

**Maandblad voor  
de didactiek  
van de wiskunde**

**Orgaan van  
de Nederlandse  
Vereniging van  
Wiskundeleraren**

**57e jaargang**

**1981/1982**

**no. 3**

**november**

**Wolters-Noordhoff**

# EUCLIDES

**Redactie:** Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens - W.P. de de Porto - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofredacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

## **Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gailard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 45,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,—; contributie zonder Euclides f 25,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 39.75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 23.15. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6.50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.  
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

# Differentialen op de middelbare school?

A. C. M. VAN ROOIJ

1 De behandeling van differentialen op school is een netelige kwestie. Het rekenen ermee is doodeenvoudig, maar om te begrijpen wat het voor dingen zijn moet je, althans in het kader van functies van één veranderlijke, over een hoog abstractieniveau beschikken.

Ik ben in een paar schoolboeken gedoken om te zien hoe differentialen daar zoal worden ingevoerd, en het viel me niet mee. In de eerste plaats vind ik het onderwerp erg moeilijk, maar na lang piekeren waag ik het toch ook te beweren dat het doorgaans slecht behandeld wordt. (In de boeken, wel te verstaan. Wat de leraar er nog aan weet te corrigeren is een heel andere kwestie.)

In het volgende wil ik U enkele van mijn overwegingen voorleggen en speciaal mijn grieven lucht geven.

Daarna heb ik ook een paar suggesties. Laat ik mezelf het gras voor de voeten wegmaaïen en U overvallen met een tegenvoorstel. Mijn remedie is een paardemiddel: Behandel de differentialen helemaal niet. Het onderwerp is lastig; de boeken maken het niet beter; differentialen komen niet voor in het examenprogramma voor v.w.o. of h.a.v.o.; en er wordt op school niets mee gedaan.

Ik kom hierop terug in §6. In §§ 2-6 bespreek ik in detail de behandeling van differentialen in de volgende boeken:

*Sigma*, deel 5v (K. H. Kohen et al.; Wolters-Noordhoff; 1978)

*Van A tot Z*, deel V-5a (P. M. v. Hiele et al.; Muusses; 1973)

*Moderne Wiskunde*, deel 9v (H. J. Jacobs et al.; Wolters-Noordhoff; 3<sup>e</sup> druk)

*Getal en Ruimte*, deel 5/6 V2 (K. de Bruin et al.; Tjeenk Willink/Noorduijn; 4<sup>e</sup> druk)

*Analyse Twee* (M. Kindt - W. Kremers; Malmberg; 1973).

De methode van Kindt en Kremers is de enige die in mijn ogen correct is. Het is diep teleurstellend dat hij zo weinig aftrek vindt.

Eerst even over de problemen die ik had bij het lezen. Die komen voornamelijk voort uit de manier waarop in de schoolboeken tegen kwantifikatie wordt aangekeken. Ik begrijp eenvoudig niet wat iemand bedoelt die, na gedefiniëerd te hebben wat bij een bepaalde functie  $f$  en een bepaald interval  $[a, b]$  het symbool

$$\int_a^b f(x)dx$$

Voordracht, gehouden in het kader van het college 'Schoolwiskunde' aan de Katholieke Universiteit, december 1979.

voor zal stellen, zegt ' $\int_a^b f(x)dx$  heet een integraal'. Wat is een integraal nu voor een ding? Een getal? Een functie? Een verzameling?

Ik vermoed dat de schrijver desgevraagd zal zeggen dat een integraal een getal is. Maar dan is de vraag toch gewettigd of het getal 4 een integraal is, en of elk getal dan een integraal is; en wat het verschil is tussen een getal en een integraal. Daarna, stel ik me voor, komt de aap uit de mouw: de bedoeling was niet ' $\int_a^b f(x)dx$  heet een integraal', maar ' $\int_a^b f(x)dx$  heet de integraal van  $f$  over  $[a, b]$ '. En dat is taal die ik versta. Het woord 'integraal', sec, heeft even weinig betekenis als het woord 'zoon'. Beide duiden een relatie aan, niet een bepaalde klasse van objecten. De verzameling der zoons (als ik daar toch even over mag spreken) valt samen met de verzameling der kleinzons, maar 'zoon' en 'kleinzoon' zijn geenszins synoniem.

Dit probleem vind ik overal terug. Een speciaal geval is het variabele getal, waar onze eerstejaars-studenten in geloven. Variabele getallen bestaan evenmin als de vogel Roc, en de uitdrukking ' $f(x)$  nadert tot 0' is beeldspraak, evenals, zeg, 'de auto's in Nederland worden steeds kleiner'. Beeldspraak heeft zeker zijn nut, maar je moet hem niet gebruiken wanneer je iets wilt uitleggen aan iemand die bezig is de taal te leren.

Dat terzijde. Ik heb mijn uiterste best gedaan om de bedoeling van de boeken te doorgronden, en U zult zien dat ik zelf ook hier en daar de vaktaal tracht te bezigen.

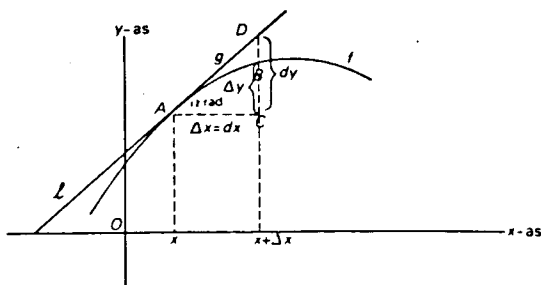
Nog één ding. Ik ben me er terdege van bewust dat ik geen ervaring als leraar heb. Ik beweer dan ook nergens dat je op didactische gronden dit of dat onderwerp op deze of gene manier moet behandelen. Wat ik wel durf te beweren is dat je niet met vaagheden moet aankomen als je begrepen wilt worden.

## 2 Sigma

De invoering van het begrip 'differentiaal' is eenvoudig in 'Sigma' (blz. 94-95):

In figuur 5.4 is de grafiek getekend van een op een interval  $I$  differentieerbare functie  $f$ , waarbij  $y = f(x)$ .

$A(x, y)$  met  $x \in I$  is een willekeurig punt van de grafiek van  $f$ . De raaklijn in  $A$  aan de grafiek is  $l$ .



Figuur 5.4

Neemt  $x$  toe met  $\Delta x$  (in de figuur is  $\Delta x > 0$ ), dan neemt  $y$  toe met  $\Delta y$ .

In de figuur is  $\Delta x = AC$  en  $\Delta y = BC$ .

Omdat  $f$  differentieerbaar is op  $I$ , is  $l$  niet evenwijdig aan de  $y$ -as. De lijn  $l$  is dus de grafiek van een eerstegraadsfunctie of van een constante functie. We zullen deze functie  $g$  noemen. Ook bij de functie  $g$  kunnen we spreken van een toename van  $x$  en een toename van  $y$ .

Deze toenamen worden de differentiaal van  $x$  en  $y$  genoemd en geschreven als  $dx$  resp.  $dy$ .

Afgezien van de ietwat geheimzinnige opmerking in de tweede regel 'waarbij  $y = f(x)$ ', lijkt dit vrij duidelijk: Je gaat uit van een differentieerbare functie  $f$ , een punt  $A(x, y)$  van de grafiek van  $f$  en een getal  $x'$ ; daarbij behoren twee 'differentialen'  $dx$  en  $dy$ :

$$dx = x' - x \text{ en } dy = g(x') - g(x)$$

waar  $g$  de functie is waarvan de grafiek de raaklijn door  $A$  aan de grafiek van  $f$  is. De letters ' $x$ ' en ' $y$ ' die in de notaties ' $dx$ ' en ' $dy$ ' voorkomen hebben niets te maken met de ' $x$ ' en ' $y$ ' die de coördinaten van  $A$  voorstellen: is  $f$  de exponentiële functie,  $A = (2, e^2)$  en  $x' = 5$ , dan zijn de bijbehorende differentialen 3 en  $3e^2$  en ze worden aangeduid met  $dx$  en  $dy$ .

Het is waar dat dit alles er niet staat. De 'toename' van  $x$  wordt eerst voorzichtig in een conditionele bijzin geplaatst: 'Neemt  $x$  toe met  $\Delta x \dots$ '; of  $x$  inderdaad toeneemt (met  $\Delta x$ ) wordt in het midden gelaten. Zes regels verder krijgt de toename van  $x$  een naam; blijkbaar wordt daar de situatie beschouwd waarin  $x$  inderdaad is toegenomen\*). Daarom heb ik gemeend, in mijn interpretatie een  $x'$  te moeten verzinnen.

Dit is niet zó maar een flauwe opmerking omdat ik iets te vitten wil hebben: Ik wil duidelijk stellen dat de differentialen van 'Sigma' getallen zijn, gemaakt bij een  $f$ , een  $A$  en een  $x'$ . Een veiliger notatie dan ' $dx$ ', ' $dy$ ' zou dan ook zijn:

$$(dx)_{f,A,x'}, (dy)_{f,A,x'}.$$

In de praktijk zal deze notatie te zwaar op de hand zijn. Maar de aanhangsels  $f, A, x'$  die je niet blijft schrijven, dien je wel in je achterhoofd te houden. In noodgevallen kan de uitvoerige schrijfwijze helpen om dubbelzinnigheden op te klaren.

Na het bovenstaande citaat vervolgt 'Sigma':

In figuur 5.4 hebben we  $dx = \Delta x$  gekozen; dus is  $dy = CD$ . Omdat de richtingscoëfficiënt van  $l$  gelijk is aan  $\tan \alpha$  rad (zie figuur) en ook gelijk is aan  $y'$ , volgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ of } dy = y' dx.$$

Omdat  $y = f(x)$  kunnen we hier ook voor schrijven:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ of } df(x) = f'(x) dx.$$

\*) Wat betekent dat eigenlijk? Zeg dat  $A$  het punt  $(2, 3)$  is, d.w.z.  $x = 2$ ,  $y = 3$ . Laten we dan 2 toemenen?

En in deze formule loop ik hopeloos vast. We nemen voor  $f$  weer de exponentiële functie, ook 'exp' geheten; voor  $A$  het punt  $(2, e^2)$ ; voor  $x'$  het getal 5. Wat betekent voor dit geval de formule  $df(x) = f'(x)dx$ ? De laatste 'x' is die van 'dx' en is niets anders dan een algemeen symbool voor de onafhankelijke variabele; ook in ons speciale geval blijkt hij 'x'. De voorlaatste 'x' stelt de eerste coördinaat van  $A$  voor; we dienen er dus een '2' voor in te vullen. Ra, ra, wat vangen we aan met de eerste 'x'? Ik zie maar twee mogelijkheden: de formule wordt (met  $f = \exp$ )

$$de^x = e^2 dx$$

of

$$de^2 = e^2 dx$$

De lezer kiese; zelf heb ik geen voorkeur.

Met de notatie-met-de-franje die ik hierboven ingevoerd heb, zou ik komen tot

$$(dy)_{\exp, (2, e^2), 5} = e^2(dx)_{\exp, (2, e^2), 5}$$

een formule die wel correct is, maar waar niemand voor zijn genoeg mee zal werken. Gelukkig hoeft dat ook niet: op school schijnen differentialen er niet te zijn om mee te werken. Daarover aanstonds.

Het laatste stuk van de paragraaf over differentialen luidt bij 'Sigma' zo:

$dx$  is willekeurig gekozen. Na deze keus is  $dy = y'dx$  bepaald. Het komt dus bij differentialen steeds aan op de verhouding van twee differentialen.

We spreken dus nooit over  $dx$  of  $dy$  afzonderlijk, tenzij  $dx = 0$  of  $dy = 0$ . En dan begin ik er ernstig aan te twijfelen of mijn interpretatie van de definitie wel goed is. De eerste regel begrijp ik. De 'dussen' in de twee daarop volgende zinnen zijn mij een volslagen mysterie.

De voor de hand liggende vraag is: Waar dienen differentialen voor? De differentialen van 'Sigma' hebben met de Mikado in het middeleeuwse Japan gemeen dat ze wel bestaan maar niets doen. Na de invoering heb ik het woord 'differentiaal' niet meer gevonden.  $dx$  en  $dy$  treden sporadisch op. In verband met

onderzoek van geparametriseerde krommen\*) wordt  $\frac{dy}{dx}$ , ingevoerd als afkorting

voor  $\frac{dy/dx}{dt/dt}$ , maar  $dx$  en  $dy$  zelf komen niet voor. Bij de bespreking van de

substitutie-formule voor integralen wordt opgemerkt dat  $\int_a^b f(x)g'(x)dx$  via de

formules  $f(x) = u$ ,  $g(x) = v$  en  $g'(x)dx = dg(x)$  ook te schrijven is als  $\int_a^b u dv$ ; ik

pretendeer niet, dit te kunnen volgen, maar ik geloof niet dat er veel kwaad in steekt. Bij de differentiaalvergelijkingen verschijnt onverhoeds de uitdrukking

\*) Hier gebeuren allerlei enge dingen die ik met het oog op minderjarige lezers liever niet voor de dag haal.

$$(x^2 - 1)dx + 2ydy = 0$$

maar die wordt blijkbaar alleen gezien als synoniem voor

$$(x^2 - 1) + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Kortom, de differentiaal vervullen een louter ornamentele functie.

### 3 Van A tot Z

Differentiaal worden hier zeer spartaans ingevoerd. Op blz. 9 lezen we:

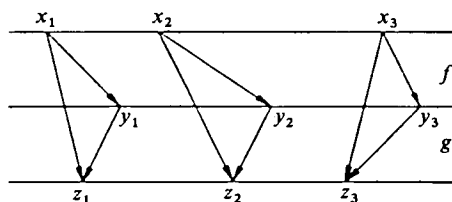
Een richtingsvector van een raaklijn aan een kromme duidt men dikwijls aan met  $[dx, dy]$ .

Daar moeten we het mee doen; er is geen verdere uitleg, behalve de opmerking dat  $dy = f'(x)dx$  als de kromme in kwestie  $y = f(x)$  is. (De rechte haken worden systematisch gebruikt om vectoren mee op te schrijven;  $[1, 2]$  en  $[3, 6]$  zijn verschillende vectoren, maar zijn richtingsvectoren van dezelfde lijnen.)

Omdat ik meen te weten wat sommige mensen met differentiaal bedoelen kan ik de definitie van 'Van A tot Z', geloof ik, wel interpreteren, maar wat er staat begrijp ik evenmin als 'Een richtingsvector van een raaklijn aan een kromme duidt men dikwijls aan met  $[p, q]$ '. Kunt U uit deze zin halen wat de letter 'q' hier voorstelt? Ik niet, maar ik houd me aanbevolen voor suggesties.

Evenals bij 'Sigma' worden ook hier de differentiaal terstond na de geboorte naar de onderwereld verwezen. Ze maken een come-back op blz. 90 waar ze gebruikt worden voor een bewijs van de kettingregel. Deze wordt eerst (correct) geformuleerd: 'Indien de functies  $f$  en  $g$  differentieerbaar zijn is de afgeleide functie van de functie  $g \circ f$  gelijk aan de functie  $(g' \circ f)f'$ '. Even later komt een stukje dat ik letterlijk overneem omdat U me anders niet gelooft:

Een exact bewijs van de kettingregel is niet eenvoudig. We zullen hier aangeven, hoe het in vereenvoudigde vorm gaat. In de herhaling zullen we een exacter bewijs behandelen.



