

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

57e jaargang

1981/1982

no. 1

augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Dr.F.Goffree - Dr.P.M. van Hiele - W. Kleijne - L.A.G.M. Muskens - W.P. de Porto - P.E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdredeacteur)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gailard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 45,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 30,—; contributie zonder Euclides f 25,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen in tweevoud worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9', 1078 JX Amsterdam, tel. 020 - 73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 $\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 39.75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 23.15. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6.50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-620 78/620 79. Telex 33014.

Van de redactie

Gewoontegetrouw wil de redactie ook aan het begin van de 57e jaargang van Euclides mededeling doen over wat in haar midden leeft, terugblikken op de voorbije jaargang en alvast aangeven wat de lezers in de komende jaargang verwachten mogen.

Dank

Met het begin van de nieuwe jaargang legt Bart Muller het redaktiesekretariaat neer en treedt af als lid van de redactie. Wij willen hem graag onze dank overbrengen voor al wat hij voor Euclides de afgelopen jaren gedaan heeft.

Welkom

Voor Bart Muller hebben wij twee opvolgers: Mevrouw Henny Susijn-Van Zaale en Pieter de Roest.

Laatstgenoemde neemt de funktie van sekretaris op zich; hij onderhoudt het kontakt tussen redactie, auteurs en uitgever. Eerstgenoemde krijgt de funktie van eindredakteur.

De redactie heeft twee redenen om het sekretariaat, zoals dat tot nu toe bestond, te splitsen. De kombinatie van beide taken is voor de persoon in kwestie zeer zwaar. Maar bovendien wil de redactie proberen af en toe nummers te maken waarin meer artikelen aan één thema gewijd zijn, zonder dat er sprake van een special is. Hiervoor is het nodig dat er een aparte redakteur is die naast het in elkaar steken van de gewone maandelijkse nummers speciaal hiervoor verantwoordelijk is. Overigens verandert er niets in de redactie, behalve dan dat Bert Zwaneveld zich voortaan hoofdredakteur gaat noemen. Wij heten beide nieuwe redaktieleden van harte welkom.

Terugblik

Naast de gewone nummers zijn het afgelopen jaar twee specials verschenen: de uitgebreide boekbespreking van Van A tot Z en het traditionele examennummer.

Vooruitblik

Behalve het examennummer zal er in de komende jaargang geen andere special verschijnen.

Op wat langere termijn is de redactie van plan een special te wijden aan de relatie

tussen toetsen en het wiskundeonderwijs dat het onderwerp van die toetsen is. Verder komen er minstens twee nummers met artikelen over één onderwerp: één over de problematiek van de differentiaalvergelijkingen in de bovenbouw VWO en één over een steeds vaker naar voren komende problematiek, die op alle schooltypen vooral op de onderbouw speelt, n.l. de 'botsing' tussen het gebruik van formele wiskunde, met name in de algebra, en de visie dat de wiskunde die op school gegeven wordt voor de leerlingen herkenbaar is, bruikbaar zowel in het dagelijks leven als elders in de school.

Het redactionele beleid dat op afwisseling in artikelen over didaktiek en wiskunde is gericht blijft onverminderd van kracht. Wij hopen dan ook dat onze jaarlijks herhaalde oproep om artikelen die uitgaan van de dagelijkse klaspraktijk dit jaar echt resultaat zal opleveren. Voor mensen die schromen om zelf te schrijven is een interview een bruikbaar alternatief.

Tot slot

Wij vertrouwen erop dat de zeer goede samenwerking met de uitgever ook het komend jaar zal voortduren.

Het leren oplossen van wiskundige problemen

ANNE VAN STREUN

1 De probleemstelling

Het ouderspreekuur. De ouders van Piet spreken met de wiskundeleraar.

Moeder: 'Piet doet toch zó zijn best voor wiskunde. Hij is er elke week uren mee bezig. En alle andere vakken gaan goed. Alleen wiskunde niet. Hoe komt dat nu?'

Wiskundeleraar: 'Tja. Piet kent de theorie wel. En de routinesommen gaan na flink oefenen ook wel goed. Maar de repetitievraagstukken, die een beetje anders zijn gesteld of iets nieuws bevatten, kan hij niet. En die vraagstukken worden steeds belangrijker.'

Vader: 'Maar dat moet u ze dan toch leren? Waarom kan hij dat niet?'

Wiskundeleraar: 'Een moeilijke vraag. Hij kan het niet, omdat hij het niet kan. Misschien kan hij niet wiskundig denken.'

Een gesprekje met een wiskundeleraar tijdens de koffiepauze. 'Weet je Anne, wat het probleem is? Ik ben best zinnig bezig met die meisjes en jongens van 4 en 5 HAVO. Ze werken echt wel met plezier aan die vraagstukken. Als je er niet te moeilijk over doet tenminste. Van alle onderwerpen pakken ze wel wat mee. Maar ik heb geen tijd genoeg om het er in te slijpen. Op het examen hebben ze te weinig houvast. Dan zijn de meeste vraagstukken als nieuw voor ze. En hebben ze de aanpak niet paraat.'

Zestien jaar geleden begon ik mijn werk als wiskundeleraar. Met het toenmalige algebraonderwijs had ik na een jaar of wat weinig problemen. De leerstof en de vraagstukken waren uitstekend in algoritmen of blokschema's onder te brengen. Zoals b.v. het algoritmisch voorschrift voor het oplossen van vergelijkingen van de tweede graad.

B.v.

1 Zoek eerst de vergelijkingen op, waarvoor $D < 0$.

2 Ga na, of de vergelijking op een eenvoudige wijze ontbonden kan worden.
Typen: ...

3 Ga na, of één van de wortels kan worden geraden.

4 Lukt dat niet, pas dan de algemene formule toe.

Ook de examenstof voor algebra, analytische meetkunde, goniometrie bleek heel aardig algoritmiseerbaar te zijn. (Als je een vergelijking hebt met 2^x , stel dan $2^x = y$ met $y > 0$).

Enkele onderwerpen, zoals rijen en reeksen, gaven wel enige problemen. De grootste moeilijkheid lag evenwel bij de vlakke meetkunde en de stereometrie. Hoe kun je leerlingen leren, dat ze juist die hulplijn moeten trekken en niet één van de andere mogelijke lijnen?

De ene leerling doet het direkt, de ander komt er nooit op. Als je, als wiskundeleer, daar niet tevreden mee bent, dan duik je de literatuur in. Het is toch zeker geen nieuw probleem?! Indertijd heb ik veel gehad aan de publikaties van George Pólya, die een meer systematische aanpak van niet-routine problemen uitvoerig illustreert met voorbeelden uit het wiskunde-onderwijs.

2 Wat zij er van zeggen

Over de hele wereld groeit op dit moment weer de belangstelling voor de vraag hoe onderwijs er uit moet zien, dat gericht is op het leren oplossen van (wiskundige) problemen. En dat is geen wonder na de kater over de wereldwijde golf van vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. Deze 'New Math' was voornamelijk een leerstofvernieuwing. Zoals ook nu nog het denken en spreken over wiskunde-onderwijs sterk leerstof gericht is. (Lineaire Algebra minimaliseren en ruimtelijke meetkunde ervoor in de plaats.) Ook het onderwijs houdt zich vaak alleen maar expliciet bezig met het leren en onderwijzen van feiten, formules, begrippen en ideeën. In de hoop dat de leerlingen vanzelf ze leren gebruiken bij het oplossen van wiskundige problemen. In de hoop dat vanzelf de wiskundige bekwaamheden tot ontwikkeling komen. En soms gebeurt dat ook. Bij een aantal leerlingen.

In de zeventiger jaren werden steeds meer kritische geluiden gehoord over die leerstof gerichtheid van de vernieuwingen. We hebben nu wel een enorme ballast van verouderde technieken over boord gezet, maar hebben we in ruil niet een even zinloze rimram aan formalismen binnen gehaald? Verlies je met de algebraïsering van de meetkunde niet een unieke mogelijkheid om het wiskundig redeneren en de systematische aanpak van problemen te beoefenen? Is het leren van kant en klare abstrakte theorie of algoritmen wel de juiste manier om wiskundige activiteiten en bekwaamheden te ontwikkelen?

Een evaluatie-onderzoek in de jaren 1972-1973 van de 'National Assessment of Education Progress' onder bijna 100.000 deelnemers in de U.S.A. leidde tot de konklusie, dat de ontwikkeling van de bekwaamheden op het terrein van het oplossen van wiskundige problemen centraal gesteld moest worden. Mede beïnvloed door de sterke interesse van de cognitieve psychologie in de Verenigde Staten staan veel studiebijeenkomsten van de wiskundeleraren aldaar in dit teken. Het vierde internationale congres voor wiskunde onderwijs in Berkeley, augustus 1980, was voor een belangrijk deel ook gewijd aan dit thema.

Euclides is niet het aangewezen blad om een uitvoerig overzicht te geven van de opvattingen van wiskundigen (R. Thom, B. L. v. d. Waerden, G. Polya, H. Freudenthal, J. Dieudonné, M. Kline, ...) over de centrale plaats, die het werken aan niet-routinematig op te lossen wiskundige problemen in het wiskunde-onderwijs behoort te hebben. Evenmin is er voldoende ruimte beschikbaar om onderwijskundigen (zoals Ph. Kohnstamm, C. F. van Parreren, R. Glaser, L. N. Landa, J. N. Kuljutkin, ...) te citeren.

Voor geïnteresseerden wordt in het literatuuroverzicht een weg gewezen naar verdere studie. Eén citaat.

In 1968 formuleerde de Europese raad voor het onderwijs in Düsseldorf al de volgende stelling. 'Leerlingen moeten denkmethoden en werkwijzen leren, meer dan kant en klare kennissystemen, die voorspelbaar niet meer van belang zijn, als ze de school verlaten hebben'. A. Vermandel, hoogleraar in de didaktiek van de wiskunde en de natuurwetenschappen aan de universiteit te Antwerpen, voegt daar het volgende aan toe.

'Die handelingen evenwel, de mentale processen en methoden, die kenmerkend zijn voor de wiskundige activiteit worden zelden geleerd. Leerlingen, die alle theoretische eigenschappen (definities, regels, wetten, algoritmen, ...) beheersen, kunnen nauwelijks of helemaal niet problemen oplossen'.

3 Enige ervaringen met eerstejaars

Sinds 1978 houden leden van de werkgroep voor de didaktiek van de wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen zich regelmatig bezig met het observeren van oplossingsprocessen o.a. bij de eerstejaars wiskundestudenten. De bedoeling is om meer inzicht te krijgen in de aanpak van wiskundige vraagstukken, zoals die in het onderwijs voorkomen. In een volgend stadium kunnen konklusies worden geformuleerd over de meest gewenste aanpak van de studenten en over de vormgeving van het onderwijs. De ervaring opgedaan in dit onderzoek kan weer worden gebruikt bij het analyseren en vormgeven van andere stukken onderwijs voor andere leerlingen, b.v. in het voortgezet onderwijs.

De moeilijkheden, die uit de uitgetypte protokollen naar voren komen, zijn van velerlei aard. Ze hebben betrekking op de beheersing van de theorie (begrippen, notaties, relaties, stellingen, etc.), op de analyse van het probleem, op de te hanteren heuristieken en op het opstellen van een plan voor de oplossing. Ik wil elk van die aspecten toelichten aan de hand van één van de aan 11 eerstejaars voorgelegde problemen, nl.:

Zij a, b rijen in $\mathbb{R}$ met $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1}$ en $a_n \leq b_n$.

Bewijs: a en b zijn begreind.

4 Beheersing van de begrippen, relaties, stellingen etc.

Een noodzakelijke voorwaarde voor het kunnen oplossen van een probleem is de beheersing van, zeg maar, de theorie. Tijdens de introductiedagen in september 1978 blijkt al dat de formele notaties zoals $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, geen inhoudelijke betekenis hebben voor veel aankomende eerstejaars. Wat een mechanisch manipuleren met de tekens in de hand werkt. Ook uit de observaties tijdens het eerste jaar blijkt vaak dat alleen een formele kennis bij de studenten aanwezig is. De begrippen en operaties hebben voor de lerenden dan geen betekenis. Wat de verwarring tussen verwante begrippen (in dit voorbeeld tussen begreindheid, convergentie, supremum) in de hand werkt.

