

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

56e jaargang
1980/1981
no. 9
mei

**Gonio als
invalshoek**

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^h 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Mededelingen enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 0965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

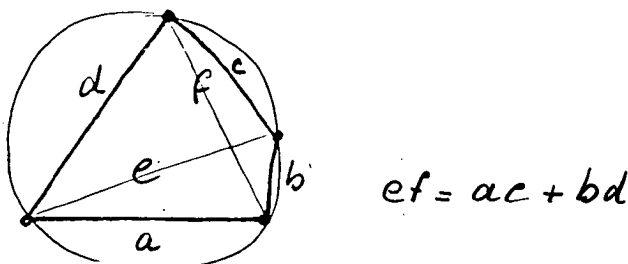
ISSN 0165-0394

VERGADEREN en vergaderen, dat is $2 \sin \frac{\pi}{2}$

FRED GOFFREE, LEO MUSKENS

'In een koordenvierhoek is het produkt van de diagonalen gelijk aan de som van de produkten van overstaande zijden.'

Het is een zondagmorgen in november 1980: buiten ligt de vroege sneeuw die ons deze week evenzeer verraste als 'de' Reagan bij de amerikaanse presidentsverkiezingen. Op de rand van het nog ongelezen zaterdagse blad staat een schetsje:



Blijkbaar is er een poging gedaan om het numerieke verband tussen de koorden te bewijzen. Het schetsje is diverse malen overgetekend en duidelijk zijn allerlei pogingen tot bruikbare hulplijnen erin zichtbaar.

Wie hield zich in de marge van het wereldnieuws met deze 2000 jaar oude stelling van Ptolemeus? Niet slechts als curiositeit in de vlakke meetkunde, nog minder digd, zelfs ten huize van een wiskundeleraar. Het antwoord moet evenwel buitenshuis gezocht worden, in Utrecht.

Om precies te zijn, op 8 november 1980, om 14.00 uur in het gebouw van de SOL, noemde dr. H. Bos voor een gehoor van bijna 200 wiskundelaren de 'Stelling van Ptolemeus'. Niet slechts als curiositeit in de vlakke meetkunde, nog minder als hoogtepunt van de 'mikroskopie van de driehoek', maar als functioneel onderdeel van de koordentrigonometrie. Een vak, dat beoefend werd voordat de goniometrie met sinus, cosinus en tangens was uitgevonden. Een uitvinding overigens, die door krachten buiten de wiskunde werd gestimuleerd en waartoe een andere oude bekende, de 'Stelling van Menelaos', nu voor de boldriehoeken van astronomen aangepast, bijdroeg.

Dr. Bos noemde slechts stellingen, hij bewees ze niet. Meer hebben wiskundelera-

ren ook niet nodig om aan de slag te gaan.

Dat niet alleen wiskundige probleemstellingen wiskundeleraren tot activiteiten vermochten aan te zetten, bleek ook op die achtste november. De hiervoor genoemde historische inleiding stond namelijk niet op zichzelf. Ze vormde een onderdeel van een geheel aan wiskundig-didactisch werk rond het thema: goniometrie. Hiervoor was geruime tijd uitgetrokken op de Jaarvergadering van de NVvW. Een jaarvergadering voor wiskundeleraren dus, met een specifiek karakter. De dames en heren van de kantine in het SOL-gebouw hebben zeker meer dan eens hun wenkbrouwen gefronst. In plaats van de verwachte strakke structuur, stoelen in kaarsrechte rijen, bezet door strenge dames en heren docenten, vonden zij een open, ontspannen atmosfeer, waarin de voortreffelijke koffie, lunch en thee 'op z'n tijd' goed van pas en helemaal tot hun recht kwamen. Overigens, op de jaarvergadering kom je niet alleen docenten tegen. De aanwezigen vormen een gemeleerd gezelschap, en van ieder die je treft weet je zeker dat hij bezeten is van wiskundeonderwijs. Neem eerst het erelid Piet Vredenduin, zoals de voorzitter Theo Korthagen zei, niet weg te denken van deze dag. En dan professor Freudenthal, de beide inspecteurs Wil de Jong en Nico Zimmerman, Pierre van Hiele (van de nivoteorie), lerarenopleiders, schoolboekauteurs, IOWO-medewerkers, redactieleden van 'Euclides', Bob Jeffery, voorzitter van de Britse zustervereniging ATM (Association of Teachers in Mathematics), zijn kollega Frank la Force van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

Zoals gezegd, een gemengd gezelschap, temeer na vermenging met al die leraren uit vele hoeken, alle zuilen en diverse schooltypen in Nederland. Wat het laatste betreft: in de vertegenwoordigde schooltypen lijkt er een zekere onevenwichtigheid te bestaan. Kollega's van lbo en mavo komt men nog steeds te weinig tegen. Je voelt dat als een gemis, vandaar ook deze speciale aflevering van 'Euclides'. Hierin zal blijken, dat onze jaarvergadering een dag oplevert, die voor alle wiskundeleraren bedoeld is. Ook al staat het gekozen leerstofpunt niet op alle wiskundeprogramma's.

Het begon allemaal als een echte vergadering. Dus een zaal vol met stoelen, een podium, een tafel erop en daarachter het bestuur. Op dat nivo werden de bestuurlijke zaken efficiënt afgewikkeld. Vanaf dezelfde hoogte sprak Theo Korthagen zijn jaarrede uit. Zoals u in het februarinummer hebt kunnen lezen een serieuze zaak, met veel feitelijke informatie. Wat de lezer niet ziet is, hoe de voorzitter onder andere de afkortingen ipep, agep, lbo en avo mimisch begeleidde. Als een volleerd wijnproever keurde hij deze woorden, en als de schijn niet bedriegt, smaakten de laatste beter dan de eerste.

George Schoemaker had blijkbaar ook eraan geproefd. Tijdens de rondvraag liet hij bovendien merken dat hem daarbij iets in het verkeerde keelgat was geschoten. Zijn bezorgdheid gold de kwaliteit van het wiskundeonderwijs, die onder tafel was gewerkt door de vierletter-kommissies in hun beschouwingen over lbo-eksamens. 'Vereniging, pas op uw zaak', luidde zijn devies.

Tussen rondvraag en jaarrede was inmiddels veel gebeurd.

Leo Muskens kondigde het, precies om half elf, aan: 'Zo, het is nu half elf, de

jaarvergadering wordt temadag. Zit u lekker? Niet zenuwachtig? Ik wel! Het zitten duurde evenwel niet lang. Tussen elf uur en kwart over vier kon er van vergaderen echt niet meer gesproken worden. Wat eerder een vergaderruimte was, werd nu onderzoeksveld voor landmeters. Cor Nagtegaal, Sieb Kemme en enkele studenten hadden daartoe echte apparatuur van 'D'Witte Leli' (de nieuwe lerarenopleiding te Amsterdam) meegenomen. In plaats van vulpen, balpen en krijtje, waren nu sekstant, teodoliet en jaling de attributen, waarmee eerbiedwaardige wiskundedocenten hun werkzaamheden uitvoerden. In kleine groepjes zag men hen metingen verrichten, deze teoretisch verwerken en later wanhopig reageren op de uitkomsten. Vanzelfsprekend namen ze veelal aan dat het denkwerk eksellent, het meten feilloos en de meetinstrumenten onnauwkeurig waren geweest.

Tijdens de lunchpauze ontmoette men elkaar weer en niet alleen temidden van de broodjes, krentebollen en vruchten. Op de 'markt' kon kennis genomen worden van creatieve en didaktische vondsten. Agneta Aukema-Schepel vertelde enthousiast van een eensporige aanpak van de goniometrie, geheel vanuit het functiebegrip. Volgens haar uitleg had het programmaatje in Lelystad als een trein gelopen. Hessel Pot trok de aandacht met prachtige grafieken op velerlei soorten grafiekenpapier, Joop van Dormolen liet de familie van de Cosachtigen per animatiefilmpje zien, van de Gelderse Leergangen kwam het idee van een wiskundig-didaktische werkhoeek. Hiermee is niet alles genoemd, niet omdat er teveel was, maar om de lezer te inspireren volgende keer zelf te komen (zie pag. 425).

Na de lunch werden de werkgroepen van de ochtend herhaald, nu met andere deelnemers. Zelden zag men zo'n soepele indelingsorganisatie in een groep van dergelijke omvang. Hier bleek waar wiskundedocenten kollegiaal kunnen zijn, zelfs in die mate dat het onvergelijkbaar is met de samenwerkingsverbanden in de sekties.

Over die werkgroepen, de landmeters noemden we reeds, een opmerking tot slot. De organiserende Didactiekcommissie had zoals gezegd, de *goniometrie* als thematiek gekozen. Men kan dit thema vanuit diverse invalshoeken benaderen.

Dicht bij het onderwijs in de klas bekijkt men dan de leerstof en de didaktische bewerking daarvan. De leerstof voor goniometrie heeft twee bekende ingangen: via verhoudingen en via functies. Jan de Lange en Nanda Querelle kozen in hun werkgroep voor de eerste, en verpakten hun leerstof in de kontekst van het sportvliegen: *VLIEG ER EENS IN* (zie pag. 393).

Cor Nagtegaal en Sieb Kemme deden hetzelfde, in de kontekst van *LANDMEET-KUNDE* (zie pag. 401).

De functiebenadering stond centraal in de werkgroep van Martin Kindt en Rindert Reijenga: *PERIODIEKE FUNKTIES* (zie pag. 409).

Iets verder van de schoolklas, kan men het leerboek (over goniometrie of een ander onderwerp) nader analyseren. Frans Dolmans, Joop van Dormolen, Carlo Hollman, Cees Hoogsteder en Leo Muskens deden dit op een interessant en specifiek aspekt: de gebruikte taal, feitvaststellende taal of aktietaal (zie pag. 416).

Op enige afstand van de leerstof, maar midden in de klas namen Gerard

Doevendans, Ben Knip en Ton Vandeberg plaats. Ze grepen deze dag aan om de relatie leraar-leerling in beschouwing te nemen (zie pag. 421).

Van al deze activiteiten is in deze 'special' verslag gedaan. Alle voorbereiders (Hans Pouw, Cees Hoogsteder en Leo Muskens), rapporteurs en fotograaf (Fred Goffree en Wim de Porto) hopen dat de lezer een goede indruk krijgt van de jaarvergadering, die ook temadag was. Ze hopen meer, maar dat had u al begrepen.

Vlieg er eens in

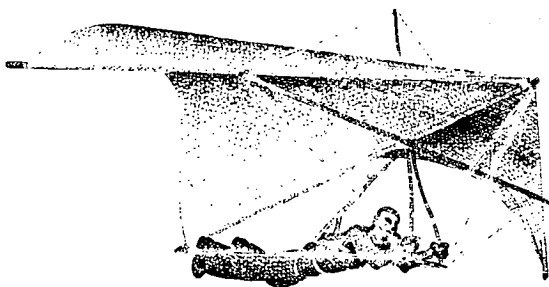
JAN DE LANGE JZN

'Vlieg er eens in' is een boek [*] waarmee getracht wordt het goniometrie- en vectoren-onderwijs enigszins te verlevendigen. Dit gebeurt door alle noodzakelijk geachte begrippen [3e klas (lbo) – mavo – havo – (atheneum)] aan te brengen via en binnen één kontekst, die van de luchtvaart. De aanwezigheid op de jaarvergadering werd eerst een indruk geschetst van het boek op ongeveer de volgende wijze:

De eerste bladzijden

Laten we de tekst van de eerste drie bladzijden gewoon overnemen:

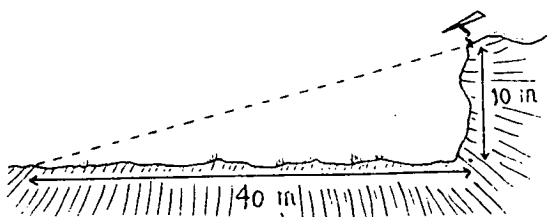
Voordat er voor het eerst gevlogen werd door een vliegtuig met een motor, (1903, de gebroeders Wright, U.S.A.), waren er al vele succesvolle vluchten geweest met een soort zweefvliegtuig waar de vlieger in of aan hing. De meest succesvolle ontwerper en vlieger was de Duitser Otto Lilienthal, die vele zweefvluchten maakte vanaf heuvels, tot hij in 1896 om het leven kwam omdat de staart afbrak. Tegenwoordig is dit soort zweefvliegen weer erg populair aan het worden. In Nederland niet zó, omdat wij geen mooie hoge rotsen hebben om vanaf te springen, maar in Duitsland, Oostenrijk, de Verenigde Staten en Australië is het 'hang-gliding' zeer populair.