In bovenstaand nomogram wordt door de functie  $f$  aan een verzameling getallen die we met  $x$  aanduiden een verzameling van elementen  $y$  toegevoegd.

De afbeelding  $g$  voegt aan deze beelden de elementen  $z$  toe. De afbeelding

die aan de elementen  $x$  regelrecht de elementen  $z$  toevoegt, duidt men aan met:  $g \circ f$ .

Dus  $g \circ f(x) = g(y) = z$ .

We veronderstellen nu, dat aan het element  $x_1$  door  $f$  het element  $y_1$  en aan  $y_1$  door  $g$  het element  $z_1$  wordt toegevoegd.

Dan is  $dz = g'(y_1)dy$  en  $dy = f'(x_1)dx$ .

Zodat:  $dz = g'(f(x_1)) \cdot f'(x_1)dx$ .

Hieruit kan men aflezen dat de afgeleide van  $g \circ f$  gelijk is aan  $(g' \circ f) \cdot f'$ .

Ik heb in de herhaling tevergeefs gezocht naar een exacter bewijs. Ik heb hier tevergeefs gezocht naar een opmerking waaruit zou blijken waar in dit bewijs de zwakke stee zit. Het lijkt me, dat de argeloze lezer de redenering òfwel correct òfwel absurd zal vinden – tertium non datur. Zelf vind ik het niet gemakkelijk, aan te duiden waar het verkeerd gaat. Ik kan dat het best doen door een andere kettingregel af te leiden met behulp van de z.g. 'pifferentialen'  $px$  en  $py$ , gedefinieerd door: 'Een richtingsvector van een raaklijn aan een kromme duidt men dikwijls aan met  $[2px, py]$ '. We krijgen dan, onder de juiste omstandigheden,  $py = 2f'(x)px$ . Passen we deze formule toe op het bewijs van de kettingregel, dan vinden we:  $pz = 2g'(y_1)py$  en  $py = 2f'(x_1)px$ , zodat  $pz = 4g'(y_1)f'(x_1)px$ ; omdat ook  $pz = 2(g \circ f')(x_1)px$  kunnen we hieruit aflezen dat  $(g \circ f)' = 2(g' \circ f)f'$ .

We laten het doek neer.

De symbolen ' $dx$ ' en ' $dy$ ' die voorkomen in de notatie voor een differentiaalvergelijking hebben met differentiaal weinig te maken; in het desbetreffende hoofdstuk zou je overal ' $dx$ ' en ' $dy$ ' door ' $U$ ' en ' $V$ ' kunnen vervangen zonder ergens last mee te krijgen. Achteraf wordt opgemerkt dat  $dx$  en  $dy$  iets te maken hebben met differentiatie van een oplossing van de differentiaalvergelijking. Ik vind dit een heel goede opvatting. Zelf zou ik dan ook liever ' $U$ ' en ' $V$ ' zien dan ' $dx$ ' en ' $dy$ ', maar men moet ook aan het eindexamen denken.

#### 4 Moderne Wiskunde

De introductie van differentiaal in 'Moderne Wiskunde' lijkt veel op die in 'Van A tot Z'. We lezen op blz. 251-252 van deel 9v:

Stel dat van een kromme waarvan we de vergelijking kennen

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{ een parametervoorstelling is.}$$

Zoals je weet kan de richtingsverhouding van een raaklijn aan die kromme dan gevonden worden met  $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ .

We voeren nu een nieuwe notatie in voor deze richtingsverhouding:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$dx$  en  $dy$  noemen we *differentialen*.



Dit deel van 'Moderne Wiskunde' is helemaal niet slecht. (Deze zin klinkt alsof ik de andere delen wel slecht vind; ten onrechte: de andere ken ik niet.) Het is echter jammer dat de definitie van 'richtingsverhouding' vaag gehouden wordt. Er staat nergens wát, de richtingsverhouding precies is; wél (blz. 237): 'Omdat ... zullen we ook spreken van de *richtingsverhouding* van een lijn. De richtingsverhouding van een lijn wordt gegeven door een geordend paar getallen  $a$  en  $b$ , die hierbij in een kolom geplaatst worden:  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .' Ik ben wel bereid, hieruit te begrijpen wat een richtingsverhouding is; in mijn privé-taal zou dat een klasse van getallenparen zijn. Ik heb wat meer moeite met de notatie. M.W. houdt zich eerst (bijna) consequent aan omschrijvingen als: 'De richtingsverhouding van ... wordt gegeven door  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ', en voert daarna expliciet de afkorting '... is  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ' in. Dit hindert me een beetje omdat het symbool  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  al gebruikt wordt om een vector aan te duiden. De richtingsverhouding van een lijn kan nu tegelijk  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$  zijn, zonder dat  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

Maar dat is niet erg. Waar ik problemen krijg, is in de volgende toevoeging na de definitie van 'differentialen':

Terwijl we bij  $f(t)$  en  $g'(t)$  in  $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$  aan twee bepaalde getallen denken, is

dit bij  $dx$  en  $dy$  niet het geval. Zo moet je bij  $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  niet denken dat  $dx = 2$  en  $dy = 3$ , maar dat zij zich verhouden als 2 en 3 en daarmee de richting van een raaklijn aan een kromme aangeven.

Dit lijkt veel op het slotaccordeo van 'Sigma', en het stelt mij evenzeer voor raadsels. Is (bij gegeven  $f$  en  $g$  en  $t$ )  $dx$  nu een getal, ja of nee? Zo nee, wat is het dan wel voor een ding? Zo ja, is er dan (bij gegeven  $f$  en  $g$  en  $t$ ) méér dan een getal dat met 'dx' wordt aangeduid? Geldt nu ineens wél dat  $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

Bij 'Moderne Wiskunde' komen differentiaalvergelijkingen nog wél voor, namelijk in verband met differentiaalvergelijkingen. Als voorbereiding hiertoe dient (blz. 253):

De kromme die voorgesteld wordt door de vergelijking  $x^2 + y^2 = 4$  is een cirkel met straal 2 en met de oorsprong als middelpunt. We gaan nu differentiëren met gebruikmaking van differentialen:

$$d(x^2 + y^2) = d(4)$$

$$\Leftrightarrow 2xdx + 2ydy = 0$$

Zo te zien wordt uit het gegeven  $x^2 + y^2 = 4$  afgeleid dat  $d(x^2 + y^2) = d(4)$ , maar wat betekent dat? Het is toch niet echt wáár dat  $x^2 + y^2 = 4$ ? Wat vindt U van: 'Zij gegeven de cirkel met vergelijking  $x^2 + y^2 = 4$ . Dan is  $x^2 + y^2$  constant.' Is dat verstandige taal? Of: 'Laat gegeven zijn de cirkels  $x^2 + y^2 = 4$  en  $x^2 + y^2 = x$ . Dan is  $d(x^2 + y^2) = d4$  en  $d(x^2 + y^2) = dx$ , dus  $dx = d4$ .'

De bedoeling wordt later duidelijk, althans voor iemand die meer weet dan de leerling verwacht wordt te weten. Het zit, geloof ik, zó:

Neem aan dat we van de cirkel  $x^2 + y^2 = 4$  een parametrisering  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  hebben. Bij deze  $f$  en  $g$  behoren differentiaal  $dx$  en  $dy$ . Nu geldt dat  $f^2 + g^2 = 4$  (en dat is zo, in tegenstelling tot de relatie  $x^2 + y^2 = 4$  die alleen voor punten van de cirkel geldt); dus is  $2ff' + 2gg' = 4'$ , d.w.z. voor alle punten  $(x, y)$  van de cirkel is  $2x dx + 2y dy = 0$ . Conclusie:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  (als  $y \neq 0$ ). De pointe is dat voor een

gegeven punt van de cirkel het quotient  $\frac{dy}{dx}$  uitgerekend kan worden zonder dat je de parametrisering van de cirkel expliciet kent. En het probleem is dat je in de notatie  $\frac{dy}{dx}$ , de parametrisering op voorhand al niet meer genoemd hebt, zodat je nu de pointe niet meer kunt aanwijzen.

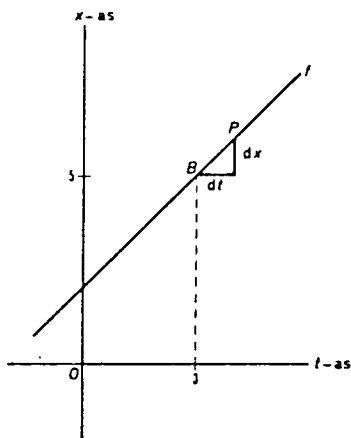
Het gebruik van differentiaal bij differentiaalvergelijkingen levert overigens weinig problemen op. 'Analyse Twee' en 'Moderne Wiskunde' zijn onder de boeken die ik gezien heb de enige die laten zien waar differentiaalvergelijkingen goed voor zijn. Van de andere kant vinden we in 'Moderne Wiskunde' op blz. 304 de volgende opmerking die suggereert dat de schrijvers nooit een appel van de boom hebben zien vallen:

De natuurkundigen gaan er van uit dat hun variabelen continue en differentieerbare functies (van elkaar) zijn. De praktijk geeft hen daarin vrijwel altijd gelijk. Alleen bij heel speciale processen, kernprocessen bijvoorbeeld, is deze denktrant niet toepasbaar.

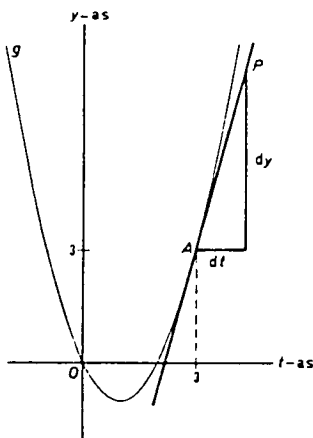
## 5 Getal en Ruimte

Blz. 74-75:

Zij gegeven de kromme lijn  $K$  met parametervoorstelling



Figuur 27



Figuur 28

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Als  $f$  de functie  $t \rightarrow t + 2$  is, dan geldt  $x = f(t)$ .

Als  $g$  de functie  $t \rightarrow t^2 - 2t$  is, dan geldt  $y = g(t)$ .

In fig. 27 is de grafiek van  $f$  en in fig. 28 de grafiek van  $g$  getekend.

We bekijken nu eerst fig. 28.

$$g(t) = t^2 - 2t \Rightarrow g'(t) = 2t - 2 \Rightarrow g'(3) = 4.$$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt  $A(3, 3)$  aan de grafiek van  $g$  is dus gelijk aan 4. Dit houdt in dat van een punt  $P$ , dat deze raaklijn doorloopt, de verplaatsing  $y_P - y_A$  in de  $y$ -richting steeds vier maal zo groot is als de verplaatsing  $t_P - t_A$  in de  $t$ -richting.

We zullen in het vervolg *de verplaatsing in de  $t$ -richting* van een punt  $P$  langs de raaklijn aanduiden met  $dt$  en *de bijbehorende verplaatsing in de  $y$ -richting* met  $dy$ . In fig. 28 geldt dus:  $dy = 4dt$ .

In een willekeurig punt  $(t, g(t))$  van de grafiek van  $g$  is de r.c. van de raaklijn gelijk aan  $g'(t)$ . Daar geldt:  $dy = g'(t) \cdot dt$ .

**Definitie IV-1:** Als  $y = g(t)$  is en als  $g$  differentieerbaar is in  $t$ , dan noemen we de getallen  $dy$  en  $dt$  differentialen als geldt:  $dt \neq 0$  en

$$dy = g'(t) \cdot dt.$$

**Opmerking 1:** De getallen  $dy$  en  $dt$  hebben alleen in onderlinge samenhang betekenis. In het voorgaande voorbeeld is  $dy = 4dt$ . De differentialen  $dy$  en  $dt$  kunnen dus bijv. de waarden 4 en 1, 2 en  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  en  $\frac{1}{16}$  hebben.

**Opmerking 2:** Omdat  $dt \neq 0$ , geldt:  $\frac{dy}{dt} = g'(t)$ .

$\frac{dy}{dt}$  noemen we *differentiaalquotiënt*.

Ik bekén dat dit mij weer te moeilijk is. De zin 'Dit houdt in ...' kan ik, geloof ik, in eigen woorden weergeven als: 'Dit houdt in dat voor elk punt  $P$  van deze raaklijn geldt  $y_P - y_A = 4(t_P - t_A)$ . Voor zo'n  $P$  noemen we  $y_P - y_A$  de verplaatsing in de  $y$ -richting,  $t_P - t_A$  de verplaatsing in de  $t$ -richting.' In de volgende zin worden de notaties  $dy = y_P - y_A$  en  $dt = t_P - t_A$  ingevoerd;  $dt$  is dus een getal dat behoort bij een bepaalde  $g$ , een bepaalde  $A$  en een bepaalde  $P$ . (Ongeveer hetzelfde als wat 'Sigma' schijnt te doen.) Maar in de officiële definitie IV-1 vind ik daar niets van terug. Ik word onverhoeds overvallen met de clausule  $dt \neq 0$  en als ik de definitie probeer toe te passen op het gegeven voorbeeld vind ik (geloof ik): 'We noemen  $dy$  en  $dt$  differentialen als  $dt \neq 0$  en  $dy = 4dt$ .' Ik wil aannemen dat met 'differentialen' dan bedoeld wordt 'differentialen bij deze  $g$  en  $A$ ', maar de  $P$  is weg. Verder kom ik tot de conclusie dat (bij deze  $g$  en  $A$ ) alle getallen behalve 0 differentialen zijn: 12 en 3 zijn differentialen; dan is 12 toch wel een differentiaal of niet?

Van de eerste 'Opmerking' begrijp ik evenmin iets als van de slotopmerkingen

van 'Sigma' en 'Moderne Wiskunde'. Hebben  $y_P - y_A$  en  $t_P - t_A$  alleen in onderlinge samenhang betekenis? Hebben 12 en 3 alleen in onderlinge samenhang betekenis? Help!

De betekenis van een formule als  $d(x + y) = dx + dy$  wordt in 'Getal en Ruimte' uitgelegd; dit in tegenstelling tot andere boeken.  $x$  en  $y$  worden hier geacht, functies te zijn van een andere variabele  $t$ , de 'verborgen parameter'. Hiermee is veel te begrijpen van wat er aan onderzoek van krommen en differentiaalvergelijkingen gedaan wordt. Persoonlijk ben ik erg gesteld op de verborgen parameter; als student heb ik hem zelf een keer uitgevonden om de natuurkundecolleges te kunnen begrijpen. Hij heette 'Casper', naar een vriend die nooit colleges liep maar wel tentamens deed.