R. Thom heeft al eens gewezen op het grote belang van de intuïtie, terwijl ook

J. Dieudonné er op hamert dat de intuïtieve werkelijkheid achter abstracte begrippen of systemen eerst duidelijk moet zijn. Voor het wiskunde onderwijs betekent dit, dat aan leerlingen steeds weer moet worden gevraagd om de betekenis, de inhoud, van de begrippen en relaties te verwoorden en te illustreren. Door het geven van voorbeelden, het maken van tekeningen enz. Met als doel bij de leerlingen een wijze van werken te ontwikkelen, die dit zoeken naar de betekenis inhoudt. In dit vraagstuk b.v.: ‘Ken ik een voorbeeld van rij a? Ja, 1, 2, 3, 4, 5, ... En van rij b? Ja, 12, 9, 6, 3, 0, -3, ...

Wat betekent begreënd ook al weer? Even opzoeken. Een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is begreënd, als er twee elementen van $\mathbb{R}$ zijn, zo dat de elementen van die deelverzameling er tussen liggen. Oh, ...

B.v. $\langle 3, 5 \rangle$.

5 Analyse van het probleem

Het kost de studenten veel moeite om zich een voorstelling van een probleemsituatie te maken. Een probleemsituatie, die niet onmiddellijk te ‘plaatsen’ is als één van een bekend type. Het sterk algoritmisch bepaald wiskundeonderwijs vraagt van de leerling alleen een zeer beperkte analyse van de vraagstukken. ‘Oh, er wordt gevraagd de functie te onderzoeken. Dus ...’ Alleen enkele kenmerken moeten worden geassocieerd met een bekende oplossingsmethode, routine of algoritmisch bepaalde procedure.

Bij een niet op die manier te plaatsen probleem wordt het handelen overheerst door trial en error. Een willekeurig proberen van oplossingsmethoden en algoritmen. Goede werkwijzen om een betere voorstelling te maken van de probleemsituatie ontbreken.

Wat je wilt, is dat leerlingen/studenten in het onderwijs hebben geleerd om eerst de direkte gegevens in hun onderlinge samenhang te onderzoeken. Om de meest voor de hand liggende konklusies uit die gegevens te trekken. Om bekende stellingen in verband te brengen met die gegeven situatie.

Wat je wilt, is dat zij zich afvragen wat het doel eigenlijk is. En dat ze het antwoord op die vraag betrekken op de gegevens.

De vragen van Pólya, die de leraar kan stellen met als uiteindelijk doel dat de leerlingen zichzelf die vragen gaan stellen, zijn bij deze probleemanalyse nuttig. Het laten verwoorden in een klasgesprek of groepsdiskussie van de aanpak van de leerlingen is eveneens onmisbaar. Wie kan zich uit zijn eigen studie niet de docent herinneren, die onmiddellijk na de probleemstelling liet zien hoe eenvoudig en elegant de oplossing was? Daarbij geheel voorbijgaand aan de grootste moeilijkheid, namelijk hoe kom je op het idee om het zó aan te pakken?

In deze opgave kan er voortgeborduurd worden op de twee voorbeelden,
nl. rij a: 1, 2, 3, 4, 5, ...

rij b: 12, 9, 6, 3, 0, ...

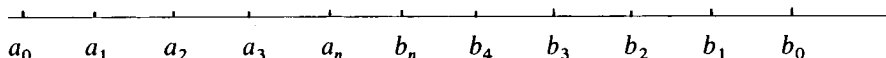
De derde voorwaarde is $a_n \leq b_n$. (Een gegeven, dat door een aantal eerstejaars als niet relevant werd beschouwd. Ze slaagden er niet in de samenhang van de drie voorwaarden te doorzien.)

Voldoen de twee voorbeelden aan die voorwaarde? Nee, want hoewel $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ is $a_3 > b_3$ en $a_4 > b_4$. Kunnen we een rij b vinden, die wel voldoet? Nee, want $a_n \rightarrow \infty$, dat wil zeggen dat ze elkaar altijd een keer passeren. En $b_b \rightarrow -\infty$?! Kan het dan niet? Heb ik de gegevens wel goed gebruikt? De rij is toenemend, wil dat inderdaad zeggen, dat $a_n \rightarrow \infty$? Enz. ...

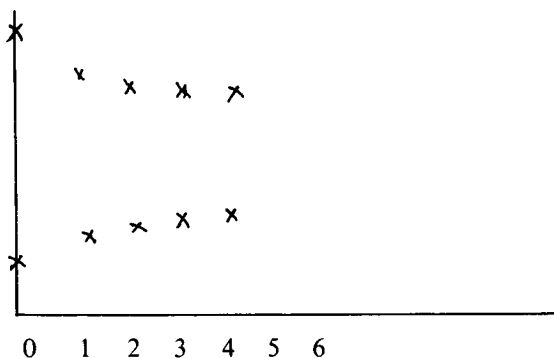
B.v. vinden we nu: a : $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{15}{16}, \dots$

b : $5, 4\frac{1}{3}, 4\frac{1}{9}, 4\frac{1}{27}, 4\frac{1}{81}, \dots$

Is de situatie nu duidelijk? Kunnen we ook een plaatje tekenen? De rijen aangeven op de getallenlijn?



Of in een grafiek?



Wat moeten we nu ook al weer bewijzen? ...

6 Enkele voorbeelden van heuristische werkwijzen

We kennen algemene denkmethoden, die bij zeer uiteenlopende problemen kunnen worden gehanteerd bij de probleemanalyse, het transformeren van het oorspronkelijke probleem, het opstellen van een plan of een hypothese voor de oplossing. De 'means-end analysis' is er één van. Daarnaast worden op elk vakgebied meer specifieke werkwijzen gehanteerd. Werkwijzen, die heuristisch van aard zijn en hun nut bewijzen bij de probleemanalyse en het opstellen van hypothesen over de oplossing of de oplossingsmethode. Werkwijzen, die expliciet kunnen worden onderwezen op het moment dat ze bij het oplossen van problemen aan de orde komen. Werkwijzen, waar leerlingen op terug kunnen vallen, als ze het vraagstuk niet zonder meer door 'plaatsing' kunnen oplossen.

6a Het maken van een tekening

Hoewel veel wiskundeleraren op uitstekende wijze de didaktiek van 'het praatje

bij een plaatje' in het onderwijs gebruiken, wordt het maken van een geschikte tekening als heuristisch hulpmiddel weinig expliciet onderwezen. Een bij de introductie in 1978 voorgelegd vraagstuk, namelijk

Bewijs: $\forall \varepsilon > 0: |a - b| < \varepsilon \Rightarrow a = b; (a, b \in \mathbb{R})$

riep slechts bij een enkeling een bijbehorende visualisering op.

Alleen met veel hulp slaagden enkele eerstejaars er in een schets te maken van de situatie bij het besproken rijen vraagstuk. Ook bij andere vraagstukken viel hetzelfde onvermogen te konstaten.

Het elkaar duidelijk moeten maken van de probleemsituatie bevordert bij leerlingen m.i. sterk het vermogen een voorstelling te maken van het probleem.

Wat denkt u van het volgende fragment uit een 5 atheneumklas van de s.g. Jan van Arkel, in Hardenberg?

Opgave 15 $f(x) = 2x - 6$ voor elke $x \in \langle 3, 5 \rangle$

$$f(x) = \sqrt{ax + b} \text{ voor elke } x \in \mathbb{R} \setminus \langle 3, 5 \rangle$$

Bereken a en b , als gegeven is, dat f continu is in 3 en 5.

Teken de grafiek van f .

Bennie: 'Bij som 15 kom ik er niet uit'.

Hans: 'Hier in dit interval $\langle 3, 5 \rangle$ heb je deze functie. En die geldt voor $\mathbb{R}$, maar zit niet in dat interval. Deze functie komt er aanzetten, houdt op bij 3, dan begint die andere, die houdt op bij 5, dan begint deze weer. Die zit er tussen in. Als deze bij 3 aankomt, mag hij niet meer. We moeten hem nu in 3 continu maken, zodat we één functie krijgen'.

6b Het onderzoeken van een speciaal geval, een getallen voorbeeld e.d.

Weer is het zo dat veel leraren in hun didactiek regelmatig met speciale gevallen, getallen voorbeelden e.d. werken. Waarschijnlijk weer zonder een dergelijke werkwijze als zodanig aan hun leerlingen te onderwijzen. Geen van de elf eerstejaars grepen naar het hulpmiddel van het zoeken van voorbeelden van de rijen a en b . Terwijl ze toch onoverkomelijke moeilijkheden met het vraagstuk hadden.

6c Het laten vallen van een bepaalde eis

Een bekende heuristiek is het tijdelijk laten vallen van een bepaalde eis van de gegeven situatie. Om vervolgens van de verzameling oplossingen een invariant kenmerk op te sporen. Pòlya illustreert dat al in zijn werk o.a. met de opgave: 'Konstrueer binnen een gegeven driehoek ABC een vierkant $KLMN$, met K en L op AB , N op AC en M op BC '.

Kuljutkin beschouwt dit als één van de belangrijkste heuristieken.

Een enkel voorbeeld uit 4 havo.

'Bepaal de vergelijking van de cirkel, die de X -as en de Y -as raakt en door $(8, 1)$ gaat'.

Stel het is een probleem voor (een deel van) uw leerlingen. U vraagt om een aanpak. U vraagt: 'Wat zullen we eens proberen?' ...

U vraagt: 'Kan het eigenlijk wel?' ... 'Laten we eens een schetsje maken van de situatie' ...

'Als we er niet uitkomen, wat doen we dan wel eens?' ...

'Lukt het wel als we één eis laten vallen?' ...

'Wat weten we nu van al die cirkels?' ...

'Laten we eens een andere eis eventjes vergeten ...'

'Oh. De middelpunten van al die cirkels liggen op de deellijnen'. (De invariant).

6d Het herleiden tot een bekend geval

Veel algoritmische procedures in de schoolboeken komen neer op een techniek, die de opgave tot een bekend geval herleidt. Maar geven we onze leerlingen wel de kans om zelf die procedure te ontwikkelen of minstens te herkennen? Of is het enige, wat ze kunnen doen, het nabootsen van de voorbeelden, die steeds ingewikkelder worden. Een voorbeeld van een vraagstelling. 'Welke sommetjes kun je maken? Waarom die andere niet? Wat is de moeilijkheid? Kun je dat probleem ook zo veranderen, dat het een probleem wordt dat je al kent? ...',

v.b. Zoek de oplossingsverzameling van de open beweringen:

$$x^2 - 16x + 64 = 0; x^2 = 16; (x - 1)^2 = 49; x^2 = 8x + 2; \dots$$

v.b. Bereken:

$$\frac{3}{14} + \left(-\frac{5}{14}\right); \frac{a}{x} - \frac{b}{y}; \frac{3}{a} + \frac{2}{a}; \frac{2}{5} + \frac{1}{3}; \frac{1}{ab} + \frac{2}{ac}; \dots$$

v.b. Zoek de oplossingsverzameling van de open beweringen:

$$2x + 8 = x + 1; x + 6 = -4; p + 1 = 9; 2(x + 7) - 3x = 4(x + 1); \dots$$

Enz.

6e Enkele non-voorbeelden

Klas 2 atheneum. Een stencil geeft het volgende voorbeeld

Los op:	$2x + 8 = x + 1$	als $x \in \mathbb{Z}$
Oplossing:	$2x + 8 = x + 1$	(eerst x aftrekken)
	$\begin{array}{r} x \quad x \\ \hline \end{array}$	
$\Leftrightarrow$	$\begin{array}{r} x + 8 = 0 + 1 \\ 8 \quad 8 \\ \hline \end{array}$	(nu 8 aftrekken)
$\Leftrightarrow$	$\begin{array}{r} x + 0 = 1 - 8 \\ \hline \end{array}$	
$\Leftrightarrow$	$\begin{array}{r} x = -7 \\ \hline \end{array}$	
	$\{-7\}$	

Vier meisjes, Sita, Angela, Grieta en Dirkje zijn bezig met de opgave:

Los op: $5 + 3p = 1 + 2p$

Een fragment:

Dirkje: 'Hoe kan dat nou?

$$\begin{array}{r} 5 + 3p = 1 + 2p \\ 1 \quad 1 \quad - \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 4 + 3p = 2p$$

Het is toch moeilijker dan ik dacht.'

Angela: 'Dan moet p helemaal min zijn'

Sita: 'Ja ...'

Even later:

Dirkje: 'Hé, $4 + p = 0$, hier trek je $2p$ af en daar trek je $2p$ af.'

Sita

en Angela: 'Ja'

Dirkje: 'Nou en dan ...'

Angela

begint

opnieuw: ' $5 + 3p = 1 + 2p$

Hier moet je nul van maken. In deze getallen moet de p nul ...'