Bij de meest simpele vorm wordt gebruik gemaakt van een soort driehoekige vlieger. Deze worden vaak zelf gebouwd. Bij een eerste proefvlucht wordt natuurlijk niet te veel risico genomen. Dus wordt er b.v. vanaf een slechts 10 m

[*] Drs. J. de Lange Jzn, *Vlieg er eens in*, 2e druk, 1980: IVIO, Lelystad

hoge rots gesprongen. Het resultaat is dat het 'ding' zo'n 40 meter ver vliegt. Dus:



Als deze vlucht succesvol verloopt besluit de bouwer vanaf 20 m te springen.

1 Hoever zal hij nu kunnen vliegen?

Vervolgens vanaf 50 m en tenslotte vanaf 100 m.

2 Hoever komt hij in de laatste twee gevallen?

Helemaal tevreden is de ontwerper niet en hij besluit een iets ingewikkelder geval te bouwen dat al aanzienlijk meer op een vliegtuig lijkt. Hij doet weer dezelfde proefvluchten, maar tot zijn blijde verrassing komt hij bij een hoogte van 10 m nu maar liefst 70 m ver!

3 Teken op schaal een plaatje van deze vlucht (zoals eerder gezien bij de vlieger).

4 Vul de tabel in:

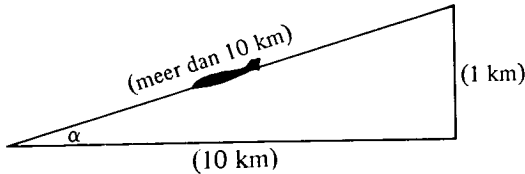
hoogte	afstand
10 m	70 m
25 m	
100 m	
	245 m
	1 km

In het eerste geval zeggen we wel dat vlieger een *glijverhouding* van 1 : 4 heeft, terwijl die van de hangglider 1 : 7 is.

Tan α en cos α .

U ziet, de *basis* voor het *tangens*-begrip is hiermede gelegd. In de zweefvliegtaal spreekt men wel van *glijverhouding*, een woord dat vrij duidelijk aangeeft wat we bedoelen, en de leerlingen aanspreekt. Van *glijverhouding* naar *glijhoek* is een kleine stap. Daarna levert de 'vertaling' naar meer wiskundige termen zoals 'tangens' nauwelijks problemen.

Het zal duidelijk zijn dat een zweefvliegtuig dat vanaf 1 km hoogte in rechte lijn een (horizontale) afstand aflegt van 10 km, in werkelijkheid meer dan 10 km heeft gevlogen.



Vergelijken we de verhouding *horizontale afstand* : *schuine afstand*, dan hebben we meteen de *cosinus* te pakken. We hebben nu om in zweefvliegtermen te spreken:

α : glijhoek,

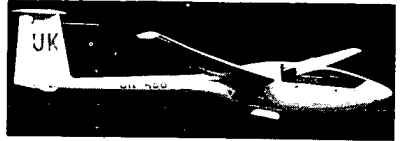
$\tan \alpha$: glijverhouding,

$\cos \alpha$ verhouding horizontale afstand : schuine afstand.

Daarna volgt de bladzijde:



(Duitsland)
ASW-19
 $\tan \alpha = 0,0263$



(Finland)
PIK-20D
 $\alpha = 1^{\circ}25'$



(Duitsland)
Bergfalcke IV
 $\cos \alpha = 0,9995$



(Polen)
Standard Jantar
 $\tan \alpha = 0,025$



(Duitsland)
Schleicher K8
 $\cos \alpha = 0,9993$



(Duitsland)
SB-10
 $\alpha = 1^{\circ}05'$



(India)
KS Kartik
 $\tan \alpha = 0,0323$

Met als vraag:

Welk zweefvliegtuig is het beste, welk het op één na beste, enz.

De oplossingsstrategie wordt aan de leerlingen overgelaten. Sommigen gaan met de glijhoek werken, anderen met de tangens (glijverhouding) en sommigen met de cosinus.

Introductie sinus.

Daarna is de introductie van de sinus binnen een wiskundige kontekst niet iets waarbij de leerlingen nog verbaasd opkijken. Ook wordt nog verband gelegd met

procenten en hellingen. Zo heeft een bepaald zweefvliegtuig een glijverhouding van 5%. Wat betekent dit?

In feite hebben we in dit eerste hoofdstuk de belangrijkste begrippen geïntroduceerd.

Het eindigt met een serie opgaven waarbij driehoeken in 'andere' standen staan, en ook de *complementregel* ter sprake komt.

Opgemerkt kan nog worden dat veel eerder aangeleerde begrippen, zoals *verhoudingen*, *breuken*, *decimale getallen*, een belangrijke rol spelen. En het gebruik van *rekenmachientjes* erg nuttig kan zijn.

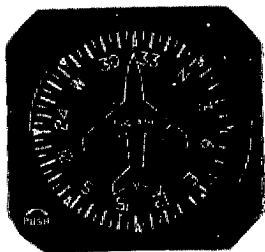
Hoofdstuk 2: inleiding in vectoren

Een inleiding in vectoren. '*Vektoren hebben een richting en een grootte*'. Dat is de wat simpele voorstelling zoals je die vaak hoort en die ook best leuk zegt wat er bedoeld wordt. Dat er van die *richting* en *grootte* weinig overblijft in een notatie

zoals $a = (\frac{3}{2})$ is iets waar zelden aandacht aan wordt besteed. In de vliegerij (en

daar niet alleen) ligt echter een manier om vectoren aan te geven voor het oprapen die wel onmiddellijk de *richting* en *grootte* van de vektor 'bloot' geeft. Als ik een half uurtje ga vliegen, kan ik een vlucht als volgt duidelijk omschrijven: OOST/100 km. Met een bijbehorende pijl, die nauwkeurig te tekenen is, als je een passende schaal kiest. Echter de richtingen O, N, W, Z en NW, ZO enz. zijn wat grof. Vandaar dat we overstappen op de richtingen zoals op een kompas of een koerstol in een vliegtuig, zoals blijkt uit de volgende leerlingen tekst:

Begrippen als *oost*, *west*, *zuidwest* enz., worden in de luchtvaart weinig gebruikt omdat je niet alle richtingen kunt aangeven op deze manier. Daarom is afgesproken om het noorden 0° te noemen. De richting naar het oosten wordt dan 90°, naar het zuiden 180° en naar het westen 270°.



Hierboven zie je een instrument dat in ieder vliegtuig zit: een koerstol. Daarop ziet de vlieger in (naar) welke richting hij vliegt. Daarbij is het noorden 0°: het oosten 90° (wordt afgekort 9): het zuiden 180° (afgekort 18) en het westen 270° (27).

- 10 De getallen 0, 9, 18 en 27 staan geen van alle op de koerstol. In plaats daarvan vind je 4 letters. Welke en waarom?
 - 11 In welke richting vliegt het vliegtuig waarvan je rechts de koerstol ziet?
 - 12 Teken deze richting als je het noorden naar 'boven' tekent.
- De vektor ZUID/40 wordt dan 180°/40 en OOST/50 wordt 90°/50.

Tot zover de leerlingentekst.

Optellen van vectoren wordt nu geïntroduceerd via het maken van vliegtochtjes, waarbij soms gebruik wordt gemaakt van echte luchtvaartkaarten. Dat verhoogt uiteraard de authenticiteit: je kunt nu 'echt' vliegtochtjes maken. De 'som' of 'resultaat vektor' is nu de vektor die het resultaat van je vlucht aangeeft: $\vec{a} = 180^\circ/40$; $\vec{b} = 90^\circ/50$; $\vec{c} = 0^\circ/65$. Het resultaat is een vlucht van Rotterdam naar Hilversum.

Somvektor

De *resultaatvektor* of *somvektor* (op te meten uit de tekening op de kaart) is nu: $s = 62^\circ/55$. Het *optellen* op deze manier heeft dus *niets* te maken met het optellen van getalletjes. Vandaar dat het in het begin niet onverstandig is om te praten van 'resultaatvektor' in plaats van *somvektor*. De nulvektor is geen probleem: als je terugkeert naar je vliegveld van vertrek is het resultaat de nulvektor. Ook het tegengestelde van een vektor gaat vrij simpel. Als de heenvlucht $240^\circ/80$ is, is de terugvlucht te beschrijven als $60^\circ/80$.

Hoofdstuk 3: kentallennotatie

De manier waarop in de luchtvaart met vectoren gewerkt wordt, komt niet overeen met die in de wiskunde. Voor het eindexamen is het gewenst de kentallennotatie te kennen. Nadat de leerlingen vertrouwd zijn gemaakt met vectoren en enkele bewerkingen daarmee, wordt, op vrij natuurlijke wijze, de stap naar de kentallennotatie als volgt gemaakt:

123 Teken op ruitjespapier de vektor $\vec{a} = 53^\circ/50$ (1 cm $\approx$ 10 km).

124 Stel dat $\vec{a}$ een gedeelte van een vliegtocht weergeeft met als begin Rotterdam. Hoeveel km ten oosten van Rotterdam eindigt dat gedeelte van de vlucht? En hoeveel km ten noorden?

en

127 We kunnen ook omgekeerd te werk gaan: teken de vektor die beschreven wordt door: $\vec{c} = 50 \text{ OOST}/30 \text{ NOORD}$.

128 $\vec{c} = 50 \text{ OOST}/30 \text{ NOORD}$ zullen we opschrijven als: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 50 \text{ O} \\ 30 \text{ N} \end{pmatrix}$ waarna

tenslotte de stap volgt naar: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Tijdens de experimenten in de klas bleek deze overgang van de 'vliegnotatie' naar de 'kentallennotatie' soepel te verlopen.

Hoofdstuk 4

Een probleem dat in het tweede hoofdstuk ter sprake kwam was: *in welke richting moet je sturen om op de juiste plaats uit te komen*. Dat is vaak behoorlijk lastig, omdat de wind een grote invloed heeft op de beweging van het vliegtuig, zoals te zien was in hoofdstuk 2.

Je wilt van Rotterdam naar Arnhem vliegen. Dat is dus volgens vektor $90^\circ/100$ zoals we al eerder zagen. Dat is een half uur vliegen (200 km/uur). Maar je bent zo stom om niet eerst even aan de mensen van de meteorologische dienst te vragen hoeveel wind er is, en uit welke richting. Na ongeveer een *half uur* vliegen kom je inderdaad boven een grote stad, maar mooi dat het Arnhem niet is. Na bestude-

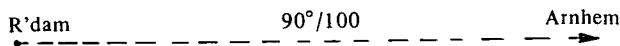
ring van de rivieren en spoorlijnen kom je tot de ontdekking dat het Nijmegen moet zijn. Dat ligt zo'n 15 km ten zuiden van Arnhem!

103 Kun jij zeggen uit welke richting de wind waait?

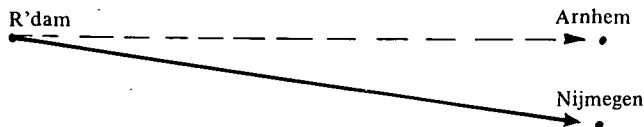
104 En kun je misschien zelfs zeggen hoe *hard* die wind ongeveer moet zijn (in km/uur).

Je kunt het met vektoren zó inzien:

Je *denkt* dit te vliegen:



Maar je *blijkt* dit als resultaat te hebben:



De vraag doet zich natuurlijk voor in welke richting ik moet sturen om wél direct boven Arnhem uit te komen? Duidelijk is onmiddellijk dat we naar links moeten sturen.

De vraag die dan rest, is: 'hoeveel graden naar links moet ik opsturen'. Of: Wat zal m'n *neusrichting* moeten zijn om als *resultaatrichting* 090° (Rotterdam-Arnhem) te krijgen? De leerlingen worden uitgedaagd dit *zelf* op te lossen:

163 Probeer zelf, vooral door te tekenen, te ontdekken in welke richting ik de neus van het vliegtuig moet sturen om in het *oosten* uit te komen (dus resultaatrichting OOST). De enige gegevens die je weet zijn:

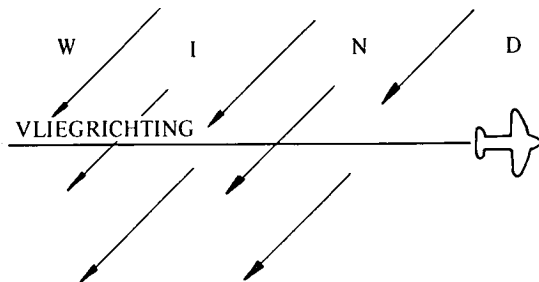
- de snelheid van het vliegtuig: 200 km/uur.
- de wind: 225°/40.