6 Tot hier toe heb ik alleen gecritiseerd, en dat op niet erg constructieve wijze. Ik zie wel dat ik met een alternatief moet komen. Ik kan dat kort houden; tenslotte behoef ik op mijn eigen voorstellen geen kritiek te leveren. Ik heb voor het probleem 'wat zijn differentialen' drie oplossingen en een meta-oplossing.

Uit de theorie van functies van meer veranderlijken komt de definitie voort die gegeven wordt in 'Analyse Twee'.

Sla ik even de heuristische verhalen over, dan kom ik tot: Gegeven zijn een functie  $f$  en een punt  $x$  van het definitiegebied van  $f$  zó dat  $f$  te  $x$  differentiëerbaar is; de differentiaal van  $f$  te  $x$  is dan de functie  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die elk reëel getal met  $f'(x)$  vermenigvuldigt. Deze differentiaal wordt eerst netjes aangegeven met het symbool ' $d_{f,x}$ '; later wordt er de notatie ' $df(x)$ ' voor gemaakt. Dat werkt, zolang je maar in de gaten houdt dat de laatste vier tekens in ' $df(x)$ ' niet samen 'de waarde van  $f$  te  $x$ ' aanduiden. Bijvoorbeeld: is  $i$  de functie  $h \rightarrow h$  ( $h \in \mathbb{R}$ ), dan is  $di(x)$  niet zó maar hetzelfde als  $dx$ . Natuurlijk niet: ' $dx$ ' betekent nog niets. Pas a posteriori krijgt ' $dx$ ' een betekenis, en wel zó dat  $dx = di(x)$ , d.w.z.: voor elk reëel getal  $x$  is  $dx$  de functie 'vermenigvuldigen met 1'; dan blijkt dat de functie  $df(x)$  het produkt is van het getal  $f'(x)$  en de functie  $dx$ , dus dat  $df(x) = f'(x)dx$ . Esoterische uitspraken als 'we kunnen  $f'(x)$  nu interpreteren als het quotient van de differentialen  $df(x)$  en  $dx$ ' blijven in 'Analyse Twee' achterwege. Wel dienen we op te merken dat het symbool  $d3$  nu niets te maken heeft met de constante functie met waarde 3, zoals bij andere boeken wel het geval schijnt te zijn;  $d3$  is hier  $dx$  voor  $x = 3$ , d.w.z.:  $d3$  is de identieke afbeelding  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Het is niet eenvoudig, en de notatie ' $df(x)$ ' is misleidend, maar alles is heel begrijpelijk in die zin dat het spreekt tot het verstand. Als ik even mag afdwalen naar iets wat mij erg hoog zit: Hier hebben we het grote verschil tussen 'Analyse Twee' en de andere boeken die ik bekeken heb, althans wat betreft de behandeling van differentialen. 'Analyse Twee' spreekt tot het verstand; van de andere boeken merk ik dat niet. Ik wil niet zeggen dat ze (bijvoorbeeld) te ingewikkeld zijn, maar ze schijnen bedoeld te zijn om door de leerling door een soort osmose geabsorbeerd te worden – de manier waarop een kind de betekenis van het woord 'hond' leert. Dat is zo onwetenschappelijk als je het maar kunt maken. Ik geneer me ervoor dat de methode van Kindt en Kremers zó weinig gangbaar is dat hij nu uit de handel genomen wordt.

Dat moest ik even kwijt; terug naar de differentialen.

De tweede oplossing waar ik boven op zinspeelde is de volgende: Laat gegeven zijn een functie  $y = f(x)$  (vergeef me het taalgebruik) en een punt  $a$  uit het definitiegebied van  $f$ . Een 'differentiaalpaar' behorende bij  $f$  en  $a$  is, per definitie, een getallenpaar  $(p, q)$  met  $p \neq 0$ ,  $q = f'(a)p$ . (Het woord 'differentiaal' definiëer ik niet.) Elk dergelijk differentiaalpaar wordt aangegeven als  $(dx, dy)$ , maar we spreken af dat we nooit twee differentiaalparen (van dezelfde  $f$  en  $a$ ) in één formule zullen laten voorkomen. Dit werkt redelijk goed, zolang we niet proberen formules als  $df(x) = f'(x)dx$  betekenis te geven.

Bij de derde oplossing lukt dat wel: definiëer botweg  $dx = 1$ ,  $df(x) = f'(x)$ . De rekenregels gaan allemaal door (en zijn allemaal triviaal) en je weet waar je het over hebt.

Beide oplossingen vereisen verdere uitwerking voor situaties waar het om geparametriseerde krommen gaat. Beide zijn natuurlijk louter sabotage: Je krijgt dingen waar mee gerekend kan worden, precies alsof het differentiaal zijn, maar de overeenkomst met differentiaal is louter uiterlijke schijn.

Ik prefereer de meta-oplossing die ik in mijn inleiding al genoemd heb: Het doet er niet toe. Differentiaal behoren niet tot het havo- of vwo-programma en er is absoluut geen reden om ze op school te behandelen. Ze zijn pas zinvol bij differentiatie van functies van meer dan één veranderlijke, en dat komt op school niet voor. (Partiële differentiatie is differentiatie van een functie van één veranderlijke.) De 'dx' en 'dy' die je bij het eindexamen tegenkomt in differentiaalvergelijkingen zijn evenmin differentiaal als de 'dy' van 'dysenterie'.

Dit klinkt misschien wat provocerend, maar ik meen het letterlijk. De differentiaalvergelijking

$$(i) \quad 2xdx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

is synoniem met

$$(ii) \quad 2x + (x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

als je  $y$  als functie van  $x$  wilt hebben; ben je op zoek naar een tweetal functies  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow y(t)$  die samen een parametrisering opleveren voor een integraalkromme van (i), dan zie je (i) als een afkorting voor

$$(iii) \quad 2x\frac{dx}{dt} + (x^2 - y^2)\frac{dy}{dt} = 0.$$

In beide gevallen is (i) louter een typografisch trucje om (ii) of (iii) in één regel te kunnen krijgen.

Nauwelijks heb ik een positieve suggestie, of ik word me er pijnlijk van bewust dat ik aan wal sta. Ik kan U wel met wat losse armgebaren het idee aan de hand doen om differentiaalvergelijkingen los te koppelen van differentiaal, maar ik kan dat idee niet uitwerken. Ik hoop dat iemand die ervaring voor de klas heeft, dit op zich zal nemen. Ik houd me ten eerste aanbevolen voor resultaten.

Er zit overigens méér aan vast dan ik wellicht suggereerde, zoals de vraag of het

de kromme (= puntverzameling) is die aan de differentiaalvergelijking voldoet, dan wel de parametrisering. Ook over dit onderscheid wordt in sommige boeken nogal ruw heengestapt – maar laat ik niet opnieuw beginnen.

***Over de auteur:***

*Prof. dr. A. C. M. van Rooij is hoogleraar in de wiskunde aan de Katholieke Universiteit te Nijmegen.*

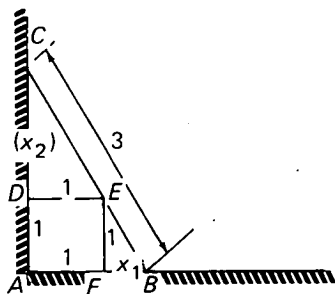
# Oud probleem

W. GRONLOH

Tijdens een van die zovele rustige repetitie-uurtjes in de laatste schoolweken van het jaar, kwam ik, aangemoedigd door de nimmer aflatende onderzoeksdrang van mijn leerlingen (dezelfde die, o onrecht, zo vaak door generatiegenoten voor dom en lui worden versleten) op een oud wiskunde puzzeltje, waarvan de oplossing met elementaire middelen niet te geven zou zijn.\*) Daar ik veel te intelligent en alert ben om eventueel onopgemerkt spieken in mijn lokaal tot de mogelijkheden te kunnen rekenen, besloot ik me dit uurtje eens tenvolle op het vraagstuk te werpen, ofschoon ik doorgaans het staren in de lege ruimte en uitpuffen bij zulke gelegenheden niet alleen prefereer, maar ook dik verdienen.

‘Een kubusvormige kist met ribbe van 1 m, staat in de hoek die gevormd wordt door de vloer en een verticale wand; een ladder van 3 m lengte staat zò, dat hij juist de wand en de kist raakt. Hoever staat het onderend van de ladder bij de kist vandaan?’

Juist druk doende van de situatie een figuurtje te maken, word ik gestoord door een meisje (altijd raak al wil ik natuurlijk niet discrimineren) dat ‘even de calculator uit haar jaszak wil halen’. Ook alweer geen vooruitgang die rekenkistjes, alleen maar last. Enfin, ze is weer terug. ’t Ding zal haar wel niet veel verder helpen...



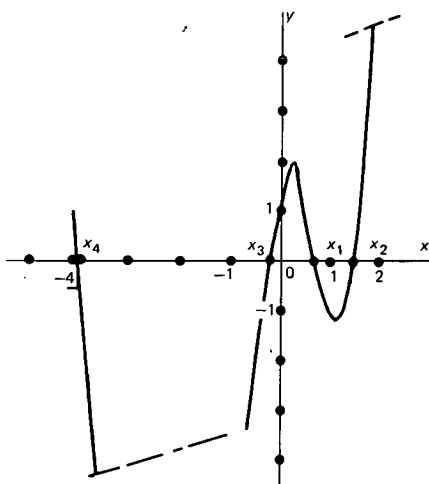
\*) Reacties op deze opmerking, noodzaken mij tot een naschrift.

't Figuurkje is snel getekend en uit de gelijkvormigheid van de  $\triangle EBF$  en  $CBA$  volgt direct dat:  $BF : BA = EF : CA$  of:  $x : x + 1 = 1 : \sqrt{9 - (x + 1)^2}$   
 Na uitwerken en kwadrateren (wat anders met die wortelvorm?) ontstaat de vergelijking:

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$$

Hoe is 't mogelijk: zo'n simpel gegeven voert ons tot een 4<sup>e</sup>-graadsvergelijking en alle pogingen tot vereenvoudiging falen jammerlijk!

Het klassikale gelummel met de calculator (sommige halve garen rammen bijna het geel-groene glaasje met de vloeibare kristallen aan scherven) brengt me op de gedachte wat waarden te berekenen van de functie  $f: x \rightarrow x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$  en daarvan de grafiek te schetsen. (Stiekum gebruik ik alvast wat uitkomsten die ik pas morgen vind als 3<sup>a</sup> en 3<sup>c</sup> dezelfde repetitie maakt, en ik weer, m'n schier Goddelijke taak vervullend, enkele uren mag rondknullen)



In de grafiek ontdekken we al direct de 4 (reële!) wortels: Twee positieve en twee negatieve, maar daarop varen we niet blind. Slechts conclusies die onverwacht maar onvermijdelijk volgen uit een gestroomlijnd wiskundig betoog, neergezet in een ware apotheose, vermogen het aan dit papier te worden toevertrouwd opdat een ieder ze vol ontzag zal lezen. . .

Een leerling zit intussen uitermate irritant in hoog tempo met z'n balpenknopje te klikken! Of ik nog een kladblaadje heb. . . Allemaal krantewijken tegenwoordig, maar een kladbloc kopen. . . Eenmaal in het bezit van het kleinood begint de niksnut er een enorm aantal min of meer concentrische krullen op te tekenen, totdat het bovenaanzicht van een Papoea is ontstaan. Ik plaats de ellendeling onder valse voorwendselen achteraan.



In de daarop volgende weldadige rust, zie ik ineens, starend op figuur 1 als om daaruit de latente magie te condenseren, dat het ladderprobleem precies twee oplossingen moet hebben:

1°  $x_1 = BF$ , zoals direct uit het tekeningetje blijkt, maar ook

2°  $x_2 = CD$ , want we kunnen  $AC$  als de horizontale vloer en  $AB$  als staande wand opvatten! Draai de figuur desnoods  $90^\circ$  en herlees de probleemstelling.

Dit moeten dus twee wortels zijn van de vergelijking:  $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ , terwijl uit de gelijkvormigheid van de  $\triangle EFB$  en  $CDE$  direct volgt dat het produkt van die twee wortels  $= 1$  moet zijn, immers:

$$FB : EF = DE : CD$$

$$x_1 : 1 = 1 : x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$$

Eureka! Eureka! (Gelukkig krijg ik m'n manchetknopen niet los) Hier moet wat mee te doen zijn.

Als  $x_1$  en  $x_2$  wortels zijn van onze vergelijking, dan moet  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$  deelbaar zijn door  $x - x_1$  en door  $x - x_2$ , dus ook door  $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$  en daar  $x_1 \cdot x_2 = 1$  was, schrijven we dan goedgemutst en hoopvol:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \equiv \{x^2 - (x_1 + x_2)x + 1\} \cdot g(x), \text{ waarin } g(x) \text{ een of andere tweedegraadsfunctie moet voorstellen.}$$

Een leerling vraagt 'wat hij moet doen als ie klaar is', juist als ik op het punt sta de zaak te gaan klaren... 'Alles nog eens goed controleren' zeg ik wanhopig, wetend dat zoiets weinig uithaalt. 'Heb ik al twee keer gedaan!' (Voor 't geval ik mocht zeggen: Doe je 't nog een keer...) Ik moet capituleren: 'lever dan maar in'. In een mateloos treiterend tempo wordt nu om de  $2\frac{1}{2}$  minuut een blaadje ingeleverd; net steeds als je de pen weer ter hand wilde nemen. 't Is hopeloos, als leraar gunnen ze je geen minuutje rust!

Tijdens de volgende repetitie wordt de zaak verder snel geklaard:

Voor de wortels  $x_1$  en  $x_2$  schrijf ik achteraf liever  $\alpha$  en  $\beta$ ; voor  $g(x)$  noteren we de algemene gedaante  $g(x) = x^2 + px + 1$  (omdat de coëfficiënt van  $x^2 = 1$  moet zijn) zodat we vinden:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \equiv \{x^2 - (\alpha + \beta)x + 1\} \cdot \{x^2 + px + 1\}$$

of na herleiden:

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \equiv x^4 + (p - \alpha - \beta)x^3 + (2 - \alpha p - \beta p)x^2 + (p - \alpha - \beta)x + 1$$

waaruit volgt door gelijkstelling van de coëfficiënten:

$$\begin{cases} p - \alpha - \beta = 2 & \Rightarrow \alpha + \beta = p - 2 \\ 2 - \alpha p - \beta p = -7 & \Rightarrow \alpha + \beta = 9/p \end{cases}$$

zodat:  $p - 2 = 9/p$  dus  $p^2 - 2p - 9 = 0$

Hieruit lossen we eenvoudig  $p$  op:  $p = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 36}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}$ , waarna dan weer uit:

$x^2 + px + 1 = 0$  volgt:

$$x^2 + (1 + \sqrt{10})x + 1 = 0 \vee x^2 + (1 - \sqrt{10})x + 1 = 0$$

waaruit dan tenslotte de gevraagde wortels volgen:

$$\alpha = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1}{2} \quad (\approx 1,492)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1}{2} \quad (\approx 0,670)$$

(De twee andere wortels van de vergelijking zijn dan:

$$x_3 = \frac{-\sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1}{2} (\approx -0,256) \quad \text{en}$$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1}{2} (\approx -3,906)$$

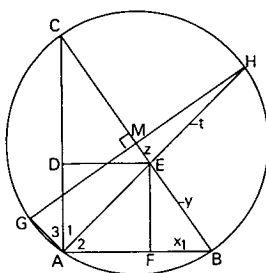
maar praktisch hebben we daaraan alleen iets voor de nulpunten van onze grafiek)

Voldaan nog eens het resultaat overziend, begrijp ik plotseling waarom voor zoveel beroepsopleidingen een wiskundepakket vereist is, al lijkt dat vaak overbodig: De glazenwasser kan onverhoeds met dit probleem geconfronteerd worden als hij argeloos z'n lange ladder tracht te plaatsen tegen de achtergevel boven een fietsenberging! Vol ontzag en begrip zal ik voortaan opzien naar deze mensen in hun praktische en theoretische hoogstandje, alhoewel... M'n liniaaltje vond in 't allereerste plaatje de oplossing feilloos zonder nadenken!