Dirkje: 'Iets plus p is nul, dus $p = -6$, nee -4 .'

Angela: ' $3p = 2p - 4$

$$p = -4$$

Kijk links moet je altijd p hebben. Links moet je een open bewering van maken en rechts moet je de getallen zien te krijgen.'

Heb je er altijd Angela's bij? Die uit zichzelf een onderliggende werkwijze zoeken en vinden? In diezelfde klas een ander groepje meisjes. Carla, Anneke en Liesbeth. Een fragment.

Carla: ' $x + 6 = -4$

$$6 = 6 -$$

$$x = 10$$

Anneke: 'Weet je wat ik zo gek vind? Moet je er 6 aftrekken en is dat nu -10 ?

Als je 6 aftrekt ...'

Carla: 'Ja, $-4 - 6$. Nee, dat wordt $+10$!'

Anneke: 'Volgens mij niet.'

Liesbeth: 'Ja, volgens mij wel. Dát is met die luciferstokjes.'

Anneke: 'Waar zijn de antwoorden?'

Liesbeth: ' -10 . Het klopt wel.'

Carla: 'Hoe weet je dat?'

Liesbeth: 'Bij de antwoorden.'

Anneke: 'Ja, dat vind ik ook.'

Carla: 'Hé, waar staat dat?'

Liesbeth: 'Som 2. Als je haakjes hebt, dan ...'

Carla: 'Ja, met keer was dat, met keer was dat met die luciferstokjes.'

Wat je zou willen is dat leerlingen een andere werkwijze hanteren om achter het goede antwoord te komen. B.v. dat ze hadden geleerd om terug te grijpen naar de

getallenlijn. In plaats van klakkeloos te opereren met getallen en symbolen. Maar dan moeten we ze in het wiskunde-onderwijs die werkwijzen ook heel expliciet leren hanteren.

7 Het opstellen van een plan voor de oplossing

Na het voorafgaande wil ik niet uitgebreid meer ingaan op het inwendig opstellen van een plan voor de oplossing of de oplossingsmethode. Alleen dit. Het ontbreken van een bewuste probleemanalyse werkt het lukraak, associatief hanteren van oplossingsmethoden in de hand. Met als veel voorkomend bijverschijnsel, dat de eerst geopperde hypothese het zoeken van betere oplossingsmethoden blokkeert. Een verschijnsel dat in de literatuur veelvuldig wordt gesignaleerd.

En dat ook bij de rijenopgave optrad. Vier studenten opperden dat het wel een bewijs uit het ongerijmde zou moeten worden. En hielden daar aan vast. Een ander wilde het met limieten proberen, terwijl een zesde student hardnekkig vasthield aan het onderscheiden van $a_n = b_n$ en $a_n < b_n$.

Wiskundigen zoals Poincaré en Hadamard hebben hypothesen geformuleerd over de wijze waarop het 'goede' oplossingsidee via het onbewuste tot stand zou komen. Ook psychologen hebben daar over gespeculeerd. M.i. terecht merkt B. L. van der Waerden in 'Einfall und Überlegung' op dat het bewuste overleggen en onderzoeken toch de basis vormt van de inval, het goede idee. Een bewust overleggen dat observeerbaar en voor verbetering vatbaar is.

8 Een literatuuroverzicht

De ervaren wiskundeleraar is bij uitstek deskundig in het sturen van de leerprocessen in de klas. Door de ervaring geleerd weet hij wat gunstig en ongunstig is in de opzet van zijn onderwijs. Een ervaring, die te vergelijken is met die van een ervaren clubschaker. Deze bouwt zijn eigen theorie op, lerende van voorgaande schaakpartijen. Zo bouwt ook de wiskundeleraar zijn eigen theorie op. Evenmin als de clubschaker kan hij die theorie gemakkelijk voor anderen verwoorden. Evenals de clubschaker kan hij naar theorieboeken grijpen. Openingsboeken bevatten verzamelde en geordende ervaringen van grootmeesters en meesters. De clubschaker kan zijn eigen ervaringen er aan toetsen en zijn eigen theorie verrijken. Maar wee de clubschaker die recepten uit de theorie probeert te halen. Binnen de kortste keren wordt hij gevloerd door een tegenstander, die afwijkt van de ingestudeerde variant. Zo ook de wiskundeleraar. Theorie, literatuur, kan helpen om de eigen ervaringen in een breder kader te plaatsen. Kan ideeën leveren voor uitvoering in het eigen onderwijs. Kan helpen het eigen onderwijs te inspireren. Mits . . . alle theorie getoetst wordt aan de eigen situatie. En aansluit bij eigen kennis en vaardigheden.

G. Pólya: *Heuristiek en wiskunde*. Malmberg.

Als u het werk van Pólya nog niet kent, dan moet u met dit boekje beginnen. En

zijn suggesties proberen te vertalen naar uw onderwijssituatie. Bent u niet bang voor wat gevorderde wiskunde, dan moet u ook de uitgebreidere publikaties van G. Pólya zoals *Mathematics and Plausible Reasoning* en *Mathematical Discovery* eens bestuderen. Als wiskundige en als leraar kunt u er veel plezier aan beleven.

Itembank project wiskunde. Eindrapport deel IV. *Heuristieken*. RITP/CITO, Drs. J. B. H. Abram. September 1977.

Een leesbare verhandeling over de opvattingen van Descartes, Pólya en over algoritmen en heuristieken. Een zeer gedetailleerde beschrijving van extra lessen wiskunde aan leerlingen van het Barlaeus gymnasium. Extra lessen waarin heuristische hulp en het gebruik van heuristische regels centraal stonden.

De kollege diktaten *Inleiding in de didaktiek van de wiskunde* en *Wiskundige Methoden* van het Mathematisch Instituut, Postbus 800, 9700 AV Groningen. In het kollegediktaat *Inleiding in de didaktiek van de wiskunde* wordt in het hoofdstuk over het leren oplossen van wiskundige problemen uitgebreid ingegaan op de literatuur en de toepasbaarheid daarvan op wiskunde onderwijs. In *Wiskundige Methoden*, het kollegediktaat voor de eerste veertien dagen introductie van de eerstejaars, komt o.a. 'Induktie en inductief werken', 'Mathematiseren' en 'Bewijzen' met veel voorbeelden aan de orde.

Pedagogische Studiën, jaargang 52, nr. 10, oktober 1975.

Dit themanummer, 'Leren denken', anno 1975, geeft een heldere oriëntatie op het hele gebied. Dit nummer is door dr. Joh. H. Wansink in Euclides 51-9 besproken. De uitgaven van Wolters-Noordhoff over de Sovjet-psychologie, onder redactie van C. F. van Parreren sluiten hier goed bij aan. In het bijzonder het boek *Denken*.

Problemen oplossen. Bert Heringa. Wiskundig Seminarium. De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam. Januari 1980.

Een globale oriëntatie over Problem Solving in het kader van een assistentschap bij R. Troelstra tot stand gekomen. Het is bedoeld voor a.s. wiskundeleraren en bestaat hoofdzakelijk uit een beschrijving van een aantal theoriën, gekoppeld aan een experimenteel onderbouwd model van het oplossingsproces.

Wiskunde en Onderwijs, 6de jaargang (1980), nr. 21. *Wiskundige handelingen. I.*, A. Vermandel.

De schrijver analyseert diepgaand de relatie tussen wiskundige inhouden (begrippen, stellingen, problemen, structuren), mentale handelingen (begripsvorming, bewijzen, probleemoplossen, structureren) en algemene denkvorming. Een originele bijdrage aan de theoretische meningsvorming.

The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren, V. A. Krutetskii. The University of Chicago Press, 1976.

Een bijzonder belangwekkende theoretische beschouwing over de bekwaamheden die leerlingen met 'goede' leerprestaties in wiskunde in sterkere mate hebben ontwikkeld dan leerlingen met 'zwakke' leerprestaties. De analyse van de oplos-

singsprocessen en de grote gevarieerdheid van de gebruikte wiskunde vraagstukken maken alleen al een artikel over deze studie in Euclides de moeite waard.

Enkele kognitieve aspecten van het oplossen van wiskundige problemen. Drs. A. van Streun. Oktober 1980, ZW - 8005.

Een onderzoeksrapport, waarin de literatuur uit verschillende psychologische stromingen wordt vergeleken en geïntegreerd bij de beschrijving van een aantal belangrijk geachte aspecten van het leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet en hoger onderwijs. Met name zijn die kognitieve aspecten besproken, die de bouwstenen vormen voor een didaktiek van het leren oplossen van wiskundige problemen. Rapportage van de voordrachten over dit thema op het recente congres I.C.M.E.-IV is in het rapport verwerkt.

Niets nieuws onder de zon van Berkeley?

MARTIN KINDT

Op 14 augustus boekte ik op het bureau van de ICME-4 voor de bus naar Oakland. De juffrouw achter de balie schreef keurig een kwitantie in duplo, tenminste dat dacht ze. Want toen ze mij het afschrift wilde overhandigen, ontdekte ze dat het carbonnetje verkeerd omgelegd was. Verrast keek ze naar het spiegelschrift achterop de kwitantie.

'Oh, my God...'

'That's a math problem', probeerde ik.

'I could never do math', kaatste ze, een tikkeltje bits.

'That's why we are here', waagde ik nog en gewon zowaar een glimlach. En daarvoor waren we in Berkeley. Tweeduizend wereldverbeteraars beten zich de tanden stuk op zulke vragen:

- hoe kun je leerlingen als het baliemeisje zinvol wiskunde-onderwijs geven?
- in Korea blijkt 95% van de leerlingen niet in voor wiskunde, hoe verander je dat?
- in Zuid-Afrika komt een immense horde van gekleurde jongens en meisjes straks de school in, op wat voor wiskunde hebben zij recht?

- ...

Tweeduizend professoren, leraren, didactici, psychologen, leerplanmakers, nascholers, onderzoekers, boekenschrijvers, uitgevers, ... met de mond vol stukgebeten tanden? Niet allemaal. Want er waren wel degelijk een paar aardige projektjes te bewonderen, al moest je er ver voor lopen. En ons eigen Hollandse IOWO sloeg bepaald geen gek figuur. Menig bezoeker van de bescheiden IOWO-tentoonstelling verzekerde mij dat dit het materiaal was waar hij of zij al jaren naar had gezocht. Alleen die taalbarrière! De IOWO-pakketjes zijn nu alleen nog echt toegankelijk voor Belgen, Zuidafrikanen en een enkele Canadees of Australiër die het Nederlands niet verleerd is.

Sinds de ICME-3 (Karlsruhe 1976) lijkt er weinig veranderd. Misschien lopen er nu relatief meer mensen rond met het idee dat de wiskunde op school beter aan moet sluiten bij 'the real world'. Alhoewel, ik zie nog de bekende Waalse professor P. voor me die de zaal bewogen toeroept: 'Math is no science. Math is an art. Math is a dream!' A nightmare, althans voor de kinderen die van hem zo nodig point-set-topology moeten leren, denk ik. Met die 'real world' kun je overigens ook nog alle kanten op. Wat te denken van dit probleempje:

John verdeelt een aantal snoepjes in porties van 4 en houdt er 2 over; hij veegt ze weer bij elkaar en verdeelt ze in porties van 5, nu blijft hij met 1 zitten. Hoeveel snoepjes had hij?

Of van:

Een rechthoekige tafel is zo zwaar dat optillen en verschuiven niet gaat; een kwartslag draaien om één poot lukt wel. Kun je de tafel van positie I in positie II krijgen (zie fig. 1)



fig. 1

Jazeker, dit zijn wiskundig gezien erg aardige probleempjes, waarin alles te ontdekken en te generaliseren valt, zoals de spreker ons duidelijk wist te maken. Maar het blijft wiskunde-puur, daar helpt geen snoepje of tafeltjelief aan.

Wat betreft de 'echte' toepassingen (the real 'real world') blijken er evenveel opvattingen als nationaliteiten te bestaan. De een ziet de toepassingen als een sausje, de ander als een toetje en een derde als een integrerend bestanddeel van het wiskundige hoofdgerecht. De voorgezette schotels smaken, afgezien van een enkel lekker hapje, zelden naar meer. Voor de hogere leerjaren worden de ingrediënten gezocht in de andere vakken: natuurkunde, biologie, aardrijkskunde (!), economie. Op het gevaar af dat dit voor de leerling net zo min 'werkelijkheid' is als de zuiver gehouden wiskunde. En dan, hoe krijg je een wiskundeleraar zo ver dat hij zich deskundig genoeg acht om zich op die gebieden te begeven, vooropgesteld dat hij dat wil? Een problematiek, die wij in Nederland binnenkort in het kader van het HEWET-project moeten zien op te lossen!

