

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

56e jaargang

1980/1981

no. 3

november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Twee IOWO-publikaties

P. G. J. VREDENDUIN

Het streven van het IOWO nieuwe perspectieven te openen voor het wiskunde-onderwijs aan LBO en MAVO is bekend. Velen vragen zich af: zijn soortgelijke vernieuwingen ook mogelijk voor HAVO en VWO? Door middel van een tweetal publikaties heeft het IOWO op deze vraag een duidelijk positief antwoord gegeven. Deze publikaties zijn:

- 1 Exponenten en logaritmen door Drs. Jan de Lange Jzn., 1978, 107 blz.
- 2 Differentiëren 1 door M. Kindt, voorjaar 1979, 80 blz.

Beide boekjes zijn tot stand gekomen binnen de afdeling Wiskivon van het IOWO. Ze zijn bestemd voor de vierde klasse van het VWO en het HAVO.

1 Exponenten en logaritmen

Het grondprincipe is:

- a ontwikkel aan de hand van praktische voorbeelden een nieuw begrip
- b onderzoek de wiskundige eigenschappen van dit begrip
- het enige doel van de vraagstukken is daarbij het begrip te verduidelijken
- c pas de verkregen inzichten toe op praktische situaties.

Aan de hand van een voorbeeld met veuleñs wordt duidelijk gemaakt wat verstaan wordt onder een groeifactor.

Het volgende voorbeeld gaat over celdelingen. De groeifactor is 2. De machten van 2 spelen kennelijk een rol. Als er 32 cellen zijn ten tijde 0, hoeveel cellen waren er dan ten tijde -1 , -2 ,

De machten met negatieve exponenten liggen nu voor het grijpen.

Daarna wordt heer Bommel ten tonele gevoerd, die het plan heeft zijn vijver met kroosplantjes te laten begroeien. De groeifactor is weer 2, waarmee nu bedoeld wordt dat elke dag het aantal kroosplantjes verdubbeld wordt en daardoor een 2 maal zo groot oppervlak van de vijver begroeid raakt.

Impliciet wordt de aanname gemaakt: in gelijke tijdsintervallen wordt de begroeide oppervlakte met dezelfde factor vermenigvuldigd. Hoeveel kroosplantjes zijn er na $\frac{1}{2}$ dag, hoeveel na $\frac{1}{4}$ dag enz.? Zo komen we er toe machten met rationale exponenten door middel van wortels te definiëren. Daarmee wordt

dan wat geëxerceerd.

Voorlopig genoeg theorie. We gaan naar de praktijk terug. Het radioactieve verval van koolstof levert een mogelijkheid de ouderdom van fossielen te bepalen (^{14}C methode). Weer spelen machten van 2 een rol. De halveringstijd komt ter sprake.

Een ander voorbeeld is het gasverlies van luchtschepen. Dit geeft ons aanleiding daar een grafiek van te ontwerpen. Zo ontstaat vanzelf de behoefte ook machten met irrationale exponenten te definiëren om te voorkomen, dat de grafiek gaten zou vertonen.

Nu de grafiek er eenmaal is, zien we dat exponentiële functies stijgend zijn bij grondtallen groter dan 1 en dalend bij grondtallen kleiner dan 1. De theorie wordt zo verder ontwikkeld. Eenvoudige exponentiële ongelijkheden worden opgelost.

Er is nu voldoende voorbereidend werk verricht om eigenschappen van logaritmen op te sporen. Aangetoond wordt, dat $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$. En ook, dat $(a^p)^q = a^{pq}$. Steeds zijn het echter de leerlingen die de theorie afleiden, daarbij geholpen door een serie geschikt gekozen opdrachten.

We zijn hier op bladzijde 30. De volgende 20 bladzijden worden geheel besteed aan praktische toepassingen. Ik geef een opsomming van de onderwerpen: voortplanting van motten, sparen voor een motorfiets (samengestelde intrest), bevolkingsgroei, opbrengst van landbouwgrond, levensverzekering, zeesterren, spiralen, muziek (toonladders). Steeds gaat het om toenamen. Soms zijn die per definitie exponentieel, zoals bij levensverzekering en toonladders. In andere gevallen, zoals bij de zeester, wordt de groei gemeten, in een grafiek afgezet en daarna onderzocht of de groei exponentieel is. Men ziet dan dat in sommige gevallen de groeikromme benaderd kan worden door een exponentiële kromme.

De tweede helft van het boekje is besteed aan de logaritmen. Het begint met: Bommel nader bekeken. We beginnen met 1 m^2 kroosplantjes. Wanneer waren er 10 m^2 ? De grafiek van de exponentiële functie $x \rightarrow 2^x$ is erbij getekend en hieruit wordt het antwoord afgelezen. Daarmee is de logaritme tot stand gekomen.

De grafiek van de logaritmische functie, het afleiden van de eigenschappen van de logaritme en het maken van eenvoudige vraagstukken volgt.

Daarna weer terugkoppeling naar de praktijk. Men kan zich nu wel voorstellen, hoe dat in zijn werk gaat.

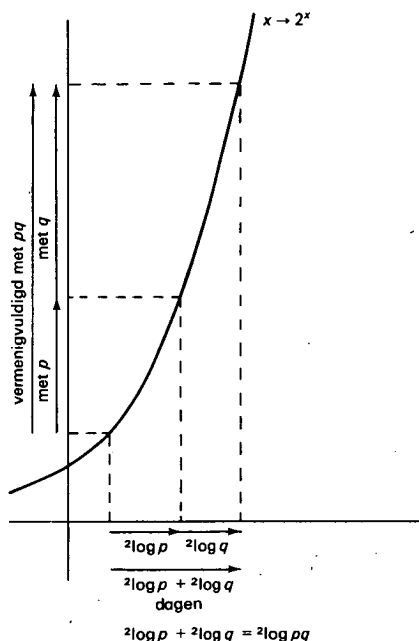
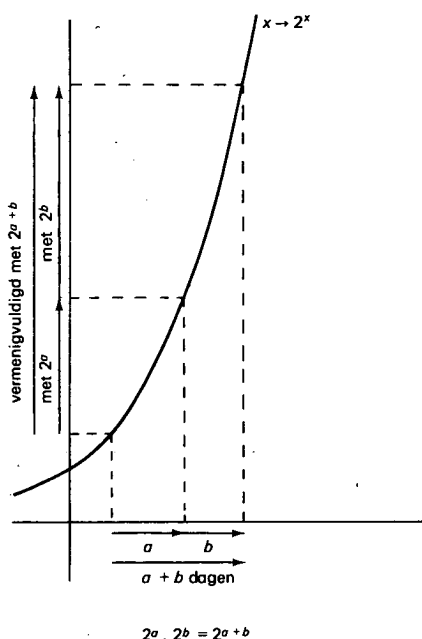
Gemakkelijk is soms logaritmisch papier te gebruiken bij het tekenen van een grafiek. Ook aan dergelijke technische kwesties wordt de nodige aandacht besteed. Ten slotte volgen nog de logaritmentafel als historisch document, de rekenliniaal en de rekenmachine.

De terugkoppeling is uitermate belangrijk. Juist daardoor zien we, dat wiskunde geen geïsoleerde wetenschap is, maar te maken heeft met problemen van allerlei aard. Dit zal het de leerling makkelijker maken het hokjespatroon, dat door het huidige onderwijs nogal in de hand gewerkt wordt, te doorbreken.

Naast veel waardering heb ik toch enige bescheiden kritiek.

Ik krijg de indruk dat het accent zozeer op een andere behandelingswijze gelegd wordt, dat men soms verzuimt de nodige wiskundige correctheid in acht te nemen. Het blijft m.i. van belang dat men zich, waar dit didactisch niet schadelijk is, zo zuiver mogelijk uitdrukt. Zo vind ik op blz. 26 onder m het door elkaar gebruiken van implicatie- en ekwivalentiepijlen bij het oplossen van een ongelijkheid, niet toelaatbaar. Op blz. 61 onder d wordt impliciet beweerd, dat je niet precies kan zeggen hoe groot ${}^2\log 35$ is. Dit werkt misverstanden in de hand.

Ten slotte nog een suggestie. De schrijver heeft bij Heer Bommels kroosvijver de groefactor in $\frac{1}{2}$ dag $2^{\frac{1}{2}}$ genoemd en die in $\frac{1}{4}$ dag $2^{\frac{1}{4}}$. Zou het niet aardig zijn die gedachte consequent uit te buiten? Onder 2^a verstaan we de groefactor in a dagen. Nu kunnen we ogenblikkelijk laten zien, dat $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$. Zie de hieronder staande linker grafiek.



De rationale exponenten bieden geen moeilijkheid meer. Immers bijv. $2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$. Maar ook de irrationale exponenten behoeven niet meer apart ingevoerd te worden. We hebben ze niet nodig om de gaten in de grafiek te dichten, want de grafiek vertoont geen gaten. In de gegeven definitie van 2^a is immers a een willekeurig reëel getal.

Op soortgelijke wijze kan men later bewijzen, dat ${}^2\log pq = {}^2\log p + {}^2\log q$. Zie de rechter grafiek. Drukt men beide grafieken nog eens naast elkaar af, dan ziet men duidelijk het verband tussen beide eigenschappen. Het is maar een suggestie. Misschien heeft iemand er iets aan.

2 Differentiëren 1

De didactische grondprincipes zijn dezelfde als bij Exponenten en logaritmen. Het boek bestaat uit acht onderdelen, waarin stuk voor stuk de inzichten ontwikkeld worden noodzakelijk voor een goed begrip van het differentiëren.

A Veranderingen

De Fransman De Montbeillard meet jaarlijks de lengte van zijn zoontje, de koffieprijs gaat als een komeet omhoog als gevolg van veranderingen op de wereldmarkt, de werkloosheid in Engeland is in de jaren 1973–1977 sterk aan veranderingen onderhevig, de temperatuur fluctueert in de loop van de dag. Ziehier voldoende aanknopingspunten om de leerlingen het begrip verandering te laten beleven, en te demonstreren, mede aan de hand van grafieken, dat de snelheid waarmee een grootte verandert, van belang is.

De schrijfwijze $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ wordt gebruikt, het woord differentiequotiënt niet.

B Tijd – afstand – snelheid

In dit onderdeel wordt uiteengezet dat de gemiddelde snelheid onvoldoende informatie levert, als men op de hoogte wenst te zijn van iemands snelheid. Het meest sprekende voorbeeld levert Heer Bommel. Hij wordt aangehouden wegens te hard rijden en zegt: ik rijd niet te hard, want ik ben een kwartier onderweg en ik heb nog maar 10 km gereden.

C Hellingen meten

Eerst natuurlijk de hellingshoek van een weg. Daarna zien we een skiër een berghelling afdalen. We tekenen een doorsnede van de berg en zien hoe de ski's steeds een raaklijn aan deze doorsnede vormen. Op verschillende plaatsen wordt de richting van de ski's getekend. Hieruit moet de berghelling gereconstrueerd worden. Een duidelijke stap voorwaarts in de richting van het differentiëren.

D Hellingfuncties

De verkregen inzichten worden nu in meer mathematische vorm gegoten. Grafieken zijn gegeven. De leerling moet raaklijnen eraan trekken en dan de grafiek van de hellingfunctie tekenen. De oorspronkelijke functie heet f , de hellingfunctie f' . Dan vier functies en vier hellingfuncties. De leerling moet uitzoeken welke grafiek van een hellingfunctie bij welke oorspronkelijke functie hoort. Verder nog enkele grafieken van hellingfuncties waarbij de leerling de grafiek van de oorspronkelijke functie moet vinden. Eén punt daarvan is al gegeven. Tot slot wordt Heer Bommel weer ten tonele gevoerd. We zien nu, dat hij zijn bekeuring heus wel verdiend had.

E Vrije val

Het wordt tijd na al deze voorbereidingen uit kennis van de gemiddelde snelheid de grootte van de snelheid te destilleren. We berekenen de gemiddelde snelheid over een steeds kleiner tijdsverloop. Maak een tabel van de verkregen

uitkomsten. Deze tabel suggereert wat verstaan wordt onder de snelheid op een bepaald tijdstip.

F Differentiëren

En als je eenmaal inziet waar het om gaat, is het niet zo moeilijk meer over te gaan tot het wiskundig begrip differentiëren. De grafiek $y = x^2$ wordt getekend. We willen de helling weten in een bepaald punt. We meten de gemiddelde helling over een stukje $\Delta x = p$, laten p tot nul naderen en zoeken het 'grensgetal'. Dat is de helling van de grafiek. Ditmaal niet door middel van een suggestief tabelletje, maar door in de gemiddelde helling $2x + p$ het getal p tot nul te laten naderen. Snappen we dit eenmaal, dan bieden de functies $x \rightarrow x^3$, $x \rightarrow x^4$ en ook $x \rightarrow x^n$ weinig moeilijkheden meer.

G Veeltermen

Een goederentrein is aan het rangeren. We maken de tijd-afstand grafiek van de eerste en van de laatste wagen. De lengte van de trein is 100 m. De snelheid van de eerste en van de laatste wagen is dezelfde. Toevoegen van de constante 100 heeft geen invloed op de afgeleide functie.

Vermenigvuldigen we daarentegen een functie met een constante, dan wordt de afgeleide met diezelfde constante vermenigvuldigd. Op de maan is de gravitatieconstante geringer en daarom is het aanmerkelijk aangenamer op de maan te vallen dan op de aarde.

Daarna gaan we fietsen op een in beweging zijnde mammoettanker. Het blijkt dat de snelheid van de fietser t.o.v. de tanker plus de snelheid van de tanker t.o.v. het water gelijk is aan de snelheid van fietser t.a.v. water. Hieruit spruit voort dat de afgeleide van de som gelijk is aan de som van de afgeleiden. En nu weten we genoeg om veeltermen (gehele rationale functies) te kunnen differentiëren.

H Maxima - minima

Op de camping De Mierenhoop krijgt ieder een touw van 30 m lengte om een stuk terrein voor zich af te bakenen. Het stuk moet rechthoekig zijn. Als het niet al te druk is, wordt oogluikend toegestaan, dat men een rechthoek maakt met drie zijden touw en als vierde zijde een stuk van de afrastering van het terrein. Is het druk dan moet men beslist een rechthoek maken met vier zijden touw. Men wil graag een stuk grond afbakenen met zo groot mogelijke oppervlakte. Hoe gaat men in deze twee gevallen te werk?

Naar aanleiding van de oplossing van dit probleem ziet men gemakkelijk algemeen, hoe de extremen van een functie bepaald worden.

Hierna volgt een serie andere praktische gevallen van het bepalen van een extreem.

Tot mijn verbazing wordt er niet gevraagd de grafiek te tekenen van $x \rightarrow x^3 - x$ of iets dergelijks. Dit lijkt me het voor de hand liggende slot van deze behandelingswijze.

Ik weet wat velen zullen vragen na het lezen van dit overzicht of na het lezen van het boek zelf. Hoe kan ik op zo'n manier door de stof heenkomen?

De fout ligt hier in de vraag. Men moet een andere vraag stellen : hoe geef ik goed onderwijs? Als men niet aan de tijd denkt, dan beseft men, dat zonder enige twijfel hier wegen ingeslagen worden die goed onderwijs garanderen. Men kan het aantal toepassingen te groot vinden. Best, dan maakt men er minder. Het boek geeft een fraaie inventaris van wat men zou kunnen doen, als men een moeilijk begrip als differentiëren zo wil voorbereiden, dat het begrepen wordt en gaat leven.

We mogen het IOWO dankbaar zijn, dat het probeert onze ogen te openen voor beter wiskunde-onderwijs en ook de middelen in handen geeft daartoe te raken.