## Naschrift

Zoals zo vaak bij schoolmeesters, gunt men elkaar 't licht in de ogen nauwelijks. Zo barstte op deze arrogante veronderstelling, geuit in een vlaag van welhaast onwaarachtige zelfoverschatting, een golf van honende kritiek los. Een forum van deskundige kornuiten verwees mij met m'n papierwinkel, resoluut naar de goot: "t Was waarschijnlijk wel bekend, dat 't probleem vele oplossingen kende...!" Ter illustratie een vernietigende stapel wiskunde. Ik was geslagen, bedroefd, ontgoocheld en weende vele dagen. Op de vroege ochtend van de zevende snotterdag, hervond ik mijzelf en besloot de stapel alternatieve oplossingen eens door te nemen, hoezeer me dat geestelijk ook zou kunnen knauwen. Al lezend ontwaakte in mij een beschamende, intens onchristelijke agressiviteit, toen ik besepte dat 't hier slechts om een schier eindeloze stroom van verbazingwekkend kinderachtige variaties ging op 'mijn' thema:  $x_1 \cdot x_2 = 1$ !! Wat een

infantiele ideeën-jatters! Ik sloop de trap af (Stella en de kinderen sliepen nog) greep de hoorn van de haak, stak trillend alle vingers in de gaatjes . . . maar toen de brief tussen m'n wit klapperende tanden vandaan viel, zag ik ineens, helemaal onderaan de lijst diefstal, een verrekt lollige, echt originele oplossing. Ik moet die nog aan dit papier kwijt, al zal geen hond 't ooit lezen!



Ik neem fig. 1 weer over en teken de omgeschreven cirkel van  $\triangle ABC$  ( $\odot M, 1\frac{1}{2}$ ). Trek de middellijn  $GH \perp BC$  en 't hulplijntje  $GA$ . De diagonaal  $AE$  van vierkant  $AFED$  snijdt na verlengen de cirkel precies in  $H$ , want:

$\angle A_1 = \angle A_2 = 45^\circ$ , maar ook  $\angle A_3 = \frac{1}{2}\text{bg } CG = 45^\circ$ , zodat  $\angle GAE = 90^\circ$ .

Hiermee is  $\triangle HME \sim \triangle HAG$ , dus:  $HE : HM = HG : HA$

$$t : 1\frac{1}{2} = 3 : t + \sqrt{2}$$

ofwel:

$$t^2 + t\sqrt{2} - 4\frac{1}{2} = 0, \text{ waaruit de reële wortel}$$

$$t = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2}$$

't Vervolg is duidelijk: Uit  $t$  in  $\triangle HME$  volgt  $z$ :  $z = \sqrt{t^2 - (\frac{1}{2})^2}$ , uit  $z$  volgt  $y$ :  $y = \frac{1}{2} - z$  en uit  $y$  volgt tenslotte  $x_1$  in  $\triangle EFB$ :  $x_1 = \sqrt{y^2 - 1}$

Geheel uitgewerkt vinden we dan:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{18 - 12 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot \sqrt{10}}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{(15 - 10 \cdot \sqrt{2}) + (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}}}{2} = \\ &= \frac{(\sqrt{10} - \sqrt{5})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - 1)}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1}{2}, \text{ maar} \end{aligned}$$

die fraaie laatste uitkomst vond ik natuurlijk alleen doordat ik 't antwoord al kende! Behalve het nadeel dat deze methode niet tot een zo fraaie uitkomst leidt, is nog het feit dat we maar één wortel vinden onbevredigend. Om volledig te zijn

zal ik toch moeten ontdekken dat ook  $CD = x_2$  voldoet en dat sterkt me dan weer in m'n overtuiging dat er uiteindelijk maar één doodsimpel idee aan alle oplossingen ten grondslag ligt: Draai 't plaatje een kwart slag!

***Over de auteur:***

*W. Gronloh was via de Koopvaardij bij het technisch onderwijs beland als wis- en natuurkundeleraar. Sinds 9 jaar is hij verbonden aan de Prof. Kohnstammschool voor MAVO te Waddinxveen.*

# Sociale vaardigheden en het wiskundeonderwijs

RENS HOUTMAN

## 1 Inleiding

Het lijkt mij een goede gewoonte ons blad te gebruiken om ervaringen uit te wisselen. Graag wil ik daarin een bijdrage leveren.

In dit artikel wil ik iets vertellen over een werkwijze die we als wiskundesektie gedurende een periode van  $\pm 6$  weken hebben toegepast in de leerjaren 4, 5 en 6 atheneum<sup>1</sup>). Een werkwijze waarbij de leerlingen in groepen zelfstandig de stof doorwerken. We zijn daarmee in 1977 gestart en het is ons zo goed bevallen dat we het tot een vast onderdeel van ons programma gemaakt hebben als 'projekt samenwerken'.

Over het verloop van het projekt wil ik me in dit artikel beperken tot enkele hoofdzaken. Elders is een uitgebreid verslag verschenen<sup>2</sup>). Wel wil ik pogen ons bezig zijn te plaatsen in een breder kader door enkele lijnen te trekken vanuit bredere ontwikkelingen in het denken over en in het bezig zijn met het voortgezet onderwijs. Dat gebeurt in de tweede paragraaf. In de derde paragraaf monden deze lijnen uit in een korte weergave van het projekt zelf.

## 2 Ontwikkelingen in onderwijsland

### 2.1 *De leerpsychologie*

De tijd dat de psychologie voor het onderwijs niet meer opleverde dan het gegeven dat de geest moest worden getraind en dat daartoe het ene vak meer geschikt was dan het andere is definitief voorbij. Vele leer-theorieën hebben hun invloed inmiddels doen gelden op het onderwijs en van vele zijn die invloeden vandaag herkenbaar. Van deze theorieën geven we er enkele aan.

De invloed die gevoelens van veiligheid, geborgenheid, een vertrouwde situatie en daartegenover gevoelens van angst, onzekerheid hebben op het leerproces is een ieder bekend. Met de factoren die een rol spelen bij het bevorderen van het een zowel als het tegengaan van het ander heeft b.v. Maslow zich indringend beziggehouden.

Het zelf actief met leerstof bezig zijn heeft in veel onderwijssituaties een hoger

leerrendement dan het passief opnemen van leerstof. Ideeën die Bruner vooral heeft gestimuleerd: het zelfontdekkend leren.

Rogers theorieën vinden hun weerslag vooral in het bejegenen van leerlingen door leraren als begeleider, waarbij de leraar eenheid vertoont in gevoelens en gedrag, in denken en doen. Meer aandacht krijgt het opvoeden tot zelfstandigheid, en dragen van verantwoordelijkheid. In plaats van het geven van pasklare antwoorden probeer je als leraar de leerlingen voortdurend te prikkelen tot het zelf vinden van oplossingen.

Leerlingen leren erg veel van het gedrag van de leraar en dat van hun medeleerlingen. Elke leraar treedt op als model (positief en negatief) voor leerlingen. Deze passen zich aan aan vormen en gedragscodes binnen een groep. Daarin heeft de leraar een belangrijke stimulerende functie. Gedachten die vooral teruggaan op Bandura. Werkvormen als groepswork zijn een middel om het gedrag van leerlingen ten opzichte van elkaar bewust binnen de lessen te halen.

Dit is een greep uit aanwijsbare lijnen vanuit de leerpsychologie naar het onderwijs. Binnenkort zal een helder en overzichtelijk werk verschijnen over leerpsychologen en hun betekenis voor het onderwijs waarnaar ik de geïnteresseerde lezer graag verwijs<sup>3)</sup>.

## 2.2 *Onderwijsvisies in Nederland*

De in 2.1 genoemde ideeën uit de leerpsychologie zijn herkenbaar in bekende visies op het onderwijs zoals we die in Nederland kennen. Om maar eens een heel duidelijke visie te noemen: de visie van J. van Kemenade. (Overigens spreek ik met het adjektief 'duidelijk' zeker geen waarde-oordeel over de inhoud van de visie uit.)

Als het gaat om de doelstellingen van de middenschool lezen we in Contourennota 1:

'Verbreiding van het onderwijs- en vormingsaanbod van de 12- tot 26-jarigen. Dit kan bereikt worden door een grotere spreiding van vakken en het bieden van mogelijkheden tot evenwichtiger en veelzijdiger ontplooiing van alle aanwezige bekwaamheden. Hier worden nadrukkelijk ook die van creatief-artistische, organisatorisch en sociale aard verstaan.'<sup>4)</sup>

En bij de bovenschool wordt nog genoemd:

'... moet in deze sector van onderwijs meer dan in het funderend onderwijs, nadruk worden gelegd op de zelfstandigheid van leerling.'<sup>5)</sup>

Met vrijwel dezelfde bewoordingen komen deze doelstellingen (er zijn er natuurlijk meer) terug in het OPVO van de vorige staatssecretaris K. de Jong. Bij de gevolgen van de uitgangspunten voor leerstof en vormingsaanbod staat vermeld:

'Veel meer aandacht dient te worden geschonken aan het ontwikkelen van een positieve instelling ten opzichte van het leren en aan specifieke vaardigheden ervoor.'<sup>6)</sup>

Niet alleen de overheid draagt dergelijke ideeën uit. Ook vanuit het onderwijs-

veld zijn geluiden waarneembaar. Te denken valt aan de 'Discussienota Voortgezet Onderwijs' van de NPCS, de talrijke publikaties over algemene onderwijsdoelen mij met name bekend vanuit het protestants christelijk onderwijs. Telkens herken je de accentverschuiving van het cognitieve gebied, het overdragen van kennis en (denk-)vaardigheden in de richting van de ontwikkeling van de hele persoon, van de leerling in sociale, psychomotorische, emotionele, creatieve, ethische en religieuze zin. Dit wordt nog eens geïllustreerd door een vraaggesprek met enkele vertegenwoordigers van de Twentse industrie; waaruit het volgende citaat:

'Wij wijzen op de noodzaak van een goed evenwicht tussen het aanbrengen van sociale en technische vaardigheden . . . De industrie heeft behoefte aan mensen met sociale bekwaamheden . . . Natuurlijk zijn technische kwaliteiten van belang, maar zij zijn niet meer alleen zaligmakend. Het is beslist niet zo, dat mensen met een eenzijdig 'b-pakket' op alle fronten de voorkeur genieten.'<sup>7)</sup>

### *2.3 De praktijk van de school in Hardenberg*

Natuurlijk zijn er niet alleen ontwikkelingen buiten de school, waarvan je de invloed ondergaat, waarin je meegaat of waartegen je je verzet.

Drie ontwikkelingen binnen onze school in Hardenberg zijn mede bepalend geweest voor het ontstaan van de ideeën en de vormgeving van het projekt.

In de eerste plaats de discussie over algemene schooldoelstellingen binnen de school. In het verlengde van wat ik boven schetste heeft deze discussie onze gevoelens versterkt, dat we meer willen dan kennis overdragen in de wiskundelessen en ons geprikkeld wegen te zoeken om deze gevoelens een uitweg te geven.

In de tweede plaats riep het ontwikkelen van een stuk projektonderwijs binnen de school een fundamentele doordenking op van de relatie die dient te bestaan tussen onderwijsdoelen en beoordelen. In ons 'projekt' stelden we als wiskundesektie het 'leren samenwerken' als hoofddoel. Die doelstelling wilden we echter ook toetsen en daarmee de leerlingen beoordelen op het samenwerken met elkaar. Het denken daarover heeft geleid tot onze vorm van woordrapportage over het werken van elke groep (zie onder 3.3).

En ten derde was de vrijheid van inrichting van het schoolonderzoek onderwerp van bespreking in school. Nadrukkelijk werd die vrijheid naar voren gehaald, waardoor we op het idee kwamen het schoolonderzoek wiskunde voor een deel anders in te richten: een groepsopdracht in plaats van een individueel proefwerk.

## **3. Projekt 'leren samenwerken' in 4, 5 en 6 atheneum**

### *3.1 Opzet, doelstellingen*

Vanuit de in 2.3 getekende ontwikkeling kwamen we tot de volgende opzet. We wilden de leerlingen zelfstandig het boek 'Statistiek en Kansrekening voor het vwo' laten doorwerken in 5 atheneum. Het boek leek ons daartoe zeer geschikt, het nodigde er als het ware toe uit. We zetten de leerlingen in groepjes van 3 of 4 om aan de stof te werken. Als handvat gaven we een globale planning per week. Aan de hand daarvan konden ze hun eigen tempo in de les en thuis bepalen. Huiswerk werd door de groep zelf afgesproken voor elke volgende les. Gemaakt

huiswerk werd ook in de groep weer besproken. De leerlingen waren allemaal in het bezit van een antwoordenboekje. Als leraar schoten we te hulp daar waar ze er samen niet uitkwamen.

De hele werkwijze was een uitwerking van de volgende doelstellingen:

- 1 het verwerken van de leerstof
- 2 het leren samenwerken in een groepje
- 3 het leren dragen van verantwoordelijkheid.

Als ik dit zo opschrijf besef ik hoe aardig het allemaal klinkt. Om te voorkomen dat u mijn verhaal verder voor gezien houdt als gevolg van een gevoel van twijfel aan de haalbaarheid dat u bekruipt, moet ik er iets bij vertellen over de introductie van het project bij de leerlingen.

### 3.2 *De inleidende lessen*

De eerste maal, dat we het boek 'Statistiek en Kansrekening voor het vwo' gebruikten in 5 atheneum lieten we de leerlingen meteen de eerste les in groepjes zitten en gaven we ze de opdracht zelf er mee aan de slag te gaan.

Na twee of drie lessen gebeurde er echter vrijwel niets meer. De leerlingen waren met allerlei dingen bezig behalve met wiskunde. Er bleef ons niets anders over dan weer terug naar de klassikale, docerende aanpak. Met die groep leerlingen hebben we ons niet meer aan groepswerk gewaagd.

De tweede keer hebben we de zaak in verschillende sektievergaderingen aangekaart, doorgesproken en zijn we samen tot een andere aanpak gekomen.

