonderwijs in Vlaanderen en in Nederland.*

We hopen op deze dag over en weer informatie te kunnen verschaffen zowel over de achtergronden van het wiskundeonderwijs in Vlaanderen en in Nederland zoals het tegenwoordig is, als over de ontwikkelingen die er gaande zijn. Omdat er aanmerkelijke verschillen zijn tussen de opvattingen in Vlaanderen en in Nederland, kan het interessant en verhelderend zijn hier een dag over te praten. We hopen dan ook dat u nu reeds de dag in uw agenda wilt noteren en door ruime opkomst aan het slagen van de opzet wilt meewerken. Nadere bijzonderheden volgen.

Het bestuur

Wiskunde en Onderwijs

Willen degenen die een abonnement hebben op Wiskunde en Onderwijs het verschuldigde bedrag voor 1982 voldoen door storting van f27,— op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth?

Omdat ik voor alle abonnees uit Nederland het geld begin januari moet overmaken, verzoek ik u dringend mij het bedrag voor 1 januari te doen toekomen.

Wiskunde en Onderwijs verschijnt vier maal per jaar. Elk nummer heeft een omvang van ongeveer 150 blz. De inhoud is stellig de moeite waard. Wie nog geen abonnement heeft en zich wil abonneren kan dit doen door storting van het verschuldigde bedrag met bijschrift: nieuwe abonnee. Hij is dan automatisch ook lid van de VVWL (Vereniging van Vlaamse Wiskundeleraars). Het voorgaande geldt alleen indien men lid is van de NVvW. Wie geen lid is van de NVvW dient zich rechtstreeks te wenden tot de VVWL en betaalt dan meer.

P. G. J. Vredenduin

getal en ruimte

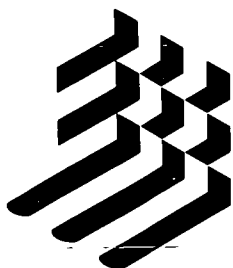
Een complete wiskunde methode
voor mavo/havo/vwo



nieuwe delen in een
zich voortdurend
vernieuwende methode



Schrijf... of Bel...
voor informatie over
de methode of voor
beoordelingsexemplaren
naar:



Educaboek

Postbus 48, 4100 AA Culemborg, Tel. 03450-71911

INHOUD

Ten geleide 121

H. J. K. Moet: Wie is er bang voor differentiaalvergelijkingen? 122

S. H. Cheng: Parametervoorstellingen van krommen en differentialen 129

J. W. Nienhuys: Differentiaalvergelijkingen 139

J. v.d. Riet: Het nulde, het eerste, het hoogste? . . . ja, welk niveau nu eigenlijk? 153

R. Kooistra: Korrel 154

Recreatie 155

Boekbesprekingen 158

Mededelingen 160

ADRESSEN VAN AUTEURS

S. H. Cheng, Akkerstraat 28, 5615 HR Eindhoven

R. Kooistra, Irenelaan 25, 6713 MS Ede

H. J. K. Moet, Fazantenkamp 104, 3607 CE Maarssen

J. W. Nienhuys, Onderafd. der Wiskunde en Informatica, Technische Hogeschool
Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

J. v.d. Riet, Buys Ballotstraat 42, 3572 ZT Utrecht