Naschrift

Van Exponenten en logaritmen verschijnt zeer binnenkort een gewijzigde tweede druk (132 blz.).

Er is in deze serie nog een derde boekje verschenen :

Drs. Jan de Lange Jzn., Functies van 2 variabelen (50 blz.). Dit gaat in hoofdzaak over niveaulijnen. Omdat het onderwerp niet meer tot de voorgeschreven stof behoort, laat ik het boek hier verder onbesproken.

Ervaringen van een NLO-abituriënt

WIM DROST

Steeds weer duiken in allerlei bladen verhalen op die ons vertellen van het wel en wee op de NLO's. Steeds weer rollen enquêtes van instituten met welluidende namen in mijn brievenbus die moeten peilen hoe het de nieuwbakken leraren in de praktijk vergaat. Bij al die dingen krijg ik niet of nauwelijks de kans zelf eens iets te berde te brengen. Vandaar dit artikel; ik ga mijn ervaringen spuien van ruim één jaar leraar zijn met een NLO, in dit geval de SOL te Utrecht, achter de rug.

Voordat ik u echt ga opzadelen met mijn ervaringen eerst nog wat zakelijke gegevens. Na mulo en havo ging ik in september '74 het wereldje van de Stichting Opleiding Leraren in Utrecht binnen om precies $4\frac{1}{2}$ jaar later als tweede grader wis- en natuurkunde op een mavo in Ede te gaan werken.

Hoewel de SOL-periode niet altijd even vlotjes liep, was het een prettige periode. Maar toch, aan het eind sloeg ik met een zucht van verlichting voor de laatste keer de deur achter me dicht. Het was mijn motivatie om leraar te worden die me erdoor heeft geslagen.

Nu terug naar de praktijk; een paar bladzijden uit mijn dagboek.

Dinsdag 30 januari

De SOL zit erop, morgen is de diploma-uitreiking. Trouwens het studiesekretariaat heeft het over de uitreiking van de 'akte van bekwaamheid'. Of ik bekwaam ben, weet ik niet. Wel weet ik dat ik enorm veel zin heb om te beginnen. Dat kan donderdag al direkt, ik heb een baan voor 14 uur wiskunde op een mavo in Ede. Hoewel ik het jammer vind dat het alleen wiskunde is, ik had ook graag wat natuurkunde willen geven, vind ik het belangrijkste dat ik aan de slag kan.

Vanmiddag heb ik mijn drie lessen voor donderdag zitten voorbereiden. Ik begin pas het vijfde uur, eerst 1a, daarna 2c en tenslotte 3c. Ik word klasseleraar van 1a. Zij zijn bezig met driehoeken. De tweede klas is bezig met wortels en de derde met het vermenigvuldigen van figuren.

Er wordt met 'Moderne Wiskunde' gewerkt, lang niet de gekste methode, dacht ik. Bij het voorbereiden schoten me hele series ideeën van $4\frac{1}{2}$ jaar SOL door mijn hoofd. Kiezen is niet eenvoudig. Ik begin maar zo'n beetje in de lijn van mijn voorganger, veel klassikaal-frontaal om langzamerhand ook andere werkvormen in te voeren. De eerste lessen maar veel tijd uittrekken voor de kennis-

making. Beginnen met wiskunde zonder dat ik nauwelijks iets van de leerlingen weet, zie ik niet zitten. Nadat ik wat over mezelf verteld heb, laat ik de leerlingen hetzelfde doen in een opstel-in-telegramstijl, aangevuld met de vraag 'wat vind je leuk/niet leuk/moeilijk/makkelijk aan wiskunde?'

Hier kan ik het grootste deel van de drie lessen mee vullen.

Dat allemaal donderdag, dus, maar morgen eerst nog het begeerde papiertje halen. Ik hoop dat het een gezellige dag wordt.

Woensdag 31 januari

Dat was me het dagje wel, wat een drukte! Doodop, met een licht gevoel in mijn hoofd zit ik mijn dagboek te schrijven. Naast me mijn diploma, tweedegraads leraar, dat ben ik nu!

De uitreiking op de SOL was leuk, vooral de lading confetti van de (ex-)groepsleden. Na de plechtigheid was er een borrel in het auditorium, heet en bomvol. Vanavond thuis hebben we dit nog eens dunnetjes over gedaan. Het was na negen uur zo druk dat je over de hoofden kon lopen. Maar, het was ook gezellig. En nu naar bed, morgen begint het!

Donderdag 1 februari

Daar ging ik dan, vanochtend, gewapend met een drietal lesvoorbereidingen, drie delen Moderne Wiskunde en een rekenmachine (in bruikleen van school) op weg naar Ede. De eerste dag.

Met allerhande welkoms en felicitaties werd ik door mijn kollega's binnengehaald. In het lokaal waar ik mijn eerste les moest geven stond een enorme bos tulpen op me te wachten. 'Welkom kollega' stond er op. Erg leuk. De adjunct-direkteur kwam nog even een geo-driehoek en een passer brengen voor gebruik op bord. Dit omdat het lokaal waarin ik zat normaliter voor Engels wordt gebruikt en zulk spul dus niet aanwezig is.

De eerste les, 1a. De leerlingen hadden van plaats gewisseld zodat de klasseplattegrond niet meer klopte. Het duurde even voordat ik dit doorhad. Na een verzoek met motivering zocht men de eigen plaats op. Aan hun reacties te merken, waren de leerlingen het niet gewend dat de leraar wat over zichzelf vertelt. De opstellen werden met enthousiasme gemaakt. Dit was ook in de andere klassen het geval. Het laatste kwartier van alle drie de lessen heb ik aan 'echte' wiskunde besteed. Niet uit het boek, maar iets dat er mee te maken heeft. In de eerste klas de vraag; zie je driehoeken om je heen? Langzaam kwamen de antwoorden los. De opdracht voor thuis was: zoek driehoeken, teken ze na, meet de hoeken en bepaal de som van de drie hoeken samen.

In de tweede klas wortels geïntroduceerd door de leerlingen van een vouwblaadje een nieuw vierkant te laten maken met halve oppervlakte. Maquettes, landkaarten, diaprojectie was het onderwerp in 3c in verband met het vermenigvuldigen van figuren.

Een geslaagde maar vermoeiende eerste dag. Vooral vermoeiend omdat er om 3 uur nog een vergadering was over de derde klassen. Om 7 uur zat ik zodoende pas aan mijn warme hap. En nu ga ik de opstellen lezen en de twee lessen voor morgen voorbereiden.

Vrijdag 2 februari

Om 6 uur rammelde de wekker me vanochtend mijn bed uit. Ontzettend vroeg. Dit komt omdat er elke vrijdagochtend voor schooltijd vergaderd wordt. Gelukkig rijden de treinen zo vroeg.

De vergadering liep best leuk. De problemen raakten me niet zo erg. Hulp voor vierde klassers met veel ziekteverzuim, rotzooi in de bibliotheek. Wel leer je op deze manier je kollega's aardig kennen. Ik had in ieder geval alle gelegenheid de namen te repeteren.

Twee lessen stonden vandaag op mijn rooster, 1a en 3c. Met een serie sterkte-wensen van kollega's dook ik erin. De eerste klas had zich enorm uitgesloofd om thuis driehoeken op te sporen. Er zaten leuke vondsten bij, het netje van de plantenhanger, beeldmerken en de neus van de buurman. Het leuke was, dat ze door natekenen en hoeken-meten ervan overtuigd waren dat de hoeken van een driehoek samen inderdaad 180° zijn. Aan een bewijs had men geen behoefte meer.

In 3c leverde het vinden van het centrum van vermenigvuldigen problemen op, evenals de bijbehorende factor. Het smile-tekeningetje, met haar, gaf uitkomst. De link naar het vergroten van foto's legden de leerlingen zelf.

In de pauzes en in de gangen schieten veel kollega's me aan om te informeren hoe het gaat, of er problemen zijn. Op mijn antwoord dat het best leuk gaat zonder al te grote problemen reageren sommigen: de problemen die komen dan nog. Een gewaarschuwd man telt voor twee. Geldt dat ook voor een leraar?

Maandag 5 februari

Vandaag stonden weer alle drie de klassen op het rooster. Het begon het eerste uur met 2c. De wortels zijn nog het onderwerp. In een klassikaal praatje een 'kwadrateermachine' en een machine die 'terug-op-werkt' geïntroduceerd om deze later om te dopen tot 'worteltrekmachine'. De leerlingen begrepen het wel aardig maar konden het niet zo goed koppelen aan het boek en het vouwblaadje.

Klas 3c was daarna aan de beurt. Het hele uur werd gevuld met het bekijken van het huiswerk. Aan het begin de problemen geïnventariseerd, daarna de leerlingen onderling de manier waarop ze de vraagstukken hadden opgelost laten vergelijken en aan het eind wat vraagstukken op bord gezet die voor de meesten moeilijk waren.

Na de pauze en een tussenuur kwam 1a weer opdaven. Hoeken berekenen in allerlei driehoeken was aan de orde. Zolang het met getallen ging liep het vlot. Maar met r° ... grote problemen. Een klassikale uitleg kon niet iedereen eruit helpen, helaas! Opgaven met een sterretje zijn inderdaad gauw te moeilijk voor de leerlingen.

Het was vandaag een rustig dagje. Er begint zich al een zeker ritme af te tekenen. De voorbereidingen vergen al wat minder tijd, ik begin de namen van de leerlingen al wat te kennen, ik zal me hier zeker thuisvoelen.

Morgen heb ik een vrije dag. Ik ga een poosje op de SOL kijken. Tot woensdag.

Woensdag 7 februari

De eerste week zit erop. Een vermoeiende en geslaagde eerste week. Ondanks

dat het maar 14 lessen waren zat er toch veel werk in en vergde het al mijn energie. Dat ik het een geslaagde week vind, komt omdat ik me al aardig thuis voel onder mijn kollega's, omdat ik denk dat de leerlingen mij accepteren als hun nieuwe leraar en omdat er geen gekke dingen gebeurd zijn. Weliswaar liep het in 2c vandaag niet zo lekker, het onderwerp 'wortels' is voor hen veel te saai en ik weet het niet op te fleuren. Ik hoop dat het morgen wat beter gaat. Vandaag stond voor het eerst een studieles op mijn rooster. Het was een groep van 15 eerste klassers. Het onderwerp was concentratie. Wat oefeningen aan de hand van een soort morse-taal gedaan en gepraat over hoe je je kunt concentreren.

In 3c loopt het hoofdstuk op zijn eindje. De laatste twee paragrafen lenen zich wel voor zelfstandig werken, dus dit maar eens geprobeerd. De leerlingen vinden dit erg leuk werken, ik ook!

Vanmiddag sektie-vergadering gehad. Het ging voornamelijk over hoever ik met de stof moet komen in de verschillende klassen. Het woord examen viel daarbij erg vaak. Ik heb de indruk dat ik als kollega best wel word geaccepteerd, men luistert echt naar me, men wil me niet direkt ompraten en me de kans geven wat te proberen. Dit stelt me gerust.

Met heel veel zin en een week ervaring rijker duik ik de tweede week in.

Er is in dat jaar praktijk veel bij mij veranderd.

Uit één van die fraaie onderzoeken bleek dat het overgrote deel van de NLO-abituriënten zich binnen een paar jaar voor de volle 100% konformeert aan de bestaande situatie in het onderwijs. Dat wil dus zeggen dat men bijna alle op verandering gerichte ideeën die men heeft meegekregen overboord zet. Ook ik heb meer naar de traditionele klassikaal frontale manier van lesgeven over dan me lief is. Mijn idealen zijn niet vervaagd, ze staan alleen in de ijskast te wachten op betere tijden. Tijdens het voorbereiden van mijn lessen steekt een stuk idealisme wel weer de kop op, in de les vind ik die nauwelijks terug.

Als ik had gezien hoe ik nu lesgeef tijdens mijn SOL-periode dan had ik me een slechte en ouderwetse leraar gevonden. Hier en daar wel wat aardige ideeën maar over het algemeen zeer matig.

Iemand eruit sturen stond voor mij gelijk met een brevet van onvermogen halen. Leraren die iemand buiten de deur zetten omdat dat beter is voor de rest van de klas vond ik op z'n minst dubieus. Nu doe ik het zelf en ik voel me er niet eens altijd rot bij.

Dat veel ex-NLO-studenten zo snel allerlei idealen opgeven, kan ik voor een deel wel verklaren. Van Kemenade voelde zich tijdens zijn ministersperiode een klein sleepbootje dat een 'mammoet'-tanker in volle vaart van richting probeert te veranderen. Op mijn nivo voel ik dat ook en ik denk veel beginnende leraren met mij. Je moet als nieuwbakken kollega gaan meedraaien in een al werkende machine. Als je geen goed radertje bent in het geheel, als je je niet kunt vinden in het produkt dat men wil afleveren, dan kun je inpakken. Ook al zijn de ideeën nog zo goed, je moet eerst bewijzen dat je het op de bestaande manier ook kunt. En als je dat bewijs hebt kunnen leveren, dan is het nog maar de vraag of je je dan nog uitgedaagd voelt, of je dan nog de moed op kunt brengen om na schooltijd en 's-avonds wat materiaal te gaan maken, boeken te lezen, samen te

overleggen over wat wenselijk is.

Samenvattend: je past je aan aan het bestaande uit puur zelfbehoud.

Er mag nu niet worden gekonkludeerd dat de NLO's hun studenten irreële ideeën aanpraten. Voor zover ik dat kan beoordelen is dat zeker niet het geval. Voor het invoeren van nieuwigheden in het onderwijs is meer nodig dan alleen de overtuiging dat het nodig is. Tijd, geld en een massa andere factoren zijn minstens zo belangrijk. Geleidelijkheid is geboden.

Om heel voorzichtig iets in de klas uit te proberen heb je kollega's nodig. Ik merk dat ik met een kollega NLO'er, hoewel van een ander vak, al beter uit de voeten kan. Je spreekt dezelfde taal, je hebt voor een groot deel dezelfde ideeën, enz.

Tot slot van dit verhaal nog wat losse opmerkingen over allerlei dingen die me in mijn dagelijkse lespraktijk erg helpen. Allereerst het IOWO (moge haar werk niet afgebroken worden). Massa's kleinere en grotere ideeën gebruik ik dagelijks. Voorts de ideeën van Joop van Dormolen in zijn 'Didaktiek van de Wiskunde'. Zij bieden mij een vast kader waarbinnen ik mijn lessen kan voorbereiden en geven. En, 'last but not least', mijn kollega's, velen van hen zijn een prima bron van allerlei informatie en zijn een mooie uitlaatklep voor zaken die niet zo goed liepen of waar ik enthousiast over ben.

Terugkijkend op één jaar op school verzucht ik met heer Bommel:

'Ook de sterkste voelt de levenssappen wel eens met het waswater wegglopen – en zelfs een ervaren heer heeft soms de behoefte om heel stilletjes bij de pakken neer te zitten. Wanneer zijn brede wiekslag door laag gebroed in de knop gebroken wordt, en de stormen des levens hem boven het hoofd groeien, kan het gebeuren dat hij zich onopvallend tot zijn omgeving wendt met een trillende zucht, die de goede verstaander nochtans als een donderslag om hulp in de oren klinkt'. (O.B.B. te R.)