Werken in groepen was geen vertrouwde werkwijze. De leerlingen en de leraar bleken daarin een rol toebedeeld te krijgen die volkomen nieuw was. Zelf je tempo bepalen, een werkschema bijhouden, samen met anderen overleggen en je huiswerk afspreken en daarna nakijken waren zaken die op de leerling vreemd, zo niet bedreigend overkwamen. En de leerlingen min of meer aan hun lot overlaten, het op afroep reageren niet anders (zo mogelijk) dan door verhelderende vragen te stellen in plaats van één en ander eens precies uit te leggen was iets, dat ons als leraren, zeker in het begin, de nodige zelfbeheersing kostte.

Om de leerling toch voor het groepswerk te motiveren hebben we een drietal lessen besteed aan deze andere werkvorm. De eerste les speelden we een spel aan de hand waarvan een discussie over samenwerken werd gevoerd, die uitmondde in een aantal konkrete onderlinge afspraken over gedrag, rol van de leraar, huiswerk, e.d.<sup>8)</sup>.

Een tweede les werd dan gevuld met het nog eens doornemen van de (inmiddels gestencilde) afspraken. Daarna werden de algemene schooldoelstellingen besproken. Vanuit deze doelstellingen werd het waarom van de nieuwe manier van bezig zijn met de wiskunde nog eens verduidelijkt. De derde les werd dan nog aan het werktempo, de beoordeling en de groepsindeling besteed.

Halverwege de derde of bij het begin van de vierde les startte dan het zelfstandig werken in groepen. In klas 5 werden zo in  $\pm 6$  weken de hoofdstukken 1 en 2 doorgewerkt.

### 3.3 *Toetsing en beoordeling, het schoolonderzoek*

Bij elk van de doelstellingen zochten we een manier om te toetsen in hoeverre de doelstelling was bereikt. In hoeverre de leerstof was verwerkt (en in hoeverre



samenwerking was geleerd), toetsten we door middel van een groepsproefwerk. Daarnaast was er een individueel proefwerk in klas 5. De werkwijze werd herhaald in klas 6 met het tweede deel van de leerstof (hoofdstuk 3 en 4).

Het onderdeel statistiek en kansrekening op het schoolonderzoek werd getoetst in één proef: een groepsopdracht. De groepen werkten in dezelfde samenstelling als waarin ze de stof hadden doorgewerkt een aantal opdrachten af in  $2\frac{1}{2}$  uur, waar ze individueel zeker 4 uur voor nodig zouden hebben. Dit onderdeel telde mee als  $\frac{1}{9}$  deel voor het eindcijfer schoolonderzoek (Het was één van de 9 toetsmomenten).

De tweede doelstelling (leren samenwerken) werd getoetst in een gesprekje met de groep aan de hand van een door de leraar opgesteld woordrapport. Dit woordrapport beschreef vooral het functioneren van de verschillende groepsleden en hun aandeel in het werken als groep. De leerlingen brachten zelf materiaal in, via een niet te uitgebreid vragenlijstje dat door elke leerling werd ingevuld. Dit leverde voldoende aanknopingspunten op voor de leraar om een woordrapport per groep op te stellen.

Na bespreking in de groep en zonodig na wijziging van de tekst, werd dit woordrapport in klas 5 toegevoegd aan het cijferrapport dat aan de ouders werd uitgereikt en in klas 6 aan de examenlijst.

De functie van het woordrapport – en het zelf invullen van de vragenlijst – was enerzijds rapportage aan de ouders. Belangrijker echter was dat de leerlingen zich meer bewust werden van hun functioneren in de groep. Er ging een stimulerend en corrigerend effect van uit. Het was uiteindelijk meer middel dan doel.

### *3.4 Uitbreiding naar 4 atheneum met ander IOWO-materiaal*

Het programma in 4 atheneum was niet elk jaar gelijk. Vooral door de invoering van het ongedeeld atheneum was lang niet duidelijk wat nu precies moest gebeuren in de 3 uren wiskunde in dit leerjaar.

We hebben op zeker moment gekozen voor het onderwerp 'Funkties van twee variabelen' naar het gelijknamige boekje van het IOWO als programma-onderdeel. De overwegingen die daartoe leidden waren de volgende:

Het boekje geeft een voorbereiding in klas 4 op de differentiaalvergelijking in klas 6. De ruimtelijke figuren en het XYZ-assenstelsel zijn een goede hulp voor de leerlingen die wiskunde II gaan doen in klas 5.

Een zeer praktische toepassing van de wiskunde komt binnen handbereik: het liniar programmeren, waardoor het boekje veel duidelijker aansluit op de belevingswereld van de leerlingen dan menig leerboek.

En tenslotte is de stof op een zodanige wijze verpakt dat de leerling er zelfstandig mee aan de slag kan.

De laatste twee argumenten gaan trouwens op voor het meeste materiaal dat het IOWO heeft geproduceerd. Reden waarom ik dat van harte kan aanbevelen. Met dit boekje hebben we de zelfde werkwijze toegepast als in 5 en 6 atheneum bij statistiek en kansrekening. Om het verantwoordelijk zijn voor elkaar, ook in het maken van toetsen, langzaam op te bouwen kregen de leerlingen in klas 4 nog

geen groepsproefwerk, maar een individueel proefwerk. De groepsopdracht als toets bewaarden we voor klas 5 en 6. Wel gebruikten we de woordrapportage en lieten we ze zelfstandig hun eigen tempo, hun eigen huiswerk bepalen aan de hand van een globale planning per week.

#### 4 Besluit

Nadat ik een drietal jaren op de school in Hardenberg heb gewerkt met bovenbeschreven werkwijze, ben ik van school veranderd. In mijn nieuwe werkkring, in een nieuwe sectie zijn we voorzichtig met groepswork gestart en deze cursus zullen we de zelfde werkwijze gaan toepassen in 5 atheneum als we aan statistiek en kansrekening toe zijn.

Na ruim 4 jaar ervaring met deze werkwijze meen ik een antwoord gevonden te hebben op het onbestemde gevoel van voor die tijd; het gevoel, dat je als wiskundeleraar, zeker gezien de doelstellingen van het christelijk onderwijs, meer aan je leerlingen zou moeten meegeven dan die vaak abstracte wiskundige kennis, waar slechts enkelen werkelijk mee verder gaan.

Reakties van leerlingen en ouders bevestigen, dat op deze manier – binnen de bestaande onderwijsstructuren – wegen zijn te vinden om sociale vaardigheden, ontwikkelen van zelfstandigheid en verantwoordelijkheidsgevoel een eigen plaats te geven in het onderwijs.

#### Noten

- 1) Wiskundesectie van de CSG 'Jan van Arkel' te Hardenberg, scholengemeenschap voor havo en atheneum.
- 2) *Sociale vaardigheden en wiskunde-onderwijs*, verspreid door Wolters-Noordhoff, te bestellen door het overmaken van f10,— op girorekening 2424158 van Rens Houtman te Harmelen.
- 3) Een boek over ontwikkelingen in de leerpsychologie en de betekenis daarvan voor het onderwijs zal binnenkort verschijnen bij uitgeverij Intro, Nijkerk.
- 4) Contourennota 1, p. 46.
- 5) Idem p. 57.
- 6) Bijlage X van Hoofdstuk VIII van de rijksbegroting voor het dienstjaar 1980, *Ontwikkelingsplan voor het voortgezet onderwijs*, p. 12.
- 7) Overgenomen uit 'Director', orgaan van de AVS, nr. 118, p. 277.
- 8) Voor geschikte spelletjes verwijs ik naar: Gene Stanford, 'Groepswork in het onderwijs'. Een gids voor docenten, gebaseerd op ervaringen in de klas, Intro, Nijkerk, 1980.

#### Over de auteur:

*Rens Houtman was wiskundeleraar in Hardenberg van 1971-1979 en legde voorjaar '79 het doctoraal examen wiskunde af aan de V.U. met als bijvakken onderwijskunde en geschiedenis van de natuurwetenschappen. Hij heeft steeds een grote belangstelling gehad voor didactische vernieuwingen, waarbij de leerling centraal staat, o.a. vanuit IOWO en CPS.*

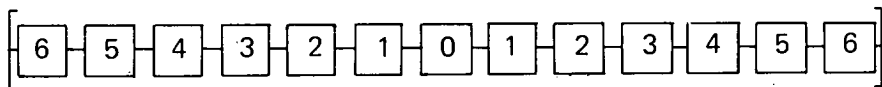
*Sinds 1979 is hij verbonden aan het Niftarlake College te Maarssenbroek als leraar wiskunde en conrector voor de verlengde brugperiode en voor didactiek i.h.a.*

# Een voetbalspel en negatieve getallen

WIM DROST

In het nummer van september 1980 vroeg de redactie van Euclides om bijdragen uit de alledaagse praktijk. Aan deze oproep wil ik met deze bijdrage gehoor geven, zij het wat schoorvoetend want waar ik enthousiast over ben, kan voor een ander waardeloos zijn.

De special over spelletjes van Wiskobas (jrg. 8, nr. 4) bevatte, naast zeer veel andere waardevolle artikelen, een bijdrage van Edu Wijdeveld over een voetbalspel met negatieve getallen. Na lezing zag ik mogelijkheden om dit toe te passen in de brugklassen van de mavo waar ik werk. En niet zonder succes! Het voetbalspel moest de introductie gaan vormen op negatieve getallen en het optellen ervan. Na die introductie moest worden aangesloten op hoofdstuk 1 van deel 2 van Moderne Wiskunde. Later, in hoofdstuk 4 van dat deel, moest het als extra illustratie dienen bij het aftrekken van negatieve getallen, zij het dan wat aangevuld.



Figuur 1

Hoe gaat het spel? Op een speelveld als in fig. 1 (eenvoudig over te tekenen in een ruitjesschrift) wordt de bal (een punaise op z'n kop) op de middenstip ('0') gelegd. De eerste speler gooit een dobbelsteen om te bepalen hoe ver hij naar rechts 'schoppen' mag. Vervolgens gooit de andere speler om vanaf de plek waar de bal nu ligt naar links te gaan. En zo verder tot één van de twee spelers het doel van de tegenpartij passeert. Dat het spel niet eerlijk is zal u direkt zijn opgevallen. Geen enkele leerling constateerde dit!

Wat kun je met zo'n spel doen? Allereerst natuurlijk; spelen! Ik kan u aanraden eerst even dit verhaal ter zijde te schuiven en het spel enkele malen met iemand in uw omgeving te spelen. Als u besluit verder te lezen dat treft u een lijstje met mogelijkheden aan in de volgorde waarin ze de leerlingen zijn aangeboden.

- 1 In een restant van een les hebben de leerlingen na een voorbeeldspelletje het spel in tweetallen enkele malen gespeeld. Aansluitend de vraag; 'hoe kun je het spelverloop bijhouden?' Ten slotte kregen we dit (na wat suggesties):

$$0 \xrightarrow{3_r} 3_r \xrightarrow{5_l} 2_l \xrightarrow{1_r} 1_l \xrightarrow{3_l} 4_l \xrightarrow{2_r} 2_l \xrightarrow{5_l} \text{goal!}$$

- 2 Wat heeft er gestaan? In de ketens uit 1. worden open plaatsen gelaten. Dit kwam in de eerste introductieles op hoofdstuk 1 deel 2 aan de orde.

$$1_r \xrightarrow{4_r} \dots \dots \xrightarrow{4_r} 0$$

$$4_r \ddot{\rightarrow} 2_l \dots \xrightarrow{6_l} 2_l$$

$$0 \ddot{\rightarrow} 3_r \ddot{\rightarrow} 1_r \ddot{\rightarrow} 3_r \ddot{\rightarrow} \text{goal!}$$

$$0 \xrightarrow{2_r} \dots \ddot{\rightarrow} \dots \xrightarrow{5_l} 4_l$$

- 3 Een afspraak. We spreken af dat  $2_l \xrightarrow{5_r} 3_r$  hetzelfde is als  $2_l + 5_r = 3_r$ .

$$\text{voorbeelden: } 3_r \xrightarrow{3_l} 0 \quad \text{wordt } 3_r + 3_l = 0$$

$$2_l \xrightarrow{1_l} 3_l \qquad 2_l + 1_l = 3_l$$

- 4 Nog een afspraak. Nu worden de negatieve getallen ingevoerd. 3, gaan we nu schrijven als 3 zonder iets en  $3_l$  als  $-3$  (spreek uit: 'min'3 of 'negatief'3).

$$2_l + 2_r = 0 \quad \text{wordt} \quad -2 + 2 = 0$$

$$2_l + 5_r = 3_r \qquad -2 + 5 = 3$$

$$3_r + 4_l = 1_l \qquad 3 + -4 = -1$$

- 5 Wat heeft er gestaan? (een introductie op vergelijkingen met negatieve getallen).

$$2_l + \dots = 1_r \quad \text{of} \quad -2 + \dots = 1$$

- 6 Van voetbalspel naar getallenlijn en het boek. Het zal u duidelijk zijn dat de overstap naar het boek en de getallenlijn niet groot is. Wat overblijft is een mogelijkheid om als het stroef loopt terug te grijpen op het voetbalspel. Voorbeeld: los op in  $\mathbb{Z}$ :  $10 + x = -1$  wordt in termen van het voetbalspel: 'ik sta op 10, wat moet ik gooien om op  $1_l$  uit te komen?' (dat dit op het echte speelveld niet kan gaf geen problemen). Voor opgaven in  $\mathbb{Q}$  maakten we een 'breukenvoetbalveld'.

- 7 Hoofdstuk 4 van deel 2. N.a.v. het artikel van Bram Lagerwerf in Euclides van augustus/september 1979/1980 (blz. 21 e.v.) ontstond het idee om aftrekken van negatieve getallen te illustreren met een groot voetbalveld op de grond. Dit nadat de regelmaten aan de orde waren geweest.

Bij voorbeeld: eerst  $5 + 2$

$$5 + 1$$

$$5 + 0$$

$$5 + -1 \text{ is hetzelfde als } 5 - 1$$

$$5 + -2 \text{ is hetzelfde als } 5 - 2$$

en daarna:  $5 - 2$

$$5 - 1$$

$$5 - 0$$

$$5 - -1 \text{ is hetzelfde als } 5 + 1$$

$$5 - -2 \text{ is hetzelfde als } 5 + 2$$

Bij het grote voetbalspel op de grond werd een leerling gepromoveerd tot bal en de spelregels uitgebreid tot de volgende:

- begin op start ('0') met het gezicht in de richting van de positieve getallen
- 3 betekent ga drie stappen vooruit
- -3 betekent ga drie stappen achteruit
- $3 + -4$  wordt dan: drie stappen vooruit en daarna vier stappen achteruit bij aftrekken omdraaien
- $-3 - -4$  wordt dan: drie stappen achteruit, omdraaien en 4 stappen achteruit

Dit was een hele belevenis, de leerlingen vonden het prachtig. De opmerking: 'omdraaien en achteruit is hetzelfde als vooruit' viel al na één voorbeeld. De rest volgde vanzelf. Hoewel hoofdstuk 4 verder nog wat gekkigheden heeft (o.a. 4.5) bleek het met dit voetbalspel goed te doen.