Een heel apart voorbeeld van integratie van wiskunde met andere vakken is te zien in het werk van Emma Castelnuovo en haar medewerkers. Zij combineren de wiskunde vooral met *de (beeldende) kunst* en de *natuurkunde*, van oudsher de inspiratiebronnen van de wiskunde. In Berkeley vertelde haar charmante medewerkster Daniela Gori-Gorgi van een wiskunde-natuurkunde-project voor leerlingen van 15 tot 19 jaar. Aan dit project wil ik de rest van deze Berkeley-impressie besteden.

Kogelbanen

Ook in Italië niets nieuws onder de zon (die bij Castelnuovo overigens een belangrijk onderwerp van wiskundige studie is). Maar suggereerde ik niet, dat het Castelnuovo-team zich vooral laat leiden door de klassieken? Heeft u zich trouwens al eens afgevraagd welk projectiel (fig. 2) verder komt?

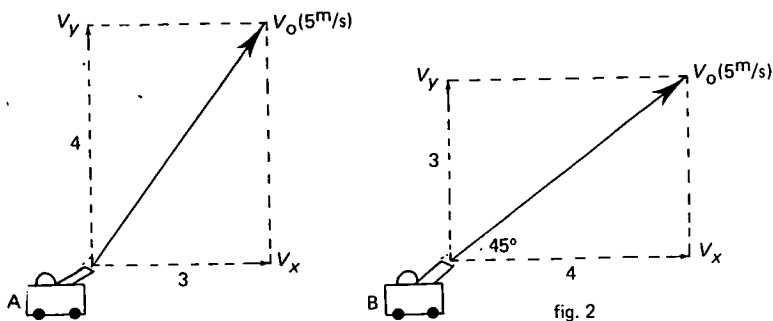


fig. 2

De Italiaanse leerlingen voorspelden allen dat kanon B het zou winnen. Een wiskundige modellering van de kogelbaan (u weet wel: X en Y als functies van t , eliminatie van t) leert dat deze een heuse parabool is en het tweede snijpunt met de grond (de X -as) is gemakkelijk te vinden. En wat een verrassing als blijkt dat de kanonnen A en B evenver vuren.

Een meer algemene aanpak verdiept het inzicht en leidt via $X = V_x t$, $Y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2$ tot een schootsafstand van $\frac{2V_x V_y}{g}$. Via een meetkundige interpretatie van het produkt $V_x V_y$ (als oppervlakte van een rechthoek) kan nu worden ontdekt dat het vuurbereik maximaal is als het projectiel onder een hoek van 45° wordt gelanceerd (met een beetje gonio, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, lukt het trouwens ook heel aardig):

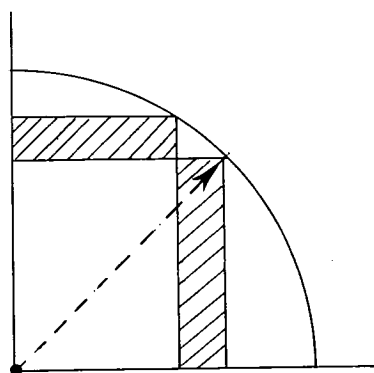
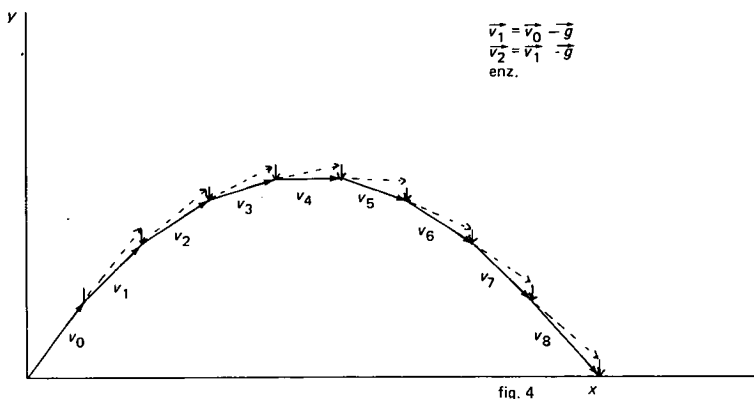
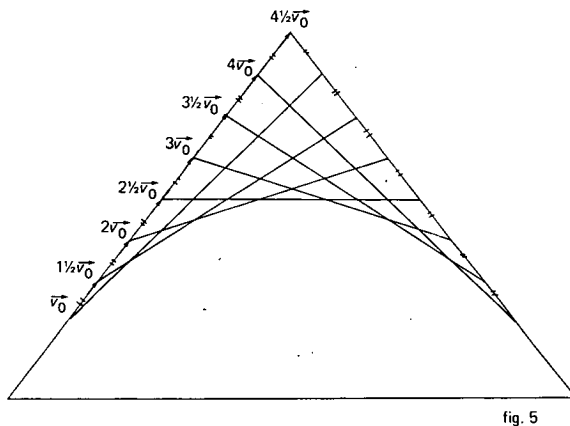


fig. 3

Wat weten we van de snelheid van een door een kanon afgevuurd projectiel? Wel die neemt per seconde af met de vertragsingsvektor $\vec{g}$. Dit leidt al gauw tot een plaatje als fig. 4:



Een tamelijk grove benadering van de kogelbaan. Een meetkundige analyse van de situatie leert dat die dragers van de snelheidsvectoren gelijke stukken afsnijden van de drager van de beginvektor en de eindvektor (fig. 5) en dit levert een fraaie konstruktie van de parabool als omhullende van een stelsel lijnen!



Zo triviaal als mevrouw Gori-Gorgi het liet voorkomen is de stap van fig. 4 naar fig. 5 zeker niet. Als u fig. 4 in een rechthoekjesrooster plaatst, met als 'basisrechthoek' die met zijden langs X- en Y-as en diagonaal $\vec{v}_0$, komt u er na enig puzzelwerk wel uit. Zelf heb ik het maar eens met de vektormeetkunde geprobeerd, in dit verband toch een voor de hand liggend hulpmiddel.

We noemen de dragers van de vectoren $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ uit fig. 4 respectievelijk $l_0, l_1, l_2, \dots$

Die lijnen hebben de volgende vektorvoorstelling:

$$l_0 : \vec{x} = \lambda_0 \vec{v}_0$$

$$l_1 : \vec{x} = \vec{v}_0 + \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$l_2 : \vec{x} = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$l_3 : \vec{x} = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \lambda_3 \vec{v}_3$$

$$l_4 : \vec{x} = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \lambda_4 \vec{v}_4$$

.....

ofwel:

$$l_0 : \vec{x} = \lambda_0 \vec{v}_0$$

$$l_1 : \vec{x} = \vec{v}_0 + \lambda_1(\vec{v}_0 - \vec{g})$$

$$l_2 : \vec{x} = (2\vec{v}_0 - \vec{g}) + \lambda_2(\vec{v}_0 - 2\vec{g})$$

$$l_3 : \vec{x} = (3\vec{v}_0 - 3\vec{g}) + \lambda_3(\vec{v}_0 - 3\vec{g})$$

$$l_4 : \vec{x} = (4\vec{v}_0 - 6\vec{g}) + \lambda_4(\vec{v}_0 - 4\vec{g})$$

.....

Het snijpunt van l_0 en l_1 wordt geleverd door $\lambda_1 = 0$ (eindpunt van $\vec{v}_0$), van l_0 en l_2 door $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ (eindpunt van $\frac{1}{2}\vec{v}_0$), van l_0 en l_3 door $\lambda_3 = -1$ (eindpunt van $2\vec{v}_0$), van l_0 en l_4 door $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$ (eindpunt van $2\frac{1}{2}\vec{v}_0$), enz.

Of als u het algemener wilt, met gebruikmaking van $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ volgt: $l_n : \vec{x} = (n\vec{v}_0 - \frac{1}{2}n(n-1) \cdot \vec{g}) + \lambda_n(\vec{v}_0 - n\vec{g})$, hetgeen voor $\lambda_n = -\frac{1}{2}(n-1)$ de vektor $\frac{1}{2}(n+1)\vec{v}_0$ oplevert! Vraag voor de lezer: waar liggen in fig. 5 de raakpunten van de parabool?

Het voorbeeld van de kogelbaan toonde overduidelijk de interactie tussen de wiskunde en de natuurkunde in het Castelnuovo-project aan. Soms helpt de wiskunde de ontwikkeling van een stukje natuurkunde (zoals bij het optimaliseren van het vuurbereik van het kanon), soms leidt de natuurkunde tot een pittig stukje wiskunde (de parabool als omhullende van een stelsel lijnen). De onderwijsstrategie hierbij is de volgende. Daag de leerlingen uit met een interessant probleem uit de physica. Spontane discussie en actief onderzoek brengt hen tot het opstellen van een wiskundig model dat de oplossing biedt van het probleem. Aldus mevr. Gori-Gorgi. Een kritische lezer zal zich afvragen in hoeverre het onderzoek van de leerlingen werkelijk spontaan gebeurt. Evenals in Karlsruhe (waar Castelnuovo een schitterende expositie had) kan ik me niet aan de indruk onttrekken dat de hand van de meester in elk leerlingenwerkstuk sterk aanwezig is. Dat neemt niet weg dat ik een gevoel van jaloezie ('had ik dat maar zó gehad') moeilijk kan onderdrukken, als ik het rijtje onderwerpen zie dat de leerlingen van mevr. Gori-Gorgi te verwerken krijgen:

- harmonische trilling en goniometrische functies;
- kleinste kwadraten-methode en elasticiteit;
- zonne-energie (met als wiskundige componenten: exponentiële- en logaritmische functies, kansrekening en statistiek);
- gravitatie en kegelsneden;
- trillende snaar en Fourier-reeksen;
- elektrische netwerken en lineaire algebra.

Voorwaar, een indrukwekkend lijstje. Dat zo'n prachtig programma in Italië te realiseren is, wordt mogelijk gemaakt doordat de wiskunde- en natuurkunde-uren (elk vak 3 uur per week) in één hand zijn en doordat er een zekere flexibiliteit in de programma's zit.

In de Nederlandse situatie lijken deze ideeën dan ook niet te passen, hoewel een enkel samenwerkingsprojectje met de natuurkundeleraar kan misschien wel eens tot een harmonisch trillend stukje onderwijs leiden. Ik bedoel maar.

Voor degenen die geïnteresseerd zijn in het werk van Castelnuovo c.s. verwijs ik

graag naar het tijdschrift Educational Studies in Mathematics, waarin zij en haar medewerkers regelmatig publiceren. Zij hoeven er dus niet persé voor naar de ICME-5, 1984 in Adelaide.

Over de auteur:

Na 15 jaar leraarschap en 5 jaar dienst bij het I.O.W.O. is Martin Kindt nu werkzaam bij de vakgroep O.W. & O.C. van de R.U. Utrecht, waar hij speciaal belast is met de uitvoering van het HEWET-projekt.

Hoezo, singulier?

A. W. VAN LENNEP

Twee leerboeken, Sigma 5/6 v en Moderne Wiskunde 9v, doen een uitspraak over singuliere punten van een differentiaalvergelijking die weerlegd kan worden. In Sigma 5/6 v, eerste herziene editie, Wolters-Noordhoff, Groningen, staat op p. 234:

We schrijven vergelijking (1) met differentialen:

$$f(x, y)dy = g(x, y)dx. \quad (2)$$

Even verder, op dezelfde bladzijde, volgt:

Is tenslotte $f(a, b) = g(a, b) = 0$ dan vinden we door substitutie van $x = a$ en $y = b$ in de differentiaalvergelijking

$$f(x, y)dy = g(x, y)dx$$

$$\text{dat } 0 \cdot dy = 0 \cdot dx.$$

Dit klopt voor elke dy en dx . *De differentiaalvergelijking voegt nu aan het punt $P(a, b)$ elke richting toe.* We noemen het punt $P(a, b)$ waarvoor $f(a, b) = g(a, b) = 0$ een singulier punt van de differentiaalvergelijking (2).

In Moderne Wiskunde, deel 9 voor vwo, derde herziene druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, staat op p. 277:

In de vorige paragraaf hebben we al gezien dat een differentiaalvergelijking een verband legt tussen een variabel punt (x, y) en de richtingsverhouding $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ van een lijn door dat punt. Zo vind je bijvoorbeeld dat de differentiaalvergelijking

$$(x + y)dx = xdy \quad (*)$$

aan het punt $(2, 1)$ de richtingsverhouding $\left(\frac{2}{3}\right)$ koppelt.