De oplossing van dit probleem is zuiver meetkundig te doen en vormt de kern van dit vierde hoofdstuk.

Hoofdstuk 5: de eenheidscirkel

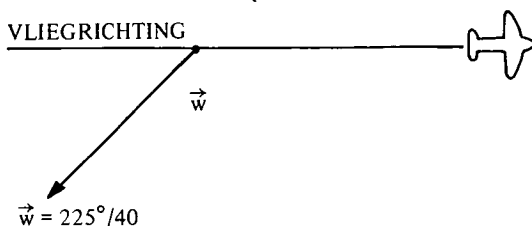
Dit hoofdstuk kunt u, op een paar bladzijden na, niet overslaan omdat het o.a. de EENHEIDSCIRKEL behandelt. We zitten ook hier, vooral aanvankelijk, geheel binnen de vliegkontekst en gaan verder in op de rol van de wind:

Stel dat we de wind 'schuin tegen' hebben:



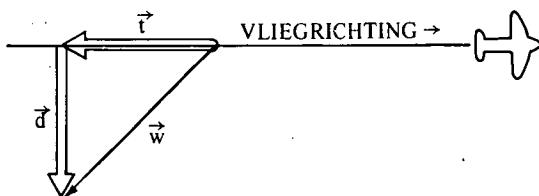
Het plaatje hierboven kun je vereenvoudigen door de wind voor te stellen door slechts één pijl, waarbij het gebruik is om de vektor te laten beginnen in een punt

van de lijn die de vliegrichting aangeeft: dus:



Je kunt $\vec{w}$ nu opvatten als de *somvektor* van een: *tegenwindvektor*: $\vec{t}$ en een *dwarswindvektor*: $\vec{d}$.

Kijk maar naar het volgende plaatje:



Dus: $\vec{w} = \vec{t} + \vec{d}$.

Dit 'ontbinden' wordt uitgebreid geoefend. Eerst door het tekenen en opmeten, later door berekening waarbij de goniokennis uit hoofdstuk 1 een hoofdrol speelt en het resultaat zal u nauwelijks verrassen:

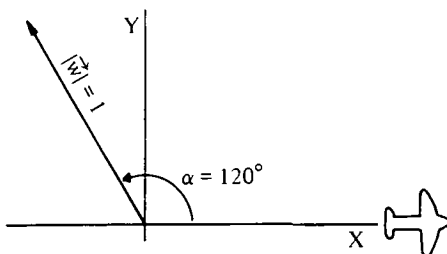
Als de vliegrichting van links naar rechts is: als α de hoek is tussen vliegrichting en windrichting: als de grootte van de windvektor r is: $|\vec{w}| = r$:

$$\text{Dan: } \vec{w} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{meewindcomponent} \\ \text{dwarswindcomponent} \end{pmatrix}$$

In het bijzondere geval dat $|\vec{w}| = 1$ krijgen we:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{meewindcomponent} \\ \text{dwarswindcomponent} \end{pmatrix}$$

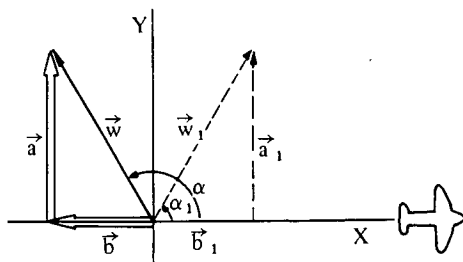
Als je zover bent wordt het tijd om α uit z'n beperking van $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ te halen. Met andere woorden, we voeren de kwadranten in en de hoeken lopen nu van 0° tot 360° . En we gaan nu kijken hoe één en ander in zijn werk gaat als $\alpha = 120^\circ$. We nemen een hoek uit het tweede kwadrant, b.v. $\alpha = 120^\circ$ en voor het gemak stellen we $|\vec{w}| = 1$. Dus:



We willen nu graag weer dat geldt:
tegenwind is gelijk aan $\cos \alpha$
dwarswind is gelijk aan $\sin \alpha$.

Om nu te weten te komen hoe groot de kentallen zijn van $\vec{w}$, spiegelen we de driehoek (die ontstaat door ontbinding) in de Y-as.

We krijgen dan:



De gespiegelde figuur zit nu weer in het ons bekende eerste kwadrant.

We zien dan o.a. dat als $\alpha = 60^\circ$ je *evenveel* dwarswind hebt als bij $\alpha = 120^\circ$, ofwel $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$. En de tegenwind bij 120° is even sterk als de meewind bij 60° , dus $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$.

Op soortgelijke wijze kun je dan het derde en vierde kwadrant onder handen nemen. Een aardig facet van dit Meewind/Dwarswind model is, dat ook de grafiek van de sinus en cosinus zich vrij eenvoudige laten tekenen zoals blijkt uit hoofdstuk 6.

Het laatste 'echte' hoofdstuk is het zevende. Daarin komen zowel de SINUS- en de COSINUSREGEL, als de OPPERVLAKTEFORMULE aan bod.

Hoofdstuk 8

Hierin vinden we een grote hoeveelheid vraagstukken waarvan sommige wèl met vliegen te maken hebben maar de meeste niet, dit mede in de hoop dat de leerlingen de kontekst gemakkelijker loslaten.

Besluit

Nadat op deze wijze de grote lijn van het boek geschetst was, konden de aanwezigen aan den lijve ondervinden, dat ook op wat hoger niveau nog aardige problemen te maken zijn binnen de kontekst van het vliegen. De lerares die zo nauw bij de experimenten betrokken was – Nanda Querelle – vertelde nog het één en ander over haar ervaringen, waarna de bijeenkomst besloten werd met een geanimeerde discussie.

Landmeetkunde op school

SIEB KEMME, COR NAGTEGAAL

1 Inleiding

Waarschijnlijk kent iedere leraar het protest van zijn klas: 'Waar hebben we dit nu weer voor nodig?'. Dat 'dit' slaat maar al te vaak op de goniometrie.

Hoewel dit artikel – formeel gezien – slechts een verslag van het onderdeel 'Landmeetkunde' op de jongstgeleden themadag dient te zijn, willen we daarnaast ingaan op de rol die landmeetkunde op school kan vervullen, bijvoorbeeld bij het beantwoorden van de in de aanhef geciteerde vraag.

Hieronder zullen we een aantal van de werkbladen, die we op de themadag gebruikt hebben, laten zien en toelichten. Daarna gaan we in op de ervaringen met landmeetkunde op school, zoals die door de deelnemers aan de werkgroep naar voren werden gebracht. Tussendoor sluipen natuurlijk onze eigen opvattingen over het gebruik van landmeetkunde bij het wiskundeonderwijs.

2 De werkbladen

De werkbladen zijn speciaal geschreven ter gelegenheid van de themadag over goniometrie. Daardoor hebben ze een – opzettelijk – tweeslachtig karakter: enerzijds zijn de opdrachten gericht op wiskundeleraars en wordt er dus veel wiskundige kennis voorondersteld; anderzijds zijn de metingen geschikt om door leerlingen uitgevoerd te worden.

Vanwege de tweeslachtigheid zijn de werkbladen niet geschikt om zonder wijzigingen in een klassesituatie gebruikt te worden. We hopen wel dat het materiaal aangeeft hoe je het zou kunnen aanpakken.

De werkbladen zijn gereproduceerd op de bladzijden 402 t/m 405.

3 Toelichting

Elk van de werkbladen kent een driedeling:

- + het meten
- + het verwerken van de gegevens
- + de nauwkeurigheid

3.1 Het meten

Eerst maak je een plan om zo efficiënt mogelijk te meten. Daarmee kun je voorkomen dat je teveel metingen doet, of juist te weinig; dat je de apparatuur twee keer op dezelfde plaats moet opstellen en inregelen; dat je afstanden dubbel

gaat afleggen en dus dubbel moet sjouwen met – soms zware – spullen.

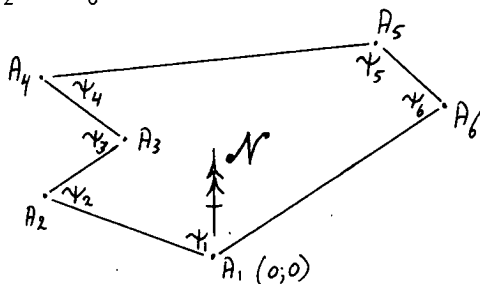
werkblad A

Veelhoeksmeting 1

Het bepalen van de coördinaten van punten op een gebroken meetlijn noemt men in de landmeetkunde een veelhoeksmeting. Er zijn twee 'soorten': één waarbij de veelhoek gesloten is, en één waarbij dit niet het geval is. Beide hebben de eigenschap dat er inderdaad veel hoeken (en afstanden) gemeten moeten worden.

In de kantine heeft het punt A_1 de coördinaten $(0;0)$.

Van de punten A_2 t/m A_6 zijn de coördinaten nog niet bekend.



Neem aan dat van A_1 naar het buffet, evenwijdig aan de pilaren, de richting van de Y-as is (~~N~~).

OPDRACHTEN:

1. Meet de hoeken ψ_1 t/m ψ_6 en de afstanden 12 t/m 61.
Maak eerst met elkaar een plan om zo efficiënt mogelijk te meten.
2. Maak op millimeterpapier een tekening van de situatie (op geschikte schaal). Bepaal hiermee de coördinaten van A_2 t/m A_6 .
3. Wat weet je over de som van de hoeken in een zeshoek? Geldt dat ook voor zeshoeken met inspringende hoeken? Welke meting was dus eigenlijk overbodig?
Waarom nemen landmeters die meting toch mee, en wat zouden ze ermee doen? (Probeer ook een kwantitatief antwoord te geven).
4. (Extra) Hoe kun je de coördinaten berekenen? Zoek geschikte en handige formules, en ontwerp een tabel zodat je handig door kunt rekenen. Vergelijk de resultaten met 2.

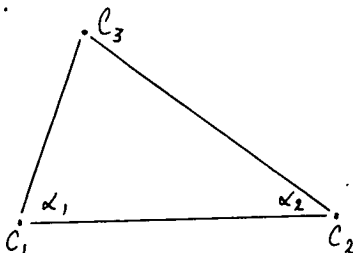
Materiaal:

- hoekmeter
- meetlint
- millimeterpapier en geodriehoek
- rekenapparaatje
- 2 jalons

Voorwaartse insnijding

Als van een drietal punten er twee bekende coördinaten hebben, terwijl het derde onbekend én ontoegankelijk is, dan is het toch mogelijk de coördinaten van dit onbekende punt te bepalen.

De methode die je daarvoor kunt gebruiken is die van de voorwaartse insnijding.



In de kantine zijn de coördinaten van C_1 en C_2 bekend:

$$C_1 = (0;0)$$

$$C_2 = (4,391; 19,020)$$

C_3 is onbekend.

OPDRACHTEN:

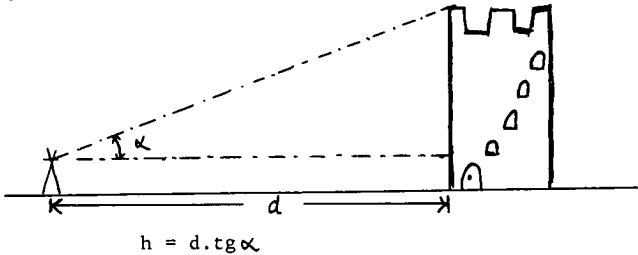
1. Meet de hoeken α_1 en α_2 .
2. Maak op millimeterpapier een tekening van de situatie (op geschikte schaal), en bepaal hiermee de coördinaten van C_3 .
3. Bereken de coördinaten van C_3 uit de gegevens (met GONIO!) en vergelijk de resultaten met die van 2.
4. Wat kun je in de gevallen 2. en 3. over de nauwkeurigheid zeggen?

Materiaal:

- hoekmeter
- millimeterpapier en geodriehoek
- rekenapparaatje
- 1 jalon

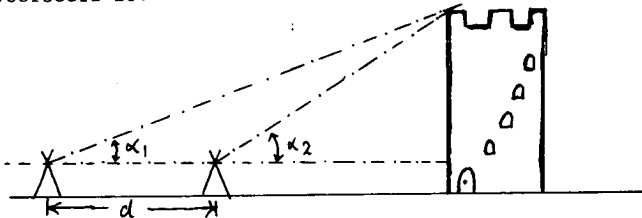
Hoogtemeting

Door de afstand van meetpunt tot object, en de hoek (vanuit het meetpunt) tussen voetpunt en top van het object te meten, kun je vrij eenvoudig de hoogte van dat object bepalen.



Soms echter is het voetpunt onbereikbaar, onzichtbaar of te ver weg, en moet je het anders aanpakken.