Internationale Wiskunde Wedstrijd

Begin dit jaar werd duidelijk dat de berichten als zou de Internationale Wiskunde Olympiade 1980 in Mongolië plaatsvinden, niet op waarheid berustten. Luxemburg bood toen aan een mini-olympiade te organiseren voor een klein aantal landen. Aan deze wedstrijd hebben 40 vwo-leerlingen uit zes landen meegedaan. Een vergelijkbare wedstrijd vond ongeveer gelijktijdig plaats in Finland (met vier deelnemende landen), terwijl Oostenrijk en Polen een tweekamp organiseerden. In 1981 zal in de Verenigde Staten echter weer een 'grote' Internationale Wiskunde Olympiade worden gehouden.

De Luxemburgse wedstrijd werd gehouden op 10 en 11 juli in Mersch, 15 km ten noorden van de stad Luxemburg. Zoals gebruikelijk was er op beide dagen een zitting van vier uren met drie opgaven. Tevoren had een internationale jury de vraagstukken uit de ingezonden voorstellen geselecteerd en van een puntenwaardering voorzien. De gekozen opgaven waren afkomstig uit Groot-Brittannië (nr. 1), Luxemburg (nr. 2), Joegoslavië (nr. 3), België (nr. 4) en Nederland (nrs. 5 en 6). Na de wedstrijd beoordeelde de jury het werk. Elke deelnemer kon maximaal 40 punten behalen. Er waren 11 deelnemers met een score van 22 t/m 29 punten. Zij kregen alle een derde prijs. De zeven deelnemers met 30 t/m 35 punten kregen een tweede prijs. Er werd slechts één eerste prijs uitgereikt, en wel aan de 18-jarige Kareljan Schoutens uit Bergen op Zoom, die 37 punten verzamelde. De tweelingbroers Erik en Herman Verlinde uit De Meern waren de andere Nederlandse prijswinnaars, met resp. 34 p. (2e prijs) en 23 p. (3e prijs).

De resultaten van de overige Nederlanders waren: Barteld Braaksma (Stadskanaal) 8 p., Marcel de Jeu (Pernis) 10 p., Charles Kooperberg (Rotterdam) 19 p., Jan Adriaan Leegwater (De Bilt) 20 p., Peter Stevenhagen (Santpoort) 21 p. Voor Nederland hadden zitting in de internationale jury dr. J. van de Craats (RU Leiden) en drs. A. W. Boon (Chr. Gymn. Sorghvliet, Den Haag). De prijzen werden op 13 juli uitgereikt door de minister van onderwijs van Luxemburg. Voor de deelnemers en de leden van de jury waren een rondrit door Luxemburg en een bezoek aan de E.E.G.-instellingen in de stad in het programma opgenomen.

Ook dit jaar is de Nederlandse ploeg weer met lesbrieven op de wedstrijd voorbereid.

J. van de Craats

Eerste dag, beschikbare tijd: 4 uren.

- 1 Bepaal alle functies f van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{Q}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

(1) $f(1) = 2$.

(2) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$ voor alle x en y uit $\mathbb{Q}$.

($\mathbb{Q}$ is de verzameling van alle rationale getallen.)

- 2 Op een lijn liggen de punten A , B en C met B tussen A en C . Aan dezelfde kant van de lijn AC beschrijft men drie halve cirkels met middellijnen AB , BC en AC . De gemeenschappelijke raaklijn in B aan de eerste twee halve cirkels snijdt de derde in E . De raakpunten van de andere gemeenschappelijke raaklijn aan de eerste twee halve cirkels noemt men U en V .

Bepaal de verhouding $\frac{\text{opp } \triangle EUV}{\text{opp } \triangle EAC}$ als functie van $r_1 = \frac{1}{2} AB$ en $r_2 = \frac{1}{2} BC$.

- 3 Gegeven zijn een priemgetal p en een positief geheel getal n .

Bewijs dat de volgende twee beweringen equivalent zijn:

- (1) Geen van de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ met $k = 0, 1, \dots, n$ is deelbaar door p .

- (2) n kan worden geschreven in de vorm $n = p^s q - 1$, s en q gehele getallen, $s \geq 0$, $0 < q < p$.

Tweede dag, beschikbare tijd: 4 uren.

- 4 Gegeven zijn twee cirkels die elkaar (inwendig of uitwendig) raken in een punt P . Een lijn die één der cirkels in een punt A raakt, snijdt de andere cirkel in B en C .

Toon aan dat de lijn PA bissectrice is van één der hoeken gevormd door de lijnen BP en PC .

- 5 Tien spelers begonnen te spelen, ieder met hetzelfde geldbedrag. Om beurten wierpen zij vijf dobbelstenen. Wanneer een speler bij een worp n ogen gooide,

betaalde hij aan elk van zijn medespelers een bedrag, gelijk aan $\frac{1}{n}$ maal het

bedrag dat die medespeler op dat moment bezat. Zij wierpen en betaalden om de beurt. Bij de tiende worp werden er 12 ogen gegooid, en na betalen bleek iedere speler precies evenveel geld te hebben als bij het begin van het spel.

Bepaal, indien mogelijk, voor elk van de negen voorafgaande worpen het totale aantal ogen.

- 6 Bepaal alle paren gehele getallen (x, y) die voldoen aan de vergelijking

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

Overzicht van de resultaten

Per deelnemer zijn vermeld de puntenaantallen per opgave en het totale puntenaantal. De deelnemers zijn per land in alfabetische volgorde genummerd. De maximale score was $6 + 7 + 7 + 6 + 7 + 7 = 40$ punten. 22-29 punten gaf een derde prijs, 30-35 punten een tweede prijs, en de enige deelnemer met een hogere score (37 p.), Kareljan Schoutens uit Nederland, kreeg de eerste prijs.

België

1. $1 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 = 3$
 2. $5 + 1 + 0 + 0 + 3 + 1 = 10$
 3. $2 + 0 + 0 + 5 + 1 + 1 = 9$
 4. $5 + 5 + 0 + 5 + 0 + 0 = 15$
 5. $3 + 4 + 1 + 6 + 0 + 2 = 16$
 6. $5 + 1 + 0 + 6 + 0 + 0 = 12$
 7. $4 + 2 + 0 + 5 + 0 + 1 = 12$
 8. $5 + 4 + 3 + 6 + 7 + 0 = 25$
-
- t. $30 + 17 + 4 + 33 + 13 + 5 = 102$

Groot-Brittannië

1. $5 + 4 + 7 + 6 + 7 + 1 = 30$
 2. $5 + 7 + 5 + 5 + 1 + 6 = 29$
 3. $6 + 0 + 5 + 6 + 7 + 2 = 26$
 4. $6 + 0 + 0 + 5 + 2 + 1 = 14$
 5. $6 + 6 + 2 + 6 + 1 + 1 = 22$
 6. $5 + 7 + 5 + 6 + 7 + 0 = 30$
 7. $6 + 4 + 4 + 1 + 7 + 0 = 22$
 8. $6 + 7 + 6 + 6 + 7 + 3 = 35$
-
- t. $45 + 35 + 34 + 41 + 39 + 14 = 208$

Frankrijk (buiten mededinging)

1. $6 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 8$
 2. $1 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 4$
 3. $6 + 2 + 1 + 0 + 2 + 6 = 17$
 4. $5 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 = 8$
-
- t. $18 + 3 + 2 + 0 + 7 + 7 = 37$

Luxemburg

1. $5 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 7$
 2. $6 + 1 + 7 + 6 + 2 + 6 = 28$
 3. $3 + 2 + 0 + 1 + 0 + 0 = 6$
 4. $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4$
 5. $6 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 = 8$
-
- t. $22 + 4 + 7 + 9 + 2 + 9 = 53$

Joegoslavië

1. $6 + 1 + 7 + 6 + 0 + 3 = 23$
 2. $5 + 0 + 3 + 6 + 1 + 7 = 22$
 3. $5 + 5 + 7 + 5 + 7 + 7 = 34$
 4. $6 + 7 + 7 + 6 + 7 + 1 = 34$
 5. $5 + 7 + 7 + 0 + 7 + 6 = 32$
 6. $6 + 6 + 6 + 0 + 7 + 4 = 29$
 7. $6 + 7 + 7 + 6 + 0 + 2 = 28$
-
- t. $39 + 33 + 44 + 29 + 29 + 28 = 202$

Nederland

1. $3 + 0 + 0 + 1 + 3 + 1 = 8$
 2. $1 + 0 + 7 + 0 + 2 + 0 = 10$
 3. $3 + 0 + 3 + 0 + 7 + 6 = 19$
 4. $5 + 0 + 1 + 0 + 7 + 7 = 20$
 5. $5 + 7 + 7 + 6 + 7 + 5 = 37$
 6. $6 + 2 + 0 + 5 + 7 + 1 = 21$
 7. $6 + 7 + 7 + 5 + 7 + 2 = 34$
 8. $6 + 7 + 3 + 0 + 7 + 0 = 23$
-
- t. $35 + 23 + 28 + 47 + 17 + 22 = 172$

Setvorming en wiskundeonderwijs

IV *Het vermenigvuldigen van wortelgetallen; eenvoudige algoritmen*

S. P. VAN 'T RIET EN L. DE LEEUW

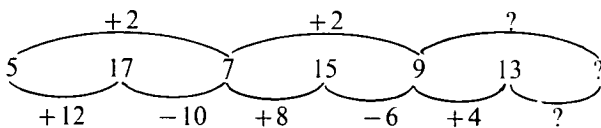
1 Inleiding

In de eerste twee artikelen in deze serie (Van 't Riet, 1979 en 1980) is het verschijnsel van de setvorming bij het oplossen van aritmetische problemen uitgebreid aan de orde geweest. Van dit verschijnsel werden met name twee aspecten behandeld, te weten *Einstellung* en *rigiditeit*. In het derde artikel (Van 't Riet en De Leeuw, 1980) werd een experiment beschreven waarin setvorming onderzocht is bij het oplossen van vraagstukken met behulp van algoritmen. In dit vierde artikel zal een resterend gedeelte van dit onderzoek worden behandeld en worden enkele lijnen getrokken naar het wiskundeonderwijs in havo en vwo. Bovendien is in een appendix een overzicht opgenomen van de belasting die het onderzoek heeft meegebracht voor de school waar het is uitgevoerd.

2 Korte samenvatting van de opzet van het onderzoek

In het vorige artikel is een onderzoek naar setvorming beschreven. Het ging daarin om het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen. Twee algoritmen speelden een rol: een setalgoritme en een eenvoudiger extinktialgoritme.

Extinktialgoritme:



Setalgoritme:

Eerst werden deze algoritmen geleerd met een **BLOK**-leerstofaanbieding of een **MIXED**-leerstofaanbieding. Bij de **BLOK**-leerstofaanbieding werd eerst het setalgoritme volledig geleerd en vervolgens het extinktialgoritme. Bij de **MIXED**-leerstofaanbieding werden set- en extinktialgoritme om en om geleerd. Verondersteld werd dat met deze laatste vorm van leerstofaanbieding niet alleen de algoritmen geleerd zouden worden, maar ook *switch*-gedrag tussen de algoritmen. Twee dagen later werd een E-test afgenomen die bestond uit 10 setproblemen (alleen oplosbaar met het setalgoritme), 4 kritische problemen (oplosbaar zowel met het set- als met het extinktialgoritme) en 4 extinktieproblemen (alleen oplosbaar met het extinktialgoritme). Het gebruik van het set-

algoritme op de kritische problemen bepaalde een z.g. kritische score, welke een maat voor de Einstellung vormde. Het falen op de extinktieproblemen, naar we aannemen door gebruik van het setalgoritme, bepaalde een z.g. extinktietescore, welke een maat was voor de rigiditeit. Twee vraagstellingen zijn op deze wijze onderzocht: (1) Treedt er setvorming op bij het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen? (2) Geeft de MIXED-leerstofaanbieding significant minder setvorming te zien op de E-test dan de BLOK-leerstofaanbieding? De resultaten van het onderzoek wezen uit dat de eerste vraagstelling wel bevestigend beantwoord kan worden, de tweede echter niet.

3 De derde vraagstelling: De invloed van complexiteit

Een belangrijke faktor die het leerresultaat of het oplossingsgedrag bij vele taken beïnvloedt, is de complexiteit van de opgaven. Johnson (1972, p. 140) definieert complexiteit van taken in termen van de hoeveelheid aangeboden materiaal, het aantal specificaties voor de juiste oplossing, het minimale aantal stappen naar de oplossing, de hoeveelheid te verwerken informatie, enz. De invloed van complexiteit is vooral onderzocht bij open-search problemen, die niet met behulp van een algoritme zijn op te lossen (zie het vorige artikel, paragraaf 3). Duidelijk is bijvoorbeeld dat als de hoeveelheid materiaal (het aantal gegevens) en het minimale aantal stappen voor de goede oplossing toenemen, ook het gemiddelde aantal door de leerlingen genomen stappen en de benodigde oplossingstijd toenemen. Bij algoritmische taken zal het zo zijn dat een complexer algoritme uit meer stappen bestaat, waarbij meer materiaal verwerkt moet worden, dan een minder complex algoritme. Daardoor zal het moeilijker te leren zijn, d.w.z. het leren van een complex algoritme vergt meer inspanning en tijd. Gezien het onderzoek van Knight (1963) waaruit bleek dat grotere inspanning bij het verwerven van de set een groter seteffekt bewerkstelligde (zie Van 't Riet, 1980), kan dit van belang zijn. Weliswaar bestond de door Knight gebruikte E-test uit open-search problemen (de kannenproblemen van Luchins), toch ligt het voor de hand te veronderstellen dat ook bij algoritmische taken grotere inspanning d.m.v. grotere complexiteit een grotere setvorming geeft. Ook in ander onderzoek blijkt complexiteit een rol te spelen. De Leeuw (1979, p. 157) vond bijvoorbeeld bij proefpersonen die problemen op drie niveaus van complexiteit hadden leren oplossen grotere seteffecten dan bij proefpersonen die dit alleen geleerd hadden op de laagste twee van die drie niveaus.

Op het terrein van complexiteit ligt nu de derde vraagstelling van het onderzoek: Gaat verschil in complexiteit van de problemen gepaard met verschil in seteffekt? Men kan hierbij aan twee dingen denken: (a) Verschil in complexiteit geeft verschil in de grootte van het seteffekt. Op grond van het voorgaande moet men dan bij gekompliceerder algoritmen grotere setvorming verwachten. (b) Verschil in complexiteit heeft op de Einstellung een andere invloed dan op de rigiditeit. Hierover valt op grond van de gegevens uit de literatuur geen verwachting uit te spreken.

Het was nu nodig naast de getallenrijen een tweede type problemen te vinden die algoritmisch zijn op te lossen en van een andere mate van complexiteit zijn. Bij het zoeken naar een dergelijke type problemen speelden de volgende overwegingen een rol. De complexiteit van de getallenrijproblemen werd al tamelijk groot bevonden. De proefpersonen zouden tenslotte brugklasleerlingen zijn, omdat deze de grootste en meest homogene proefgroep vormden, en de beschikbare tijd voor het experiment was beperkt. Daarom werd besloten een type problemen van geringere complexiteit te zoeken. Verder werd de eis gesteld problemen te vinden die relevant zouden zijn voor het wiskundeonderwijs. Er moest dus een onderwerp gezocht worden dat in de brugklas zelf niet behandeld werd, daar anders allerlei onkontroleerbare leereffekten een rol zouden gaan spelen, maar in het verdere onderwijs wel van belang zou zijn. Dit werd gevonden in het vermenigvuldigen van wortelgetallen, een onderwerp dat tot de stof van het tweede leerjaar behoort.

Het algoritme van de setproblemen laat zich illustreren door berekeningen als $\sqrt{4 \times 1156} = \sqrt{4624} = 68$. De extinktieproblemen zijn op te lossen met een ander algoritme: $\sqrt{4 \times 1156} = 2 \times 34 = 68$. Deze laatste methode leidt, vooral als de getallen groter worden, tot een aanzienlijke vereenvoudiging van het rekenwerk. Voorts is het duidelijk dat deze wortelvermenigvuldigingen veel minder gekompliceerd zijn dan de getallenrijopgaven. Het gaat louter om een samenstelling van twee bewerkingen. Wie de algoritmen zou willen uitschrijven als een serie te verrichten handelingen om tot de goede oplossing te komen, zal snel konkluderen dat dat bij getallenrijopgaven behoorlijk lastig is, bij de wortelvermenigvuldigingen zeer simpel. De handelingsschema's van het set- en het extinktiealgoritme bij de wortelproblemen zien er als volgt uit:

Setalgoritme

1. Vermenigvuldig 4 en 1156.
2. Trek de wortel uit 4624.

(Extinktiealgoritme

1. Trek de wortel uit 4 en 1156.
2. Vermenigvuldig 2 en 34.

Het voornaamste punt van verschil is de volgorde waarin de bewerkingen moeten worden toegepast: Bij het setalgoritme eerst vermenigvuldigen, daarna worteltrekken; bij het extinktiealgoritme eerst worteltrekken, daarna vermenigvuldigen. Bij de leerstofaanbieding is van dit onderscheid expliciet gebruik gemaakt.

Er doet zich nu nog één probleem voor. De setproblemen moeten zo gepresenteerd worden dat de proefpersonen geen gebruik kunnen maken van het extinktiealgoritme en de extinktieproblemen zo dat zij geen gebruik kunnen maken van het setalgoritme. Dit probleem is opgelost door de proefpersonen te laten werken met onvolledige worteltabellen. Hiermee kan men voorkomen dat de proefpersoon de voor een bepaald algoritme benodigde worteluitkomsten kan vinden. In Tabel 1 ziet men hoe deze procedure werkt. Bij de setproblemen wordt de proefpersoon 'gedwongen' met het setalgoritme te werken, bij de extinktieproblemen met het extinktiealgoritme. Op deze wijze voldoen de problemen aan alle criteria van het onderzoek.

Tabel 1 Drie soorten problemen van vermenigvuldigingen van wortelgetallen voor een E-test. $\sqrt{1849}$ en $\sqrt{1296}$ zijn niet opgenomen in een begeleidende tabel, de andere wortels wel.

Setproblemen	$\sqrt{4} \times \sqrt{1849} = \sqrt{7396} = 86$ $= 2 \times ? = ?$
Kritische problemen	$\sqrt{9} \times \sqrt{225} = \sqrt{2025} = 45$ $= 3 \times 15 = 45$
Extinctieproblemen	$\sqrt{4} \times \sqrt{324} = \sqrt{1296} = ?$ $= 2 \times 18 = 36$

4 Resterende opzet van het onderzoek

We vermelden in het kort nog even een aantal details van het wortelgedeelte van het onderzoek. Voor de fase van de leerstofaanbieding zijn evenals bij de getallenrijen twee typen boekjes ontworpen, een met een BLOK-leerstofaanbieding en een met een MIXED-leerstofaanbieding. Daar voorafgaand aan het leren van set- en extinctiealgoritme het wortelbegrip en het gebruik van een eenvoudige worteltabel geleerd moesten worden, begonnen alle boekjes met drie inleidende pagina's die series korte aanwijzingen en opdrachten bevatten. In de BLOK-boekjes werden vervolgens zes instructieopdrachten aangaande het setalgoritme gegeven en daarna zes aangaande het extinctiealgoritme. In het MIXED-boekje waren deze twaalf opdrachten qua algoritme om en om door elkaar gezet. De getallen die in de problemen gebruikt werden, waren zo gekozen dat naar verwachting het rekenwerk bij de wortelproblemen ongeveer dezelfde omvang had als bij de getallenrijen. Ook deze boekjes konden door de leerlingen geheel zelfstandig worden doorgenomen. Met enige hulp van de proefleider aan enkele leerlingen verliep dit zonder problemen.

Vervolgens werd met wortelvermenigvuldigingen een E-test gemaakt in opbouw en uitvoering gelijk aan die van de getallenrijen. Bij deze E-test konden de proefpersonen gebruik maken van een beperkte worteltabel, die qua keuze van de getallen op de test was afgesteld (zie in dit verband Tabel 1). De E-test werd twee dagen na de leerstofaanbieding afgenomen. Op grond van deze afname werden een kritische score en een extinctiescore verkregen, maten voor Einstellung respectievelijk rigiditeit.

Om nu te kunnen konstaten of er werkelijk sprake van setvorming is moesten er, zoals in het vorige artikel is uiteengezet, ook hier controleproblemen worden ontworpen, die de proefpersonen in de controlegroepen te maken kregen in plaats van de setproblemen. Deze problemen zouden wat rekenwerk betreft min of meer gelijk moeten zijn aan de setproblemen van de wortelvermenigvuldiging, maar er op het punt van de algoritmen geen verwantschap mee mogen vertonen. Deze werden gevonden.

(In enigszins gewijzigde lay-out zagen deze controleproblemen er als volgt uit: Vul op de streepjes de ontbrekende cijfers in zo dat er een kloppende vermenigvuldiging komt te staan: $4 \times 5 = 5452$. De eerste vier van deze controleproblemen bevatten enige instructie waarmee de opdracht werd duidelijk gemaakt. Daarna volgden zes opgaven zonder aanwijzingen. Deze tien opgaven moesten

alle evenals de setproblemen van de E-test in één minuut gemaakt worden, daar zij gelijktijdig met de setproblemen werden afgenomen.)

De proefpersonen van de controlegroepen bleken de gebruikte controleproblemen erg moeilijk te vinden en het aantal goed gemaakte van deze opgaven was na afloop dan ook erg laag. Toch hebben ze hun functie van controleproblemen goed vervuld. De proefpersonen van de betreffende controlegroepen bleken tijdens de er op volgende kritische problemen en extinktieproblemen van de wortelvermenigvuldigingen niet ontregeld te reageren. Er werden kritische scores en extinktiescores verkregen die vergeleken konden worden met de scores van de E-testgroepen.

De totale opzet van het onderzoek (getallenrijen en wortelvermenigvuldigingen) omvatte nu acht kondities op drie vraagstellingen. In Tabel 2 is deze opzet schematisch samengevat. De toewijzing van leerlingen aan de acht kondities is in het vorige artikel besproken.

Tabel 2 De drie vraagstellingen van het onderzoek en de acht bijbehorende kondities (groepen proefpersonen). Ook vermeld is het aantal proefpersonen dat per konditie bij het onderzoek betrokken was en de voor elke konditie gebruikte kodering.

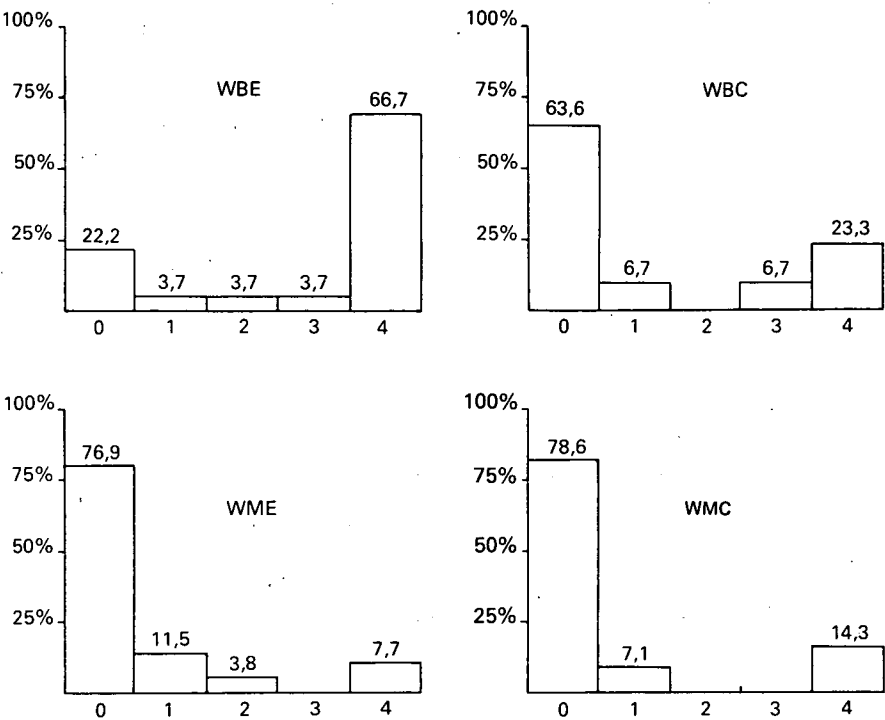
Vraagstelling 3: Komplexiteit	Getallenrijen				Wortels			
Vraagstelling 2: Leerstofaanbieding	BLOK		MIXED		BLOK		MIXED	
Vraagstelling 1: Setvorming	E-test	C-taken	E-test	C-taken	E-test	C-taken	E-test	C-taken
Kodering van de acht kondities	GBE	GBC	GME	GMC	WBE	WBC	WME	WMC
Aantal proefpersonen per groep	26	27	27	26	27	30	26	28

5 Resultaten en discussie

5.1 Einstellung bij wortelvermenigvuldigingen

In Fig. 1 zijn de histogrammen afgebeeld van de kritische scores van de wortelgroepen WBE, WBC, WME en WMC. Hierbij zien we een opmerkelijk resultaat. In de E-testgroep WBE is een aanzienlijk seteffekt te constateren ten opzichte van de controlegroep WBC. Dit verschil is significant met 'Wilcoxon' (zie voor de toetsing het vorige artikel, paragraaf 8.1). Echter is er in de E-testgroep WME in het geheel geen sprake van een seteffekt, zoals vergelijking met de controlegroep WMC duidelijk maakt. Ook het verschil tussen de E-testgroep met de BLOK-leerstofaanbieding en die met de MIXED-leerstofaanbieding is significant en in de verwachte richting. In tegenstelling tot de resultaten bij de getallenrijen vinden we hier dus een zeer grote invloed van de aard der leerstofaanbieding op de setvorming. Vraagstelling 1 en 2 vinden bij de wortelproblemen daarom een gezamenlijke beantwoording als het om

Einstellung gaat: Bij algoritmische problemen zoals wortelvermenigvuldigingen treedt Einstellung op na een BLOK-, maar niet na een MIXED-leerstofaanbieding. Kennelijk hebben de proefpersonen door de MIXED-leerstofaanbieding geleerd van het setalgoritme te switchen naar het extinktiaal-algoritme zodra dit efficiënter is. Dit is een opmerkelijk resultaat, waaruit blijkt dat *voorkoming van setgedrag in bepaalde gevallen leerbaar* is. Een interessant gegeven voor het onderwijs.

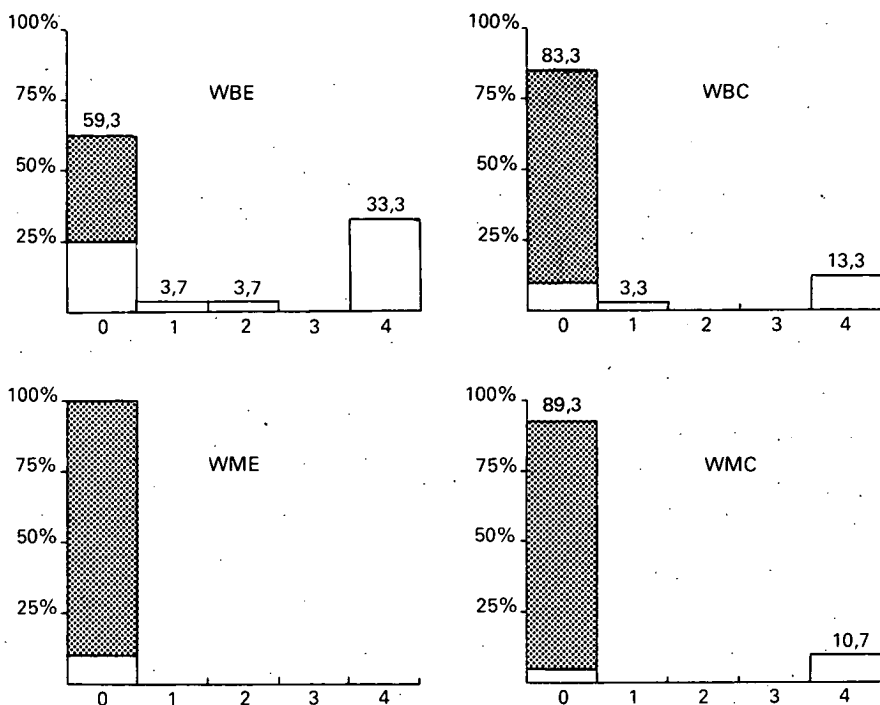


Figuur 1 Histogrammen van de kritische score (*Einstellung*) in percentages proefpersonen voor de vier wortelproblemgroepen.

5.2 Rigiditeit bij wortelvermenigvuldigingen

Na de resultaten uit de vorige paragraaf is het eigenlijk alleen nog interessant na te gaan of er rigiditeit optreedt in de E-testgroep WBE. Voor de volledigheid echter geven we in Fig. 2 de histogrammen van de extinktietescores van de vier wortelgroepen. Weer gearceerd is het percentage proefpersonen dat tijdens de kritische problemen al tot doorbreking van de set was gekomen. Toetsing met ‘Wilcoxon’ levert op dat het verschil van WBE ten opzichte van WBC in de verwachte richting pas significant is bij $\alpha = .06$. Het verschil tussen WBE en WME is in de verwachte richting significant bij $\alpha = .05$. Hoewel het eerste resultaat niet het .05-nivo haalt, geven beide resultaten samen wel aanleiding in

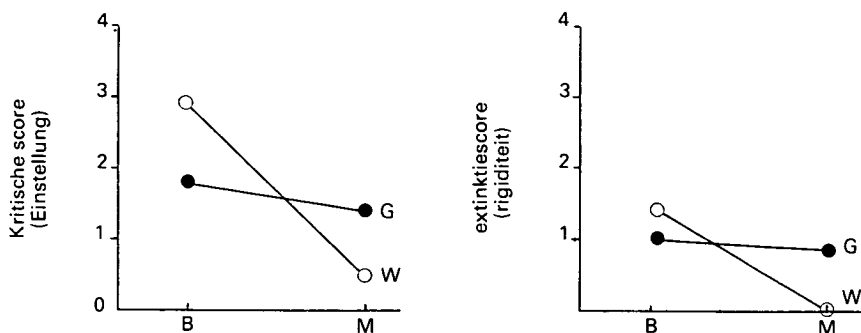
de WBE-groep van een rigiditeitseffekt te spreken. Evenals bij Einstellung zien we ook hier de reducerende invloed van de MIXED-leerstofaanbieding op het seteffect. Opvallend is vooral het 100 % gebruik van het extinktialgoritme in de E-testgroep WME.



Figuur 2 Histogrammen van de extinktietest (rigiditeit) in percentages proefpersonen voor de vier wortelproblemgroepen. Het gearceerde gedeelte geeft het percentage proefpersonen aan, dat op de kritische problemen reeds de set doorbroken had.

5.3 Het seteffect en de complexiteit van de problemen

Hoewel we in de voorgaande paragrafen al het een en ander aan verschillen tussen de resultaten bij getallenrijen en bij wortelproblemen gezien hebben, moeten we nog even nader stil staan bij het verschil in complexiteit tussen beide soorten problemen. In paragraaf 3 werd bij het bespreken van de invloed van complexiteit het vermoeden uitgesproken dat bij de complexere problemen, de getallenrijen, een groter seteffect gevonden zou worden, dan bij de eenvoudiger problemen, de wortelvermenigvuldigingen. Dit blijkt in zijn algemeenheid niet juist te zijn. In Fig. 3 hebben we voor de vier E-testgroepen GBE, GME, WBE en WME de gemiddelde kritische score en extinktietest in een grafiek uitgezet. Bij de MIXED-leerstofaanbieding is het verschil in Einstellung en rigiditeit tussen de G- en de W-groepen in de verwachte richting. Deze verschillen zijn significant met Wilcoxon eenzijdig getoetst, voor Einstellung bij $\alpha = .0505$ en



Figuur 3 Gemiddelde kritische score (Einstellung) en extinktiescore (rigiditeit) voor de vier E-testgroepen: B = BLOK, M = MIXED, G = getallenrijen en W = wortelproblemen.

voor rigiditeit bij $\alpha = .0516$. Bij de BLOK-leerstofaanbieding is het verschil echter in de tegengestelde richting: De minder complexe algoritmen van de wortelvermenigvuldigingen geven aanleiding tot een grotere setvorming dan de complexere algoritmen van de getallenrijen.

Op de verklaring voor dit laatste resultaat zullen we in het kader van dit artikel niet al te diep ingaan. Wel wijzen we op het volgende. De verwachting van meer setvorming bij grotere complexiteit van de algoritmen is uitgesproken naar aanleiding van het onderzoek van Knight (1963) en De Leeuw (1979). Bij nadere beschouwing blijkt evenwel dat het in beide onderzoeken gaat om complexiteitsverschillen binnen een zelfde categorie van problemen: bij Knight kennenproblemen van Luchins en bij De Leeuw het voortzetten van getallenrijen. In het onderzoek waarvan nu verslag gedaan wordt, gaat het echter om complexiteitsverschillen tussen problemen van geheel verschillende aard: getallenrijen-voortzetten tegenover wortelvermenigvuldigingen. De mogelijkheid bestaat dat de gevonden resultaten niet zo zeer verklaard moeten worden in termen van complexiteit dan wel in termen van andere taakvariabelen. Het is bijvoorbeeld goed denkbaar dat bij eenvoudige problemen als die van de wortels al na zeer weinig setproblemen een seteffekt optreedt, terwijl voor een zelfde seteffekt bij de ingewikkelder problemen van de getallenrijen een groter aantal setproblemen nodig is. Vanuit een zelfde gezichtspunt laat het zich verklaren dat bij eenvoudige algoritmen zoals die van de wortels het switch-gedrag gemakkelijker leerbaar is.

Hoe dit ook zij, het onderzoek heeft aangetoond dat bij eenvoudige rekenkundige taken seteffecten zijn te ondervangen door middel van een bepaalde vorm van leerstofaanbieding. Een interessante vraag blijft nu liggen voor verder onderzoek: Door middel van welke variabelen van de leerstofaanbieding kan men ook bij ingewikkelder algoritmen seteffecten voorkomen?

6 Konsekwenties voor het wiskundeonderwijs

Na de bovenstaande bespreking van de resultaten van ons onderzoek komen

een aantal in de voorgaande afleveringen opgeworpen problemen tot een duidelijker beantwoording.

Ten eerste kan het verband tussen Einstellung en rigiditeit enerzijds en persoonskenmerken inclusief intelligentie van de leerlingen anderzijds bepaald niet eenduidig zijn. Dit blijkt wel het duidelijkst uit de zojuist gerapporteerde resultaten van setvorming bij de wortelvermenigvuldigingen. In de groep WBE werd wel Einstellung gekonstateerd, in de groep WME niet. De random toewijzing van proefpersonen aan kondities, zoals in het vorige artikel besproken, draagt er zorg voor dat beide groepen proefpersonen op het punt van persoonskenmerken een min of meer gelijke samenstelling hebben. Leerlingen met dezelfde persoonskenmerken vertonen in de ene konditie wel Einstellung, in de andere niet. Dit betekent dat de relatie tussen de persoonlijkheid van de leerlingen en hun setmatige reacties gekompliceerd is. Men kan het zo formuleren: Of leerlingen met bepaalde persoonskenmerken Einstellung en rigiditeit vertonen of niet hangt in sterke mate af van de aard der omstandigheden waarin deze leerlingen moeten functioneren. M.a.w. de wijze waarop we het onderwijs inrichten kan voor het ene type leerling meer nadelig zijn dan voor het andere type leerling. In het kader van deze serie artikelen zullen we op deze problematiek niet verder ingaan. Er zij echter een waarschuwing uit af te leiden: Setverschijnselen moet men niet gebruiken om leerlingen te beoordelen, maar om de inrichting van het onderwijs te beoordelen. In andere publikaties hopen we dit punt van de persoonskenmerken in relatie tot setvorming in de toekomst nader uit te werken.

In de tweede plaats komen we terug op het probleem hoe het onderwijs zo in te richten dat Einstellung en rigiditeit worden geminimaliseerd. Uit ons onderzoek blijkt dat dit niet een eenvoudige vraag is. Bij eenvoudige algoritmen als wortelvermenigvuldigingen hebben we nu een duidelijke indicatie: Mixing van de te leren algoritmen in de leerfase heeft een gunstig effect op de keuze van het meest effectieve algoritme. Bij gekompliceerde algoritmen is dit effect echter te gering om er veel waarde aan te hechten. Wellicht is het geheel voorkomen van Einstellung en rigiditeit door middel van een bepaalde leerstofaanbieding een te mooie wens. Desondanks zal het duidelijk zijn dat, waar het gaat om het maken van een keuze uit algoritmen, er in het leerproces een fase moet worden opgenomen waarin dit leren kiezen de belangrijkste doelstelling is. Zo is het mogelijk het meest doelmatig de meer gekompliceerde algoritmen eerst **BLOK**-vormig te leren en te oefenen en vervolgens een **MIXED**-serie instructies en opgaven te geven waarbij het vooral gaat om de vraag naar de meest efficiënte oplossing. Of een dergelijke leerstofaanbieding steeds Einstellung en rigiditeit zal voorkomen is evenwel de vraag. Misschien moeten we naar heel andere kenmerken van de leerstofaanbieding zoeken om setmatig gedrag van leerlingen tegen te gaan. Te denken valt dan aan meer open, zelfontdekkende manieren van leren van algoritmen. Deze in tegenstelling tot de meer gesloten, geleide manier van leren zoals meestal in het onderwijs toegepast (en ook in ons onderzoek). Men spreekt in de leerpsychologie in dit verband van heuristische resp. algoritmische instructiemethoden. Duidelijk is dat hier nog een heel terrein open ligt voor verder onderzoek.

Aardig is in dit verband het volgende voorbeeld van leerstof in Moderne

Wiskunde-deel 4hv (p. 155). Nadat bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen de drie algoritmen ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen en abc-formule afzonderlijk zijn behandeld en geoefend, volgt er een opdracht: 'Ga bij het oplossen van de volgende vergelijkingen eerst goed na welke oplossingsmethode je het beste kunt toepassen: ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen of abc-formule.' Er volgen twaalf vergelijkingen. Er wordt echter niet ingegaan op kenmerken van de vergelijkingen waaruit valt op te maken welk algoritme hier 'het beste' toegepast kan worden. De moeilijkheid is namelijk dat twee van de drie methoden in alle gevallen tot goed resultaat leiden en de leerlingen dus niet door de opgaven zelf gedwongen worden het meest effectieve algoritme te kiezen. Bovendien staat in de antwoordenlijst die achter in het boek voor de leerlingen is opgenomen wel de oplossingsverzameling van elke vergelijking vermeld, maar niet de meest effectieve methode. De leerlingen krijgen dus geen feed-back ten aanzien van het belangrijkste leerdoel van deze opdracht. Het lijkt alsof de schrijvers veronderstellen dat het kiezen van de meest efficiënte oplossingsmethode iets is dat de leerlingen vanzelf wel zullen doen. Ons onderzoek toont aan dat dit in het algemeen niet het geval is. Het kiezen van de meest effectieve methode is iets dat geleerd moet worden, althans als dit een doelstelling van ons onderwijs is. En daarvoor zouden wij wel willen pleiten..

7 Tenslotte

Met dit artikel is het onderzoeksgedeelte van deze serie afgesloten. De serie zal besloten worden met een vijfde artikel waarin zal worden aangetoond dat Einstellung en rigiditeit zich over de hele linie in de wiskunde van het havo en vwo kunnen voordoen. Tot slot is aan dit artikel een appendix toegevoegd waarin de belasting van het onderzoek voor de school beschreven wordt.

8 De belasting van het onderzoek voor de school (appendix)

De school is om tal van redenen een ideale plaats om een onderzoek als het onderhavige uit te voeren. Er zijn grote aantallen proefpersonen beschikbaar. De situatie waarin het onderzoek wordt afgenomen is nauw verwant aan de reële onderwijsleersituatie. De proefgroep maakt generalisatie van de onderzoeksresultaten mogelijk naar veel grotere groepen leerlingen, namelijk van scholen van hetzelfde type. Door de school worden vaak voor andere doeleinden zoals begeleiding van leerlingen allerlei psychometrische gegevens verzameld, waarvan in het onderzoek gebruik gemaakt kan worden. Bovendien bestaat de mogelijkheid om gebruik te maken van studieresultaten van leerlingen. Anderzijds kunnen in het kader van het onderzoek gegevens worden verzameld, waarvan de school gebruik kan maken. Te denken valt aan scores op persoonlijkheidstests of cijfers van gemeenschappelijke proefwerken.

Behalve voordelen voor de school geeft een onderzoek natuurlijk ook enige belasting. Het spreekt vanzelf dat zowel de schoolleiding als de onderzoekers er naar zullen streven deze belasting zo gering mogelijk te maken. Hiertoe zijn tal

van mogelijkheden. We zullen in het kort een indruk proberen te geven van de wijze waarop dit in ons onderzoek is gerealiseerd.

In een eerste vooronderzoekje zijn de getallenrijproblemen uitgeprobeerd op een achttal leerlingen van 2 HAVO-klassen. Deze deden hieraan mee op basis van vrijwilligheid en na schooltijd. Vervolgens is een vooronderzoek van wat grotere omvang opgezet, waarbij een 2 VWO-klas werd ingeschakeld. Dit om te voorkomen dat het grote onderzoek op acht brugklassen door allerlei onvoorziene omstandigheden zou mislukken. Dit vooronderzoek vond plaats tijdens een natuurkundeles en twee dagen later een halve aardrijkskundeles. Hierin werd een perceptietest afgenomen (wegens andere vraagstellingen van het onderzoek) en namen de leerlingen het BLOK-getallenrijenboekje door. Tijdens de aardrijkskundeles werd de E-test van de getallenrijen afgenomen.

Het definitieve onderzoek vond plaats in de periode rondom de paasvakantie. Het is in alle acht brugklassen door de konrektrix van de brugklas aangekondigd. In de twee weken voor de paasvakantie is in alle klassen een prestatie-motivatietest afgenomen (eveneens wegens hier niet besproken vraagstellingen van het onderzoek). Dit nam per klas ongeveer een uur in beslag en gebeurde op uren waarop deze klassen vrij gehad zouden hebben wegens ziekte van hun docenten. In de twee weken na de paasvakantie volgde het verdere onderzoek. Daar dit de periode van het mondeling schoolonderzoek was, vielen er voor de brugklassen vele lesuren uit. Er is nu uitsluitend van deze uitgevallen uren gebruik gemaakt. Alle klassen kregen eerst gedurende een uur de perceptietest te maken (± 20 minuten) en vervolgens de boekjes van de leerstofaanbieding door te werken (± 25 minuten). Twee dagen daarna volgde dan de afname van de E-test en de controletaken (± 25 minuten). De organisatie hiervan heeft alleen de maakster van het aan het schoolonderzoek aangepaste lesrooster enig hoofdbreken gekost. Verder zij vermeld dat de scores van de prestatie-motivatietest in overleg met de schoolpsycholoog voor begeleidingsdoelen aan de mentoren ter beschikking zijn gesteld.

Al met al kunnen we nu stellen dat de belasting van het onderzoek voor de school zeer gering is geweest, doordat het in het schoolgebeuren is ingepast in de daartoe meest geschikte periode van het schooljaar. Bij deze spreken we dan ook de hoop uit dat er in de toekomst op grotere schaal gebruik gemaakt zal kunnen worden van de mogelijkheden die er liggen in samenwerking tussen scholen en onderzoekers op het gebied van de leerpsychologie. Dit kan bevruchtend werken op het onderzoek. De vraagstellingen kunnen meer geënt worden op de praktijk van het onderwijs. En het kan verdiepend werken voor het onderwijs: De konfrontatie van docenten met de resultaten van het onderzoek opent soms nieuwe gezichtspunten, vanwaaruit verbetering van het onderwijs kan worden nagestreefd. Wisselwerking tussen wetenschap en praktijk kan beide alleen maar ten goede komen.

Literatuur (zie ook: Van 't Riet, 1980)

- Johnson, D. M., *Systematic introduction to the psychology of thinking*, Harper en Row, New York, 1972.
Leeuw, L. de, *Leren probleemoplossen*, Swets en Zeitlinger, Lisse, 1979.

Moderne Wiskunde voor V.O., deel 4hv, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken*, Euclides 1979, 55, p. 41–49.

Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, II De aard van de leerervaring*, Euclides 1980, 55, p. 308–316.

Riet, S. P. van 't, Leeuw, L. de, *Setvorming en wiskundeonderwijs, III Het voortzetten van getallen: – rijen met behulp van algoritmen: een onderzoek*, Euclides 1980, 55, p. 22–36.

Voortgangsverslag van de didaktiek-commissie

1 In april 1970 werd de didaktiekcommissie ingesteld door de NVWL¹⁾. In april 1975 verscheen een eerste verslag²⁾; nu, in oktober 1980, het tweede. Het is niet de bedoeling de schijnbare periodiciteit van 5 jaar voort te zetten. Een frequentere verslaggeving kan een grotere openheid van de commissie bevorderen.

2 In april 1975 bestond de commissie uit J. van Dormolen (voorzitter), H. Broekman (secretaris), J. Eilander, J. Jimkes, B. Knip, F. Mahieu, L. Muskens, J. Vedder en B. Zwaneveld. Op dit moment wordt de commissie gevormd door H. Pouw, F. Meester (zij vormen het dagelijks bestuur), G. Doevendans, J. van Dormolen, C. Hollman, C. Hoogsteder, B. Knip, L. Muskens, G. Schoemaker, T. Vandeberg en J. Vedder.

3 De didaktiekcommissie heeft in de afgelopen jaren steeds gezocht naar middelen om steun te geven aan wiskundeleraren die de kwaliteit van hun onderwijs willen verbeteren. Het werk van de jaren 75-80 wordt dan ook vooral gekenmerkt door de organisatie van driedaagse kursussen in samenwerking met het IOWO, waar leraren en leraressen didactisch werden bijgeschoold. De onderwerpen van deze kursussen zijn:

A-kursus – Doelstellingen en leerstofordening

B-kursus – Samenwerken

C-kursus – Rekening houden met verschillen

In totaal zijn er sinds 1973 31 van dergelijke kursussen geweest met in totaal bijna 1700 deelnemers. De kursussen hebben voor een groot deel het werk en de tijd van de commissie bepaald; het voorbereiden, draaiboek bijstellen, gespreksleiders inwerken, nabesprekingen, etc.

Twee uitgangspunten voor deze kursussen hebben er mede toe geleid dat deze kursussen geslaagd genoemd kunnen worden:

a de deelnemers gaven op 1e, 2e en 3e graads niveau les

b bij de gespreksleiders waren ook steeds een aantal leraren betrokken.

Toen in mei '78 duidelijk werd dat de NLO's en de universitaire lerarenopleiding de her- en bijscholing zouden moeten gaan verzorgen en ook het IOWO niet meer in de bestaande vorm zou kunnen doorgaan is op initiatief van de didaktiekcommissie een Werkverband opgericht. Aan dit Werkverband, waarin vertegenwoordigers van NLO's, Universitaire lerarenopleiding, Avondopleiding voor Middelbare akte, het IOWO en de NVWL zitting hebben, zouden de kursussen overgedragen kunnen worden met respect voor de twee bovengenoemde uitgangspunten. Dit resulteerde voorlopig in een B en C cursus in het voorjaar 1980, onder leiding van dit Werkverband en de didaktiekcommissie. In het najaar van 1980 komt er een A en een B cursus.

4 Het toegankelijk maken voor wiskundeleraren van didactische onderwerpen vanuit studie, literatuur en ervaringen resulteerde in een aantal publikaties.

september 1975 – Vaardigheden J. van Dormolen³⁾

september 1977 – Handelen om te begrijpen Bert Zwaneveld

april 1980	– Instappen en toepassen	Joop van Dormolen ⁴⁾ Joop van Dormolen Bert Zwaneveld ⁵⁾
december 1980	– Rekening houden met individuele verschillen	Francis Meester ⁶⁾ George Schoemaker Jaap Vedder

Deze publikaties zijn tot stand gekomen in samenwerking met de didaktiekcommissie, in deze groep werden suggesties gedaan, feedback gegeven en punten doorgesproken. Door de steun van het IOWO konden deze brochures aan alle leden van de Ned. Ver. van Wisk. Ler. toegezonden worden. Ze zijn tot nader order bij het IOWO te bestellen.

5 Leden van de didaktiekcommissie hebben afgelopen jaren meegewerkt aan het studiethema van de jaarvergadering of de commissie heeft deze verantwoordelijkheden in z'n geheel genomen, in 1979 en in 1980. Onderwerpen van deze studiedagen waren

1976 – Vaardigheden

1977 – Handelen om te begrijpen

1978 – Instappen en toepassen

1979 – Het zijn de kleine dingen die het 'm doen

1980 – Goniometrie

6 Op het ogenblik zijn er binnen de commissie een paar studiegroepjes

– Motivatie, centraal staat de theorie van Gordon⁷⁾

– Variabelen

– Publikatie: Rekening houden met individuele verschillen

Resultaten van studie zullen openbaar gemaakt worden tijdens studiedagen, door publikaties of door artikelen in Euclides.

7 Regionale werkgroepen zijn in de afgelopen tijd niet door de didaktiekcommissie georganiseerd.

8 De commissie zoekt naar mogelijkheden om een grotere openheid in haar werk te brengen, dat zou kunnen resulteren in deelname van wiskundedocenten aan didactische activiteiten.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Noten

1 Euclides, 46 – 70/71 blz. 8

2 Euclides, 51 – 75/76 blz. 109

3 Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen (goede) vaardigheden hebben, J. van Dormolen 1975

4 Handelen om te begrijpen, Een werkwijze om leerlingen naar goede vaardigheden te wijzen, Bert Zwaneveld, Joop van Dormolen 1977

5 Instappen en Toepassen, Over het benutten van probleemsituaties als middel om wiskunde te leren en te leren gebruiken, Joop van Dormolen, Bert Zwaneveld 1980

6 Rekening houden met individuele verschillen, Francis Meester, George Schoemaker, Jaap Vedder ter perse (verschijnt dec. 1980)

7 Beter met kinderen omgaan, T. Gordon, Amsterdam 1979

Wiskunde en Nederlands

L. G. MOSTERTMAN

In Euclides nr. 10 (55e jrg) doet Prof. Dr. N. G. de Bruijn in zijn artikel 'Wiskundigen, let op Uw Nederlands' een dringend beroep op zijn vakgenoten om hun Nederlands goed te verzorgen. Hoewel ik zijn pleidooi in grote lijnen waardeer en van harte ondersteun, kan ik het toch niet laten om enige detailkritiek te leveren. In één geval gaat De Bruijn volgens mij namelijk te ver in zijn afwijzing van geaccepteerde taal, waardoor hij ook duidelijk met zichzelf in strijd komt.

Onder punt 2 waarschuwt De Bruijn terecht tegen foutieve zinsbouw als in: 'Door $x = 5$ te nemen blijkt dat $c > 2$ '. Hij geeft een verbeterde vorm, waarin hij 'door $x = 5$ te nemen' laat staan. Hij realiseert zich blijkbaar niet, dat het onmogelijk de bedoeling kan zijn om een vergelijking te nemen, maar dat er een getal moet worden ingevuld. Een eigen poging tot herstel: 'Door x de waarde 5 te geven, vinden we dat $c > 2$ '.

Uit deze verbeterde versie blijkt meteen, hoe waardevol het woordje 'waarde' kan wezen in dergelijke constructies. De Bruijn begint zijn punt 10 met de vraag: 'Is er verschil tussen p en de waarde van p ?'. Mijn antwoord zou luiden: natuurlijk, want p is een letter en de waarde van p is het getal, dat voor die letter moet worden ingevuld. Naar mijn gevoel is het onderscheid zelfs erg belangrijk voor een goed begrip van wat een variabele in de wiskunde betekent.

Als verbetering van 'Voor elke waarde van x ' stelt De Bruijn voor: 'Voor elke x ', maar hij merkt zelf al, dat hij daardoor in strijd komt met zijn eigen punt 11, waaronder hij terecht stelling neemt tegen het gebruik van x als substantief. 'Voor elke x ' is trouwens evidente nonsens, omdat er maar één x bestaat, namelijk de 24e letter van ons alfabet. De naar mijn mening onberispelijke uitdrukking 'Voor elke waarde van x ' kan slechts op gekunstelde wijze 'waardevrij' gemaakt worden, bijvoorbeeld door: 'Voor elk reëel getal, dat men voor x kan substitueren'.

Onder punt 6 bekritiseert De Bruijn de gebruikelijke vraagstelling 'Voor welke u is $u^2 = pu$?', die alleen door de toevoeging 'Voor welke waarden' nog iets te verbeteren is. Tegen De Bruijns verbetering 'Los u op uit $u^2 = pu$ ' bestaat een heel ander bezwaar: het kan toch niet de bedoeling zijn om een letter op te lossen, maar een vergelijking! Een correcte formulering zonder het woord waarde zou ook hier wat gekunsteld aandoen: 'Los de vergelijking $u^2 = pu$ op naar u '. Opdat niet alleen de didactici maar ook de echte wiskundigen in dit blad aan hun

trekken komen duiken we ook nog even in het intrigerende probleem zelf en vinden met enig knip- en plakwerk of via ontbinding in factoren, dat de oplossingsverzameling $\{0\}$ is als p de waarde 0 heeft en $\{0, p\}$ in alle andere gevallen.

Tenslotte spreek ik de hoop uit, dat het betoog van De Bruijn door mijn kritische kanttekeningen nog aan waarde moge winnen.

Naschrift door N. G. de Bruijn

De heer Mostertman legt inderdaad de vinger op een pijnlijk plekje. In mijn kritiek op de zin 'Door $x = 5$ te nemen blijkt dat $c > 2$ ' had ik me op de zinsconstructie gericht, en dat 'door $x = 5$ te nemen' laten zitten.

Mostertman's voorstel is om voor deze gelegenheid het woord 'waarde' maar weer van stal te halen: 'door x de waarde 5 te geven'. En zo zijn er nog een paar constructies waar men dan het woord 'waarde' zou willen toelaten.

Ik ben daar niet zo gelukkig mee. Doordat we allerlei zinstransformaties automatisch toepassen zou het woord 'waarde' in alle vormen weer terugkeren. Al eerder had ik trouwens opgemerkt dat het woord 'waarde' alleen bij getallen gebruikt wordt; bij andere objecten heeft men er blijkbaar geen behoefte aan.

Er zijn ook andere zalfjes voor dat bovengenoemde pijnlijke plekje. Heel eenvoudig is het om de uitdrukking 'door $x = 5$ te nemen' als standaardterm te beschouwen voor: 'voor x het getal 5 invullen' (de woorden 'het getal' dienen alleen als scheiding van de x en de 5). Soms, maar niet altijd (het hangt van de voorgeschiedenis af) kan men zeggen: 'door $x = 5$ te onderstellen' (en dan treedt ' $x = 5$ ' inderdaad als een object op). Het liefste zou mij zijn 'met $x := 5$ '. Hier is ' $:=$ ' een soort scheidingsteken dat moeilijk verkeerd kan worden opgevat, en dat in de computerwiskunde op analoge wijze wordt gebruikt.

De heer Mostertman vindt 'voor elke x ' onzinnig. Inderdaad, de Nederlandse taal laat dit niet toe. Maar ik ken geen enkele mogelijkheid om variabelenbinding in echt goed Nederlands weer te geven. We zijn eenvoudig gedwongen om nieuwe constructies te verzinnen teneinde die uit de lucht vallende baan voor de gebonden variabele een plaatsje in de zin te geven. Er is duidelijk behoefte aan het standaardiseren van gezinsconstructie voor dit soort gelegenheden.

De metataalopmerking dat x de 24-ste letter van het alfabet is, vormt geen argument om in de wiskundige taal overal 'waarde van x ' te schrijven. Afgezien van de vraag of dit laatste iets anders doet dan de moeilijkheid verschuiven, is het overigens wel duidelijk dat niemand het zou volhouden om in alle formules over de 'waarde van x ' te blijven spreken, zoals '(waarde van x)² + 1 > 0.'

Het gebruik van de woorden 'oplossen' en 'oplossing' is chaotisch. Er worden problemen opgelost, vergelijkingen opgelost (een vergelijking is op zichzelf geen probleem) en onbekenden uit vergelijkingen opgelost. Een oplossing van een vergelijking is soms een object dat aan de vergelijking voldoet, soms de daad van het oplossen. Heel merkwaardig is de (misschien verouderde) uitdrukking 'deze vergelijking laat een oplossing toe'. Bij deze repressieve tolerantie is het niet duidelijk in welke betekenis het woord 'oplossing' bedoeld is.

Normalisatie van het spreken over vergelijkingen en oplossingen zou geen

kwaad kunnen.

Overigens betekent bij de gangbare verzamelingsnotatie $\{0, 0\}$ hetzelfde als $\{0\}$, zodat $\{0, p\}$ ook bij $p = 0$ de oplossingsverzameling van $u^2 = pu$ voorstelt. Dit is een van de punten waarbij het 'Eindrapport Nomenclatuurcommissie' (Euclides 48, 241^a–274^a) een goede internationaal gangbare notatieafpraak vervangt door een slechte.

Tenslotte: waarom zouden didactici geen echte wiskundigen zijn? Met niet-wiskundige didactici kan men trouwens niet over wiskundige taal spreken.

Korrel

De invloed van een definitie

In The Mathematics Teacher van januari 1980 (vol. 73, nr. 1), blz. 24-30, geeft Charles Brumfiel vijf definities van $|x|$.

Def. 1. Op een getallenlijn is X het punt met coördinaat x . $|x|$ is de afstand van X tot de oorsprong.

Def. 2. Kies twee getallen p en q met $p - q = x$. P en Q zijn de punten op de getallenlijn met coördinaten p en q . Dan is $|x|$ de afstand van P en Q .

Def. 3. $|x| = \max \{x, -x\}$

Def. 4. $|x| = \sqrt{x^2}$

Def. 5. Als $x \geq 0$, dan is $|x| = x$
als $x < 0$, dan is $|x| = -x$.

Uitgaande van elk van deze definities lost hij op de ongelijkheid $|x - 3| < |x + 5|$

Merkwaardig is, dat men vijf essentieel verschillende oplosmethoden krijgt. U kunt het zelf proberen of nalezen. Het resultaat is verrassend.

P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 NN Doorwerth.

Opgaven

425. Een dokter houdt elke ochtend spreekuur van 8 tot 10. Hij bestelt dan 12 patiënten om de 10 minuten, in willekeurige volgorde. De patiënten komen stipt op tijd. Van de 12 patiënten vereisen steeds 6 een behandelingsduur van 9 minuten en 6 van 11 minuten. Hoeveel minuten is de dokter gemiddeld na 10 uur met zijn spreekuur klaar?

Beantwoord de analoge vraag voor een willekeurig even aantal patiënten.

426. H. G. Steiner geeft in *Didaktik der Mathematik*, blz. 330-368 een axiomatiek van het stemmen. Zie de boekbespreking in dit nummer. Men kan het artikel ook nalezen in *Les répercussions de la recherche mathématique*, Luxemburg 1966, blz. 31-70.

Hieronder de axioma's en enkele definities. Men kan zelf verder resultaten afleiden.

Bij het stemmen over een onderwerp leiden bepaalde stemcombinaties tot aannemen van een voorstel. Dergelijke combinaties noemt Steiner winstcoalities.

Voorbeeld. A , B , C en D stemmen. Hun stemmen hebben als gewicht resp. 1, 2, 3, 4. Vereist is een $\frac{2}{3}$ meerderheid. C en D vormen dan een winstcoalitie.

We gaan uit van een verzameling A , de alverzameling van de stemmende personen. Alle verdere verzamelingen zijn deelverzamelingen van A .

Axioma 1. Als V een winstcoalitie is en $V \subset W$, dan is ook W een winstcoalitie.

Definitie. Als V een winstcoalitie is, dan noemen we $A \setminus V$ een *verliescoalitie*.

Axioma 2. Geen enkele verliescoalitie is een winstcoalitie.

Definitie. Een coalitie die noch winst- noch verliescoalitie is, heet een *blokkeercoalitie*.

Axioma 3. Er zijn winstcoalities.

Definitie. Een winstcoalitie waarvan geen echt deel een winstcoalitie is, heet een *minimale winstcoalitie*.

Definitie. Een persoon (element van A) die tot geen enkele minimale winstcoalitie behoort, is een *machtloze persoon*.

Hieronder volgen drie definities van een *dictator*.

$D_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{alle van } x \text{ verschillende elementen van } A \text{ zijn machtloze personen}$

$D_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \text{ is element van elke minimale winstcoalitie}$

$D_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\} \text{ is een minimale winstcoalitie.}$

Vraag 1. Zijn de drie definities gelijkwaardig? Zo neen, welke kiest u?

Vraag 2. Bewijs de volgende stellingen.

Stelling 1. De lege verzameling is een verliescoalitie.

Stelling 2. Als V verliescoalitie is en $W \subset V$, dan is ook W een verliescoalitie.

Stelling 3. De doorsnede van twee winstcoalities is niet leeg.

Stelling 4. $D_2(x) \wedge y \neq x \Rightarrow \neg D_2(y)$.

Vraag 3. Hieronder volgen 3 definities voor: x heeft *vetorecht*.

$V_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \text{ is element van elke minimale winstcoalitie}$

$V_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \text{ is element van geen enkele verliescoalitie}$

$V_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\} \text{ is een blokkeercoalitie.}$

Zijn de drie definities gelijkwaardig?

Vraag 4. Bewijs, dat de drie definities $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$ gelijkwaardig zijn, als er geen dictator is, en anders niet.

Vraag 5. Bewijs, dat een blokkeercoalitie niet uit alleen machtloze personen kan bestaan.

Men kan ook anders te werk gaan. De elementen van A kent men elk een stemgewicht toe. Het stemgewicht is een natuurlijk getal.

Winstcoalities zijn die verzamelingen waarvan de som van de stemgewichten groter is dan een bepaald rationaal getal r waarvoor geldt $\frac{1}{2} \leq r < 1$.

Laat zien dat aan de bovengenoemde axioma's voldaan is.

Vraag 6. De vraag doet zich voor of beide funderingen van het begrip winstcoalitie op hetzelfde neerkomen. Het antwoord is ontkennend.

Er zijn voorbeelden te bedenken van winstcoalities binnen een verzameling A die aan de axioma's voldoen en waarbij het niet mogelijk is de stemmen van de elementen van A een zodanig gewicht toe te kennen en een zodanige r te kiezen, dat juist deze coalities weer de winstcoalities zijn. Geef een dergelijk voorbeeld.

Oplossingen

423. De cijfers van een getal van drie cijfers worden op alle mogelijke manieren gepermuteerd. De zo verkregen getallen worden opgeteld. Van deze som is het getal van de tientallen verschillend van dat van de honderdtallen. Wat weet je van de drie cijfers?

Onderstel de drie cijfers zijn a , b en c ; alle drie verschillend.

Dan is

het cijfer van de eenheden $2(a + b + c) \bmod 10$

het cijfer van de tientallen $2(a + b + c) + c_1 \bmod 10$

het cijfer van de honderdtallen $2(a + b + c) + c_2 \bmod 10$

waarin c_1 en c_2 de getallen zijn die 'onthouden' zijn.

Voorwaarde is dus $c_1 \neq c_2$. Dit is gelijkwaardig met

$a + b + c = 14 \vee a + b + c = 19 \vee a + b + c = 24$

Verder kan men nog onderzoeken het geval waarin de cijfers a , a en b ($a \neq b$) zijn. Men vindt dan nog de mogelijkheid $2a + b = 19$.

424. Vind zes verschillende positieve gehele getallen waarvoor

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4 + f^4$$

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = 2a^2 + 2ab + 2b^2$$

en

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = (2a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

Dus: als

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = d^2 + e^2 + (d + e)^2$$

dan is ook

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = d^4 + e^4 + (d + e)^4$$

De rest is niet moeilijk. Enkele voorbeelden van oplossingen:

$$3^2 + p^2 + (p + 3)^2 = 6^2 + (p + 1)^2 + (p + 7)^2 \Rightarrow p = -\frac{34}{5}$$

Substitueer, vermenigvuldig met 5 en neem de modulus. We vinden dan de zes getallen 15, 34, 19 en 30, 29, 1.

$$p^2 + (p + 2)^2 + (2p + 2)^2 = (p - 1)^2 + (p - 2)^2 + (2p - 3)^2 \Rightarrow p = \frac{1}{5}$$

Dit levert 1, 11, 12 en 4, 9, 13.

$$p^2 + (2p + 1)^2 + (3p + 1)^2 = (2p)^2 + (2p - 1)^2 + (4p - 1)^2 \Rightarrow p = \frac{11}{5}$$

Dit levert 11, 27, 38 en 17, 22, 39.

Men moet er uiteraard voor zorgen dat de vierkantsvergelijking rationale wortels heeft.

Boekbesprekingen

Warren Page, *'Topological uniform structures'*, New York, etc., John Wiley & Sons, 1978, XV + 398 p.

De bedoeling van de auteur van het onderhavige boek is om in één band een aantal mini-leerboeken (= hoofdstukken) over verschillende onderling samenhangende en op elkaar inspelende onderwerpen samen te brengen. Elk van de hoofdstukken is daarbij mede bedoeld om andere, meer geavanceerde tekstboeken in het betrokken gebied, voor de lezer toegankelijker te maken. Het boek bevat veel materiaal, zoals moge blijken uit het volgende inhoudsoverzicht (titels van de hoofdstukken, met bij elk hoofdstuk een – onvolledige – greep uit de inhoud):

Hoofdstuk I: Uniforme ruimten

Diagonaal-uniformiteiten (A. Weil). Overdekkingsuniformiteiten (J. W. Tukey). Onderling verband.

Voor topologische ruimten: uniformiseerbaar = volledig regulier.

Projectieve en inductieve limieten.

'Gage'-ruimten. Volledigheid van uniforme ruimten.

Functie-ruimten, met de verschillende uniformiteiten en topologieën. Stelling van Arzela-Ascoli.

Hoofdstuk II: Topologische groepen

Uniformiseerbaarheid. Pseudo-metriseerbaarheid $\Leftrightarrow$ CI.

Volledigheid. Projectieve en inductieve limieten.

Open-afbeelding en gesloten-grafiek stellingen.

Unitaire representatie en de karaktergroep. Lemma van Schur.

De stelling van Gelfand-Raikov en de dualiteitsstelling van Pontryagin worden in dit hoofdstuk genoemd, maar niet bewezen (dat laatste geschiedt in hoofdstuk V in de paragraaf over Fourier-analyse op LCT_2A -groepen).

Haar-maat en Haar-integraal, op lokaal-compacte T_2 -groepen; existentie en eenduidigheid.

Hoofdstuk III: Topologische vectorruimten

Stelling van Banach-Steinhaus.

Locaal-convexe topol. vectorruimten. Seminormen.

Stelling van Kolmogorov.

Vector-waardige maatruimten.

Stellingen van Hahn-Banach (separatie, extensie).

Stelling van Krein-Milman.

Dualiteitstheorie. Stelling van Mackey-Arens.

Reflexieve ruimten en Montel-ruimten.

Open-afbeelding en gesloten-grafiek stellingen.

Hoofdstuk IV: Topologische algebra

Genormeerde algebra's, x -algebra's, Banach-algebra's.

Topologische vector-algebra's. Lokaal m -convexe algebra's.

A en A^* -algebra's. Hull-Kernel topology. Silov-rand.

Hoofdstuk V: Abstracte harmonische analyse

De algebra $L_1(G)$ van een lokaal-compacte groep G .

Fouriergetransformeerden (voor abelse G).

De algebra $M(G)$ van complexe totaal-eindige reguliere Borel-maten.

Fourier-Stieltjes-getransformeerden (voor abelse G).

Fourieranalyse op LCT_2A -groepen.

De stelling van Bochner. De omkeringsstelling. De stelling van Plancherel.

Het bewijs van de dualiteitsstelling van Pontryagin.

Het boek bevat veel voorbeelden (die de uiteenzettingen goed illustreren) en veel 'problems' (die steeds van behoorlijk niveau zijn, en die soms bekende stellingen bevatten, die de lezer dus zelf moet bewijzen).

Het boek is tegelijkertijd zeer compact én tamelijk gedetailleerd geschreven: in de gedachtengang komen meestal geen al te grote sprongen voor, maar de stijl is zeer beknopt. Op deze wijze slaagt de auteur er in binnen een boek van toch nog beperkte omvang, het vele materiaal bijeen te brengen. Daarbij maakt hij (uiteraard) veel gebruik van afkortingen (die overigens vaak wel voor zichzelf spreken) en van symbolen voor de aanduiding van bijv. speciale ruimten, uniformiteiten, topologieën, etc. Soms worden die midden in de tekst, als terloops, ingevoerd, waardoor de lezer veel moet onthouden, wil hij niet telkens de lijst met symbolen en notaties moeten opslaan.

Uit het vorige volgt al wel dat het boek vooral voor lezers met weinig ervaring niet gemakkelijk te lezen zal zijn. Getrôost men zich echter de moeite, dan valt er veel te leren.

Het boek is (zoals de auteur in het woord vooraf ook stelt) redelijk 'self-contained' als men voldoende basiskennis heeft van elementaire analyse, lineaire algebra en verzamelingstheoretische topologie (althans formeel gesproken; na het bovenstaande zal duidelijk zijn, dat enige 'wiskundige rijpheid' ook zeer gewenst is).

Tot die voorkennis worden bijv. ook gerekend, de definitie van 'norm' en 'genormeerde lineaire ruimte'. Dat is ook alleszins begrijpelijk. Maar dat de definitie van 'Banach-ruimte' niet in het boek voorkomt lijkt minder voor de hand te liggen. Vermoedelijk wordt het door de auteur niet opzettelijk tot de voorkennis gerekend, maar is het gewoon tussen wal en schip geraakt.

Nog twee detail-kritische opmerkingen:

De auteur schrijft de $\forall$ -quantor achter de formule. Dat treft men in informele exposities wel meer aan, maar deze gewoonte spreekt in een formele tekst niet erg aan. Sterker: zij is licht oorzaak van fouten of, op zijn minst, dubbelzinnigheden. Wat in def. 1.6(b) op blz. 3 staat is fout: zo iets mag men alléén schrijven (of misschien zelfs dan niet) als de auteur van de lezer weet dat deze de bedoeling al kent, zodat hij niet leest wat er staat, maar leest wat bedoeld is.

En tenslotte: De konsekwent volgehouden spelling 'metrizable' (i.p.v. 'metrizible'), resp. 'uniformizable' (i.p.v. 'uniformizable') is op zijn minst zéér ongebruikelijk.

M. A. Maurice

Abe Mizrahi, Michael Sullivan, *Finite Mathematics with Applications*, John Wiley & Sons, 3e druk, 638 blz., £ 10.50 (\$ 18.95).

Zoals de ondertitel vermeldt is het boek bestemd 'for Business and Social Sciences', speciaal voor studenten in deze richtingen. Voor hen zijn dan ook opgaven opgenomen, ontleend aan examens voor 'Certified Public Account', 'Certificate in Management Accounting' en 'Actuary Examinations'. Met het oog op deze doelgroep hebben de schrijvers zoveel mogelijk abstracte theorie vermeden zonder de wiskundige methoden en gedachtengangen geweld aan te doen. Naar-mijn smaak zijn zij hierin uitstekend geslaagd. Een opsomming van de behandelde onderwerpen geeft een indruk van het veld, waarop het boek zich beweegt:

verzamelingen, getallen en functies, lineaire vergelijkingen en ongelijkheden, inleiding tot lineair programmeren, inleiding tot matrix-algebra met toepassingen, simplex methode, tellen (permutaties e.d.), inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening, beslistheorie, matrix-toepassingen op gerichte grafen, Markov-ketens, speltheorie, statistiek, wiskunde'en financiën (o.a. samengestelde interest, annuïteiten), logica (waarheidstabellen, tautologieën enz.).

Van de opgaven met oneven nummer zijn de antwoorden opgenomen (74 blz.), ook alle benodigde tabellen zijn afgedrukt (33 blz.), een index besluit het boek.

Het boek lijkt mij uitstekend aan zijn doel te beantwoorden. De wijze van behandeling wekt bewondering. Hierbij denk ik aan de introductie van nieuwe problemen d.m.v. concrete voorbeelden aan de wiskundige behandeling van de problemen: geen al te abstracte verhandelingen, geen uitvoerige bewijzen, maar toch verantwoord op een zodanige wijze, dat de studerende gericht blijft op zijn interessegebied

en aan de toepassing van de stof op concrete, levensechte problemen uit velerlei levenssferen: economie, financiën, biologie, demografie enz.

Het taalgebruik is uitstekend: direct op de student gerichte taal, waarbij duidelijk uitgelegd wordt.

stap voor stap waar het in de diverse onderwerpen om gaat. Ook aan de uitvoering van het boek is de meeste zorg besteed. Al met al een boek, dat ik met buitengewoon veel genoegen heb gelezen, speciaal w.b. de toepassingen. Juist met het oog hierop en op mogelijke veranderingen van onze wiskundeprogramma's kan ik kennismaking van dit boek door Nederlandse wiskundelaren van harte aanbevelen.

W. Kleijne

Serge Lang, *Algebraische Strukturen*, Moderne Mathematik in elementarer Darstellung deel 18. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, DM 19,80.

Dit boek geeft een eerste inleiding in de algebra. Het geeft de gebruikelijke onderwerpen in de bekende, traditionele, wijze weer. Allereerst een inleiding in een aantal elementaire stellingen betreffende de gehele getallen, zoals grootste gemene deler, eenduidige ontbinding in priemfactoren, equivalentierelaties, congruenties. Daarna komt de groepentheorie ter sprake, w.o. homomorfismen, nevenklassen, normaaldelers, cyclische groepen, permutatiegroepen, oplosbare groepen. Vervolgens ringen met ideaaltheorie, quotiëntenlichamen. Na een hoofdstuk over polynomen gaat het boek verder met de lichaamstheorie, waarbij eveneens eindige lichamen besproken worden. Een hoofdstuk over lineaire groepen sluit de beschouwingen af.

Het geheel maakt een degelijke indruk, terwijl de tekst toch vrij eenvoudig gehouden is. De schrijver licht de theorie met vele vrij concrete voorbeelden toe.

Het boek lijkt mij een uitstekende inleiding tot de algebra en zeker geschikt voor eerstejaarsstudenten, studerende mo-a, e.d.

W. Kleijne

Springer, M. D., *The algebra of random variables*, New York, Wiley and Sons, 1979, xix + 470 blz., prijs \$ 35,50.

Aan de afleiding van verdelingsfuncties van sommen van stochastische grootheden wordt in de literatuur op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek veel aandacht besteed. Over dit onderwerp zijn verschillende boeken geschreven. Naar andere algebraïsche uitdrukkingen van stochastische grootheden (bijvoorbeeld het produkt of quotiënt) wordt minder vaak gekeken. Toch komt men andere uitdrukkingen wel tegen. Men denke aan de (centrale en niet-centrale) Student-*t* en *F*-verdeling. In dit boek worden methoden besproken om voor dergelijke algebraïsche uitdrukkingen van stochastische grootheden de verdelingsdichtheden te bepalen. Daarbij worden verschillende transformaties (Fourier, Laplace, Mellin etc.) behandeld.

Voor wetenschappelijke onderzoekers, die geconfronteerd worden met problemen waarin algebraïsche operaties van stochastische grootheden voorkomen is dit boek een nuttig naslagwerk. Ook de lange lijst van referenties (420 boeken en artikelen) zal daarvoor van nut zijn. Mijns inziens hoort het te staan in elke bibliotheek met boeken op het gebied van de mathematische statistiek.

J. L. Mijnheer

Mededelingen

JAARVERGADERING/STUDIEDAG van de Ned. Ver. van Wiskundeleraren

tijd/plaats

Deze jaarvergadering/studiedag zal gehouden worden op zaterdag 8 november 1980 in het gebouw van de S.O.L., Archimedeslaan 16, Utrecht.

thema

Voor het studiegedeelte van de dag is de didaktiekcommissie van de NVvW verantwoordelijk. Zij heeft als thema gekozen: *Gonio als invalshoek*.

werkwijze

U zult kunnen luisteren naar een lezing over goniometrie. Er zal in werkgroepen vanuit verschillende invalshoeken met goniometrie gewerkt worden. En er zal bovendien gelegenheid zijn te praten met collega's over hun 'vondsten' op het gebied van lesgeven over goniometrie.

Over inhoud en werkwijze in de verschillende werkgroepen wordt u hieronder geïnformeerd. Tijdens de dag kunt u kenbaar maken aan welke (twee) werkgroepen u wilt deelnemen. Een speciale voorbereiding daarop is niet noodzakelijk: uw normale leraarservaring met leerlingen en leerstof kan volstaan.

programma

- 9.30 uur aankomst en koffie
- 10.00 uur huishoudelijk deel waarin de jaarrede
- 10.30 uur inleiding over de samenhang van de verschillende werkgroepen
- 11.00 uur werkgroepen over de onderwerpen:
 - Gonio en taal
 - Gonio en de omgang tussen leraar en leerling
 - Vlieg er eens in
 - Landmeetkunde
 - Periodieke functies
- 12.15 uur lunch en markt
- 14.00 uur lezing over de geschiedenis van de gonio
- 15.00 uur werkgroepen (zie boven)
- 16.15 uur rondvraag en sluiting

markt

Er ligt veel ervaring t.a.v. dit onderwerp bij wiskundeleraren opgeslagen. Wij verwachten dat er 'vondsten' zijn gedaan, bijvoorbeeld op het gebied van leermiddelen (sinuskar, hoogtemeter, ...) of op het gebied van de didaktiek.

U wordt alsnog uitgenodigd met uw 'vondst' aan de markt deel te nemen. Wij helpen u ter plaatse met de organisatie daarvan.

gonio en taal

In de werkgroep zal een beperkt maar belangrijk stuk wiskundige taal besproken worden, namelijk de rol die wiskundige tekens spelen bij het leren van begrippen en bij het leren gebruiken daarvan. Enerzijds zal gelet worden op wat we de *symboolwerking* van tekens hebben genoemd. Daaronder zal worden verstaan datgene wat er bij iemand aan begrippen wordt opgeroepen bij het zien of horen van een teken.

Anderzijds hebben tekens ook *signaalwerking*, waarmee bedoeld wordt, dat iemand bij het zien of horen ervan wordt aangezet tot bepaalde handelingen.

Deze manier van kijken naar en denken over wiskundige tekens zal worden toegepast op het leren

begrijpen en leren gebruiken van goniometrische begrippen. Er wordt daarbij zowel feitvaststellende taal als aktietaal gebezigd.

Wie zich wil voorbereiden op het onderwerp wordt aanbevolen te lezen uit:

Van Hiele, Begrip en inzicht (Muusses, Purmerend 1973): artikel 16, Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde;

Van Dormolen, Didactiek van de wiskunde (Bohn Scheltema en Holkema, Utrecht 1976): hoofdstuk 5, Activiteiten van leerlingen.

Het lezen van deze stukken is geen voorwaarde tot deelname aan de werkgroep.

gonio en de omgang tussen leraar en leerlingen

Op het lesprogramma staat goniometrie. Na een aantal lessen voelen veel leerlingen zich in een dichte mist en zitten daar behoorlijk mee. De leraar is niet tevreden over de resultaten, over het gedrag van zijn leerlingen én over zichzelf. Het hoofdstuk gonio is echter nog niet uit, dus doorgaan.

Wat kun je doen in een situatie met leerlingen, die geen zin (meer) hebben in gonio? De enige die er wat aan kan doen is de leraar zelf. Hoewel de inhoudelijke kant van gonio en de werksituatie daarbij zeker van belang zijn, staan ze in deze werkgroep niet voorop. De aandacht gaat hier meer uit naar de persoonlijke relatie tussen leraar en leerling.

We richten ons tot de leraar en gaan uit van de bereidheid een lessituatie onder ogen te zien en zijn rol daarin kritisch te beschouwen. We laten ons daarbij inspireren door de ideeën van Gordon, die hij beschrijft in zijn boek: 'Beter omgaan met kinderen' (Elsevier, Amsterdam 1979).

vlieg er eens in

'Vlieg er eens in' is ontstaan naar aanleiding van verzoeken uit het veld om eens iets te doen aan die 'saai' goniometrie. Het is dan ook te beschouwen als een poging om het onderwijs in dit gedeelte van de wiskunde enigszins te verlevendigen. Waarbij voorop moest staan dat dit geen extra tijd zou mogen kosten.

Het resultaat is een boek geworden dat zich voornamelijk afspeelt binnen de luchtvaart. Deze keuze vloeit niet uitsluitend voort uit een bepaald hobbyisme van de ontwerper, maar ook uit het feit dat in de luchtvaart de goniometrie een belangrijke rol speelt. Bovendien is er dan direct een goede context om een ander onderwerp, de vectoren, te behandelen.

Wiskundig gezien wordt minimaal alle mavo-stof behandeld, maar er is ook een plaatsje ingeruimd voor de grafieken van sinus en cosinus. Het boek wordt momenteel gebruikt op schooltypen variërend van leao tot gymnasium.

Jan de Lange, Vlieg er eens in; goniometrie en vectoren (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, Utrecht 1980).

Het programma van de werkgroep bestaat uit een inleiding over het boek door de ontwerper, werken uit het boek aan daartoe uitgezochte opgaven en discussie.

landmeetkunde

Een van de meest alledaagse gebieden waarin de goniometrie haar toepassing vindt, is de landmeetkunde. Alledaags, omdat iedereen wel eens een landmeter door 'zo'n apparaat' (theodoliet of waterpasinstrument) heeft zien turen.

In de werkgroep over landmeetkunde gaan we vooral praktisch aan de slag. Een inleiding over het doel van de landmeetkunde en over enkele landmeetkundige basistechnieken zullen we zo kort mogelijk houden. Daarna gaan we – in de kantine of buiten – een paar van die technieken in de praktijk brengen. We beschikken daarbij over het volgende instrumentarium:

- (1) onze handen (met name pink, vuist en gespreide hand);
- (2) hoekmeters, die op school zelf gemaakt kunnen worden;
- (3) een theodoliet en een waterpasinstrument.

Bij (1) en (2) zullen we aandacht besteden aan de mogelijkheden van landmeetkundige activiteiten op school. Enige voorkennis op het gebied van de landmeetkunde is voor deze werkgroep niet nodig.

periodieke functies

Het tekenen van grafieken van goniometrische functies en alles wat daarbij hoort, zoals goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden, is zeker niet een van de meest geliefde onderdelen van de wiskunde in de bovenbouw. Sterker nog: voor veel leerlingen is dit onderwerp een schier onoverkomelijk struikelblok.

Waar zit hem dat in? Over de didaktiek van dit onderwerp is de afgelopen jaren toch behoorlijk nagedacht en zo treffen we in de schoolboeken mooie verhalen aan over de getallenlijn die als garen om een klos (de eenheidscirkel) wordt opgewonden. Dergelijke gedachte-experimenten hebben zeker hun waarde bij de vorming van het begrip voor periodieke functies, maar er is ook een geheel andere ingang denkbaar. De natuur levert ons een overvloed aan verschijnselen die bij benadering periodiek zijn. Denk bijvoorbeeld aan hartslag en bloeddruk, getijbeweging, daglengte.

Beschrijving van dergelijke verschijnselen in een wiskundig model levert een periodieke functie op die in sommige gevallen aardig benadert kan worden met een sinusoïde. Zaken als frekwentie, periode, amplitude zijn in een dergelijke context heel natuurlijk en laten zich gemakkelijk grafisch interpreteren. Het is niet onmogelijk dat inbedding van het onderwerp in een algemener kader (dat van de periodieke functies) een uitweg uit de didaktische impasse kan betekenen. Een discussie hierover in de werkgroep, op basis van een vooraf te verwerken praktikum, lijkt erg zinvol.

Deelnemers kunnen zich aan de hand van een tweetal artikelen uit de Wiskrant voorbereiden:

Bart Knol, IJzingwekkende trends, artikel uit: Wiskrant nr 15 (uitgave IOWO, januari 1979);

Jan de Lange, Levende wiskunde, Een verzameling ideeën voor periodieke functies, artikel uit: Wiskrant nr 22 (uitgave IOWO, mei 1980).

secretariaat

de didactiekcommissie van de NVvW

H. Pouw, Jac. v. Ruysdaelstraat 112, Utrecht.

CITO publiceert handleiding voor docenten

Open vragen zijn niet eenvoudig te construeren

Zowel in eindexamens en schoolonderzoeken als in proefwerken wordt herhaaldelijk gebruik gemaakt van 'open vragen' oftewel opgaven en opdrachten waarbij de leerlingen zelf hun antwoorden moeten opschrijven. Dit in tegenstelling tot meerkeuzevragen, waarbij de leerlingen uit vooraf geformuleerde antwoorden het enige juiste moeten aangeven. Een wijd verbreid misverstand nu is dat het construeren van open vragen zoveel gemakkelijker zou zijn dan het construeren van meerkeuzevragen. Niets is echter minder waar.

Wie met behulp van een examen, schoolonderzoek of proefwerk in open vraagvorm een zoveel mogelijk werkelijkheidsgetrouw beeld wil krijgen van de mate waarin leerlingen de doelstellingen van het onderwijs beheersen, zal bij het construeren van die open vragen en bij het samenstellen van de beoogde meetinstrumenten op een weldoordachte en systematische wijze te werk moeten gaan. En daarbij spelen de antwoorden die van de leerlingen worden verwacht en de eisen waaraan de formulering van die antwoorden moet voldoen, een minstens even belangrijke rol als de vragen of opdrachten waarmee deze antwoorden worden uitgelokt.

Hoewel het beoordelen van leerlingen met examens of proefwerken in open vraagvorm al een lange traditie heeft, staat de theorievorming erover nog in de kinderschoenen. Desondanks is er al wel een flinke hoeveelheid onderzoeks- en ervaringsgegevens over beschikbaar. Drie medewerkers van het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling in Arnhem (J. Kok, R. van Krieken, en A. J. M. Luijten) hebben de gegevens met betrekking tot het construeren van open vragen op een rijtje gezet in een handleiding voor docenten. Deze handleiding is dezer dagen onder de titel 'Het construeren van open vragen' door het CITO uitgegeven in zijn reeks 'Algemene publikaties' (nummer 12). Bij het schrijven van de publikatie zijn de samenstellers vooral uitgegaan van kennis en ervaring die is opgedaan in het Cito-project 'Eindexamens AVO/VWO in open vraagvorm'. De aanbevelingen die in de publikatie worden gedaan zijn echter niet alleen van toepassing op de constructie van examenopgaven, maar evengoed op de samenstelling van proefwerken, teksten met vragen, schriftelijke overhoringen en dergelijke.

In de handleiding wordt allereerst aandacht geschonken aan verschillende vormen en soorten van open vragen (in- en aanvulvragen, kort-antwoordvragen, lang-antwoordvragen, en opstelvragen; enkelvoudige vragen en meervoudige vragen). Vervolgens wordt uitvoerig stilgestaan bij de relatie tussen de opgaven en de onderwijsdoelstellingen waarop deze betrekking hebben. Daarbij wordt aandacht gevraagd voor het uitgangspunt dat een goede opgave niet alleen betrekking heeft op een

bepaald gedeelte van de leerstof of vakinhoud, maar ook op het gewenste gedrag van de leerling ten aanzien van die vakinhoud (bijvoorbeeld, moet de leerling het geleerde alleen maar kunnen reproduceren of moet hij of zij het ook nog op een of andere manier kunnen toepassen).

In de handleiding wordt een schema aangeboden dat zeer bruikbaar is bij het ordenen van opgaven naar vakinhoud en gewenst gedrag. Vervolgens wordt duidelijk gemaakt hoe examens, proefwerken en schoolonderzoeken met behulp van een dergelijk schema kunnen worden gecontroleerd op representativiteit voor de leerinhouden en vaardigheden waarop deze betrekking hebben. Tenslotte biedt de handleiding nog een reeks concrete richtlijnen voor docenten die zich met de samenstelling van examenopgaven, proefwerken, schriftelijke overhoringen, schoolonderzoeken en dergelijke in open vraagvorm bezighouden.

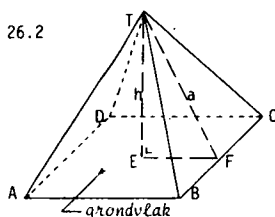
De handleiding kan worden besteld bij de afdeling Voorlichting van het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling, postbus 1034, 6801 MG Arnhem onder vermelding van 'Algemene publikatie nr. 12'.

Ontvangen

Chipselkrant 1 van Teachip. Penningmeester van Teachip: A. P. M. Broekhuizen te Pijnacker, f36,00 gironummer 794520. Secretariaat: P. C. Hooftlaan 46, 3705 AJ Zeist. (zie ook blz. 80)

Alleen de beste handrekenmachines gaan vergezeld van een geprogrammeerde instructie

Uit onderzoek is gebleken dat geen enkele handrekenmachine is voorzien van het juiste instruktiemateriaal, afgestemd op de leerstof.
Behalve dan de nieuwe vijf van MONARCH!
Daar doen wij nu een boekje over open.



Piramide

$$V = g \times \frac{1}{3} h$$

$$A = g + \text{omtrek } g \times \frac{1}{2} a \text{ (pothema)}$$

De apothema is te berekenen als hypotenusa van ΔTEF .

V 85 Van een piramide is het grondvlak een vierkant met zijden van 48,0 mm en een hoogte van 90,0 mm.
Bereken het volume en het totale opp.

$$V = 48 \left[\frac{x^2}{2} \right] \times 90 : 3 = 69120 \text{ mm}^3 \text{ (69,1 cm}^3\text{) of: } 48 \times x \times 90 : 3 = 69120 \text{ mm}^3$$

$$A = 48 \left[\frac{x^2}{2} \right] + 4 \times 48 \times 0,5 \times (90 \left[\frac{x^2}{2} \right] + 24 \left[\frac{x^2}{2} \right]) \left[\frac{x^2}{2} \right] = 11246 \text{ mm}^2 \text{ (112 cm}^2\text{)}$$

$$\text{of: } 90 \times x = + 24 \times x = \left[\frac{x^2}{2} \right] \times 4 \times 48 \times 0,5 + 48 \times x = 11246 \text{ mm}^2 \text{ (112 cm}^2\text{)}$$

Het Vademecum-A wordt gratis bij iedere MONARCH MAVO-80 en VWO-80 meegeleverd.

Het Vademecum-A, samengesteld door nederlandse leraren, verschaft u meer dan 200 voorbeelden (algemeen, wis-, natuur- en scheikunde). Winkelwaarde f 12,50.
U kunt het stap voor stap in de klas doornemen om de HR zo te integreren in de leerstof.
En uw leerlingen kunnen thuis nog eens rustig met hun handrekenmachines oefenen.

Bovendien worden bij alle vijf modellen LEAO-80, MAVO-80, VWO-80, STUDENT-80 en HBO-80 uitgebreide handleidingen verstrekt, waarin de functie-uitleg óók geënt is op de leerstof.
Gemakkelijk voor klassikale uitleg van de machine. Elk met meer dan 60 voorbeelden.
Alleen zó krijgt de leerling(e) de rekenmachine vlot en optimaal onder de knie!

MONARCH levert goed werk af, tegen de laagste prijs.

MONARCH de enige HR met geprogrammeerde instructie. Reeds vanaf f 39,- inkl. btw.

Vraag uitgebreide documentatie en prijzen aan:

MAKUPOORT ELECTRONICS BV

J. Tademaweg 9, 2031 CT Haarlem, tel. (023) 31 78 50*

INHOUD:

P. G. J. Vredenduin: Twee IOWO-publikaties	81
W. Drost: Ervaringen van een NLO-abituriënt	87
J. van de Craats: Internationale Wiskunde Wedstrijd	92
S. P. van 't Riet, L. de Leeuw: Setvorming en wiskundeonderwijs	95
NVvW: Voortgangsverslag van de didaktiekcommissie	107
L. G. Mostertman: Wiskunde en Nederlands	109
N. G. de Bruijn: Naschrift op 'Wiskunde en Nederlands'	110
P. G. J. Vredenduin: Korrel	111
Recreatie	112
Boekbesprekingen	114
Mededelingen	117

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

N. G. de Bruijn, TH, postbus 513, 5600 MB Eindhoven.
J. van de Craats, postbus 9512, 2300 RA Leiden.
F. W. Drost, Waterloweg 22, 6713 AS Ede.
L. G. Mostertman, Wilhelminastraat 76, 5246 XE Rosmalen.
S. P. van 't Riet, Schouw 18, 1261 LG Blaricum.
P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.