En op p. 279:

In de oorsprong is er iets bijzonders aan de hand. Daar is $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en dus niet bepaald. We noemen O een *singulier* punt van het lijnelementenveld of van de differentiaalvergelijking.

Als wij van de differentiaalvergelijking (*) een algemene oplossing gevonden hebben in de relaties

$$x = 0, \text{ of } y = x \ln|x| + Cx, C \in \mathbb{R},$$

dan blijkt in het singuliere punt de richting $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ voorgeschreven te zijn.

In Moderne Wiskunde noch in Sigma wordt de geciteerde opmerking (over de onbepaaldheid van de richtingen in een singulier punt) getoetst aan een onderzoek van de integraalkrommen in een omgeving van een singulier punt. Zulk onderzoek voert hier tot de conclusie dat of door het vinden van een globale oplossing ons informatie is toegefallen die eerder niet voorhanden was, of dat een differentiaalvergelijking soms wel één of meer richtingen voorschrijft in een singulier punt.

Magie latend aan wie daarvoor kiezen, stel ik vast dat uit

$$(x + y)dx = xdy$$

volgt dat

$$(dx)^2 + dx dy + (x + y)d^2x = dx dy + x d^2y.$$

Dit betekent dat in het singuliere punt voldaan moet zijn aan

$$(dx)^2 = 0.$$

In $(0, 0)$ wordt door de differentiaalvergelijking (*) de richting $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ voorgeschreven.

Waar

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(dx)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial xy} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\partial g}{\partial y}(dy)^2 + f d^2x + g d^2y = 0. \quad (2)$$

Is (a, b) een singulier punt van (1), dan volgt uit (2) dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(dx)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \right) dx dy + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(dy)^2 = 0.$$

Als tenminste één van de coëfficiënten in deze vergelijking ongelijk aan nul is, dan noemen wij (a, b) een singulariteit van de 1e orde. Al naar er 2, 1 of 0 reële richtingen zijn die aan de vergelijking voldoen, kan men een 1e orde singulariteit klassificeren als resp. hyperbolisch, parabolisch of elliptisch.

Voorbeeld 1. De differentiaalvergelijking

$$x dx + y dy = 0 \quad (*)$$

heeft in $(0, 0)$ een elliptische singulariteit. Nemen wij aan dat de ruimte Euclidisch, en het coördinatensysteem Cartesisch is, dan laat zich uit (2) ook nog afleiden dat de kromming k van een integraalkromme van $(*)$ in een niet-singulier punt (x, y) gegeven is door

$$k = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(De positieve richting van de normaal op een integraalkromme is hier tegengesteld aan de door $\{f(x, y), g(x, y)\} = \{x, y\}$ bepaalde richting.)

Voorbeeld 2. De orde van de singulariteit $(0, 0)$ van de differentiaalvergelijking

$$y dx - x dy = 0$$

is oneindig. Onder dezelfde veronderstelling als in voorbeeld 1 geldt in een niet-singulier punt dat $k = 0$.

Het is niet de minste onder de interpretatiekaders waarin de opdracht: vind de oplossing van

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0.$$

gelezen wordt als een vraag naar de singuliere punten. Het kader dat ik bedoel is de invariante differentiaalrekenkunde, ook wel tensoranalyse genoemd.¹ Daar zou de redactie van (1) luiden:

$$f \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} = 0, \quad (3)$$

en overeenkomstig, die van (2):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + f \frac{d^2 x}{dt^2} + g \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

1. Zie bijvoorbeeld: David Lovelock & Hanno Rund, *Tensors, differential forms, & variational principles*, John Wiley & Sons, New York, p. 338: 'Thus $(dx^1, \dots, dx^n)$ is dual to the basis $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ of $T_n(P)$, and accordingly $(dx^1, \dots, dx^n)$ is a basis of $T_n^*(P)$.'

Juist om de aansluiting die deze formulering geeft op de behandeling van stelsels differentiaalvergelijkingen, geef ik aan (3) de voorkeur boven (1). Ik pleit ervoor om bij de behandeling van de eerste orde differentiaalvergelijkingen de nadruk te leggen op een lokale analyse van een integraalkromme. Dat daardoor het vinden van de globale oplossing wat op de achtergrond komt, is volgens mij geen verlies. Ik geloof dat voor veel van mijn leerlingen in de zesde klas het vinden van de oplossing van een differentiaalvergelijking iets magisch heeft, en dat dat niet alleen bij mij, maar ook bij andere docenten in dit vak, een goed bewaard geheim is.

Over de auteur:

A. W. van Lennep is 42 jaar oud, en sinds 1968 wiskundig ingenieur. Hij heeft twee jaar gewerkt bij een medische fakulteit, vier jaar bij een computerbedrijf en vijf jaar bij een middelbare school. Hij publiceerde over de Walsh-transformatie, en over de meetkundige grondslag van de vergelijkingen van Maxwell.

Ontvangen

Getal en ruimte

a. Documentatie

b. Informatie 1981

Educaboek, Culemborg.

Computer en school

R. LEENTFAAR

1 Waarom aandacht voor de computer op school?

Na de diverse industriële revoluties bevinden wij ons nu midden in de computer-revolutie. Men mag hier over denken hoe men wil, het is echter een maatschappelijk gegeven. Aan het eind van de jaren tachtig zal er het nodige veranderd zijn in de maatschappij:

- Een administratie werkt niet meer met kaartenbak en schrijfmachine, maar met een tekstverwerkend systeem.
- Wij betalen niet meer met cheque/betaalkaart, maar we hebben een credit-card, waarmee het (groot-)winkelbedrijf via de terminal direkt contact krijgt met de computer van de bank en (bij voldoende saldo) het bedrag van onze rekening afschrijft.
- De belastingdienst, motorrijtuigenbelasting, salarisadministratie, volkstelling, het register van 'criminelen', de bevolkingsadministratie gaan via de computer.
- Kaartenbakken, catalogi, e.d. verdwijnen ten koste van beeldschermen.
- De krant dreigt te verdwijnen en te worden vervangen door Teletekst, Viditel, met meer mogelijkheden tot bijstelling tot op de minuut dan onze krant, die als wij hem krijgen, al vaak een uur of 6, 7 oud is.
- Het boek dreigt te verdwijnen (ook zonde van al dat papier!). Wij roepen het boek bladzijde voor bladzijde op naar ons beeldscherm.
- Onze boodschappen bij de supermarkt worden niet meer aangeslagen, maar automatisch 'gelezen' door een elektronisch oog, dat de 'streepjescode' op de verpakking analyseert.
- Er zijn magazijnen waar geen mens meer aan te pas komt. Verticaal en horizontaal transport per lorrie op rail met grijparmen brengt de gewenste artikelen aan de balie.
- Hele chemische fabrieken worden door de computer bestuurd.
- Mogelijk is: trein, vliegtuig, auto, containerterminal zonder bestuurder.
- Ploegen van het land door een onbemande tractor.
- Velen hebben thuis een (hobby-)computer, waar, indien gewenst, een deel van het huishouden mee bestuurd kan worden.
- Auto's worden volledig door robots geassembleerd. Er komt geen mens meer aan te pas.

- 'Brieven' zullen steeds minder per post verzonden worden, maar steeds meer elektronisch overgeseind.

Kort en goed, er is een ontwikkeling gaande, die niet tegen te houden is; wel bij te sturen. Een aspect als werkgelegenheid is zeer belangrijk, maar valt buiten het kader van dit artikel. Ook aspecten als privacy en dreigende ontmenselijking van de arbeid verdienen nauwgezet de aandacht, in het bijzonder van de volksvertegenwoordiging. Aan de andere kant is het de computer die ons juist de domme, routinematige, geestdodende arbeid ontnemt.

Het onderwijs, dat gelukkig dicht bij de maatschappelijke ontwikkelingen staat dan vroeger, kan deze signalen over de computer-revolutie niet aan zich voorbij laten gaan. Het is moeilijk te zeggen in welke situatie een huidige brugklasleerling anno 1981 zich over 10 jaar zal bevinden. Nodig is echter, dat het onderwijs inspeelt op deze ontwikkeling – die echt niet als modeverschijnsel mag worden afgedaan – en voor zover het algemeen vormend onderwijs betreft, zal dat inspelen moeten gaan niet in de vorm van zuiver beroepsonderwijs in het vak informatica, maar in de vorm van kennismaken met (het gebruik van) computers, het ontmythologiseren ervan (kwijtraken van de angst ervoor), en vooral het krijgen van inzicht in de grenzen aan de mogelijkheden ook van de computer, de mens – computer verhouding en de maatschappelijke gevolgen daarvan, speciaal t.a.v. werkgelegenheid en herwaardering van de arbeid.

N.B.: Door de komst, in de zeventiger jaren, van de 'chip' zijn de mogelijkheden op elektronisch gebied vrijwel onbegrensd geworden. Dit heeft een extra versnelling aan de computer-revolutie gegeven. Men bedenke voorts, dat echte computers pas sinds ca. 1945 bestaan!

2 De computer op de Christelijke Scholengemeenschap 'Johannes Calvijn'.

Van september 1974 tot augustus 1976 heeft onze school deelgenomen aan het experiment computerkunde van het I.O.W.O. te Utrecht. Hierbij werden door een groep geïnteresseerde leerlingen buiten schooltijd programma's aangestreept op zgn. schrapkaarten (mark-sensing cards). Deze werden per post naar Utrecht gestuurd, waarbij de resultaten ook weer per post terugontvangen werden. In het voorjaar van 1975 heeft een delegatie van onze school een bezoek gebracht aan het Huijgens-Lyceum in Voorburg, alwaar ir. Bodelier reeds in het bezit was van een computer-systeem. Deze delegatie raakte daar zo enthousiast over, dat besloten werd een rapport voor de directie van de school op te stellen teneinde te komen tot aanschaf van een soortgelijk systeem als ir. Bodelier op zijn school had.

Het besluit tot aanschaf viel op 7 juni 1975. De installatie van de P.D.P.-8 computer met beeldscherm, toetsenbord, centrale processor, 16 K-geheugen, een dubbele (magneet-) schijfveneenheid en lineprinter (30 tekens per seconde) werd eind 1975 geïnstalleerd.

In het voorjaar van 1978 werd van het I.O.W.O. een schrapkaartenlezer overgenomen, waardoor het mogelijk is in het kader van de lessen computerkunde grotere aantallen leerlingen veel sneller te bedienen. Via het toetsenbord is het slechts mogelijk per uur enkele leerlingen-programma's te verwerken, terwijl bij

het verwerken van door leerlingen op schrapkaarten aangeschrapte programma's een 'productie' van vele, vele tientallen programma's gehaald kan worden, temeer daar sinds augustus 1980 beschikt kan worden over een snellere lineprinter, die 180 tekens per seconde afdrukt.

Waar werd onze computer zoal voor gebruikt?

a Inzet bij het administratieve gebeuren in de school. Alle leerlingen zijn op schijfengeheugen gebracht. Er zijn mutatie- en bevorderingsprogramma's, klasselijsten worden automatisch afgedrukt. Gedacht kan verder nog worden aan het maken van clusters en aan het afdrukken van clusterlijsten. Verder cijfer- en rapportverwerking, het verschaffen van statistische doorstroomgegevens, de verwerking van multiple-choice proefwerken en het automatiseren van de schoolbibliotheek.

Tenslotte kan nog gedacht worden aan de financiële administratie. Het is ook mogelijk zelfklevende adresstroken te vervaardigen.

b Lesgeven in het keuzevak computerkunde (nu liever informatica genoemd). In 4-havo en 5-vwo kunnen de leerlingen gedurende één jaar het keuzevak volgen. In die 40 lessen (in de praktijk minder, zeg 30) kan niet meer gedaan worden dan een eenvoudige inleiding geven in het verschijnsel computer, een korte cursus programmeren in BASIC, het maken van enkele eenvoudige toepassingen, terwijl het jaar meestal wordt afgesloten door gezamenlijk een wat grotere toepassing te maken (bijv. een gezelschapsspel simuleren, de verwerking van een sportcompetitie, een girodienst, een personenadministratie, e.d.).

Opgemerkt moet wel worden, dat het vak vrij eenvoudig gegeven dient te worden, anders haakt een (te) groot aantal leerlingen (te) vroegtijdig af en de neiging bestaat dan om in de legio voorhanden spelletjes te 'vluchten'.