Bijvoorbeeld zo:



Je meet eerst α_1 , je verplaatst je handeltje over een afstand d in de richting van je kijker en je meet hoek α_2 .

OPDRACHTEN:

1. Aan de voorkant van het SOL-gebouw staat (bij het parkeerterrein) een TV-antennemast. Meet de hoogte van deze mast via de laatste methode. Maak eerst een plan voor de metingen, en leid zelf de nodige formules af.
Waarom kun je vanaf het SOL-terrein niet op deze manier de hoogte van de Domtoren berekenen ?
2. Je kunt deze methode ook gebruiken voor het bepalen van de afstand tussen twee objecten, loodrecht op de kijkrichting.
Bereken hiermee de breedte van (een deel van) het SOL-gebouw.

Opmerking: zoek bij storm en regen geschikte objecten binnen!

Materiaal:

- hoekmeter
- meetlint
- rekenapparaatje

De som van de hoeken in een driehoek

OPDRACHT 1: De ongelovige landmeter.

Er is een landmeter die niet gelooft dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.

Zijn meest overtuigende argument is het bestaan van driehoeken op de aardbol met drie rechte hoeken (Welke zijn dat?).

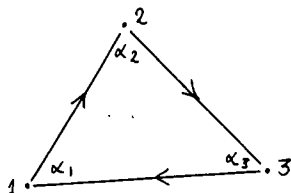
Zet een aantal driehoeken uit in de kantine - ook stomphoekige - en meet de hoeken in die driehoeken. Doe een meting aan één driehoek minstens twee keer. Zorg er wel voor dat de tweede meting onafhankelijk is van de eerste.

Wat kun je zeggen over de som van de hoeken ?

En wat over de nauwkeurigheid van de metingen ?

OPDRACHT 2: De vertwijfelde landmeter.

Een landmeter is bezig met een meting in een driehoek 1,2,3.



Hij begint in 1, kijkt naar 3 en daarna naar 2, waarbij hij hoek α_1 meet, dan loopt hij naar 2, draait zich om, kijkt van 1 naar 3, daarbij hoek α_2 metend, loopt naar 3, draait zich weer om, kijkt naar 2 en dan naar 1 voor hoek α_3 , loopt tenslotte weer naar 1, en constateert dat hij met zijn rug naar 3 staat, dus 180° ge-draaid is ten opzichte van zijn beginpositie.

Thuis gekomen werkt hij zijn gegevens uit. Op een kladblaadje maakt hij het volgende controlesommetje:

$$\alpha_1 - 180^\circ + \alpha_2 - 180^\circ + \alpha_3 = 180^\circ$$

$$\text{dus: } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 540^\circ.$$

Hij kijkt vertwijfeld naar dit resultaat, zoekt zijn wiskundeboeken nog eens na, en neemt ontslag.

Is dat niet een erg overhaaste beslissing ? Wat ging er mis ?

Materiaal: - hoekmeter
- 2 jalons

Bij zo'n plan hoort een situatieschets. In de werkbladen is die gegeven, omdat er maar weinig tijd voor het meten beschikbaar was. Het zélf maken van zo'n schets is natuurlijk een veel betere oriëntatie op de metingen.

Bij het uitvoeren van je plan zul je allerlei praktische moeilijkheden tegenkomen. Hoe krijg je de apparatuur op de plaats van de meting? Hoe werkt die apparatuur, hoe lees je af? Tijdgebrek. Regen en storm. Enzovoorts.

Deze fase is het spannendst, maar kan ook het meest ontmoedigend zijn. Goede samenwerkingen kunnen weer in rook opgaan door 'onhandigheden' van één van de deelnemers, of door botte tegenslag.

3.2 Het verwerken van de gegevens

De professionele landmeter gebruikt voor het snel en overzichtelijk omwerken van de meetgegevens tot de gewenste resultaten zogenaamde 'meetformulieren'. Dat zijn rekenschema's, gebaseerd op (goniometrische) formules, die zó zijn ingericht dat je direkt van waarnemingen naar uitkomsten kan doorrekenen. Ieder type meting heeft zijn eigen formulier. Het is overigens nog een hele kunst om zo'n meetformulier te ontwerpen. Niet alle formules, die vanuit wiskundig standpunt gezien toepasbaar zijn, zijn geschikt om snel mee te rekenen.

Bij de werkbladen was het niet echt nodig om zulke formulieren te gebruiken: de metingen zijn van bescheiden omvang. Wel hebben we hier en daar (bijv. opdracht A-4) een aanzet willen geven tot het kiezen en gebruiken van doorrekenschema's.

Voor de themadag hebben we gekozen voor een grafische verwerking van de meetgegevens. Een dergelijke verwerking opent ook mogelijkheden om al in een brugklas met landmeetkunde te beginnen.

Essentieel is natuurlijk het contrast tussen de grafische methode en de exakte berekeningswijze. De verschillen in de uitkomsten zullen haast vanzelf aanleiding geven tot allerlei discussies over nauwkeurigheid en het 'nut' van gonioformules.

3.3 De nauwkeurigheid

Beschouwingen over nauwkeurigheid zijn niet weg te denken bij het landmeten. Er bestaan veel verschillende soorten onnauwkeurigheden en heel ingewikkelde technieken om daar aan tegemoet te komen.

Daar is een beginner natuurlijk nog lang niet aan toe. Het heeft dan ook geen zin van te voren op de nauwkeurigheid in te gaan. Trouwens: die onnauwkeurigheden komen vanzelf boven water bij de verwerking van de metingen. Een enkele vraag of suggestie in de richting van de oorzaak van verschillende uitkomsten en de mogelijkheid van contrôle van je metingen (bijv. via een extra meting) kan al een hele trein van ideeën op gang brengen. In de werkbladen komen zulke suggesties voor.

4 Ervaringen

Er zijn (nog) niet zoveel ervaringen bekend van landmeten op school. Sommige leraren zijn op eigen initiatief al bezig geweest, een enkele lerarenopleiding heeft het als keuzestof in het programma opgenomen. Op de themadag zijn enkele van die ervaringen besproken.

- + Landmeten is niet bij voorbaat een sukses dat je kunt gebruiken om de motivatie wat op te poetsen. Leerlingen kunnen in de praktische fase al zo ontmoedigd raken, dat ze er snel de brui aan geven. Oorzaken kunnen zijn: slechte samenwerking, tijdsdruk (50 minuten?), gebrekkige of juist te professionele apparatuur, te open of te onduidelijke taakstelling, slechte voorbereiding, etc. Je zult als leraar vooral in het begin erg attent moeten zijn. Als het eenmaal loopt, dan kan het zijn dat sommige groepen verontwaardigd je hulp van de hand wijzen. Andere groepen zul je voortdurend een stapje verder moeten helpen.
- + Werk niet te gauw met professionele apparatuur. Begin eerst eens met – liefst door leerlingen – zelf gemaakte spullen. Beroepsinstrumenten zijn vaak zo ingewikkeld dat je al een halve dag nodig hebt om te leren hoe alles werkt. Maar als het even kan, probeer dan na verloop van tijd die instrumenten in de klas te halen. Iedereen is nieuwgierig wat die mannen, die een hele dag door zo'n kijkertje staat te turen, uitvoeren. Met een beetje geluk kun je, dankzij de ontwikkeling van de elektronika, voor een prikje een tweedehands theodoliet of waterpasinstrument op de kop tikken (bij gemeentewerken, kadaster, firma's in aannemersmaterialen, bouwbedrijven).
- + Een lesuur van 50 minuten is te kort om buiten te werken. Daarvoor heb je minstens twee lesuren achter elkaar nodig. Nog mooier: een hele (zonnige) middag.
- + Het is niet echt nodig om naar buiten te gaan. Ook in de kantine, de gangen of een flink klaslokaal valt er al heel wat te meten (zie de werkbladen).
- + Landmeetkunde is bij uitstek een groepsactiviteit. Het is mogelijk een duidelijke taakstelling te maken, en je hebt elkaar beslist nodig (een waarnermer, schrijver, baakvasthouder, rekenaar, etc.). Maak de groepen niet te groot (5 is wel het uiterste).
- + Landmeten is bezig zijn met concrete zaken, die je anders alleen maar op papier tegenkomt: hoeken, formules, berekeningen.
Dit alles wordt ineens heel tastbaar: je hebt echte hoeken tussen de benen van een hoekmeter; goniometrische formules vormen nu niet meer een vervelend rijtje dat je moet leren, maar zijn hulpmiddelen uit het arsenaal van landmeetkundige instrumenten. Hoeken en afstanden zijn geen mooie getallen meer, zoals 30° en $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, maar 'echte' getallen, zoals 43,628.
- + Landmeetkunde kan zowel oriëntatie op, als toepassing van goniometrie zijn. Bij landmeten als oriëntatie zul je ontdekken dat leerlingen anders over hoeken denken dan vroeger. Ze zijn zekerder van zichzelf. Ze weten bv. hoe groot een hoek van 10° ongeveer is.
Landmeten als toepassing laat zich heel mooi gebruiken om het contrast van theorie en praktijk zichtbaar te maken (zie werkblad G: nooit zul je door meten kunnen nagaan of som van de hoeken in een driehoek precies 180° is).
- + Je zou al in de brugklas kunnen beginnen (zonder gonio) en je kunt doorgaan tot en met de examenklas (probleem van Snellius).

Er zijn genoeg geldige redenen om aan landmeetkunde op school wat te doen en misschien net zo veel redenen om het niet te doen. Uiteindelijk zal het plezier voor jezelf en de leerlingen de doorslag geven.

5 Literatuur

Hans Steur, *Levende Wiskunde*, Educaboek 1980. Hoofdstuk 18 gaat helemaal over landmeetkunde. Er worden een aantal eenvoudige basistechnieken uitgelegd. In andere hoofdstukken zijn nog wat losse ideeën te vinden (hfdst. 11, 13, 14, 15, 17). Het materiaal moet nog wel omgezet worden in uitvoerbare leerlingenactiviteiten.

Ir. J. A. Muller & Ir. A. Scheffer, *Landmeten en Waterpassen*, Stam Technische Boeken 1974.

Ir. J. E. Alberda, *Inleiding Landmeetkunde*, Delftse Uitgeversmaatschappij 1978. Een HTS- respectievelijk TH-leerboek. Beide boeken bevatten veel theorie en technische informatie. Zeer geschikt voor zelfstudie, maar niet voor leerlingen.

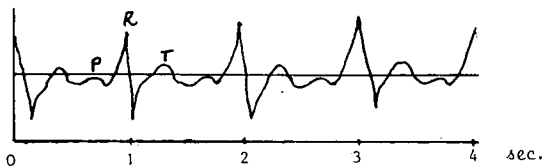
Th. W. Harmsen, *De Beknopte Lant-Meet-Konst*, Delftse Universitaire Pers 1978. Een boek over de landmeter van Nispen (1628-1717). Heel illustratief voor de ontwikkeling van de landmeetkunde. Aan de hand van een aantal historische metingen krijg je een goed beeld van de moeilijkheden waarmee je in de landmeetkunde ook nu nog te maken hebt.

Periodieke functies

MARTIN KINDT

Goniometrische functies zijn periodiek. Een uitspraak even interessant als 'melk is een vloeibare substantie' of 'kippen zijn tweevoeters'. Bepaald niet triviaal is het dat een continue periodieke functie, en dan mag zij zo grillig zijn als zij wil, te benaderen is door een som van sinussen en cosinussen. Zonder nu direkt Fourier Analyse als nieuw schoolvak te willen propageren, lijkt het mij de moeite waard om te onderzoeken in hoeverre goniometrische functies in het bredere perspectief van periodieke functies kunnen worden behandeld. In het werkgroepje 'periodieke functies' is over zo'n aanpak nagedacht, gediscussieerd, gefilosofeerd op basis van een drietal praktikumopdrachten.

De eerste opdracht deed meteen de harten onrustig kloppen. Het verschijnsel 'hartslag' is dan ook niet zo simpel als de tekst het deed voorkomen. Maar een ECG vertoont wel een tamelijk eenvoudig patroon ...



In medische handboeken deinst men er niet voor terug om dit patroon nog simpeler te maken:



Zoiets noemt men een *wiskundig model*. Aan de hand van dit model een paar vragen:

- ≥ 4. Kleur een stukje van de grafiek dat *alle* informatie geeft: begin bij een 'kamerpiek'. Hoe lang is het tijdsinterval bij dat stukje grafiek?
- ≥ 5. Dezelfde opdracht als ≥ 4., maar nu beginnen bij een 'boezempiek'.
- ≥ 6. Kies zelf nog een ander *representatief* stukje grafiek. Hoe lang is het tijdsinterval?