Waarom pas je zoiets toe in de klas? Zonder voetbalspel gaat het toch ook? Ik heb het in eerste instantie gebruikt om de motivatie op te vijzelelen resp. op peil te houden. Alleen al hierom is het waardevol genoeg. Verder bleek het een herkenningspunt te zijn als er in volgende hoofdstukken met negatieve getallen iets fout liep. Er was iets om op terug te vallen en wel op iets voorstelbaars, iets dat aan den lijve ervaren is. Nu het spel in eerste fase weer in de brugklas aan de orde is geweest reageren de tweede klassers op het zien ervan: 'meneer, weet u nog hoe leuk het was!' En of ik dat weet!

Ik hoop dat deze en andere aardigheden gewoon worden in het wiskunde-onderwijs en ook een vaste plaats krijgen in de methodes. Een tip voor de (her)schrijvers van Moderne Wiskunde? Aan het voetbal en wat daarmee samen hangt zitten veel negatieve kanten, aan dit voetbalspel met negatieve getallen uitsluitend positieve!

# Werkvormen bij het behandelen van gemaakte vraagstukken

HARM BOSSCHER

## I Problemen bij vraagstukkencontrole

Het overkomt veel leraren dat het klassikaal behandelen van door de leerlingen gemaakte vraagstukken meer tijd kost dan bij het maken van het lesplan werd gedacht. Meestal gaat dit dan ten koste van de tijd die voor zelfwerken door de leerlingen was gereserveerd. We vinden het ook belangrijk dat de leerlingen individueel of samen de nieuwe problemen gaan aanpakken. Als leraar kunnen we dan immers beter zien waar de moeilijkheden voor de leerlingen zitten en kunnen we door het stellen van toespitsende vragen de leerlingen helpen, opdat zij zelf weer de volgende stap kunnen zetten. Hoe meer de leerlingen zelf kunnen, hoe actiever ze worden, want succes motiveert.

Om te voorkomen dat bijna de hele les klassikaal gewerkt wordt, wat voor de leraar erg vermoeiend en voor de leerlingen meestal nogal saai is, terwijl ordeproblemen daarbij niet ongebruikelijk zijn, willen we eens de verschillende werkvormen voor het controleren van de door de leerlingen gemaakte vraagstukken bekijken, teneinde de keuze van die werkvormen iets beter te kunnen funderen. Daarbij onderscheiden we dan aanbiedende werkvormen zoals doceren, gespreksvormen zoals onderwijsleergesprek en zelfwerkzaamheidsvormen zoals werken in groepjes of individueel werken.

## II Drie soorten werkvormen

### 1. *De leraar doceert via het bord*

#### 1.1. Activiteiten van de leraar

Als de leraar zelf op het bord de vraagstukken maakt, uitlegt hoe het probleem moet worden opgelost, is het zijn bedoeling dat de leerlingen luisteren en meedenken. De leerlingen krijgen dan een goed geordend denkproces aangeboden. Wel is het daarbij nodig dat de leraar alle denkstappen expliciet maakt. De leraar moet dan steeds beargumenteren op basis van welke informatie hij tot een volgende stap besluit, opdat de leerlingen niet de indruk krijgen dat de leraar een soort tovenaars is. Deze methode vraagt niet te veel tijd, zodat er een goede kans is dat de leraar zijn programma kan afwerken. Daarmee is natuurlijk nog niet gezegd dat dit ook voor de leerlingen het geval is. Deze methode wordt wel

gebruikt om te bereiken dat de leerlingen in elk geval alle uitwerkingen goed in het schrift hebben, zodat zij thuis alles goed kunnen 'leren'.

## 1.2. Activiteiten van de leerlingen

Dikwijls is het zo dat de leerlingen tijdens het doceren door de leraar, al zelf in hun schrift schrijven wat de leraar op het bord schrijft. De aandacht voor het denkproces is dan gering, de leerlingen liggen in hun denken steeds een stap achter bij de leraar. Vooral in hogere klassen hebben leerlingen dan soms de ervaring dat zij in de eerste plaats op school komen om veel op te schrijven en dat ze daarover dan thuis pas kunnen gaan nadenken. Bij het hanteren van deze werkvorm is het eigenlijk noodzakelijk om regelmatig te pauzeren voor het opschrijven, opdat de leerlingen tijdens het doceren echt kunnen meedenken. Deze werkvorm kost dan natuurlijk wel wat meer tijd. Men voert wel aan dat studenten ook tijdens hun colleges aantekeningen moeten kunnen maken terwijl de docent verder gaat. Deze onderwijskundig ongewenste situatie in het H.O., waar veel studenten juist bezwaren tegen hebben, mag natuurlijk niet leiden tot zulk handelen in het V.O.

## 1.3. Motivatie en relatie

De leerlingen stellen zich bij deze werkvorm soms erg afhankelijk van de leraar op. Omdat ze toch in de les de uitwerking die de leraar van het vraagstuk op het bord geeft in hun schrift moeten schrijven, want dat is immers het beste, proberen de leerlingen niet meer echt eerst zelf de vraagstukken te maken. De motivatie wordt niet optimaal gevoed, omdat het oproepen van een zekere spanning die bij het zelf oplossen van nieuwe problemen ontstaat, hier ontbreekt. De leraar krijgt ook weinig inzicht in de wijze waarop de leerlingen proberen de vraagstukken aan te pakken. Als de leraar tijdens het doceren controlevragen stelt, behoeven de leerlingen slechts actief te zijn op het denkniveau 'begrijpen'. Doordat de leraar steeds voor de klas staat, is de relatie leraar-leerling nogal formeel en zal het lesklimaat weinig sfeervol zijn.

## 2. *Onderwijsleergesprek met de klas*

### 2.1. Vragen stellen en antwoorden geven

Via het onderwijsleergesprek probeert de leraar door het stellen van vragen de leerlingen zo actief mogelijk bij de les te betrekken. Het is wel nodig dat de leerlingen de spelregels goed weten. Zo zal er na een vraag gepauzeerd worden om de leerlingen te laten nadenken, terwijl daarna pas iemand een beurt krijgt. De bedoeling is te voorkomen dat leerlingen, zonder zelf eerst goed na te denken, door elkaar gaan antwoorden. De leerlingen behoeven ook geen vingers op te steken, het gaat er immers niet eerst om dat de leerlingen die het al wel weten een beurt krijgen. Bij niet geheel goede antwoorden van een leerling stelt de leraar toespitsende vragen, bij goede antwoorden speelt de leraar de vraag eerst nog eens naar andere leerlingen door. De leraar streeft naar het bereiken van hogere

denkniveaus bij het analyseren van het probleem, het ontdekken van oplossingen en het vergelijken daarvan.

## 2.2. Selecteren van vraagstukken

Een aantal leerlingen zal tijdens het onderwijsleergesprek over gemaakte vraagstukken niet veel leren, omdat zij zelfstandig al in staat waren om het denkproces goed te doorlopen. Alleen door hen een bijdrage te laten leveren in het op gang brengen van het denkproces bij andere leerlingen kunnen zij zinvol meedoen. Het is dan ook niet gewenst om alle vraagstukken op deze manier te behandelen. Eerst kan geïnventariseerd worden hoeveel leerlingen met elk van de vraagstukken problemen hadden. Op grond daarvan kan de leraar besluiten welke opgaven met deze werkvorm zullen worden behandeld en welke opgaven via doceren of tijdens de zelfwerkzaamheidsfase aan de orde zullen komen. Ook is het zinvol om bij het opgeven van vraagstukken reeds zo te selecteren dat niet te veel vraagstukken van hetzelfde type moeten worden gemaakt. Door de behandeling via onderwijsleergesprek van één vraagstuk van een bepaald type kan het leerproces zo gevorderd zijn, dat de leerlingen daarna zelfstandig verder kunnen met dit soort opgaven.

## 2.3. Bereidheid tot deelnemen

Via het onderwijsleergesprek probeert de leraar om de bereidheid van de leerlingen te vergroten om over de vragen na te denken en erop te reageren, daarom gebruikt de leraar de techniek van het stellen van toespitsende vragen en het doorspelen van vragen. Het is voor de leraar natuurlijk wel prettig en belonend om snel goede antwoorden te krijgen, maar het doel is dat alle leerlingen tot goede denkprocessen en oplossingen komen. Door positief te reageren op de stappen die de leerlingen zelf maken, krijgen zij ook meer zelfvertrouwen en worden gemotiveerd om zelf weer verder te denken.

## 3. *Zelfwerkzaamheid van leerlingen*

### 3.1. Door de leerlingen op het bord

Een vrij veel gebruikte vorm is het laten maken van een vraagstuk door een leerling op het bord. De leraar controleert dit dan en de andere leerlingen vergelijken het met hun eigen werk. Het verdient aanbeveling om de opgave zo spoedig mogelijk nadat de leerlingen deze zelf gemaakt hebben, op het bord te laten verschijnen. Snelle feedback is van belang voor de motivatie, dit geldt vooral voor de zwakkere leerlingen. Tijdens de zelfwerkzaamheidsfase van de les kan zo reeds een aantal opgaven worden gecorrigeerd. Vooral in de lagere klassen is het mogelijk om de leerlingen op deze manier veel zelf te laten werken. Hierdoor behoeven er in de volgende les weinig vraagstukken van de vorige les behandeld te worden, zodat dit werkpatroon zich kan herhalen. Het maken van vraagstukken is dan iets wat echt bij de les behoort. De leerlingen gaan niet in de les nog even aan het huiswerk beginnen, maar zullen eventueel thuis nog iets van



het werk uit de les gaan afmaken. In de praktijk vindt nogal eens het omgekeerde plaats. Behandeling van vraagstukken uit de vorige les en van het huiswerk gebeurt dan pas in de volgende les, hetgeen nogal eens te veel tijd gaat kosten, waardoor er weinig tijd voor zelf werken overblijft. Als dit patroon zich gaat herhalen zal het maken van vraagstukken weer als huiswerk maken worden ervaren. De motivatie van de leerlingen voor het maken en corrigeren van vraagstukken zal dan meestal kleiner worden.

### 3.2. Antwoordenlijst en uitgewerkte opgaven

Het is ook mogelijk om antwoorden of uitwerkingen van vraagstukken uit te delen en eventueel later weer op te halen. Een andere mogelijkheid is het permanent beschikbaar hebben van uitwerkingen van opgaven, b.v. in een kaartsysteem, opdat leerlingen deze individueel kunnen raadplegen als zij daar aan toe zijn. Zeker bij hogere klassen is het zinvol om de leerlingen gekopieerde uitwerkingen zelf te laten meenemen om zonodig de controle thuis voort te kunnen zetten. Het is immers belangrijk dat de leerlingen in de les ook aan nieuwe vraagstukken gaan werken, waarbij de leerlingen door elkaar en door de leraar geholpen kunnen worden. Het te snel raadplegen van antwoorden of uitwerkingen is uiteraard niet de bedoeling. Wel kan het zinvol zijn dat de leerlingen ernaar kijken als ze echt niet weten hoe ze een vraagstuk moeten aanpakken. Het is dan een manier om op gang te komen. Ook kunnen eventueel gemaakte fouten geconstateerd worden, waarop een nieuwe poging kan volgen.

### 3.3. Samenwerking van leraren en leerlingen

Het gereedmaken van uitwerkingen van opgaven door de individuele leraar kan veel tijd kosten. Samenwerking in de sectie is daarvoor een goede oplossing. Tijdens de zelfwerkzaamheidsfase kan de leraar het soms ook vrij druk hebben, vooral als leerlingen individueel werken. Bij het werken in groepjes is dit bezwaar echter minder aanwezig. De leerlingen kunnen individueel of per groepje in eigen tempo werken, de lestijd kan dan door de leerlingen zo zinvol mogelijk door hen besteed worden. De relatie leraar-leerling kan bij zelfwerkzaamheid meer persoonlijk zijn, de leraar hoeft minder de leiding te nemen en de leerlingen leren meer eigen verantwoordelijkheid te dragen.

## III Het kiezen van werkvormen

### 1. *Wisselen van werkvormen*

#### 1.1. Doceren tijdens onderwijsleergesprek?

Tijdens een onderwijsleergesprek doceert de leraar ook wel eens een stukje als er in een bepaald gedeelte van het vraagstuk geen moeilijkheden voorkomen, eventueel stelt de leraar alleen invulvragen om de aandacht van de leerlingen erbij te houden. Het stellen van denkvragen is immers van belang als de leerstof moeilijker is. Sommige leraren doceren echter juist bij voorkeur als de leerstof

moeilijk is, omdat de leerlingen het anders toch niet begrijpen. Dat betekent dan echter wel dat de leerlingen deze leerstof niet op een hoger niveau dan 'begrijpen' zullen beheersen, misschien is dat soms ook wel voldoende. Als het echter de bedoeling is om moeilijker leerstof op b.v. het niveau analyse te beheersen, zodat de leerlingen ook nieuwe problemen zelf kunnen gaan oplossen, dan zijn werkvormen nodig waar de leerlingen zelf actiever bij hun leerproces betrokken worden.

### 1.2. Klassikaal werken tijdens zelfwerkzaamheid?

Zelfwerkzaamheid wordt wel eens onderbroken om klassikaal een moeilijkheid te bespreken bij een vraagstuk. Het kan voor leerlingen vrij storend zijn om op deze wijze uit hun eigen werksituatie zich te moeten losmaken. Het blijkt dan ook meestal vrij lang te duren voordat alle leerlingen bereid en in staat zijn om mee te denken, terwijl de leraar soms denkt snel even iets aan de orde te kunnen stellen en zich dan niet realiseert dat hij daarmee zelf een ordeprobleem veroorzaken kan. Beter is het tevoren bij de planning van de les te overwegen waar de onderdelen zitten die voor te veel leerlingen problemen zullen gaan opleveren en deze eerst integraal te behandelen.

### 1.3. Onderwijsleergesprek met één leerling?

De leraar die een gesprek voert met één leerling die voor het bord staat om een vraagstuk op te lossen, terwijl de andere leerlingen daar niet bij worden betrokken of geen andere taak hebben, vraagt wel veel van het geduld van hen. Ook het voeren van een lang onderwijsleergesprek met één leerling die tijdens zelfwerkzaamheid een vraagstuk op het bord maakt, geeft soms problemen. Beter is het eerst even in het schrift te kijken van de leerling of deze de opgave wel redelijk gemaakt heeft. Als dit niet het geval is kan de leerling beter individueel geholpen worden en kan aan een andere leerling gevraagd worden de opgave op het bord te maken. Bij het individueel helpen kan ook een aantal vaardigheden van het onderwijsleergesprek goed worden gebruikt.

## 2. *Criteria voor de keuze*

Bij het kiezen van de werkvormen spelen verschillende aspecten een rol. Beperkt het doel zich tot het begrijpen en reproduceren of gaat het er ook om dat leerlingen zelf nieuwe problemen leren aanpakken? Is het voldoende dat de leerlingen alleen hun vraagstukken in het schrift kunnen maken of is het ook van belang dat zij zich goed in wiskundige taal leren uitdrukken en met elkaar over wiskundige problemen leren praten? Beperken we ons tot het nastreven van leerstofdoelen of is het ook van belang dat leerlingen leren samenwerken, begrip voor elkaar krijgen, elkaar leren op een goede manier te helpen? De keuze van werkvormen zal ook afhangen van het leerjaar van de leerlingen. In hoeverre zijn de leerlingen in staat om gedurende een bepaalde periode individueel of in groepjes te werken? Moeten zij eerst nog leren om zich van wiskundetaal te bedienen? Zijn ze al in staat om abstracte redeneringen te volgen en zelf op te bouwen? Wordt hun motivatie meer bevorderd door het worstelen met een probleem of door het sociale klimaat in de klas? Ook de aard van de leerstof

speelt een rol. Gaat het om toepassingen van eenvoudige theorie of moeten de vraagstukken juist leiden tot het opbouwen van een stuk nieuwe theorie? Welke denkniveaus zijn nodig om de opgaven te kunnen aanpakken? Tenslotte is een belangrijke vraag of de leraar denkt dat de leerlingen het beste leerresultaat zullen behalen door een groot aantal vraagstukken van hetzelfde type te laten maken, waarbij meer verwacht wordt van het opbouwen van routine, of dat betere resultaten bereikt zullen worden door met een kleiner aantal vraagstukken betere denkprocessen te laten plaatsvinden. Ook de mate waarin de leerlingen de conclusies of oplossingsmethoden zullen kunnen expliciteren is daarbij van belang.

### 3. *Veranderen van werkvorm*

Het kan in het begin wat extra moeite kosten om leerlingen aan een andere werkvorm te laten wennen. Een passieve houding van leerlingen, waarbij ze zitten en schrijven, veranderen in een actieve houding waarbij ze zelf denken en reageren, is niet altijd eenvoudig. Iedere werkvorm zal daarom steeds met de leerlingen moeten worden besproken, zodat de leerlingen weten hoe deze plaatsvindt en waarom deze voordelen heeft. De leraar zal het moeten aandurven tijdelijk wat minder leerstof aan de orde te kunnen stellen doordat meer accent op de werkvorm gelegd wordt. In de praktijk is het dikwijls zo dat de leraar zichzelf en de leerlingen door het opgeven van een te groot aantal vraagstukken, dwingt tot een werkvorm die zij eigenlijk zelf niet prettig vinden. Door minder vraagstukken te kiezen en deze volgens werkvormen aan de orde te stellen waarbij leerlingen actiever betrokken zijn, kunnen er betere leerprocessen worden doorlopen, waardoor het effect zeker op lange termijn beter is. Het bevorderen van eigen verantwoordelijkheid van leerlingen voor hun leerproces is daarbij ook een belangrijke doelstelling.

## IV **Slotopmerking**

Dit artikel is vooral geschreven vanuit een probleem dat zich in de praktijk voordoet: het behandelen van gemaakte vraagstukken kost dikwijls meer tijd dan gewenst is. De mogelijkheden die genoemd zijn om dit probleem te benaderen hebben vooral als doel de leerlingen zo te begeleiden dat de motivatie en de leerresultaten zo gunstig mogelijk blijven. Ook andere overwegingen voor het kiezen van werkvormen zijn daarbij aangeduid. Meer over werkvormen en wiskundeonderwijs is te vinden in de publikaties van de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren door Joop van Dormolen en anderen, en in zijn boek 'Didaktiek van de Wiskunde', hoofdstuk 6, Utrecht 1976.

### ***Over de auteur:***

*Harm Bosscher, geboren in 1934, was tot 1977 leraar wiskunde en conrector onderwijskundige zaken aan het Rijnlands Lyceum te Oegstgeest. Thans is hij verbonden aan de interfacultaire vakgroep lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Leiden als docent algemene onderwijskunde ten behoeve van de opleiding van a.s. wiskundeleraren.*

The Mathematics Teacher van januari 1979 leverde stof voor twee opgaven. De eerste, getiteld Odd Pie Fights, is afkomstig van Lowell Carmony; de tweede is geïnspireerd op een artikel van Courtney D. Young Jr., getiteld X-game.

## Opgaven

**443.** In een zaal bevinden zich een oneven aantal personen op onderling verschillende afstanden. Ieder gooit een bananepudding naar degenen die het dichtst bij hem staat.

Te bewijzen:

- a er is ten minste één persoon die geen enkele bananepudding naar zijn hoofd krijgt;
- b de bananepuddingbanen vormen geen enkel gesloten circuit;
- c het is niet mogelijk dat twee bananepuddingbanen elkaar snijden en dus zullen gelukkig alle puddingbanen hun doel bereiken;
- d niemand krijgt meer dan vijf bananepuddingen naar zijn hoofd.

De opgave is voor leraren aan de gemakkelijke kant. Ze is echter bedoeld om de leerlingen te activeren een aardig probleem zelfstandig aan te pakken. Om de leerlingen beter te motiveren zijn blijkbaar bananepuddingen gekozen. Ook met ander materiaal zou de opgave goed kunnen dienen voor een laatste les voor de vakantie.

**444.** Een rechthoek met rechthoekszijden 4 en 5 is verdeeld in 20 vierkanten.  $A$  en  $B$  kruisen om beurten minimaal 1 en maximaal 4 vierkanten aan. Wie het laatste vierkant aankruist, wint.  $A$  laat  $B$  beginnen. Als trouw lezer van deze rubriek heeft  $A$  namelijk in de gaten, dat  $B$  dan beslist verliezen zal.  $B$  krijgt er na een tijdje genoeg van en vraagt  $A$  ook eens te beginnen.  $A$  accepteert, maar stelt voor eerst de regels wat te veranderen. Hij voegt de eis toe dat de elke keer aangekruiste vierkanten een samenhangend geheel moeten vormen (volgens zijden samenhangend). We nemen aan, dat  $B$  langzamerhand ook maximaal slim geworden is. Zou  $A$  het nog winnen?

## Oplossingen

**441.**  $A$  en  $B$  gaan 'poten' om te bepalen wie de eerste keus heeft. Om de beurt schoen recht of dwars vooruit zetten; wie de verbinding tot stand brengt, heeft de eerste keus.

$A$  heeft grotere schoenen dan  $B$ . Wie heeft daardoor een grotere winstkans? Neem de beginafstand relatief groot (meer dan 400).

Neem:

schoenen van  $A$  50 lang en 20 breed

schoenen van  $B$  25 lang en 10 breed

resp.

schoenen van  $A$  50 lang en 20 breed

schoenen van  $B$  40 lang en 16 breed.

In het eerste geval zet  $A$  zijn poot dwars, totdat de afstand minder dan 50 bedraagt.  $B$  krijgt zo geen poot aan de grond.

Nu het tweede geval. Gemakshalve delen we alle verhoudingsgetallen door 2.

$W_A$  en  $V_A$  zijn de verzamelingen van de afstanden die winst resp. verlies voor  $A$  opleveren, als hij deze van zijn tegenpartij toebedeeld krijgt.

$W_B$  en  $V_B$  hebben analoge betekenissen.

We ronden eerst alle afstanden af op gehele naar boven. Dan geldt:

$$1 \leq x \leq 25 \Rightarrow x \in W_A$$

als  $x > 25$ , dan

$$x \in W_A \Leftrightarrow x - 25 \in V_B \vee x - 10 \in V_B \text{ en}$$

$$x \in V_A \Leftrightarrow x - 25 \in W_B \wedge x - 10 \in W_B$$

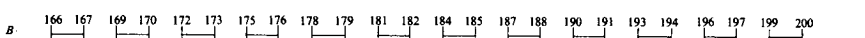
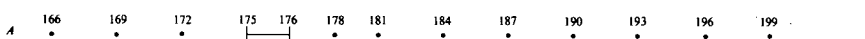
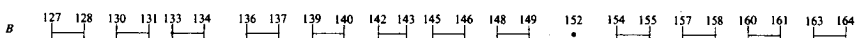
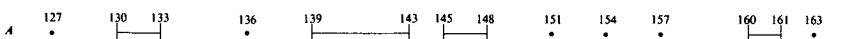
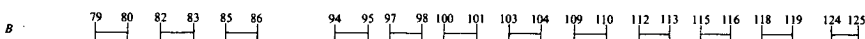
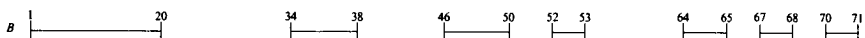
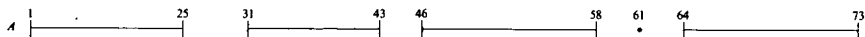
$$1 \leq x \leq 20 \Leftrightarrow x \in W_B$$

als  $x > 20$ , dan

$$x \in W_B \Leftrightarrow x - 20 \in V_A \vee x - 8 \in V_A \text{ en}$$

$$x \in V_B \Leftrightarrow x - 20 \in W_A \wedge x - 8 \in W_A$$

Op onderstaande getallenlijnen zijn de elementen van  $W_A$  resp.  $W_B$  aangegeven door middel van lijnstukken of stippen.

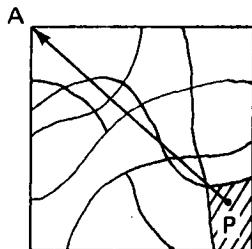
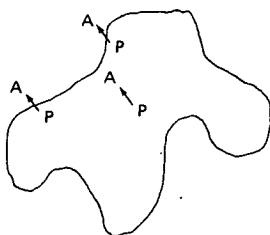


Nu gaat het definitief met periode 3 zo verder.

De kans van  $B$  om te winnen is dus 2 maal zo groot als die van  $A$ . Tenminste als we aannemen dat de beginafstand groot genoeg is en dat de kans dat men deze beginafstand kiest tussen  $a$  en  $b$  evenredig is met  $|a - b|$ .

Nu gaat uw puzzelhart open. Kunnen we dit resultaat generaliseren? Het eerste voorbeeld is doorzichtig, maar in het tweede zie ik geen gat. Als iemand iets vindt, houd ik mij aanbevolen.

**442.** Een gesloten kromme in een roostervlak omvat een vlakdeel met oppervlakte groter dan  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Het is mogelijk de kromme een zodanige translatie te doen ondergaan, dat het beeld een vlakdeel omvat waarin minstens  $n + 1$  roosterpunten liggen.



Onderstel de kromme omvat een vlakdeel met oppervlakte 24,4.

Knip alle roostervierkanten uit die geheel of gedeeltelijk binnen de kromme liggen en schuif die op elkaar. Het resultaat ziet men, vergroot, in de rechter figuur.

Voer de translatie met vector  $\overrightarrow{PA}$  uit. Onderstel dat daarna slechts 24 roosterpunten binnen de beeldkromme liggen. Dan behoort  $P$  tot slechts 24 roostervierkanten die geheel of gedeeltelijk

binnen de kromme liggen. Hetzelfde geldt voor alle punten van het gearceerde deel. Als elke translatie slechts 24 (of minder) roosterpunten binnen de beeldkromme oplevert, corresponderen alle vlakdeeltjes van de rechter figuur slechts met hoogstens 24 vlakdelen van de linker. Hetgeen wil zeggen, dat de oppervlakte die door de oorspronkelijke kromme ingesloten wordt, hoogstens 24 is. En geen 24.4. Hiermee is de bewering bewezen.

## Boekbesprekingen

Hans Steur, *Levende Wiskunde, Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*, Educaboek, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg 1980, XVI + 357 blz., f52,-.

Vaak horen wiskundeleraars het verwijt dat hun lessen zo weinig met de werkelijkheid te maken hebben. Essentieel is dat wiskunde een fundamentele rol speelt in het maatschappelijk en economisch leven en hiervan dringt zo weinig in de wiskundeles door. Van de zijde van de leraren hoort men dan, dat het zo moeilijk is goede voorbeelden te vinden waaruit het nut van de wiskunde blijkt. (Ik denk hierbij natuurlijk niet aan moderne leraren met IOWO-instelling.)

Hans Steur heeft zich als doel gesteld aan leraren materiaal te verschaffen om hun wiskundelessen met praktische toepassingen te kunnen verrijken. Hij is daarin voortreffelijk geslaagd. Men vindt in dit boek een veelheid van toepassingen op allerlei gebied: mechanica, natuur- en scheikunde, landmeetkunde, economie, aardrijkskunde en sterrenkunde. De toepassingen zijn systematisch geordend naar de hoofdstukken uit de wiskunde waarop ze betrekking hebben. Bovendien is bij elke toepassing vermeld in welke klasse hij ter sprake gebracht kan worden. De leraar kan daardoor putten uit een overzichtelijk gerangschikt arsenaal.

De schrijver heeft zich met nauwgezette discipline gehouden aan de schoolstof. Hij heeft zich niet laten verleiden onderwerpen toe te voegen die 'wel aardig' zijn en misschien zelfs spectaculaire mogelijkheden bieden voor een laatste les voor de vakantie, maar die uitgaan boven de eigenlijke schoolstof. M.i. zeer terecht vindt men dan ook niet of nauwelijks voorbeelden die thuis horen in een rubriek mathematische recreatie.

De instelling van de auteur zou ik willen vergelijken met die van een fabrikant voor wie kwaliteit primair is en die niet poogt door uiterlijkheden en bijmengsels zijn produkt extra aantrekkelijk te maken, eventueel ten koste van de kwaliteit. Ik heb deze instelling erg op prijs gesteld.

Kritiek heb ik nauwelijks. Als ik iets zou mogen zeggen, dan dit: de kansrekening is er wat bekaaid afgekomen. Anderzijds: als men aan dit onderwerp begint, wordt wel een enorm gebied aangesneden en loopt men de kans juist in het spectaculaire en in de recreatie terecht te komen.

Dit boek mag in geen lerarenbibliotheek ontbreken. Het moet binnen handbereik van de leraar zijn. Wie zijn lessen thuis pleegt voor te bereiden, kan het beter nog in eigen bezit hebben.

P. G. J. Vredenduin

Dieter Klaua, *Mengenlehre*, Walter de Gruyter, Berlin New York 1979, 358 blz., 48 DM.

De auteur kiest een ongewoon, maar uiterst efficiënt stel axioma's om de verzamelingenleer te funderen.

Uitgegaan wordt van oerelementen die geen verzamelingen zijn, maar wel element van verzamelingen. Deze zijn van het laagste type. Aan elke verzameling wordt een type toegekend; het type van een verzameling is hoger dan dat van zijn elementen. In een aantal axioma's wordt vastgelegd wat onder typen verstaan wordt.

Fundamentele begrippen zijn:

*Grenzbereiche*, dat zijn verzamelingen waarin bij elk element een element van hoger type voorkomt; *Allmengen*, dat zijn verzamelingen van alle verzamelingen van lager type;

*Allbereiche*, dat zijn Allmengen die tevens Grenzbereich zijn.

Nu volgt het *extensionaliteitsaxioma*, dat zegt dat verzamelingen met dezelfde elementen gelijk zijn

(d.w.z. voor elkaar substitueerbaar zonder aan geldigheid van uitspraken iets te veranderen). En daarna enkele axioma's die de existentie van bepaalde verzamelingen poneren: het *comprehensieaxioma*, dat ons in staat stelt deelverzamelingen uit een verzameling te vormen van alle elementen met een bepaalde eigenschap; het *oneindigheidsaxioma*, dat vastlegt dat er ten minste één verzameling bestaat en dat elke verzameling element van een Grenzbereich is; het *keuzeaxioma*.

Nu zijn we zelfs in staat het begrip *kardinaalgetal* van een verzameling te definiëren. Onderstel  $A$  is een verzameling.  $K$  is de kleinste Allmenge die een met  $A$  gelijkmachtig element bevat. Dan is het kardinaalgetal van  $A$  de verzameling van elementen van  $K$  die gelijkmachtig met  $A$  zijn. Het lijkt zo eenvoudig, maar enkele decennia geleden was men er nog niet in geslaagd kardinaalgetallen, althans oneindige, te definiëren binnen de theorie van de verzamelingen. Men meende het kardinaalgetal van  $A$  te moeten definiëren als de verzameling van alle met  $A$  gelijkmachtige verzamelingen. En dergelijke ongebreidelde methoden om verzamelingen te vormen waren verboden, omdat ze tot contradicties leiden.

We zijn er echter nog niet. In de categorieëentheorie beschouwt men verzamelingen als de verzameling van alle ringen. Om zo omvangrijke verzamelingen te kunnen vormen is een nieuw axioma nodig.

Onder een *universum*  $U$  verstaan we, ruwweg gezegd, een verzameling met de volgende eigenschap: kies een deelverzameling  $A$  van  $U$  en een verzameling afbeeldingen; de verzameling beelden van  $A$  is dan weer een deelverzameling van  $U$ .

En nu het axioma: *elke verzameling is element van een universum*.

Nu zijn we in staat de gehele huidige wiskunde te formuleren in de taal van de verzamelingenleer.

En als dat over enige tijd toch weer niet mogelijk blijkt? Wel, dan ligt een theorie klaar met universa van hogere orde. Zodat we ons voorlopig geen zorgen behoeven te maken.

De geschetste opbouw van de verzamelingenleer is een mengsel van de typentheorie van Russell-Whitehead en de axiomatiek van Zermelo-Fraenkel. Ze is zo gekozen, dat een doorzichtige opbouw mogelijk wordt. Moeilijke elementen die we elders wel tegenkomen, zoals het funderingsaxioma en klassen, die wel elementen hebben maar geen verzamelingen zijn, komen niet voor.

De schrijver is verder een uitnemend didacticus. Op informele wijze worden theorieën eerst afgeleid zonder op strengheid te letten. Heeft men de essentie begrepen dan eerst volgt de officiële behandeling. Deze is helder. Van symboliek wordt gebruik gemaakt, zolang dit het inzicht bevordert, maar verder geeft de auteur de voorkeur aan uiteenzettingen in natuurlijke taal. Men heeft soms het gevoel dat de auteur op zo ongedwongen wijze moeilijkheden oplost, dat deze hun gecompliceerd karakter verliezen.

Kortom, wie er prijs stelt vertrouwd te raken met de strekking en de mogelijkheden van de huidige verzamelingenleer, kan ik dit boek warm aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

Paul R. Thie, *An Introduction to linear Programming and Game Theory*, £ 9,95, \$ 20,00, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England.

Dit boek is bestemd voor studenten in de wiskunde, natuurwetenschappen, economie en beslistkunde en veronderstelt niet meer wiskundige voorkennis dan het eindniveau van het VWO. Het is een leerboek in de beste zin van het woord: het is inleidend, het is volledig wat betreft de definities, stellingen en bewijzen en het bevat een rijkdom aan voorbeelden. Het inleidend karakter blijkt direct al in hoofdstuk 1 uit de manier waarop begrippen uit de lineaire programmering en speltheorie worden geïntroduceerd: via een tot de verbeelding sprekende behandeling van het dieetprobleem (op welke wijze een persoon tegen minimale kosten te voorzien van een adequaat dieet). Op deze manier krijgt men al gauw een gevoel voor de soort van wiskundige problemen die met de naam lineaire programmeringsproblemen worden aangeduid, en ook voor de mogelijkheden en moeilijkheden bij de oplossing daarvan. In hoofdstuk 3 wordt de bekende Simplex methode uitgelegd, toepasbaar op het lineaire programmeringsprobleem in de standaardvorm gebracht. Ook hier getuigt de uitleg van didactisch inzicht; stap voor stap wordt het algoritme uitgelegd en de lezer

hoeft het spoor nergens bijster te worden. Hetzelfde geldt voor de behandeling van het dualiteitsprincipe waarbij het maximaliseren van een lineaire functie onder lineaire beperkingen vervangen wordt door het (duale) probleem van minimalisering (hoofdstuk 4). Het tweede deel van het boek begint met een behandeling van het lineaire geheeltallige programmeringsprobleem: dat ontstaat als de definitiegebieden van enkele (of alle) variabelen de verzameling der integers is. Dit is een natuurlijke veronderstelling die bijvoorbeeld geldt als men een verschepingsprobleem bekijkt waarbij de te transporteren eenheden auto's, koelkasten e.d. zijn.

Verscheidene algoritmen voor de oplossing passeren de revue. Het boek eindigt met een lezenswaardige, elementaire inleiding in de speltheorie en beslissingsproblemen.

Uw recensent kan dit boek aanbevelen als een goede en interessante inleiding in een belangrijk gebied van de toegepaste wiskunde. Met enige inspanning zal men in korte tijd inzicht kunnen verkrijgen in het in de titel genoemde gebied.

A. Ollongren

Johannes Tropske, *Geschichte der Elementarmathematik*, 4e druk, Band I, Arithmetik und Algebra, Walter de Gruyter, Berlin, 1979, 742 blz., gebonden DM 184, —.

De eerste druk van dit monumentale werk verscheen al in 1902, in twee delen, de tweede druk in 7 banden in de 20-er jaren, de 4 delen van de 3e druk tussen 1930 en 1940 (de manuscripten van de overige delen gingen in 1945 verloren). Dan nu een kleine 50 jaar later de vierde druk. Uiteraard moet een dergelijk werk van tijd tot tijd aangepast worden aan de laatste stand van de wetenschap. Dit omvangrijke werk is aangepakt door drie geleerden: dr. Vogel, dr. Reich en dr. Gericke. Het volledige werk zal bestaan uit 3 delen. Het tweede deel zal gewijd zijn aan de meetkunde en het derde deel aan de analyse.

Uit de inhoud: het eerste gedeelte is gewijd aan de getallen: rekenen en algebra, getalwoorden, getalsystemen, getaltekens en maatsystemen, getalbegrip, getaldefinities; het tweede gedeelte aan rekenoperaties: elementaire operaties, rekenen met breuken, machten, wortels, logaritmen; het derde gedeelte aan algebra: algebra zonder symbolen, vergelijkingen, benaderde oplossingen van algebraïsche vergelijkingen, het vierde gedeelte aan toegepast rekenen: problemen uit het dagelijkse leven, problemen uit de recreatieve sfeer.

Vervolgens een Literaturverzeichnis met biografische notities (65 blz.) en een persoons- en zaakregister (16 blz.).

De behandeling van de vele onderwerpen gebeurt uiterst zorgvuldig. Van ieder onderwerp wordt de ontwikkelingsgang van de vroege oudheid tot heden precies aangegeven. Zo mogelijk worden de rekenvoorbeelden precies uitgewerkt. Zeer gedocumenteerd met verwijzingen naar de bronnen. E.e.a. wordt gevolgd door een historisch overzicht van de betreffende vaktaal, de door de vele auteurs gebruikte woorden dienaangaande en de betekenis daarvan. Als voorbeeld noem ik hier verschillende benamingen voor noemer: denominatio (bij Hispalensis), nomen (bij Buteo), numerus denominationis (Hispalensis), numerus denominans (Leonardo van Pisa e.a.), denominator (Lineriis).

De lezer wordt aldus zeer precies geïnformeerd. Aan de keus van de onderwerpen is de uiterste zorg besteed, de gegeven informatie is zeer gedetailleerd en up to date. Op deze wijze is een prachtig handboek ontstaan. De indeling van het werk is zeer overzichtelijk, de gebruikswaarde is, mede door het goede overzicht van de inhoud, het uitvoerige register, het zeer uitvoerige literatuuroverzicht, zeer groot. De uitvoering van het werk is prachtig: ruim van opzet, overzichtelijke bladspiegel, de rekenvoorbeelden zijn ruim afgedrukt, veel schema's tekeningen en foto's verlichten op functionele wijze de tekst.

Kennis van de geschiedenis der wiskunde acht ik van uitermate groot belang voor iedere wiskundeleraar. Waarom zo, hoe kwam men tot de verschillende begrippen en theorieën? Zoals Toeplitz het eens uitdrukte: door het spannende verhaal van het zoeken krijgen we zicht op de opwindende handelingen van toen. Daardoor verdwijnt het stof van de tijden en worden de begrippen als het ware beziel. Ook voor onze leerlingen is het in hoge mate motiverend te horen hoe, waardoor en



waarom problemen zijn ontstaan en wat de beslissende momenten zijn (geweest zijn). Ik wens toe dat vele collega's dit boek zullen bestuderen en telkens weer zullen raadplegen, opdat zij hun leerlingen zullen vertellen over de ontwikkeling van ons vak en dit mede als externe motivatie zullen gebruiken. De prijs van het boek is hoog, maar voor wat geboden wordt zeker niet te hoog. Dat velen het aanschaffen!

W. Kleijne

## Mededelingen

### **Werkgroepen van de didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.**

De didactiekcommissie roept geïnteresseerden in de didactiek van de wiskunde op om mee te werken in werkgroepen aan uitwisseling van ervaringen, studie en doordenking van de didactiek.

De leden van de didactiekcommissie zouden in deze werkgroepen graag samenwerken met collega's die al een aantal jaren wiskunde onderwijzen en belangstelling hebben om vanuit hun eigen ervaringen de vakdidactiek gezamenlijk aan te pakken.

Bij 'collega's die wiskunde onderwijzen' wordt gedacht aan wiskundeleraren van het algemeen voortgezet onderwijs en van het beroepsonderwijs en ook aan lerarenopleiders, begeleiders enz. De werkgroepen zijn tamelijk klein: 10 à 12 personen.

1. Verwacht wordt dat de werkgroepen in de periode van december 1981 tot april 1982 vier à vijf keer bijeen komen. Binnen de werkgroepen worden afspraken gemaakt en taken verdeeld. De activiteiten van een werkgroep kunnen resulteren in een verslag, een artikel, een aparte publicatie of een presentatie.

2. Als plaats van de samenkomsten wordt gedacht aan Utrecht. Afhankelijk van de wensen binnen een groep kunnen minder centraal gelegen plaatsen gekozen worden.

3. De bijeenkomsten worden in scholen gehouden, gedacht wordt aan een tijd van 16.30 tot 20.00 uur (inclusief eenvoudige maaltijd). Behoudens goedkeuring van de begroting ligt het in de bedoeling dat de vereniging van de maaltijd f5,- en reiskosten boven f10,- subsidieert.

4. Van de huidige leden van de didactiekcommissie zijn er per werkgroep 2 of 3 beschikbaar als kwartiermaker. Deze kwartiermakers moeten zorgen voor een goed functioneren van de werkgroep; zij zijn niet noodzakelijk deskundig over het studie-onderwerp. Bij de totstandkoming van de werkgroep hebben ze wellicht de ondankbare taak een aantal gegadigden mee te delen dat de werkgroep al vol is of een dag voor de eerste bijeenkomst te kiezen waarop sommige belangstellenden beslist niet kunnen.

5. De didactiekcommissie vraagt belangstellenden zich zo spoedig mogelijk aan te melden door middel van een briefkaart (aan Didactiekcommissie van de NVvWL, t.a.v. G. Schoemaker, p/a Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Leraarsopleiding, Heidelberglaan 2, Trans. II, De Uithof, 3508 TC Utrecht). Geef daarbij aan het onderwerp van uw eerste keuze, eventueel ook van uw tweede keuze. Noem de dagen die u absoluut niet schicken en schrijf een regeltje over de aard van uw werkzaamheden in het wiskunde-onderwijs.

De keuze-onderwerpen voor drie werkgroepen.

#### *A. Variabelen*

Een aantal mensen is hier al een jaar mee bezig. Zij willen hun resultaten ter discussie stellen en daarna verder gaan in deze werkgroep. Centrale vragen in deze groep: Welke rol spelen variabelen in het wiskunde-onderwijs? Welke mogelijkheden zijn er om leerlingen hiermee te leren werken in diverse schooltypen?

#### *B. Wiskunde in 3 HAVO.*

In 3 havo doet zich het probleem voor van leerlingen die het vak wiskunde niet kiezen naast degenen

die het wel zullen kiezen in de vierde klas. Op welke manier wordt gepoogd dit probleem op te lossen?  
Kunnen we komen tot een verkenning van mogelijkheden c.q. ervaringen op dit gebied?  
Kunnen we hieruit komen tot oplossingen waarmee we zelf en wellicht ook anderen gebaat zij ?

*C. Toepassingen in de onderbouw bij de natuurkunde en rekenvaardigheden daarbij.*

Vaak wordt bij situaties in de natuurkunde door leerlingen niet herkend dat ze daarbij wiskundige gereedschappen hebben. Kunnen we dat vanuit ons wiskunde-onderwijs verbeteren? Welke rekenvaardigheid moeten we leerlingen geven binnen de wiskundelessen ten behoeve van andere vakken zoals natuurkunde?

Namens de didactiekcommissie,  
Hans Pouw – George Schoemaker

**Pascal**, Nederlands rekenwonder sinds jaren vermeld in  
het beroemde **Guinness Book of Records**.

Zie de levende computer aan het werk.  
Iedere middelbare scholier moet dit evenement  
minstens eenmaal hebben meegemaakt.

*Voor inlichtingen, programma en honorarium:* **Wim Klein**  
Brouwersgracht 32, 1013 GW Amsterdam, tel.: 020-26 28 10

## INHOUD

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| A. C. M. van Rooij: Differentialen op de middelbare school?          | 81  |
| W. Gronloh: Oud probleem                                             | 93  |
| R. Houtman: Sociale vaardigheden en het wiskundeonderwijs            | 99  |
| W. Drost: Een voetbalspel en negatieve getallen                      | 105 |
| H. Bosscher: Werkvormen bij het behandelen van gemaakte vraagstukken | 108 |
| Recreatie                                                            | 114 |
| Boekbesprekingen                                                     | 116 |
| Mededelingen                                                         | 119 |

## ADRESSEN VAN DE AUTEURS

H. Bosscher, Wilthoeflaan 17, 2341 BL Oegstgeest  
W. Drost, Witte de Withstraat 23, 6712 HA Ede  
W. Gronloh, Mozartlaan 113, 2742 BR Waddinxveen  
R. Houtman, Wipmolen 4, 3481 AJ Harmelen  
A. C. M. van Rooij, Math. Inst. der K.U., Toernooiveld, Nijmegen