Daarnaast is er bij Wiskunde II een keuze-onderdeel. Wij kozen daarvoor op school numerieke wiskunde, enigszins doorspekt met computerkunde. Aan dit keuze-onderdeel worden 40 lessen geacht te zijn besteed. Met deze in de B-vakken meestal wat betere leerlingen kunnen vrij vergaande resultaten worden bereikt. Deze leerlingen krijgen (in overleg) voor hun schoolonderzoek een opdracht uit te voeren, waarvan een verslag gemaakt wordt, waarover een half uur per leerling wordt getentamineerd. De meeste opdrachten worden door groepjes van 2 of 3 leerlingen uitgevoerd. Het cijfer van één en ander (zelden een onvoldoende en vaak zeer hoog) telt voor 1/5 (20%) mee voor het schoolonderzoekcijfer van Wiskunde II.

c Toepassingen op andere vakgebieden.

De computer kan een rol spelen in andere vakken, zoals Natuurkunde, Scheikunde, Biologie, Wiskunde, Economie, etc. Een belangwekkend aspect is, dat hier mogelijkheden liggen om vakken te *integreren* via computergebruik.

3 Toekomstige ontwikkelingen in het onderwijs

De werkgroep m.b.t. een advies voor de herverkaveling van Wiskunde I en II voor het vwo heeft een rapport uitgebracht. Wiskunde II zal verdwijnen en er zal een wiskunde A en B moeten komen. Daarbij zal in de leerstofomschrijving van Wiskunde A de automatische gegevensverwerking opgenomen moeten worden. Naar schatting zou dit 10% van de stof in beslag moeten nemen, en voorlopig niet in het C.S.E. moeten worden opgenomen. Hierbij is te bedenken, dat al 400 à 500 docenten met ca. 10.000 leerlingen ervaringen met het vak hebben opgedaan. De tekst van het rapport is voor een groot deel geënt op de ervaringen van het I.O.W.O. in deze. Het rapport beveelt aan:

- eerste experimenten in augustus 1981 starten;
- het eerste jaar: 3 scholen starten met Wiskunde A;
- het tweede jaar: 10 scholen (de 3 doen eindexamens);
- het derde jaar: alle 13 scholen starten met Wiskunde B;
- het vierde jaar: 40 scholen starten met Wiskunde A en B;
- het vijfde jaar: integrale invoering bij alle scholen.

Als dit rapport is aanvaard, zal iedere school gedwongen zijn computers te gebruiken. Het rapport noemt daarbij als mogelijkheden:

- I Centrale landelijke verwerking van de leerlingenprogramma's. Geschatte kosten f 25,- per leerling per jaar.
- II Eigen apparatuur op de school, iets beperkter dan thans op de C.S.G. 'Johannes Calvijn'. Geschatte kosten f 15.000,- à f 25.000,-.
- III Aanschaf van een aantal hobbycomputers (personal computers), bijv. 5 stuks met als kosten bijv. f 10.000,- à f 40.000,- afhankelijk van de aan te schaffen randapparatuur.

4 De ideale situatie op school.

In het kader van een maatschappelijke oriëntatie op het verschijnsel computer lijkt het wenselijk in *alle* tweede of derde klassen van het AVO één jaaruur te besteden aan het vak computerkunde. I.v.m. de keuze van deze brede invoering moet het niveau betrekkelijk laag en zeer elementair zijn. Voor snelle begaafde leerlingen is er extra werk te over voorhanden!

Voor de liefhebbers, die het vak dan kennen, zou in het voor-examenjaar een jaaruur als keuzevak kunnen worden ingebouwd, terwijl voor de fanatici in het examenjaar eventueel een vervolg-cursus gegeven zou kunnen worden (evt. zonder leraar en via geprogrammeerde instructie), teneinde op te leiden voor één of ander (basis-)informatica-examen. Dit neigt echter al zeer in de richting van beroepsonderwijs.

Het verband tussen de hierboven als ideaal geschetste situatie en het rapport herverkaveling dient nader bestudeerd te worden.

5 Konsekwenties en problemen bij de invoering van de computer op school.

Allereerst moeten er bevoegde leraren informatica komen. Gezien de vele ervaring die er al is, kan dit via bijscholingscursussen gerealiseerd worden. Te denken

valt vooral aan leraren wiskunde, maar er zullen ook leraren scheikunde, natuurkunde, economie, etc. zijn, die hiervoor, afhankelijk van hun opleiding, in aanmerking komen.

Op te merken valt, dat eigenlijk het brengen van een vak computerkunde als onderdeel van de wiskunde (zie punt 3 – herverkaveling – en punt 4) te betreuren zou zijn.

De geldkwestie moet door het Rijk geregeld worden. Als informatica in de leerplannen verschijnt, zullen ook de middelen verschaft moeten worden om dit mogelijk te maken.

Welke programmeertaal is wenselijk? BASIC wordt door de deskundigen in het vak veracht. Toch zijn er wel geavanceerde BASIC-versies, die enigszins acceptabel zijn. Misschien heeft PASCAL de toekomst. Talen als FORTRAN, COBOL en ALGOL lijken mij voor (normaal) schoolgebruik niet haalbaar.

Als mogelijkheid is nog niet genoemd de *terminal*, waarbij via een toetsenbord de verbinding met een computer elders tot stand gebracht wordt, bijv. via telefoonlijn. De duurte van telecommunicatieverbindingen en de dalende prijzen van elektronica-componenten (chips!) doen vermoeden, dat deze mogelijkheid niet reëel in aanmerking komt.

Centralisatie versus decentralisatie:

De ontwikkelingen neigen naar decentralisatie. Elke school zijn eigen computer(tje). Men bedenke wel, dat als de programma's voor gebruik in eigen beheer gemaakt moeten worden, er een flink aantal taakuren nodig is. Bovendien, als iedere school een ander merk computer heeft, met ieder z'n eigen dialect van de programmeertaal, is de uitwisselbaarheid gering en er wordt bovendien veel dubbel werk (honderd- of duizendvoudig) verricht. Toch is dit niet te voorkomen, want het aantal hobbyïsten dat best wil, is groot.

Bij de centralisatie kan de apparatuur éénduidig zijn, kunnen de programma's éénmalig ontwikkeld worden, kortom er zijn vele voordelen. Maar de beleidsvorming loopt altijd achter bij de werkelijkheid. De wildgroei is er al, de decentralisatie zal de boventoon voeren, beleidsbepalende instanties, inclusief het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, komen te laat. Hoognodig zou zijn de coördinatie van alle ervaringen die er op dit gebied zijn en een richting geven aan de ontwikkeling ervan, niet het volgen van die ontwikkelingen.

Een vereniging als de onze (de Vereniging voor Christelijk Voortgezet Onderwijs te Rotterdam en omgeving) zou voor haar meer dan 10 scholen de richting aan moeten geven. Hetzelfde geldt voor de gemeente Rotterdam. Waarbij opgemerkt kan worden, dat de gemeente Den Haag daarbij een beter voorbeeld heeft gegeven. De voordelen bij gemeenschappelijke aanschaf/opleiding e.d. zijn overduidelijk.

Mijn advies aan scholen:

Wacht niet op de centrale ontwikkelingen. Geef niet te veel geld uit. Als er geld beschikbaar is, schaf dan meerdere 'hobby-computers' aan (2-5), met aan één daarvan gekoppeld een extern geheugen (bijv. diskettes) en een afdrukeenheid (printer). Dit is mogelijk met een budget van f 10.000,- à f 20.000,- (minder kan zelfs ook nog).

Gezegd moet worden, dat er enkele nadelen zijn t.o.v. het systeem dat wij gebruiken. Dat systeem is wat 'volwassener', maar het is duur en vooral het onderhoudscontract is zeer duur. Toch is dit voor ons het beste, omdat het op deze wijze vaste kosten worden, i.p.v. onverwachte tegenvallers van vele duizenden guldens. Bij het wel afsluiten van zo'n onderhoudscontract hebben wij o.i. uit 2 kwaden de voor ons beste oplossing gekozen!

P.S.: Dit artikel is een (zeer) vrije bewerking van de voordracht die ik hield in juni 1980 voor de schoolleiders van de scholen van de Vereniging voor Christelijk Voortgezet Onderwijs te Rotterdam en omgeving.

Uit de buitenlandse tijdschriften

In Heft 2 van jaargang 1980 van de *Mathematisch Physikalische Semesterberichte* is een artikel opgenomen over 'Die Mathematik und ihre Nachbarwissenschaften', dat ik als een welkome aanvulling beschouw van Van Dantzig's 'The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics', dat in 1956 verscheen als eerste nummer in de brochurereeks van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde. Ter nadere informatie nemen we hier de tabel op die een overzicht geeft van de in het artikel besproken relaties.

Die Mathematik und ihre Nachbarwissenschaften

Diskrete Mathematik	Kontinuierliche Mathematik
Physik	
Quantenstatistik Kristalle	Mechanik Elektrodynamik
Gittergastheorie (Lenz, Ising, Ruelle)	
Informationstheorie	
Grammatik (Chomsky) Automaten algebraische Codiertheorie	Rauschen Phonetik theoretische Optik, Holographie (Gabor)
wahrscheinlichkeitstheoretische Informationstheorie (Shannon)	
Biologie	
genetische Algebra selbstreproduzierende Automaten (v. Neumann)	Ökologie (Volterra, Lotka, Kolmogorov, Smale)
stochastische Modelle	
Chemie	
Molekülkombinatorik (Pólya)	Reaktionskinetik
Darstellungstheorie (Ruch)	
Ökonomie	
Arrow's Paradoxon Theorie der Komitees Graphenprobleme Baumspiele	Kontinuierliche Ökonomien Gleichgewichtstheorie (Debreu) Ökonomische Dynamik (Smale) konvexe Spiele (v. Neumann) Optimierung
stochastische Modelle	
Philosophie	
Logik formale Jurisprudenz	Raum, Zeit
Wahrscheinlichkeit, Zufall	
Kunst	
Akkorde Computerkunst	temperierte Stimmung Ästhetik (G.D. Birkhoff)

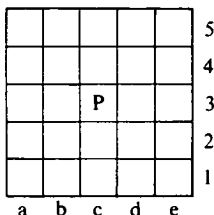
Joh. H. Wansink



NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 1980
 Eerste ronde: vrijdag 3 april 14.00-17.00 uur

A1

Een paard uit het schaakspel bevindt zich op veld $c3$ van het hiernaast getekende 5×5 -schaakbord. Het mag ten hoogste drie sprongen doen. Welke velden kan het dan niet bezoeken?



A2

Hoeveel verschillende getallen van drie cijfers zijn er waarvan de som van de drie cijfers gelijk is aan 6?

A3

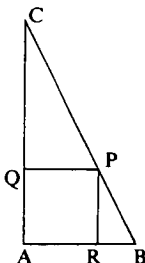
Hoeveel gehele getallen $k > 0$ zijn er met de eigenschap dat de $(3k + 1)$ -e dag, de $(5k + 1)$ -e dag en de $(8k + 1)$ -e dag van het jaar allemaal op dezelfde dag van de week vallen?

A4

Bepaal alle getallen van zeven cijfers van de vorm 1981... die door 12, 13 en 14 deelbaar zijn.

A5

In twee cilindervormige bakken (met verschillende doorsnede) bevindt zich water. Het water in de eerste bak is na precies $3\frac{1}{2}$ dag verdampt, dat in de tweede bak na precies 5 dagen. Na precies 2 dagen is het waterpeil in de beide bakken gelijk. Bepaal de oorspronkelijke verhouding van de waterpeilen in de twee bakken.



A6

Gegeven is een driehoek ABC . $\angle A = 90^\circ$ en er zijn punten $P \in BC$, $Q \in AC$ en $R \in AB$ zo, dat vierhoek $ARPQ$ een vierkant is. De lengte van de zijde van het vierkant is 1. De oppervlakte van driehoek ABC is 3. Bepaal de lengte van BC .

B1

Aan een meer liggen de havens A en B. Een vrachtschip vertrekt om 9.00 uur uit A op weg naar B. Om 13.00 uur vertrekt uit B een motorboot op weg naar A. Om 15.00 uur passeren de schepen elkaar. De motorboot arriveert in A een uur nadat het vrachtschip in B is aangekomen. Hoe laat kwam het vrachtschip aan in B? (De schepen varen met constante snelheid langs dezelfde route.)