De tijdsintervallen die je in de vragen 4, 5 en 6 hebt gevonden, zijn gelijk. Als je een reeks opvolgende tijdsintervallen van die lengte uitkiest, het doet er niet toe waar je begint, zie je dat de grafiek zich op die tijdsintervallen herhaalt. We spreken in dit geval van een *periodieke grafiek*: de lengte van zo'n tijdsinterval noemen we de *periode* van de grafiek.

- » 7. Hoe zal de periode van iemands ECG veranderen als hij gaat sporten?
- » 8. Schets een ECG van iemand wiens hartslag na een paar rondjes hardlopen 120 slagen bedraagt in bovenstaande figuur (waarbij je er van uit mag gaan dat de hartslag in het afgedrukte ECG 60 is).

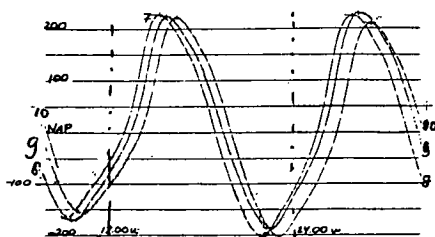
Een probleem bij dit type kontekst is of je als wiskundeleraar nu ineens alles af moet weten van de atrioventriculaire knoop of het elektrocardiogram. Gelukkig maar dat er biologie-kollega's zijn!
En wat te denken van dit fragment?

We hebben enige aandacht besteed aan twee periodieke verschijnselen, hartslag en bloeddruk, die nauw met elkaar samenhangen. Je hebt gezien dat je van de grafiek van zo'n verschijnsel maar een klein stukje nodig hebt (op één periode-interval) om alle informatie te krijgen. Tenminste ... als het verschijnsel *zuiver periodiek* is.

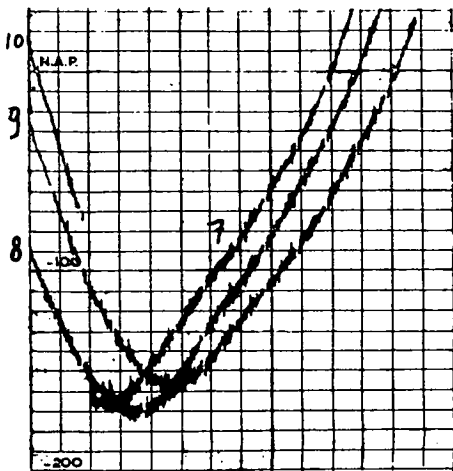
- » Wat zou er bedoeld worden met 'zuiver periodiek'?
Noem zelf een paar periodieke verschijnselen (al of niet met biologische achtergrond). Zijn die verschijnselen zuiver periodiek? Kun je je er een grafiek bij voorstellen?

Het onderscheid tussen *periodiek* en *zuiver periodiek* werd op mathematische gronden aangevallen: maar puristen in de wiskundetaal moeten wel bedenken dat die taal niet altijd toereikend is als het om het beschrijven van de werkelijkheid gaat.

Opdracht 2 handelde over getijtafels, met als inleiding een paar waterstandgrafieken door een 'normaalpeilschrijver' geregistreerd. Die grafieken (sommige leraren vinden dat je hier 'diagram' moet zeggen) zien er een beetje sinusachtig uit. Hoewel, bij uitvergroting wordt er nog een andere golfbeweging zichtbaar.



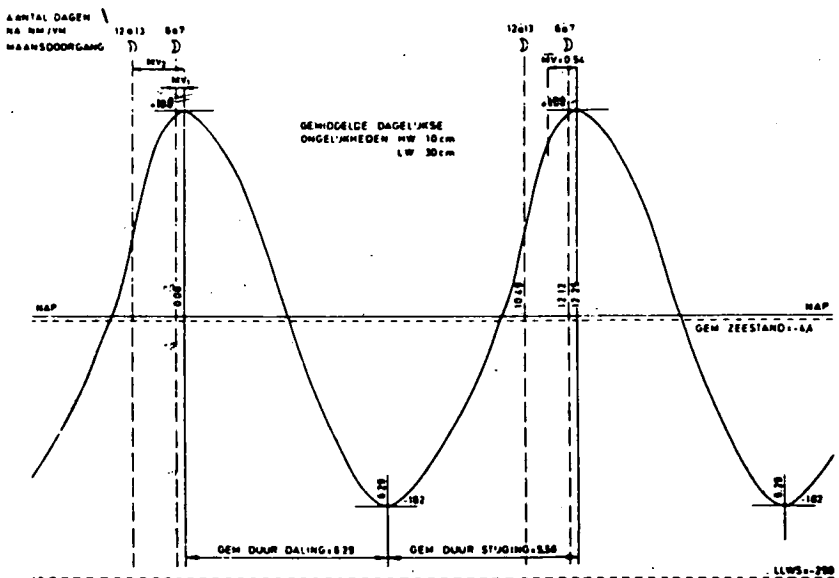
Grafiek Waterstand Vlissingen
1 juli 1978 08.00 uur tot 10 juli
1978 08.00 uur.



Doordat de Vlissingen-grafiek hier sterk verkleind is afgebeeld, gaat er wat informatie verloren. Vergelijk maar eens met het stukje grafiek van het formaat zoals je dat op de rol te zien krijgt ...

» 3. Wat is in deze figuur duidelijker zichtbaar dan in de verkleinde grafiek?

Heel wat gladder is de gemiddelde getijkromme zoals die te vinden is in het boekje 'Getijtafels van Nederland'.



Gemiddelde getijkromme te Vlissingen

Zo'n getijkromme kan nog mooier opgepoetst worden tot een wiskundig model.

In dit geval een 'zuiver periodieke grafiek' waarbij:

- hoog- en laag waterstanden precies tegengesteld zijn:
- duur van daling en stijging gelijk is:
- nulpunten even ver van elkaar liggen.

En dan kan het bijna niet anders of er komt een echte sinusoïde op papier.

Vergelijk met de getijkromme van Den Helder (zelfde periode, 5 uur later

hoog water, amplitude 75 cm) geeft aanleiding tot vragen als:

- » 8. Op zekere dag is het om 00.00 uur hoog water in Vlissingen.
Op welke momenten gedurende dat etmaal staat het water in Den Helder even hoog als in Vlissingen?
- » 9. Hoeveel uur per periode staat het water in Den Helder hoger dan in Vlissingen?

Die vragen lijken verdacht veel op die lastige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden die de leerlingen in 4 of 5, havo of vwo, op hun bordje krijgen. Denkt u ook dat de interpretatie uit de grafiek hier soepeler gaat dan bij een 'kale' sinuskrumme?

In opdracht 3 een paar echte sommen, waarbij voor het eerst de kennis van sinus en cosinus als functies van $\mathbb{R}$ naar $[-1, 1]$ verondersteld wordt.

- » 1. Bekijk nog eens de gemiddelde getijkromme van Vlissingen.
De amplitude is (ongeveer) 2 meter en de periode (ongeveer 12,4 uur).
 - a. We benaderen de gemiddelde getijkromme zo goed mogelijk met een sinusoïde. Welk functievoorschrift?
 - b. Gebruik het in a. gekozen wiskundig model bij het volgende probleempje.
Het is vandaag woensdag; vanochtend om 00.00 uur was het stijgend water en de waterstand was 0 N.A.P.
Zaterdag a.s. zijn er zeilwedstrijden die beginnen bij aflopend tij en wel bij een waterstand van +1 N.A.P.
Hoe laat zal het startschot vallen?

Die 12,4 (12 uur en 25 minuten) is toevallig ongeveer gelijk aan 4π . Zo komen we tot een fraaie formule voor de waterstand in Vlissingen:

$$V(t) = 2 \sin \frac{1}{2}t$$

waarbij nimmer uit het oog mag worden verloren dat er sprake is van een tamelijk grof model. Maar het sommetje $2 \sin \frac{1}{2}t = 1$ wordt in dit verband toch wel een stuk leuker.

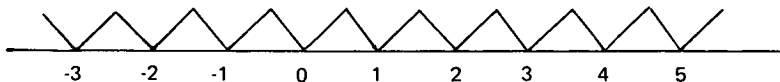
De andere opgaven van opdracht 3 gingen over ademhaling en de lengte van het groeiseizoen in Nederland.

Tot zover het praktikum. Omdat het geheel nogal fragmentarisch was leek het de inleiders goed om een overzichtje van de leerstoflijn te schetsen waar deze opdrachten in zouden kunnen passen:

- 1 Konfrontatie met enige periodieke verschijnselen die zich d.m.v. een grafiek laten illustreren. (bijv. hartslag, bloeddruk, activiteiten van dieren in de getijzone, interne- en externe biologische klok, zie Wiskrant 22: Jan de Lange, Levende Wiskunde).
- 2 Golflijn als speciaal type periodieke grafiek. Anticiperen op het oplossen van periodieke vergelijkingen en ongelijkheden. Uitdrukkingen in funktietaal, bijv. $V(t) = V(t + 12,4)$ waarbij $V(t)$ de waterstand in Vlissingen ten tijde t is.

3 Abstraktie tot het mathematisch begrip periodieke functie (voor alle $x \in \mathbb{R}$: $F(x + p) = F(x), \dots$). Eenvoudige wiskundige voorbeelden zoals:

- afstand van een reëel getal tot het dichtstbijzijnde gehele getal



- $f(x) = 2 - x^2$ voor $x \in [-2, 2]$, f periodiek met periode 4.

Grafiek! Nulpunten?

- ...

4 Sinus en cosinus als periodieke functies van $\mathbb{R}$ naar $[-1, 1]$.

Verband met de 'meetkundige' sinus en cosinus. Eenvoudige formules en vergelijkingen/ongelijkheden.

5 Toepassingen (sinus als model), bijv. getijbeweging, ademhaling, trillingen, zonnevlekken, schommeling van populaties (prooi en roofdier).

Een cruciaal punt is natuurlijk 4. en daar werd in de discussie dan ook prompt naar gevraagd. Een mogelijkheid om de sinusoïde in te voeren levert de schroeflijn. Aan de Wiskrant is de volgende tekst ontleend:

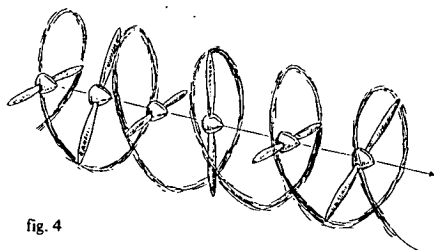


fig. 4

Zodra het vliegtuig gaat bewegen, hetzij op de grond, hetzij in de lucht, ontstaat er een ruimtelijke kromme, die heel toepasselijk - schroeflijn - wordt genoemd. We kijken dus naar de beweging van één propellortip. Hopelijk maakt het volgende plaatje de schroeflijn duidelijk.

In de volgende vier figuren ziet u hoe de propellortip een sinusoïde voortbrengt.