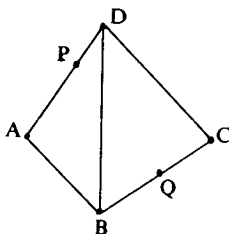
B2

Bepaal alle reële getallen $x \geq 1$ waarvoor

$$\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} = 2$$

B3

Een doos is geheel gevuld met krijtjes. Het zijn er minder dan 1981, en het precieze aantal is een kwadraat van een even getal. Neem je telkens *vijf* krijtjes uit de doos, dan blijven er tenslotte *vier* over, neem je er telkens *zeven*, dan blijft er één over, en neem je er telkens *negen*, dan zitten er tenslotte nog *zeven* krijtjes in de doos. Hoeveel krijtjes bevat de volle doos?



B4

Gegeven is een massief regelmatig viervlak $ABCD$ met ribbe 6. Op AD ligt een punt P zo, dat $AP = 4$. Het midden van BC is Q . Een kevertje bevindt zich in P en wil naar Q wandelen. Bepaal de lengte van de kortste weg.

C1

Bepaal alle natuurlijke getallen van drie cijfers waarvan het kwadraat eindigt op die zelfde drie cijfers (in die zelfde volgorde).

C2

Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) die voldoen aan

$$9x^2 - 6xy + y^2 + 8(3x - y + 2) = x^2y^2.$$

C3

Laat zien hoe je op het schaakbord van opgave A1 vier rechte lijnen kunt trekken zo, dat elk veld door minstens één van die vier lijnen wordt doorsneden. (Zo'n lijn moet dus punten gemeen hebben met het *binnengebied* van zo'n veld, en niet alleen met de rand.) Er wordt een nette en duidelijke tekening gevraagd waarin de rechte lijnen langs een liniaal zijn getrokken.

Opg. Antwoord

Opmerkingen

- A1 a1, a5, e1, e5
A2 21
A3 zes ($k = 7, 14, 21, 28, 35, 42$)
A4 1981980
A5 7 : 5
A6 $BC = 2\sqrt{6}$

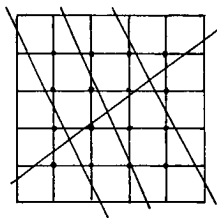
- B1 18.00 uur
B2 alle x met $1 \leq x \leq 2$
B3 484
B4 $\sqrt{31}$

- C1 625 en 376

- C2 $(0, 4), (-2, 2), (2, -10),$
 $(-6, -2), (8, -4)$

- C3 voorbeeld van een
 oplossing:

voor elk van de getallen 376 en 625 twee punten toekennen, voor elk ander gevonden getal twee punten in mindering brengen.
voor elk niet-gevonden getallenpaar twee punten in mindering brengen; voor elk ander gevonden getallenpaar ook twee punten in mindering brengen.



Waardering:

*categorie A twee punten per opgave,
categorie B drie punten per opgave,
categorie C vier punten per opgave.*

Score	Behaald door aantal deelnemers
0/1	23
2	181
3	33
4	133
5	98
6	112
7	123
8	73
9	103
10	79
11	117
12	53
13	88
14	63
15	68
16	73
17	45
18	58
19	32
20	31
21	29
22	16
23	13
24	13
25	12
26	10
27	9
28	1
29	11
30	0
31	0
32	2
33	0
34	0
35	0
36	2

Totaal aantal deelnemers 1704

Aantal deelnemende scholen 188

De cesuur is gelegd bij score 22, d.w.z. zij die 22 of meer punten behaalden zijn uitgenodigd voor de tweede ronde op 11 september 1981. Dit betreft 89 deelnemers.

Opgaven

438. Men legt alle stenen van een dominospel open. A kiest een beginsteen. B kiest uit de resterende stenen er een en legt die aan enz. A en B zijn optimaal slim. Wie niet meer aan kan leggen voordat alle stenen verbruikt zijn, heeft verloren. Hoe is de uitslag? (De opgave is bedacht door Frank Laforce.)

439. Gegeven zijn drie stapels schijven. A en B mogen beurtelings een schijf verplaatsen van een grotere naar een kleinere stapel, echter alleen als het verschil in grootte van de beide stapels minstens 2 bedraagt. Wie geen schijf meer kan verplaatsen, verliest. A begint. Wie wint?
Neem de stapels bijv. aanvankelijk 6, 16 en 26 schijven.

440. Een leerling moet uitrekenen $7 - 4(7 - 4(7 - 4))$. Hij rekent abusievelijk uit $(7 - 4)(7 - 4)(7 - 4)$ en vindt 27. Dat is echter wel het goede antwoord.

Een ander moet uitrekenen $5 - 3(5 - 3(5 - 3))$ en rekent uit $(5 - 3)(5 - 3)(5 - 3)$. Hij vindt 8 en ook dat is het goede antwoord.

Weer een ander rekent uit $(10 - 9)(10 - 9)(10 - 9)$ i.p.v. $10 - 9(10 - 9(10 - 9))$ en ook hij vindt het goede antwoord.

Dat geeft te denken. Gevraagd wordt dit te doen.

(Arthur Goodman in The mathematics Teacher, feb. 1979)

Oplossingen

435. De kans dat men op een ganzenbord (met onbegrensd aantal vakken) het vak i precies bereikt, als men met één dobbelsteen gooit, noemt men p_i .

a Is p_{63} gelijk aan, groter dan of kleiner dan p_{64} ?

b Voor welke i is p_i maximaal?

c Bereken $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i$.

Algemeen geldt

$$p_{i+6} = \frac{1}{6}p_i + \frac{1}{6}p_{i+1} + \frac{1}{6}p_{i+2} + \frac{1}{6}p_{i+3} + \frac{1}{6}p_{i+4} + \frac{1}{6}p_{i+5}$$

Onderstel 12 opvolgende waarden van p zijn $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, dan zijn $b_1, \dots, b_6$ dus te schrijven als lineaire combinaties van $a_1, a_2, \dots, a_6$.

Met meer geduld dan hersens kan men de coëfficiëntenmatrix uitrekenen. Deze luidt:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	nog te vermenigvuldigen met
b_1	1	1	1	1	1	1	6^{-1}
b_2	1	7	7	7	7	7	6^{-2}
b_3	7	$7^2 - 6^2$	7^2	7^2	7^2	7^2	6^{-3}
b_4	7^2	$7(7^2 - 6^2)$	$7^3 - 6^3$	7^3	7^3	7^3	6^{-4}
b_5	7^3	$7^2(7^2 - 6^2)$	$7(7^3 - 6^3)$	$7^4 - 6^4$	7^4	7^4	6^{-5}
b_6	7^4	$7^3(7^2 - 6^2)$	$7^2(7^3 - 6^3)$	$7(7^4 - 6^4)$	$7^5 - 6^5$	$7^5 - 6^5$	6^{-6}

Men dient dit als volgt te lezen: bijv.

$$b_3 = (7a_1 + (7^2 - 6^2)a_2 + 7^2a_3 + 7^2a_4 + 7^2a_5 + 7^2a_6)6^{-3}$$

Deze tabel doet wonderen. Kies $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ en $a_6 = 1$, dan vindt men $p_1 = b_1, \dots, p_6 = b_6$. Dus $p_1 = 1/6, p_2 = 7/6^2, p_3 = 7^2/6^3, p_4 = 7^3/6^4, p_5 = 7^4/6^5, p_6 = 7^5/6^6$, waaruit de verdere waarden van p successievelijk berekend kunnen worden.

Verder ziet men, dat

$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6$ en dan $p_7 > p_6$, waarna weer $p_7 < p_8 < p_9 < p_{10} < p_{11} < p_{12}$. Dit ritme herhaalt zich. Elke p_{6k+1} is kleiner dan zijn voorganger, waarna de volgende vijf p 's weer steeds stijgen.

Ook ziet men dat

$$p_1 < p_7 < \dots < p_{6k+1} < \dots$$

en

$$p_6 > p_{12} > \dots > p_{6k+6} > \dots$$

En tenslotte dat

$$\frac{p_6}{p_1} > \frac{p_{12}}{p_7} > \dots > \frac{p_{6k+6}}{p_{6k+1}} > \dots$$

Hieruit leest men af:

a $p_{64} < p_{63}$

b p_i is maximaal voor $i = 6$.

c $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i$ bestaat

Omdat men gemiddeld per worp $\frac{7}{2}$ vak verder gaat, is $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \frac{7}{2}$.

436. Op de 100 velden van een dambord moeten 100 verschillende positieve gehele getallen zo geplaatst worden, dat getallen op aangrenzende velden relatief priem zijn. Hoeveel is het grootste getal minimaal?

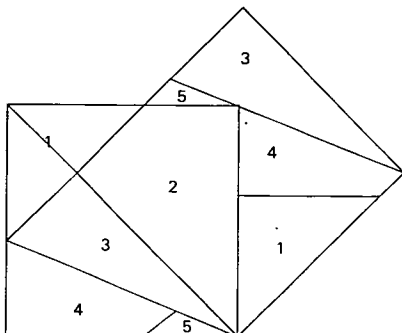
Onderstel het grootste getal is n . Priemgetallen waarvan het drievoud groter dan n is, kunnen dan niet voorkomen. Verder komt het getal 1 niet voor. Het aantal priemgetallen waarvan het drievoud groter dan 101 is, bedraagt 14. Men ziet nu snel, dat het grootste getal minstens 119 zal zijn. Een realisering met grootste getal 119 is zonder moeite te vinden.

Nu de extra voorwaarde, dat de velden met oneven getal (op één na) een samenhangend geheel vormen en de velden met even getal eveneens. Hieronder vindt u een realisering. De getallen 31 en 37 moeten hoekgetallen worden. Het getal 29 moet een randgetal zijn. Dit getal gooit roet in het eten. Laten we een geïsoleerde positie van dit getal toe, dan vinden we:

31	93	3	27	81	87	63	117	111	37
62	6	9	99	21	84	54	104	12	74
.	22	33	11	77	7	28	.	.	.
.	.	88	55	35	49	14	.	.	.
.	.	26	65	80	70	20	10	38	.
.	52	13	91	15	45	5	95	19	76
.	36	39	105	25	60	50	90	57	18
.	.	48	69	75	40	30	42	51	24
58	.	46	23	115	100	85	119	17	68
29	116	.	92	110	.	102	112	34	.

Op de plaats van de stippen kan men op willekeurige wijze de resterende even getallen invullen, t.w. 2, 4, 8, 16, 32, 44, 56, 64, 66, 72, 78, 82, 86, 94, 96, 98, 106, 108, 114, 118.

437. Onderstaande vierkanten zijn elk in vijf delen verdeeld die twee aan twee congruent zijn. Elk deel kan door een translatie in het daarmee congruente deel overgaan.



Boekbesprekingen

The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers, Volume 3, *Selected Papers on Algebra*, 1977; £ 10.70.

In deze band is een aantal artikelen uit de *American Mathematical Monthly* en uit het *Mathematics Magazine* opgenomen op het gebied van de groepentheorie, theorie van ringen en lichamen, algebraïsche getaltheorie en lineaire algebra. Bovendien zijn enkele artikelen over de geschiedenis van de algebra toegevoegd, o.a. een mooi overzichtsartikel 'Current trends in Algebra' van G. Birkhoff uit 1973. Geen leerboek dus, maar een verzameling artikelen die vaak een verrassend licht werpen op bekende stellingen door originele, dikwijls korte bewijzen. Sommige bijdragen zijn dan ook kort, niet meer dan één of twee bladzijden in beslag nemend. Dit verhoogt de aantrekkelijkheid voor diegenen die zich tussen allerlei bezigheden door willen verfrissen door zich in een wiskundig probleem te verdiepen. Aanbevolen dus aan belangstellende docenten.

Het goed verzorgde boek is uitgegeven door de Mathematical Association of America, daartoe in staat gesteld door een gift van Mrs. C. Brink ter nagedachtenis van haar overleden echtgenoot, prof. Raymond Brink. De volumes 1 en 2 uit de serie bevatten *Selected Papers on Precalculus* resp. *Calculus*.

W. J. Claas sr.

Prime-80, Proceedings of a Conference on Prospects in Mathematics Education in the 1980's, The Mathematical Association of America, 1978, 84 pag, \$ 3.95.

In 1958, in reactie op de zich toen aandienende verandering van onderwijskundige eisen, hield de MAA een kleine conferentie om het programma van de Associatie te herzien en een actieprogramma te formuleren. Deze conferentie is van grote invloed geweest op het wiskunde-onderwijs in de daaropvolgende jaren. In 1977 achtte het bestuur van de MAA de tijd rijp voor een kritische herbezinning op het wiskunde-onderwijs in zijn geheel. Argumenten hiervoor waren: een gewijzigde houding van studerenden ten opzichte van wiskunde, een gewijzigde houding van de maatschappij,

gewijzigde inzichten in het curriculum, het toenemend aantal specialisaties in de wiskunde, nieuwe toepassingsgebieden en daarmee het ontstaan van nieuwe samenwerkingsverbanden tussen wiskunde en andere wetenschappen.