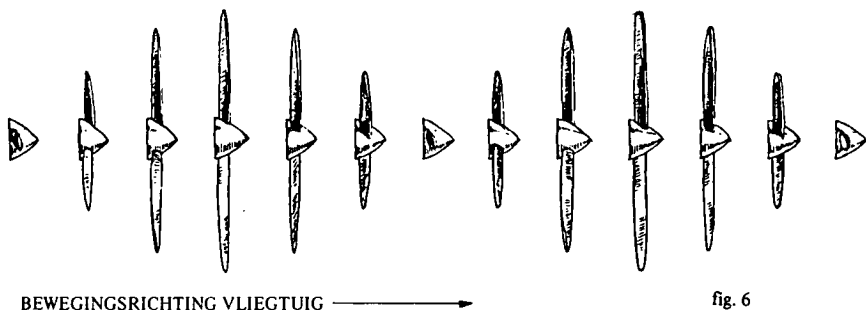
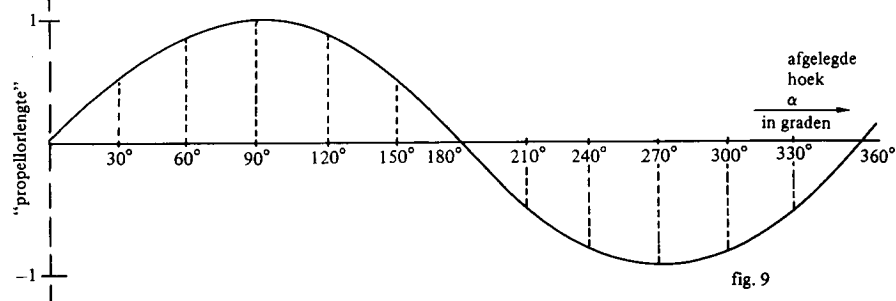
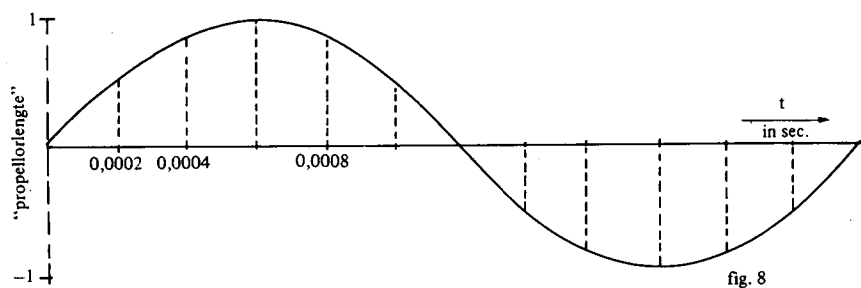
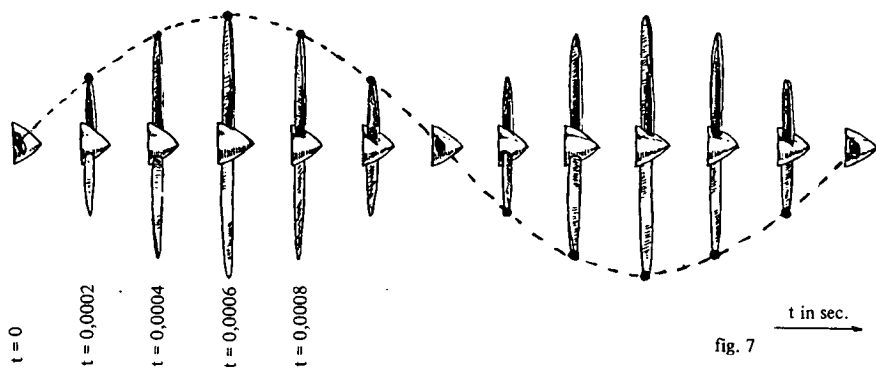
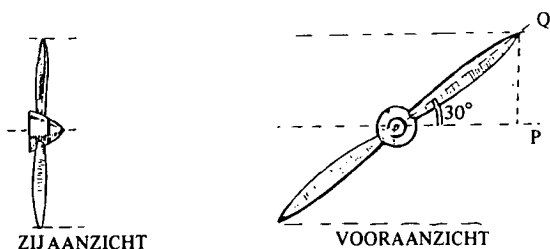


fig. 6



Grappig dat uit de lezing van Henk Bos over de geschiedenis van de gonio bleek, dat de eerste sinusoïde (Dürer) ook als schroeflijnprojectie tot stand kwam! Het verband met de sinus als verhouding kan gemakkelijk worden gelegd.



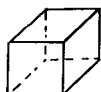
Tijdens de discussie werd nog naar voren gebracht dat de hier geschetste aanpak van wiskunde, geïntegreerd met toepassingen (zie ook de IOWO boekjes 'Exponenten en Logaritmen', 'Differentiëren I' en 'Funkties van 2 variabelen') vooral de A-leerlingen aanspreekt. In het kader van de aanstaande HEWET-experimenten lijkt dit soort teksten dan ook zeer bruikbaar. De verwachting is dat er ten bate van het HEWET-project een leerlingenboek over periodieke funkties ontwikkeld zal worden.

Taal in het wiskunde-onderwijs

JOOP VAN DORMOLEN

Bij alles wat met communicatie te maken heeft, en dus ook bij het leren en onderwijzen van wiskunde, maken we gebruik van tekens, die we horen of zien. Sommige van die tekens zijn heel eenvoudig. Denk maar aan de punt, die voor vermenigvuldigen staat. Of een streepje, voor lijnstuk.

Andere tekens hebben een tamelijk ingewikkeld aanzicht, zoals het plaatje van een kubus



of het teken voor een rotatie over een hoek van 22° om het punt P

$R_{P,22^\circ}$

Tekens kunnen dus opgebouwd zijn uit andere tekens.

De ingewikkeldheid van een teken heeft niet zoveel te maken met de ingewikkeldheid van de betekenis ervan.

Sommige tekens werken op ons op een manier die ik symboolwerking noem, bij andere tekens spreek ik van signaalwerking. Dikwijls is er sprake van beide werkingen tegelijk.

Het was oorspronkelijk onze bedoeling om de werkgroep aan deze twee begrippen te wijden. Tijdens de voorbereiding, die voor een belangrijk deel plaats vond nadat we de tekst voor de aankondiging van de dag van vandaag moesten inleveren, is het accent van de aandacht wat verschoven. Ik zal daarover verderop praten. Wel wil ik nu toch nog iets over de symbool-, resp. signaalwerking van tekens zeggen. Dat we het onderwerp vandaag niet zullen proberen uit te benen, is voor mij in zoverre wel prettig, dat ik er alleen maar wat schematisch over hoef te praten.

Een teken kan op mij het effect hebben dat een bepaald *begrip wordt opgeroepen* (of een samenstel van begrippen).

Of het kan het effect hebben dat het mij *aanzet tot een bepaalde handeling*.

Of, en dat is meestal het mooiste, het kan beide effecten tegelijk hebben.

We geven hier enkele voorbeelden van.

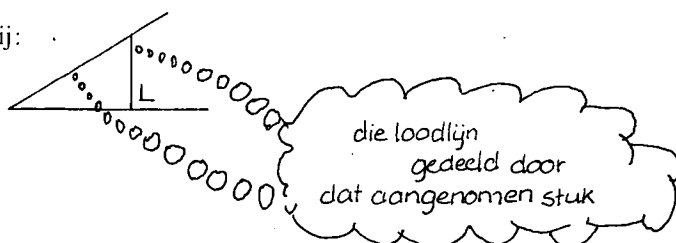
Ik zie of hoor: $\sin 22^\circ$.

Er gebeuren nu twee dingen met mij. Enerzijds komt er bij mij een herinnering boven.

Er wordt een cognitieve structuur opgeroepen waarin voornamelijk een rol speelt:

een beeld van een tamelijk scherpe hoek met een loodlijn uit een punt van een de benen op het andere been

en ik denk hierbij:



Zover over het begrippenschema dat opgeroepen wordt.

Daarnaast merk ik dat ik wel een rekenmachientje of een goniotabel zou willen hebben, want ik wil $\sin 22^\circ$ uitdrukken in een cijfercombinatie.

Primitief gezegd: ik wil weten 'hoeveel' $\sin 22^\circ$ is, alsof dat al niet vastligt door het teken zelf. Ik ben zo geconditioneerd dat ik $\sin 22^\circ$ opvat als een opdracht om iets te gaan doen.

Bij mij treden beide genoemde effecten (begrippenschema wordt opgeroepen en het verlangen er iets mee te doen) tegelijk op. Het hangt van de situatie af welk van de twee effecten op de voorgrond treedt.

In het eerste geval wil ik spreken van de symboolwerking van het teken (het teken werkt als een symbool). In het tweede geval van de signaalwerking ervan (het teken werkt als een signaal).

Bij ' $\sin 22^\circ = \dots$ ' heeft het gelijktteken voor de meeste mensen vermoedelijk een signaalwerking: je moet gaan 'uitrekenen'.

Bij ' $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ ' heeft het vooral symboolwerking: 'dat is een feit', hoewel het bij anderen ook wel eens de signaalwerking zou kunnen hebben in de vorm van het verlangen te gaan controleren of het werkelijk waar is.

Een mooi voorbeeld van een ingewikkelde signaalwerking is wat ik laatst zag:

$$\sin 10^\circ = b \Rightarrow 0,17365 = \frac{1}{10}b$$

Het zou fijn zijn als we in het wiskundeonderwijs de tekens tegelijk een signaal- en een symbool werking zouden kunnen laten geven. (Tussen twee haakjes: het gebruik van het woord 'werking' duidt er op dat hier sprake is van een subjectief begrip: werking kan verschillend zijn bij verschillende individuen).

Het gaat mis als een van beide verloren gaat. Bij een gebrekkige symboolwerking en een sterke signaalwerking spreken we dikwijls van klakkeloze routine. Bij een gebrekkige signaal- en een sterke symboolwerking zeggen we vaak dat de zaak theoretisch misschien wel begrepen is, maar dat er niets mee kan worden gedaan.

Tot zover over de begrippen symbool en signaal. Zoals ik al zei, zijn we tijdens onze voorbereidingen het accent op een ander punt gaan leggen. We hebben gemerkt dat we niet goed aan hierboven geïntroduceerde begrippen kunnen werken zonder eerst goed gewerkt te hebben aan het groter geheel waar die tekens deel van zijn, namelijk de *taal*.

Bij leren en onderwijzen wordt taal in verschillende vorm gebruikt. We willen hier twee vormen bespreken, namelijk die, welke door Freudenthal resp. *actie-taal* en *feit-vaststellende taal* wordt genoemd.

Ik geef twee uitspraken.

'sin 22° is de verhouding van loodlijn en aangenomen stuk bij een hoek van 22° '

en

'sin 22° krijg je door bij een hoek van 22° een aangenomen stuk *aan te wijzen*, de lengte daarvan te *bepalen*, vervolgens de loodlijn te *tekenen* of *aan te wijzen* en de lengte ervan te *bepalen* en tenslotte de lengte van het aangenomen stuk door die van de loodlijn te *delen*.'

Ik zal dadelijk deze twee zinnen nader bekijken. Eerst wat anders.

In de Scientific American van september 1980 spreekt Martin Gardner over *emirp*.

'Een emirp is een priemgetal met de eigenschap dat de cijfers ervan in omgekeerde volgorde geschreven weer een priemgetal vormen.'

Ik kan het ook zo zeggen:

'*Neem* een priemgetal. *Schrijf* de cijfers ervan in omgekeerde volgorde. *Kijk* of het getal dat je zo krijgt ook een priemgetal is. Als dat het geval is dan *noemen* we het gegeven getal een emirp, als dat niet het geval is, dan *noemen* we het niet een emirp'.

Over het algemeen zal de tweede zin iemand meer aanspreken als hij het begrip voor het eerst tegenkomt. Het is actietaal: de woorden zijn actiewoorden. *Neem*, *schrijf*, *kijk*, *noemen*.

De eerste zin is veel neutraler. Er wordt geen actie gevraagd of uitgevoerd. Er wordt een feit vastgesteld: 'Een emirp is ...'

Het gebruik van het werkwoord zijn als koppelwerkwoord (niet als hulpwerkwoord) bepaalt het karakter van de zin.

Wie voor het eerst het begrip emirp ontmoet door middel van de eerste zin heeft de neiging die zin uiteen te rafelen en er actietaal van te maken, ongeveer zoals de tweede zin.

Een bijzonderheid bij actietaal is nog dat de objecten van actie ook genoemd worden in de chronologische volgorde waarin de actie plaats vindt:

1. *schrijf* een getal op
2. *kijk* of het een priemgetal is
3. *schrijf* de cijfers in omgekeerde volgorde

4. kijk of je weer een priemgetal krijgt
5. zo ja, noem het dan een emirp
zo nee, noem het niet een emirp

In de feitvaststellende taal is die volgorde gewoonlijk verlaten: hoewel dat in het geval de emirp weinig afwijkt (behalve het noemen).

Ik ga nu naar de leerlingen terug voor de sinus van 22° .

In de actietaal staan handelingen en wel in chronologische volgorde:

1. krijg je
2. hoek van 22° (tekenen)
3. aangenomen stuk aanwijzen
4. lengte van aangenomen stuk bepalen
5. loodlijn tekenen en aanwijzen
6. lengte van loodlijn bepalen
7. delen

In feitvaststellende taal staan geen acties en chronologische volgorde van waarneming is ook afwezig.

- a. is
- b. verhouding
- c. loodlijn
- d. aangenomen stuk
- e. hoek van 22°

Samenvattend:

We denken dat de meeste mensen bij het leren kennen van een begrip bij voorkeur gebruik maken van actietaal. Hieruit volgt dat wij onze leerlingen kunnen helpen door ze

- a. toe te spreken in actietaal
- b. uit te nodigen actietaal te gebruiken als ze daar behoefte aan hebben
- c. pas in een later stadium (zodanig) over te gaan op feitvaststellende taal.

Voorbeelden:

- Niet: 'ik ga je vertellen wat de sinus van 22° is', maar: 'ik ga je vertellen hoe je de sinus van 22° kunt uitrekenen'.
- Niet: 'wat is $\sin 22^\circ$?' maar: 'wat kun je over $\sin 22^\circ$ vertellen?' of: 'hoe vind je $\sin 22^\circ$ '?

Als we de taal van leraren en van schrijvers van schoolboekjes op deze manier analyseren, kunnen we waarnemen dat velen intuïtief van deze gegevens gebruik maken. Dat zal uit de werkstukjes die u voorgelegd worden ook blijken. We willen vandaag bereiken dat deze gegevens niet alleen maar intuïtief, maar ook bewust gebruikt worden.

We hopen dat uit de werkstukjes ook zal blijken dat elk van de taalvormen vóór en náden heeft. Daar zullen we, na afloop van het werken eraan, gezamenlijk nog over spreken.

Na dit inleidend verhaal konden de deelnemers kijken en luisteren naar enkele korte videofragmenten. Vervolgens werden in groepjes enkele schoolteksten geanalyseerd en 'herschreven' zowel geheel in actietaal als geheel in feitvaststellende taal.

Uit de plenaire nabespreking kwamen de volgende algemene opmerkingen voort.

Blijkbaar heeft iemand de neiging in actietaal te spreken als het begrip nog niet stevig verankerd is. Wie zeker van zijn zaak is en een goed inzicht heeft in het begrip, vertoont veel meer de neiging om in feitvaststellende taal te spreken.

Een verklaring hiervoor zou kunnen zijn, dat iemand, die nog in het leerstadium verkeert een veel grotere persoonlijke betrokkenheid heeft bij datgene wat hij aan het leren heeft. Die persoonlijke betrokkenheid komt tot uitdrukking in zijn gedrag en dat gedrag is in dit geval vooral taalgedrag. Actietaal is een uiting van iemand die zich persoonlijk bij de zaak betrokken voelt.

Wie een goed inzicht in de materie heeft is veel beter in staat daar wat afstandelijk naar te kijken. Het is alsof zoiemand naar de begrippen en hun onderlinge relaties kijkt vanuit een andere wereld. Dat komt dan ook in zijn taalgedrag tot uiting. Er zal een taal gebruikt worden waar de betrokkene zelf geen persoonlijk deel meer aan heeft. De taal wordt feitvaststellend.

Samenvattend kunnen we constateren:

Een grote persoonlijke betrokkenheid bij de leerstof, alsof er een speciale relatie tussen de persoon en de (wiskundige) begrippen bestaat, leidt tot het gebruik van actietaal.

Wie de materie beheerst kan van buiten af naar de onderlinge relatie tussen de (wiskundige) begrippen kijken, hetgeen zich uit in het gebruik van feitvaststellende taal.

Een en ander heeft tot gevolg, dat iemand in één zin zowel actietaal als feitvaststellende taal kan gebruiken, afhankelijk van de mate waarin hij inzicht heeft in de verschillende begrippen die hij gebruikt.

Het betekent ook dat een leraar best beide taalsoorten door elkaar kan gebruiken, afhankelijk van de mate waarin de leerling (naar zijn mening) de verschillende begrippen beheerst.

Verder kan de leraar de leerling stimuleren om te proberen feitvaststellende taal te gebruiken en uit de mate waarin dat de leerling lukt zijn conclusies trekken over het beheersingsniveau.

Schoolboekteksten kunnen zonodig aangepast worden.

Voor degenen die op de hoogte zijn van Freudenthal's ideeën over taalniveau's zij gezegd, dat met bovenstaande geen nieuw soort begrippen worden geïntroduceerd.

Beide begrippen – actietaal en feitvaststellende taal – zijn in het bovenstaande geïnterpreteerd op een manier die (naar onze mening) ook zo door hem zijn bedoeld.

Bij Freudenthal komen er echter nog wat verfijningen: actietaal kan demonstratief van aard zijn of relatief: feitvaststellende taal kan relatief of functioneel zijn.

De omgang tussen leraar en leerling

GERARD DOEVENDANS

Er zijn leerlingen, maar ook leraren, die 'balen' van gonio. Deze houding komt in de omgang meestal duidelijk tot uitdrukking. Daarmee is er een situatie ontstaan, waarvan we een enkel facet op deze studiedag onder de loupe willen nemen. Wij leunen hierbij duidelijk op ideeën die Thomas Gordon omschrijft in zijn boek 'Beter omgaan met kinderen'.

Het is hoopgevend te ervaren dat de relatie leraar-leerling niet een vast gegeven is, maar dat het iets is dat bijgestuurd kan worden, iets waaraan je kunt werken. Je kunt leren om ineffectieve reacties te onderkennen en te vermijden.

Als leraar zul je misschien een aantal dingen van je leerlingen niet accepteren, bijvoorbeeld:

- eten onder de les,
- werken aan een ander vak,
- een opmerking als 'U vindt gonio zelf ook niet leuk',
- een vraag als 'Waar heb je gonio nou eigenlijk voor nodig?',
- herhaaldelijk het huiswerk niet maken,
- op eigen houtje de ramen openen.

Daarnaast zijn er uiteraard vele zaken die je als leraar wel accepteert.

Zo kun je als het ware een grens trekken tussen de dingen die je wel en de dingen die je niet accepteert. De grens daartussen, de acceptatiegrens, verschuift voortdurend onder de invloed van bijvoorbeeld de omgeving, je stemming, vroegere ervaringen. Zie figuur a.

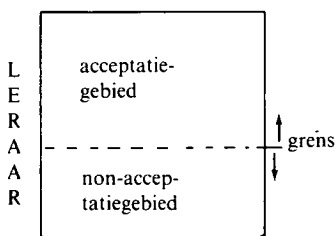


fig. a

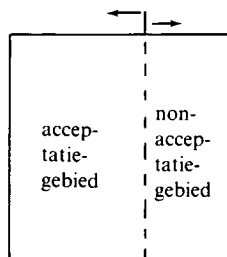


fig. b

LEERLING

Voor de leerling geldt ook dat hij/zij bepaalde zaken niet kan accepteren, bijvoorbeeld:

- onduidelijke uitleg,
- slechte adem van de leraar,
- nu aandacht aan gonio te moeten besteden terwijl het volgende uur een schoolonderzoek wacht,
- kleinerende opmerkingen.

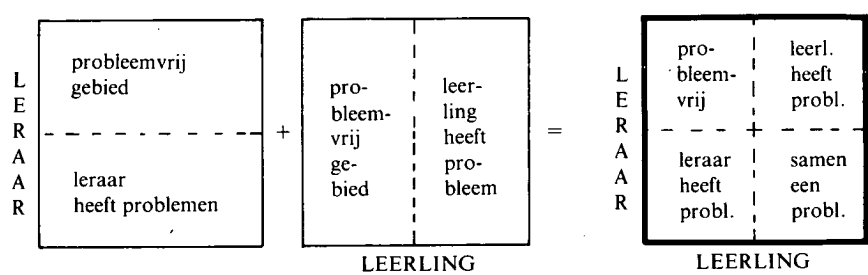
Ook de acceptatiegrens van de leerling is veranderlijk. Zie figuur b.

Het door een leerling weer niet gemaakte huiswerk kan door de leraar in zijn non-acceptatiegebied worden geplaatst, terwijl het voor de leerling geen probleem is: de leerling plaatst het in zijn acceptatiegebied.

Het omgekeerde kan zich voordoen als de leraar heel veel huiswerk opgeeft. Voor hem, de leraar, is dat geen probleem, maar voor de leerling wel.

Het acceptatiegebied wordt ook wel aangeduid als het probleemvrije gebied, d.w.z. het gebied waarbinnen de persoon goed kan functioneren.

De relatie tussen leraar en leerlingen kan worden weergegeven met het volgende schema:



Op deze manier ontstaat een relatiematrix, waarin we vier verschillende gebieden kunnen onderscheiden. Voor ons is het probleemvrije gebied het belangrijkste, omdat wij achter de mening van Gordon staan dat alleen binnen het probleemvrije gebied het onderwijs- en leerproces effectief kan zijn. Om deze reden is het zinvol het probleemvrije gebied te vergroten opdat een groter deel van de beschikbare tijd effectief kan worden besteed aan onderwijzen.

Hoe pak je dat aan? We gaan er van uit dat in de relatie leraar-leerling een probleem is ontstaan.

De eerste stap om het probleemvrije gebied te kunnen vergroten is het beantwoorden van de vraag: ‘Wiens probleem is het?’. Is het een probleem van de leraar of van de leerling of van leraar en leerling samen?

Als de leraar kans ziet deze vraag te beantwoorden heeft hij een aantal mogelijkheden ter beschikking om te voorkomen dat hij ineffectief reageert. Gordon beschrijft onder andere:

- de *actief-luisteren-methode* voor het geval de leerling een probleem heeft,
- de *ik-boodschap* voor het geval dat de leraar een probleem heeft en
- de *overleg-methode* voor het geval dat leraar en leerling samen een probleem hebben.

Terug naar de aanhef waarin we stelden dat we een enkel facet onder de loupe willen nemen. We willen een proces starten door:

- 1 te letten op acceptierend of niet-acceptierend gedrag van de leraar,
- 2 na te denken over gevoelens van leerlingen bij een reactie van de leraar,
- 3 de effectiviteit van een reactie te beoordelen.

We doen dit met behulp van een aantal opdrachtformulieren en de daaruit voortvloeiende discussie. We lossen geen problemen op. We wijzen op een mogelijkheid om in de (gonio)les naar een verbetering van de relatie leraar-leerling te werken.

gedrag van de leerling	reactie van de leraar	accep/ nonacc	gevoelens van de leerling	effectief of niet?
Mag ik wat eerder weg? Ik moet naar de oogarts.	Heb je een briefje van thuis? Je weet dat dat afspraak is.			
Ik kon het huiswerk niet en heb de sommen niet af.	Dan heb je weer niet opgelet: je zit zo vaak te suffen.			
Een jongen heeft zijn gonioproefwerk verprutst.	Je kunt beter bouwvakker worden: daar is werk te over.			
Ik ben ook altijd de pineut als er wat is.	Heb je het idee dat ik je er vaker ten onrechte uitpik?			
Marion stookt de andere kinderen tegen me op!	Mm hmm ...			
Ik snap de uitleg niet!	Kun je er wat meer van zeggen?			
Ik begrijp niet dat we gonio moeten leren: wat heb je daar nou aan?	Wij moesten vroeger op school ook vaak dingen doen waarvan we niet direct het nut inzagen.			
		nonacc		
		accep		

De leraar schrijft op het bord: $\cos(x + y) =$ en zegt: 'Karel, vul jij dat eens aan.' Karel: 'Weet ik veel . . . zal wel haakjes wegwerken zijn, dus $\cos x + \cos y$.' Leraar:	accep/ nonacc	effec- tief/ non- effec- tief	een alternatief indien non-effectief
Zoiets zeg je niet tegen een leraar.			
Vul voor x eens 45° in.			
Bekijk het eens rustig, volgens mij weet je veel meer.			
Kijk eens op blz. 57, daar staat de formule.			
Ik wou dat dát waar was.			
Heb je de formule niet geleerd?			
Heeft iemand een ander antwoord?			
Kun je waarden voor x en y vinden waarvoor het klopt?			
Zit je erg met de gonio?			
Nee Karel, dat is niet goed: heb je hulp nodig of probeer je het nog eens?			
Je bent er niet zeker van? Hoe kun je je antwoord controleren?			

Literatuur

Amidon, Edmund en Hunter, Elizabeth, *Naar beter lesgeven*, (Pedi-reeks 6) Bosch en Keuning, Baarn 1975.

De analyse van de verbale interactie in de klas.

Brown, G. I. e.a., *Leven in de klas*, Boom, Meppel 1975.

Over de harmonische ontwikkeling van verstand en gevoel.

Gordon, Thomas, *Luisteren naar kinderen, de nieuwe methode voor overleg in het gezin*. Elsevier, Amsterdam.

De zeer heldere onderscheiding tussen problemen die ouders hebben en de problemen die kinderen hebben is direkt van toepassing op het onderwijs: wat is het probleem van de leraar en wat het probleem van de leerling?

Gordon, Thomas, *Beter omgaan met kinderen: de nieuwe manier van samenwerken op school en thuis*. Een logisch vervolg op 'Luisteren naar kinderen'.

Gerards, Franse.a., *Effectief onderwijs*. Praktijkboek voor het omgaan met leerlingen. H. Nelissen. Bloemendaal 1980.

Raths, L. A. e.a. *Naar eigen waarden*. deel 1 Basisboek, en Simon, S. B. e.a. *Naar eigen waarden*. deel 2 Praktijkboek. Lemniscaat, Rotterdam 1978.

Rogers, C. R., *Leren in vrijheid*. De Toorts, Haarlem 1973.

Een wijze van leren die, doordat de leraar zijn leerlingen' vrijheid biedt, zelf echt is en leerlingen aanvaardt, de leerling mogelijkheden geeft zichzelf te zijn en zich te ontplooiën.

Markt op een themadag

LEO MUSKENS, WIM DE PORTO

Komt dat zien ... mensen lopen druk door elkaar te markten ... aan de kraampjes kan ieder doen wat in eigen kraam te pas komt ... gonio als invalshoek.

Het kan welhaast niet anders of een impressie van zo'n markt met vondsten op gonio-gebied is al even chaotisch. Eerlijke bedoeling is recht te doen aan de kraamlieden, de originaliteit van hun ideeën, hun voorbereiding en inspirerende aanwezigheid.

Hierna volgt een eigen greep uit het gebodene. Was een ander voor boodschappen naar de markt gestuurd, dan zou die ongetwijfeld een andere greep gedaan hebben. Volgende keer toch maar zelf gaan ...

Vóór de middag-markt had de werkgroep landmeetkunde al bezit genomen van de kantine. Dat was wel te zien aan de opgestelde apparatuur: professioneel, maar ook apparaatjes gemaakt door studenten en simpele konstrukties die ook door eigen leerlingen te maken zijn. Sieb Kenme en Cor Nagtegaal brachten dit materiaal bijeen en Hans Kwast assisteerde de nieuwsgierige leraren bij het gebruik.

Spontaan meldde zich bij het begin van de themadag Rudolf Smith voor door zijn eenvoud treffende demonstratie van een lattenmodel waarmee sinus en cosinus van hoeken in alle kwadranten zichtbaar gemaakt kunnen worden. Hij zal zich beslist aangesproken gevoeld hebben door de stelling 'het verdient aanbeveling de symmetrieën bij gonio uit de eenheidscirkel af te leiden'.

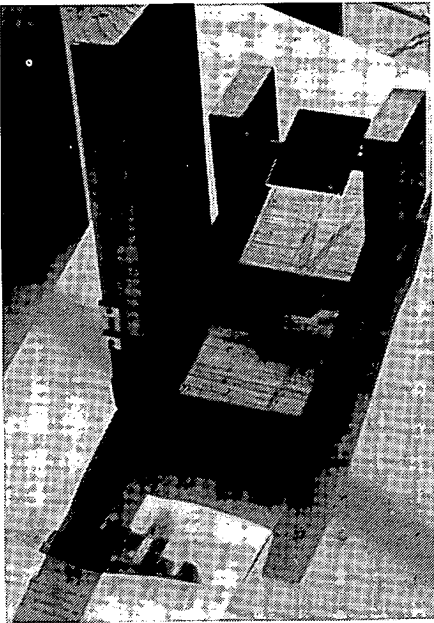
Deze stelling stond op een flap onder een soortgelijke, waarin het woord 'grafiek' stond in de plaats van 'eenheidscirkel', daar neergeschreven door Frans Bouman. Hij had wel meer stellingen over gonio-onderwijs geproduceerd: de aanwezigen konden door het opplakken van rode of groene stikkertjes te kennen geven of zij het met zo'n stelling eens waren, hetgeen uiteraard met stevige discussies gepaard ging. Het is verleidelijk enkele stellingen, hieronder soms verkort, weer te geven. Het is aan de lezer het kringetje ervoor in te kleuren!

- o ... niet een apart vak maar onderdeel van de hele schoolwiskunde: dit dient tot uitdrukking te komen in de wijze van behandelen.
- o De leerling dient de formules op elk gewenst moment uit het hoofd te kennen.

Op het eindexamen mag de leerling ...

- De vraag 'Is sinus nemen distributief over optellen?' moet gemotiveerd beantwoord kunnen worden.
- Zolang men bij het aantonen van bepaalde eigenschappen van de sinusfunctie zijn toevlucht blijft nemen tot het gepriegel met hoeken, kan van een leerling niet verwacht worden dat deze een konsekvent onderscheid ziet tussen de begrippen 'sinus van een hoek' en 'de functie $x \rightarrow \sin x$ met domein $\mathbb{R}$ '.

In de Gelderse Leergangen, Tolhuis 23-11, 6537 ME Nijmegen, telefoon 080-45 99 55, is een zgn. didaktiekwerkwinkel ingericht. Voor Dielly Bartels, Harry Pruys en Henk Tannemaat, studenten bij Frans Dolmans, was de over-



stap van hun winkel naar de markt niet zo groot. Uit de mond van Dielly en Henk noteerden wij:

'We zijn naar de studiedag gekomen omdat één van onze docenten ons gevraagd heeft hier materiaal te laten zien wat we tot nu toe verzameld hebben. Met dit uitgezochte materiaal willen we een indruk geven waar we op het moment mee bezig zijn.

We hebben ons materiaal ruim en op lange tafels uitgesteld, wat weer erg goed uitkomt want de belangstelling is erg groot. Het bleef niet alleen bij belangstelling, maar er kwamen ook mensen met eigen materiaal bij staan: enkelen gaven nuttige tips hoe ze zelf met konkrete materialen werkten.

Dit vinden we erg leuk. We krijgen hierdoor de bevestiging dat we op dit moment zinvol bezig zijn. Bovendien vinden we het erg leuk om ook na deze dag nog meer tips en ideeën te krijgen.

Iedereen die belangstelling heeft voor de didaktiekwerkwinkel wordt uitgenodigd om op de Gelderse Leergangen een kijkje te komen nemen. De werkwinkel probeert namelijk ideeën en materiaal aan te reiken voor alle onderwijsgeven: het is een ruimte waar allerlei wiskundige hulpmiddelen aanwezig zijn. Deze kunnen geleend en bestudeerd worden op hun bruikbaarheid.

Er zijn: spijkerborden, spiegeltjes, rekenlinealen voor negatieve getallen enz. Maar ook zijn er lesideeën over wiskundige toepassingen, I.O.W.O.-materiaal en skripties, beschrijvingen van videofilms. Sinds kort heeft men de beschikking over een boekwerk met daarin een beschrijving van alle aanwezige materialen.'

Na de markt hebben Dielly en Henk meegedaan in de werkgroep Landmeetkunde. Ook daar hebben zij de indruk gekregen dat men een grote belangstelling had voor elkaars werkwijze en het materiaal dat men daarbij gebruikte.

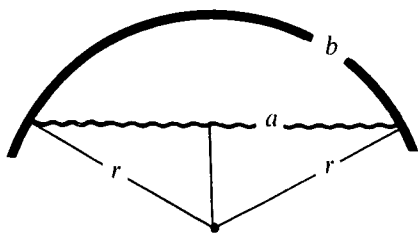
Voor beide studenten is het een zinvolle en leerzame werkdag geweest.

Joop van Dormolen en Hans Pouw maakten een diaserie-met-geluid over het invoeren van de sinus en de cosinus via een 'opwind-functie'. Er werd verwezen naar twee artikelen van Van Dormolen: 'Geen graden, maar ook geen radialen' en 'De familie der cos-achtigen' in Euclides resp. 42e jaargang 1966-67 pag. 246-248 en 43e jaargang 1967-68 pag. 1-4.

Agneta Aukema-Schepel presenteerde 'Goniometrie voor 4 havo-vwo', een pakketje ontworpen en uitgevoerd door Wolfgang Reuter t.b.v. de Scholengemeenschap Lelystad voor leerlingen die voor het overgrote deel afkomstig zijn uit hun driejarige middenschool. De leraren van deze school vragen iedereen die dit pakketje in handen krijgt dringend of ze hun kommentaar op dit pakketje willen doorsturen.

Tot slot, ook na de markt moet er werk aan de winkel zijn, volgen hier nog een aantal problemen die Hessel Pot voor de markt produceerde. We hebben voor het gemak de oplossingen maar weggelaten ...

Opgave: Bereken bij gegeven koord(e)lengte a en booglengte b de boogstraal r .
Uit de figuur hierna volgt direct: $r \sin (\frac{b}{r}) = \frac{a}{2}$. Maar nu?

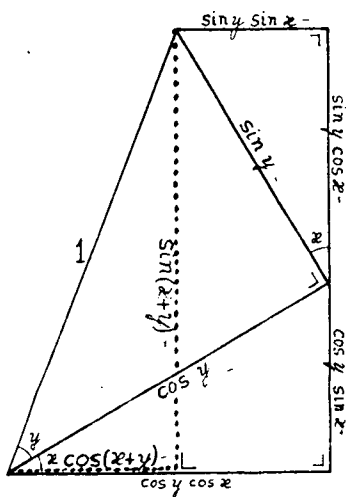
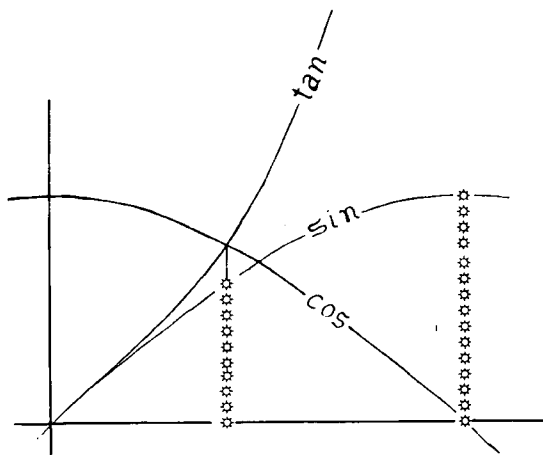


Er zijn geen schoolmiddeltjes om deze vergelijking 'op te lossen'.

Misschien weet een leerling met z'n vingers aan de knoppen van z'n rekendoosje er toch wel wat op te bedenken om uit $a = 10$ en $b = 12$ af te leiden dat $r = 5,8437481\dots$

En wie weet er onder het ordeloze zoeken wat slimmigheden in te brengen?

Twee problemen zonder woorden, getiteld 'De gulden snede uit tan, cos en sin' en ' $\sin(x+y) = \dots$ en $\cos(x+y) = \dots$ ', hieronder in figuren aangegeven.



Vraag: Komen er naast -1 , $-\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$ en 1 nog andere mooie (= rationale) cosinuswaarden voor bij geheelgradige hoeken?

Het blijkt dat we veilig tegen onze leerlingen kunnen zeggen dat dit niet zo is. Aangetoond kan worden dat dit zelfs bij geen enkel rationaal deel van een rechte hoek het geval is.

Vraag: Waarom worden de originelen van de sinusfunctie in een tekening altijd afgezet langs een rechte lijn? Overall waar deze functie opduikt stellen de originelen hoeken voor.

Worden we er wijzer van om bij het tekenen van de grafiek deze hoeken maar gewoon hoeken te laten blijven?

Maak of koop grafiekenpapier met poolcoördinaten en teken een aantal punten van de grafiek. Er lijkt een mooie kromme door te gaan. Is dat ook aan te tonen?

Pascal, Nederlands rekenwonder sinds jaren vermeld in
het beroemde Guinness Book of Records.

Zie de levende computer aan het werk.
Iedere middelbare scholier moet dit evenement
minstens eenmaal hebben meegemaakt.

*Voor inlichtingen, programma en honorarium: **Wim Klein***
Brouwersgracht 32, 1013 GW Amsterdam, tel.: 020-26 28 10

Gamma

Een wiskunde-methode speciaal voor de havo-
bovenbouw.

De nadruk ligt op de praktische toepassing in
andere vakgebieden (scheikunde, natuurkunde,
biologie etc.) en bereidt de havo-leerling uitste-
kend voor op het hbo.

Nieuw en vernieuwend!

Binnenkort wordt uitvoerige informatie aan de be-
treffende docenten toegezonden.



gottmer educatief

postbus 555 2003 RN Haarlem

INHOUD:

- F. Goffree, L. Muskens: VERGADEREN en vergaderen, dat is $2 \sin \frac{\pi}{2}$ 389
- J. de Lange Jnz: Vlieg er eens in 393
- S. Kemme, C. Nagtegaal: Landmeetkunde op school 401
- M. Kindt: Periodieke funkties 409
- J. van Dormolen: Taal in het wiskunde-onderwijs 416
- G. Doevendans: De omgang tussen leraar en leerling 421
- L. Muskens, W. de Porto: Markt op een themadag 425

ADRESSEN VAN DE AUTEURS

- E. G. Doevendans, Clara Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam.
- J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht.
- F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin.
- S. Kemme, Grietenij 94, 9351 JG Leek.
- M. Kindt, Schuurhoven 7, 6721 SM Bennekom.
- J. de Lange Jzn, Toorenveldstraat 32, 2343 XV Oegstgeest.
- L.A.G.M. Muskens, De Steenen Kamer 14, 5481 GD Schijndel.
- C. Nagtegaal, Emmalaan 14, 3581 HT Utrecht.
- W. P. de Porto, Schuberthof 7, 2742 BT Waddinxveen.