In een twaalfal zittingen zijn verschillende aspecten van hedendaags wiskunde-onderwijs aan de orde geweest. De verslagen van deze zittingen kenmerken zich door een kritische analyse van de huidige toestand en een weinig rooskleurige verwachting voor de komende tien jaar.

Opvallende zaken uit deze verslagen: een terugloop van de belangstelling voor de wiskundestudie zowel in het voortgezet als in het hoger onderwijs; een vraag naar het directe nut van de behandelde wiskundestof; een toenemende vraag naar wiskunde-onderwijs door mensen ouder dan 25 jaar, die dan wel wiskunde vragen die aanwendbaar is in hun eigen situatie; een verhoogde vraag naar toegepaste wiskunde, waarbij de vragende instellingen direct klaar staan om in hun eigen wiskundige behoeften te voorzien uit vrees dat het door de mathematische instituten verzorgde onderwijs te veel leerstof bevat, dat niet van direct nut is voor de student.

In dit verband wordt een uitspraak van Hans Freudenthal geciteerd: 'If we do not succeed in teaching mathematics as to be useful, users of mathematics will decide that mathematics is too important a teaching matter to be taught by the mathematics teacher. Of course, this would be the end of all mathematical education.' Om dit einde te vermijden resulteerden de discussies in een vijftal aanbevelingen ten aanzien van het wiskunde-onderwijs op alle nivo's. Zeer veel in deze proceedings is herkenbaar in en van toepassing op de situatie in Nederland.

J. J. Sloff

E. G. Begle, *Critical Variables in Mathematics Education*; 165 pag., \$9,-, Uitgegeven door de Mathematical Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics. Ondertitel: Findings from a Survey of the Empirical Literature.

E. G. Begle was als hoogleraar verbonden aan de Stanford University. Hij was sterk betrokken bij de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in de U.S.A. Het manuscript voor dit overzicht was enkele weken voor zijn overlijden gereed. Dit boek kan men zien als 'een panorama-foto, die genomen is van een toren of een bergtop en een blik van 360° over het terrein geeft'. Hiermee heeft de uitgever niets te veel gezegd. Begle heeft de factoren, die van invloed zijn op het wiskunde-onderwijs, ondergebracht in vijf verzamelingen; met elke verzameling correspondeert een hoofdstuk. Van elke factor geeft hij een korte beschrijving met vermelding van experimenten of empirische studies, die er met betrekking tot deze factor verricht zijn. Het aantal studies of onderzoeken per factor loopt uiteen van bijv. een vijftal over commerciële schoolboeken tot 233 over geprogrammeerde instructies. Naast de beschrijving geeft hij zijn conclusie over de onderzoeksresultaten. In zeer veel gevallen blijkt, dat er weinig te zeggen valt over de mate, waarin de onderzochte factor bijdraagt tot optimalisering van het onderwijs. Veel bekende uitspraken over bijv. werkvormen, leerstofordening, classesamenstelling, leraarsgedrag, enz. blijken noch weerlegd, noch bevestigd te kunnen worden. Terecht dringt Begle aan op het voortzetten van doelgericht en degelijk onderzoek. In de eerste twee hoofdstukken geeft hij een verhandeling over de aard van de wiskunde en wiskundige systemen en over doelstellingen van het wiskunde-onderwijs. Het laatste hoofdstuk bevat een aantal beschouwingen en conclusies, die men zonder meer ter overweging wil geven aan vernieuwers en behoudenden. Een slotopmerking van hem is, dat hij zich teleurgesteld voelt, want hij bezocht achtereenvolgens de congressen te Lyon, Exeter en Karlsruhe. Er was wel aflissing van de wacht, maar in Exeter heeft hij niemand horen zeggen 'Hier is iets wezenlijks nieuws ten aanzien van het wiskunde-onderwijs, dat we nu weten en dat in Lyon nog niet bekend was' en voor Karlsruhe gold hetzelfde. Waarlijk nieuwe kennis over het wiskunde-onderwijs ontbrak zijns inziens. Lezing van dit boek kan zeer bruikbaar zijn voor vakdidactici, studenten met bijvak didactiek, leerplanontwikkelaars en schrijvers van schoolboeken. Het boek bevat een zeer grote literatuurverwijzing.

J. J. Sloff

S. L. Krushkal, *'Quasi conformal mappings and Riemann surfaces'*.

Het is misschien goed deze bespreking te beginnen met het geven van de definitie van het begrip 'Riemann-oppervlak'.

In moderne terminologie is een Riemann-oppervlak een complexe variëteit van dimensie 1, d.w.z. een Hausdorff-ruimte met aftelbare basis voor de topologie welke lokaal homeomorf is met een open deel van het complexe vlak en zó dat de diverse homeomorfismen complex-analytisch met elkaar samenhangen.

Historisch gezien kwamen ze op tweeërlei wijze voor:

1. Als 'Riemann-oppervlak' horend bij een meerduidige functie, zoals $\sqrt{z}$, $\log z$, $\sin z$ etc.

2. Als nulpuntsverzameling (in C^2 of ook $P^2(C)$) van een polynoom met complexe coëfficiënten in twee variabelen.

De eerste beschouwingswijze is een analytische en het toepassen van allerlei analytische hulpmiddelen zoals potentiaaltheorie leidde tot verregaande ontwikkelingen. Het tweede gezichtspunt ligt op het terrein van de algebraïsche meetkunde en de gebruikte methodes werden hier hoe langer hoe algebraïscher.

Het voorliggende boek past geheel in de eerste beschouwingswijze. Het is echter géén boek voor beginners.

Wie wil weten waar het allemaal om te doen is en bv. het op het eerste gezicht wat mysterieus begrip 'quasi-conforme afbeelding' (afkorting: 'q.c.a.') verklaard wil zien, leze het uitstekende boekje van L. Ahlfors. *Lectures on Quasi-Conformal Mappings*, Van Nostrand Math. Studies, 10, New-York 1966.

Om een indruk van de voorkennis te krijgen die nodig is voor het hier te bespreken boek kan men het eerste hoofdstuk opslaan. Dat zal een niet-specialist wel tegenvallen: niet alleen is een goede kennis van de grondbeginselen van de theorie van Riemann-oppervlakken nodig (bv. de stelling van Riemann-Roch), en enige vertrouwdheid met q.c.a.'s, maar ook is nodig bekendheid met niet-triviale functionaalanalyse (Sobolev-ruimtes) en met de theorie van Kleinse en Fuchse groepen.

Hiermee hangt samen mijn bezwaar tegen dit boek. De voorkennis is op beslist afstotende wijze opgediend: Geen enkele stelling wordt bewezen, geen enkele verwijzing is van een hoofdstuk- of paginavermelding voorzien, geen enkele structuur is erin aangebracht; één opeenstapeling van voor de beginner ondoorzichtige stellingen. Naar mijn idee had dat best voorkomen kunnen worden. Veel stellingen hadden op zijn minst toegelicht kunnen worden en verwijzingen zouden volledig gemaakt kunnen worden. Persoonlijk heb ik niet veel geleerd uit dit boek, hoewel ik toch bekend ben met vele van de erin besproken technieken. Conclusie: men kan voor veel minder geld beter het eerder genoemde boekje van L. Ahlfors aanschaffen en zo het onderwerp op een smakelijkere manier voorgeschoteld krijgen.

dr. C. A. M. Peters

Mededelingen

Vrouwen en wiskunde onderwijs

Meisjes komen niet zo aan bod in de exakte vakken. Daar zijn verschillende redenen voor; enerzijds is het maatschappelijk niet zo geaccepteerd dat vrouwen zich met exakte vakken en techniek bezig houden, anderzijds is het ons inziens zo, dat b.v. de wiskunde zoals het nu gegeven wordt, jongens meer aanspreekt dan meisjes. Hierbij is de rol van de wiskundeleraar(e) heel belangrijk.

In de Verenigde Staten is de laatste jaren nogal wat onderzoek gedaan om achter de factoren te komen die een rol spelen bij het onderscheid man-vrouw in het wiskunde onderwijs en zijn inmiddels cursussen ontwikkeld om wiskundeleraars bewuster te maken hiervan.

Wij zijn daardoor extra geïnspireerd om ook in Nederland iets te gaan doen aan het onderwerp vrouwen en wiskunde.

Wij zelf vinden wiskunde een belangrijk en leuk vak en zien het belang van wiskunde daarbij ook nog in verband met opleidingsmogelijkheden en b.v. in verband met de ontwikkelingen op het gebied van de rekenkunde.

In eerste instantie willen we daarom in contact komen met andere vrouwen, die zich met wiskunde

onderwijs bezig houden, omdat zij enerzijds zelf met het probleem van de vrouw als wiskundige anderzijds met hun rol als docente wiskunde ervaring hebben. Wij vragen wiskunde leraressen, die ook belangstelling hebben voor dit onderwerp om voor 1 oktober contact op te nemen met ons. Wij willen dan in het najaar een eerste bijeenkomst organiseren b.v. in Utrecht.

Marja Meeder, Willibrordusstraat 35, Amsterdam, tel. 020-72 25 09.

Jophien van Vaalen, Korte Prinsengracht 109, Amsterdam, tel. 020-25 08 71.

Oproep

Een onzer relaties mist in zijn bibliotheek:

Euclides, jaargang 54 (1978/79), nr. 3 t/m 10 + index;
jaargang 55 (1979/80).

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 62 (1974/75), nr. 2;
jaargang 66 (1978/79), nr. 2;
jaargang 67 (1979/80).

Welke lezer wil tegen een redelijk bedrag deze genoemde nummers, dan wel de gehele corresponderende jaargangen verkopen?

Reacties bij W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Betaling van de kontributie via een bank vanuit het buitenland.

Alle leden die via een bank vanuit het buitenland hun kontributie betalen dienen f5,50 extra over te maken. Alle banken brengen de vereniging dit bedrag aan kosten in rekening. Voor betalingen per postgiro geldt dat niet.

De Penningmeester.

Jaarvergadering/Themadag

Op 31 oktober houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren haar jaarvergadering in het gebouw van de SOL te Utrecht.

Als thema voor de dag is gekozen: *de microcomputer en het wiskundeonderwijs*.

De nieuwsgierigheid die op dit moment heerst voor micro-electronica is waarschijnlijk net zo van tijdelijke aard als de belangstelling door de grotere computers in de beginjaren '70. In die tijd is er weinig goede voorlichting gegeven, hetgeen tot teleurstellende ervaringen of tot wegebben van de belangstelling leidde.

Ook nu hebben we geen overvloed aan materiaal of ervaringen op dit terrein uit te wisselen. Toch moeten we elke kans grijpen om in ieder geval de ervaringen op grotere machines door te geven, zodat niet de aangeschafte micro-computers over enkele jaren ongebruikt in de kast zullen staan.

De micro-electronica kan in alle leervakken doordringen, misschien in de talensector nog veel verrassender dan in de exacte hoek. Toch wordt er vaak verband gelegd tussen dergelijke apparatuur en de wiskundeleraar. Mogelijk slechts historisch gegroeid, door sommigen betreurd, maar verdedigd met argumenten als: structuur en methodologie van probleemoplossen met computers komt het meest met wiskunde overeen; de wiskundeleraar is het meest ervaren in het onderwijzen van een abstracte denktrant zoals ook in programmeertalen voorkomt, enz.

Dit zijn voldoende redenen om er een studiedag aan te wijden, maar onvoldoende om het gebied volledig op te eisen. De themadag zal daarom strikt beperkt blijven tot het wiskundeonderwijs. Er zullen geen beschouwingen over informatica en dergelijke worden gegeven.

INHOUD

Van de redactie 1

A. van Streun: Het leren oplossen van wiskundige problemen 3

M. Kindt: Niets nieuws onder de zon in Berkeley? 14

A. W. van Lennep: Hoezo, singulier? 20

Ontvangen 23

R. Leentfaar: Computer en school 24

J. Wansink: Uit de buitenlandse tijdschriften 29

Nederlandse Wiskunde Olympiade 31

Recreatie 35

Boekbesprekingen 37

Mededelingen 39

ADRESSEN VAN AUTEURS

M. Kindt, Schuurhoven 7, 6721 SM Bennekom

R. Leentfaar, 't Weerom 5, 2991 ER Barendrecht

A. W. van Lennep, postbus 12009, 1100 AA Amsterdam

A. van Streun, R.U. Groningen, Math. Inst., postbus 800, 9700 AV Groningen

J. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem