

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

56e jaargang

1980/1981

no. 2

oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^h, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerckstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Het hangt aan de muur en het klikt

JAN VAN MAANEN

Inleiding

Ik stel me voor om een beschrijving te geven van een althans voor mij ongewone les. Er gebeurde in die les een aantal dingen, die voor mijn gevoel een nieuwe fase in mijn manier van lesgeven markeren. Ze hebben veel te maken met de problemen van een beginnend leraar (ik geef nu voor het derde jaar les), die in het begin te sterk gefixeerd is op zijn leerstof, maar er spelen ook algemenere dingen in mee. Zo zijn mijn ideeën over de vraag wanneer wiskunde leren een zinvolle bezigheid is voor leerlingen, erdoor gaan veranderen.

Wat hier volgt is een vrij persoonlijk verhaal, waarin ik eerst iets zal vertellen over de *achtergronden* van de les. Daarna volgt een korte beschrijving van *de les*, en tot slot probeer ik aan te geven wat ik er *achteraf* belangrijk in vind.

Achtergronden

Eerst zal ik iets over mezelf vertellen om het verhaal daarna wat meer op de schoolsituatie toe te spitsen.

Ik heet Jan van Maanen, ben 26 jaar oud en heb me tijdens mijn (universitaire) wiskundestudie voornamelijk beziggehouden met geschiedenis van de wiskunde en getaltheorie. Sinds 1977 ben ik leraar wiskunde aan het zelfde gymnasium waaraan ik tot 1972 als leerling verbonden was (of heet dat niet zo?).

Toen ik twee jaar geleden op school begon, had ik vier klassen (I, II, III en IV wisk. 1) en geen eigen lokaal. Afwisselend vormden de Big Ben, kaarten van het oude Griekenland, grijze en dan weer groene muren de achtergrond van mijn lessen; in het ene lokaal 5 rijen van 6 tafels, in het andere lokaal 6 rijen van 5 tafels (en dan maar schuiven; overigens een mooi voorbeeld van de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging in $\mathbb{N}$). In het ene lokaal stond een overheadprojektor, in het andere weer niet. Zoals de Griekse filosofen trok ik rond met passer en liniaal. Bij roosterwijzigingen liep ik nogal eens in de bovengang naar leerlingen te zoeken die even later beweerden dat ze in de beneden-gang naar mij op zoek waren geweest. Of omgekeerd. Dat viel meestal buiten de lesplannen, die ik in de – overigens zeer gewaardeerde – didaktiekwerkgroepen had leren opstellen.

Maar er was meer. Ik had van didaktiek meegekregen dat wiskundig verantwoord werken belangrijk is, maar niet beseft dat de vraag of iets wiskundig

gezien door de beugel kan, pas relevant is als zij ook voor de leerlingen leeft. Het uitpluizen van een bewijs door gevallen te onderscheiden, terwijl niemand aan de juistheid van de stelling twijfelt, krijgt snel het karakter van een egotrip en wekt – terecht – verzet bij de leerlingen. Een ander voorbeeld: democratisch leiderschap is uitstekend, en dat is echt niet ironisch bedoeld, maar ik had in de klas de ‘macht van het volkje’ niet altijd mee, en dan valt er per definitie niet democratisch te leiden. En moe dat ik tegen de kerstvakantie was!

Het tweede jaar zat ik met 16 lesuren en 5 klassen in een eigen lokaal met overheadprojektor en grijze muren; zo’n lokaal waarvan de meeste methodes niet zonder reden beweren dat het een balk is. Nog steeds was ik niet echt op mijn gemak:

- niet in de leerstof, hetgeen zich nog regelmatig uitte in het pietluttig uitdiepen van futiliteiten en het daarmee kundig verbergen van hoofdlijnen;
- niet in mijn klassen, die nog steeds grote moeite hadden met mij, omdat ik soms uitgesproken botheid nodig had om vriendelijk te kunnen blijven (wie ‘De goede mens van Sezuan’ van Brecht kent, kan zich daar misschien iets bij voorstellen);
- niet in mijn grijze lokaal, dat volgens klas III B (samengesteld uit twee klassen die ik ook het jaar daarvoor had gehad) nodig opgevrolijkt moest worden.

Op mijn vorige verjaardag kreeg ik van twee van mijn vrienden, met wie ik al jaren in een kabaretgroep zit, twee keurig op zachtboard geplakte vergrotingen van foto’s van een voorstelling. Mooie foto’s, die ik jammergenoeg op mijn kamer niet kwijt kon. Een week of twee geleden besloot ik ze mee naar school te nemen: dan lagen ze tenminste niet een heel jaar lang op een plank, en dan kon ik meteen iets van mezelf aan de muur van mijn lokaal hangen.

De leerlingen van IV B (het verhaal speelt zich inmiddels in mijn derde jaar af: bijna alle leerlingen van IV B zaten vorig jaar in de al eerder genoemde klas III B) zagen de foto’s op mijn tafel liggen en vonden dat ik ze snel op moest hangen.

‘In een tussenuur,’ zei ik, borg ze op, en ging over tot de orde van de dag.

De les

Inmiddels was weer een week verstreken, maar ik had geen van de drie tussenuren gebruikt om de foto’s op te hangen. Toen had ik er zo genoeg van, dat ik tien minuten voor het begin van een keurig voorbereide les in IV B over goniometrie besloot om in die les een aantal knopen door te hakken: de knoop van het grijze lokaal door in dat lesuur die twee (overigens zwart-wit) foto’s op te hangen: de knoop van de leerstof door binnen de kontekst van het ‘foto’s ophangen’ op een andere manier met wiskunde bezig te zijn; de knoop van de relatie met de klas door ze op een totaal andere manier te benaderen.

Voor een goed begrip van het volgende is het nodig te weten dat ik in IV B behandeld had: de definities van sinus, cosinus en tangens van een hoek (uitgedrukt in graden), enerzijds in een rechthoekige driehoek als verhoudingen van

lengtes van zijden, anderzijds voor willekeurige gerichte hoeken met behulp van de eenheidscirkel. Verder waren formules voor $\sin(\pm\alpha \pm k \cdot 180^\circ)$, $\cos(\pm\alpha \pm k \cdot 180^\circ)$, $\tan(\pm\alpha \pm k \cdot 180^\circ)$ met $k \in \mathbb{Z}$, de identiteiten $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\tan \alpha = \cotan(90^\circ - \alpha)$ en het opzoeken van sinus, cosinus en tangens in de tabel aan de orde geweest. Over de laatste twee onderwerpen had ik IV B voor die dag huiswerk opgegeven.

Met een stuk touw, haakjes (om het touw aan de foto's te bevestigen), haken (om de foto's met het touw aan de muur te hangen) en de twee foto's was het IV B al vanaf het begin van de les duidelijk dat er iets bijzonders op komst was. 'We gaan maar eens wat anders doen vandaag' leverde een bescheiden applausje op. Boeken en schriften verdwenen weer in de tassen. Vijftien vragende gezichten.

'Ik had gezegd dat ik deze foto's op zou hangen, en dat heb ik duidelijk nog niet gedaan.'

Afkeurend gemompel uit de klas.

'Dus daar ga ik dit lesuur maar eens aan besteden. Er is alleen een klein probleem, maar daarvoor moet ik eerst even vertellen hoe ik die foto's zal ophangen. Op de achterkant plak ik twee haakjes.'

'Dat blijft nooit zitten. Die foto's zijn veel te zwaar en die plakhaakjes houden niet op zachtboard.'

Bijval uit de klas.

'Dan plak ik er nog wat plakband overheen (Joanne steekt op dit moment een rolletje plakband op) of we nieten ze vast. Daar is vast uit te komen. Door die twee haakjes (zie fig. 1) haal ik dan een stuk touw, de uiteinden knoop ik aan elkaar, en met deze grote haak hang ik de foto aan de muur. Als ik nu het touw te kort maak, dan kan ik de uiteinden niet eens vastknopen.' Reactie uit de klas: het touw moet minstens twee maal de afstand tussen de twee haakjes lang zijn.

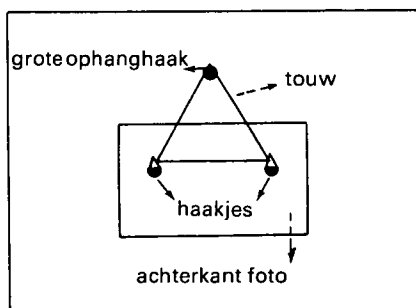


fig 1

'Maar ook als ik het te lang neem, dan hangt de foto zo laag dat je hem niet meer ziet.'

Weer instemming: hoe de foto hangt, hangt af van de lengte van het touw.

'Ik ga nu de haken vastplakken op 40 cm afstand van elkaar, en ik ga er straks een stuk touw van 1 m 10 cm doorheen halen. Eigenlijk zou ik nu willen weten hoe ver de foto dan onder ophanghaak komt te hangen. Maar dat vind ik geen

goed probleem, want de oplossing ligt te veel voor de hand en je hoeft er geen dingen bij te gebruiken waar we de laatste tijd mee bezig zijn geweest. Daarom leg ik jullie een iets ander probleem voor, namelijk: hoe groot wordt de hoek die het touw bij de ophanghaak maakt? Die hoek is namelijk ook interessant, want als hij te klein wordt, komt de foto te laag te hangen. Proberen jullie dat probleem op te lossen, dan zal ik ondertussen de haakjes en het touw vastmaken.'

Hiermee was een situatie ontstaan met veel nieuwe elementen:

- ik had een open probleem gesteld, waarvan het niet direkt duidelijk was of het met de bestaande kennis opgelost kon worden en zo ja: hoe dat dan moest;
- de klas moest het probleem zelfstandig aanpakken. aangezien ik zelf in samenwerking met Joanne (van het rolletje plakband) met de foto's bezig was;
- het probleem betrof iets uit de direkte omgeving van de leerlingen (ze hadden in III B al om wandversiering gevraagd), en hun oplossing van het probleem had praktische waarde want er zou een voorspelling uit volgen over hoe de foto kwam te hangen;
- ik was door eindelijk ernst te maken met de muur van het lokaal en te vertellen waarom ik dat nog niet gedaan had, meer dan gewoonlijk mezelf: ik deed mijn dingen, zij deden hun dingen, en toevallig ging dat in dit geval goed samen.

Terug naar het probleem. De meeste leerlingen vertoonden een houding van: wat moeten we nu?

'Dat kunnen we nooit zonder hulp oplossen!'

Ik zeg dat ze dan elkaar maar aan goede ideeën moeten helpen, laat me niet vermurwen, ga fotohaakjes plakken, vertel tussen neus en lippen nog een keer wat nu precies het probleem is. Maar verder heb ik mijn eigen probleem want de haakjes plakken inderdaad slecht op board.

Hier en daar komen de opgeborgene schriften weer op tafel, en het overleg begint.

'Je zult het moeten tekenen.' en als zijn tekening af is, voegt Tjeerd eraan toe:

'In mijn tekening is die hoek 70.'

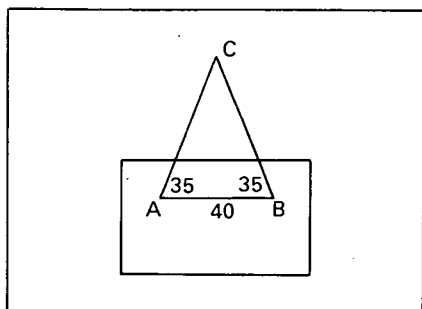


fig 2

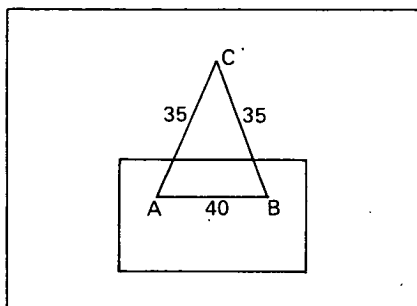


fig 3

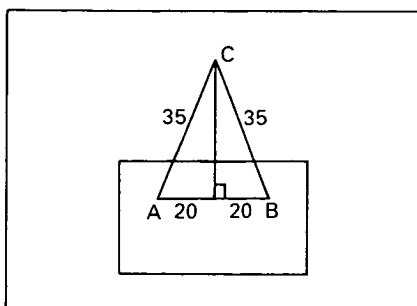


fig 4

Ik merk op dat ik dat wel slim vind, maar dat het niet mijn bedoeling was. Per slot van rekening heb ik zelf ook de beschikking over een grote geodriehoek, maar ik wil nu juist door een berekening voorspellen hoe die hoek zal uitvallen. Als dat me namelijk niet bevalt, kan ik altijd het touw nog korter of langer maken. Eric loopt naar het bord en maakt een schetsje (zie fig. 2). Hij meent dat de gevraagde hoek $180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$ is. De klas springt hem op z'n nek, want – zeggen ze – hij verwacht de lengtes van AC en BC met $\angle A$ en $\angle B$. Hij verbetert de schets (zie fig. 3), en ik vraag waarom AC en BC beide 35 cm lang zijn. $\triangle ABC$ moet symmetrisch zijn, want anders hangt de foto niet recht (dat is weliswaar geen voldoende verklaring, maar ik ga daar verder niet op in om de gedachtengang niet te storen), en dus is $\triangle ABC$ gelijkbenig. Eric past zijn tekening aan dit nieuwe resultaat aan (zie fig. 4), en wil de hoogte van $\triangle ABC$ met de stelling van Pythagoras berekenen. Uit de klas komt het bezwaar dat dat nog niets over $\angle C$ zegt. Hij stopt zijn berekening en wacht op aanwijzingen uit de klas. De stemming is: in de tekening komen twee rechthoekige driehoeken voor, maar de stelling van Pythagoras zegt niets over de hoeken van $\triangle ABC$, dus wat moeten we dan? Dan komt het verlossende woord van de kant van Anneke:

‘In een rechthoekige driehoek kun je ook de sinus en de cosinus uitrekenen.’

Weer wordt de tekening aangepast (zie fig. 5), en besloten wordt $\sin \alpha$ uit te rekenen. Eric schrijft het op: $\sin \alpha = \frac{20}{35}$, en na enig geworstel om er een decimale breuk van te maken vindt hij: $\sin \alpha = 0,57142\dots$ (om daarna pas te merken dat het met $\sin \alpha = \frac{4}{7}$ een stuk sneller gaat).

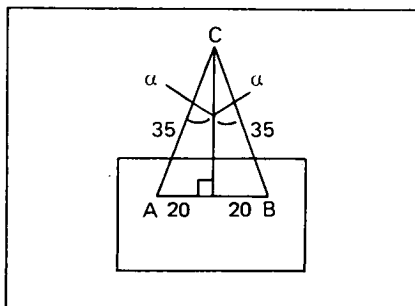


fig 5

Maar nu? Als $\sin \alpha$ bekend is, weet je α toch nog niet? Totdat Klaas-Jan met een nadrukkelijk 'Hè ja!' ontdekt dat het het omgekeerde is van het opzoeken van de sinus van een hoek in de tabel. De klas gaat daar maar aarzelend mee mee:

'Dan moet je uit alle getallen op al die bladzijden er één zoeken dat gelijk is aan 0,57142; dat is nogal geen karwei.'

Maar ze merken al snel dat het meevalt, want de getallen in de tabel blijken minder grillig dan verwacht. Eric notuleert:

$$\sin \alpha = 0,57142 \Rightarrow \alpha = 34^\circ 51'$$

$$\angle C = 2 \times 34^\circ 51' = 69^\circ 42'.$$

Enthousiasme: blijkbaar kun je zonder meten voorspellen hoe groot $\angle C$ wordt.

'Zou het kloppen,' vraag ik, want intussen ben ik van mijn plakwerk af, en door de haakjes bij A en B heb ik een touwtje van 120 cm geregen, zodat er na het ijselijk nauwkeurig leggen van een knoop precies (?) 110 cm overblijft. Marianne en Mirjam komen meten. Dat is met een bordgeodriehoek en touwtjes die je strak moet trekken, nog een heel karwei, maar na wat proberen lukt het. Ze meten 69° en iedereen lijkt nu het gevoel van 'hé, hier gebeurt wat' te hebben.

'Toch heb ik nog een probleem,' zeg ik, 'want als ik een eenheidscirkel teken (zie fig. 6), dan zie ik daarop twee punten P met $y_p = 0,5714$. Maar dan zijn er ook twee hoeken α zodat $\sin \alpha = 0,5714$. Welke namelijk?' In elk geval $\alpha_1 = 34^\circ 51'$, maar het blijkt dat $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 145^\circ 9'$ ook voldoet.

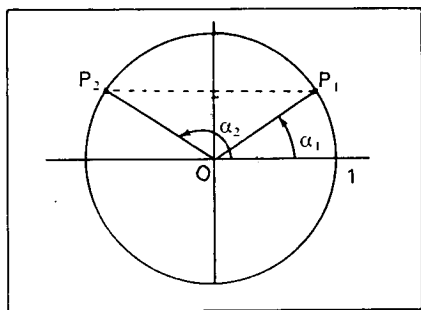


fig 6

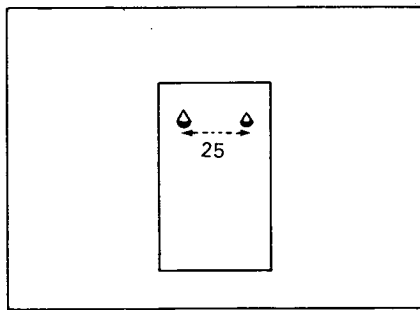


fig 7

'Maar die hoek kan nooit goed zijn,' roept Klaas-Jan, 'want dan zou $\angle C = 2 \times 145^\circ 9' = 290^\circ 18'$ gelden, terwijl $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.'

Zo, die zit. De laatste twijfel is weggenomen. De hoek bij de ophanghaak is en blijft $69^\circ 42'$.

'Nu weten jullie dus hoe het gaat. Dat komt goed uit, want ik had twee foto's meegenomen. De tweede (zie fig. 7) hang ik op met de haakjes 25 cm van elkaar en met een touwtje van 60 cm. Hoe groot zal nu $\angle C$ zijn?'

Ze gaan nu al veel methodischer te werk, en bijna iedereen vindt na wat tekenen

en rekenen $\sin \alpha = \frac{12\frac{1}{2}}{17\frac{1}{2}} = \frac{5}{7} = 0.7142$.

en daarna met de tabel $\alpha = 45^\circ 34'$ en dus $\angle C = 91^\circ 8'$. Als ik de les had voorbereid, had ik de lengte van het touw (in verhouding tot de afstand van de haakjes) niet beter kunnen kiezen, want ook hieraan bleken weer vele aanknopingspunten te zitten:

- 'Als je nu alleen een tekening zou hebben gemaakt, en je had in je tekening $\angle C$ gemeten, en ik had gevraagd: is $\angle C$ scherp, recht of stomp, wat had je dan geantwoord?'

Iedereen is het erover eens dat in dit geval meten zeker te onnauwkeurig is om de vraag te kunnen beantwoorden, terwijl uitrekenen dat probleem niet geeft.

- 'Stel: je hebt geen tafel bij je, en je wilt toch met een berekening bepalen of $\angle C$ scherp, recht of stomp is. Hoe doe je dat dan?'

Via via komen we erop dat het ervan afhangt welke uitspraak waar is: $\alpha < 45^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ of $\alpha > 45^\circ$; aangezien $\sin \alpha = 0,7142 > \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin 45^\circ$ en uit een tekening van de eenheidscirkel blijkt dat voor hoeken tussen 0° en 90° $\sin \alpha > \sin \beta$ samengaat met $\alpha > \beta$ vinden we: $\alpha > 45^\circ$, en $\angle C$ is dus stomp. Moraal: 'Zo zie je maar, hoe praktisch het kan zijn om van een aantal hoeken sinus, cosinus en tangens en van een aantal wortels een benadering uit het hoofd te weten.'

Op dat moment was het bijna tijd. Tijdens het ophangen van de foto's (want daar ging het uiteindelijk toch om) hebben we nog wat nagepraat.

De algemene verzuchting was:

'Waarom doe je het niet altijd zo, lesgeven?'

en verbazing kwam tot uitdrukking in:

'Hé, is dat nou wiskunde?'

Zo voelde ik het zelf op dat moment ook: kon ik het maar altijd zo, en wat kun je soms toch met wiskunde veel kanten op!

Achteraf

Achteraf ben ik nog geruime tijd met deze les bezig geweest, onder meer door het schrijven en in kleine kring bespreken van dit stuk. Een aantal reacties (ik wil op deze plaats graag iedereen die kritiek geleverd heeft, daarvoor bedanken) heb ik in de onderstaande opmerkingen verwerkt.

- De belangrijkste ontdekking uit de boven beschreven les is voor mij de volgende. Je hoeft als wiskundeleraar niet (altijd) in twee verschillende werelden te leven. De wereld van de leerstof en de wereld van de 'mens achter de leraar' overlappen elkaar op vele punten (ik zal hieronder nog een paar voorbeelden geven). Wanneer ik wil laten zien dat wiskunde leren een zinvolle bezigheid kan zijn (deftig gezegd: wanneer ik mijn leerlingen intrinsiek wil motiveren), moet ik juist die overlappingsen opzoeken. Als ik daar van tijd tot tijd toe in staat ben, hoef ik niet elke les opnieuw te zeggen dat het 'toch echt belangrijk' is (met nadruk op toch).

- De gang van zaken rond het IOWO vind ik daarom zo triest, omdat op het IOWO mensen konsekvent werken aan het opsporen van die overlappingsen.

Het zou zonde zijn als deze bron van materiaal dat kinderen in staat stelt wiskunde te ontwikkelen als antwoord op hun eigen vragen, drooggelegd wordt.

- Ik ben bepaald niet van plan les na les soortgelijke dingen te doen. In de eerste plaats zou ik het niet kunnen omdat niet elk onderdeel zich voor een dergelijke benadering leent, en omdat ik het niet terecht vindt om 'overal wiskunde uit te slaan'. In de tweede plaats is het ook niet nodig. Mijn indruk was, dat de boven beschreven les mijn klas voldoende motiveerde om weer een tijdje het boek in te duiken.

Dat deze manier van werken altijd tijdverlies oplevert en daarom niet bruikbaar is (kommentaar van collega's), weet ik overigens nog niet. Voor mijn gevoel hebben mijn leerlingen van IV B in de bewuste les meer geleerd dan ik ze had kunnen bijbrengen door alles keurig voor te bakken. Bovendien denk ik dat de kwaliteit van hun leren in dit geval hoger is geweest.

- Ik weet dat ik mooi praten heb, want ik kan werken met een gymnasiumklas van 15 leerlingen. Toch vraag ik me af of vergelijkbare zaken ook niet in grotere groepen en in andere schooltypen mogelijk zijn (wie daar ervaring mee heeft: reacties zijn zeer welkom).

- Op zoek naar nieuwe overlappingen van de wiskunde met het 'leven' ben ik in de tussentijd nog meer tegengekomen:

- dankzij de snaren van mijn cello was nog veel meer goniometrie te ontdekken (inklusief een beetje Fourieranalyse); ook de samenhang tussen goed in het gehoor liggende tweeklanken (consonanten) en snaarlengten die zich in dat geval verhouden als twee kleine natuurlijke getallen, biedt vele mogelijkheden.

- statistiek op fictieve data (zoals aantallen afgekeurde flessedoppen) is mooi, maar statistiek op dingen die voor jezelf belangrijk zijn (zakgeldbedrag, aantal feesten per maand, lengte, gewicht) bleek veel leuker, je leert er minstens even veel van en je kunt thuis nu tenminste gefundeerd om verhoging van je zakgeld vragen.

- de algebrasom in de brugklas: 'Jan heeft a kwartjes, Piet heeft er drie maal zo veel als Jan en Klaas heeft er twee minder dan Piet. Hoeveel kwartjes hebben Jan, Piet en Klaas afzonderlijk en hoeveel kwartjes hebben ze samen?' bracht me, aangezien ik Jan heet, op de vraag: Als die a kwartjes nu mijn netto maandsalaris vormen, proberen jullie dan eens uit te vinden hoe groot a dan is. Een bron van veel wiskunde!

- Wiskunde moet niet als iets absoluuts gebracht worden. Er waren ooit mensen met problemen, en de oplossingen van die problemen leven nu nog voort in onze stellingen en methoden. Juist daarom vind ik het belangrijk wat te weten van de geschiedenis van de wiskunde.

- Ik denk dat ik als beginnend leraar te vaak 'het boek' als uitgangspunt voor mijn lessen heb genomen. Maar dan wordt wiskundeles geven snel zo iets als 'de waarheid in pacht hebben en met die waarheid in de hand goed of fout zeggen'. Terwijl wiskundeles geven ook kan zijn 'rondlopen met vragen, je verbazen over je omgeving, inspringen op toevalligheden, je gevoel laten spreken, je afvragen welke structuur er in het (jouw, mijn) leven zit'. Het is duidelijk dat ik, voordat ik zo ver ben, nog veel functies moet leren integreren.

Verzamelingen, functies, relaties en het HEWET-rapport

P. G. J. VREDENDUIN

Omstreeks 1850 gaf Boole de stoot tot de ontwikkeling van de mathematische logica. De ontwikkeling heeft zich eerst langzaam en later in stormachtig tempo voltrokken. De mogelijkheid werd daardoor geopend een beter inzicht te verkrijgen in de structuur van het wiskundig denken. Bovendien werd een taal en een symboliek ontwikkeld die het wiskundigen mogelijk maakt hun gedachten scherper te formuleren en daardoor ook duidelijker.

Deze ontwikkeling heeft lange tijd op ons onderwijs geen enkele invloed gehad. Toen in 1968 een nieuw programma opgesteld werd, heeft men de gelegenheid aangegrepen er een bescheiden en passend gebruik van te maken om tot verbetering van het onderwijs te geraken. Uiteraard was dit beslist niet het enige doel van de vernieuwing, maar met dit aspect wil ik me in dit artikel in het bijzonder bezighouden.

Verzamelingen

In het meest eenvoudige zinnetje uit de omgangstaal spelen verzamelingen een rol. Als iemand zegt: dit is een eik, dan beweert hij dat het aangewezen object element is van de verzameling van de eiken. 'Eik' is de naam voor deze verzameling. Grammaticaal is 'eik' een zelfstandig naamwoord. De zelfstandige naamwoorden, die we vinden bij grammaticale analyse van de taal, corresponderen met de verzamelingen, die we bij logische analyse vinden. Dit is slechts een vuistregel. Wie er nader over wil doordenken, zal tot diverse verfijningen komen.

Verzamelingen zijn in de schoolwiskunde geïntroduceerd. Men moet weten wat verstaan wordt onder de doorsnede van twee verzamelingen, onder hun vereniging, wat een deelverzameling van een verzameling is en wanneer twee verzamelingen gelijk zijn.

Parallel daarmee deden de logische operatoren hun intrede, en wel $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$.

Doel was uitsluitend een taal te scheppen waarin we ons scherp kunnen uitdrukken en die voor onze leerlingen niet te moeilijk is en hun het denken vergemakkelijkt.

Verzamelingenleer dreigde wel eens een eigen leven te gaan leiden. Het was verleidelijk wetten af te leiden, zoals de distributieve wetten betreffende $\cap$ en $\cup$, en met venn-diagrammen te gaan opereren. Men kan dan zelfs leuke vraag-

stukjes bedenken. Men schiet zo zijn doel voorbij; hier gaat het niet om. Juist deze neiging heeft de verzamelingen wel eens in diskrediet gebracht. Evenmin is het verstandig logica te gaan bedrijven. De bedoeling van het gebruik van logische operatoren is helder te leren denken. Daarvoor is het niet nodig de wetten van de logica op te sporen. Wie zuiver denkt, hoeft zich van de denkre-gels niet bewust te zijn, evenmin als iemand die fietst zich bewust is van de regels die hij daarbij toepast. Je hoeft hem geen cybernetica te leren om hem duidelijk te maken, dat hij elk moment moet bijsturen en hem te vertellen hoe hij dit doet. Zodra hij fietsen kan, doet hij dit vanzelf.

Van belang voor het vervolg is ons te realiseren, hoe verzamelingen tot stand komen. In ons onderwijs worden enkele verzamelingen gecreëerd. Dit zijn de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en rechte lijn, plat vlak en ruimte als puntverzame-lingen. Later ook de verzameling van de vectoren. De overige verzamelingen worden gedefinieerd. Dit geschiedt steeds door ze te definiëren als deelverzame-ling van een reeds aanwezige verzameling. De hierbij gebruikte notatie is: $\{x \in V \mid E(x)\}$, waarmee bedoeld wordt: de verzameling van de elementen van V die de eigenschap E hebben.

Functies en relaties

Functies komen in de omgangstaal veelvuldig voor. Voorbeelden zijn:

het gewicht van een mens

het aantal inwoners van een stad

de oudste zoon van een vader

De geijkte taalconstructie is:

de (het) van een

In de schoolwiskunde voor 1968 kwamen functies voor, maar dat waren steeds functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Functies worden daarna in een meer algemeen kader gezien. Het zijn functies van V naar W , waarin V en W willekeurige verzamelin-gen zijn. De afbeeldingen in de meetkunde zijn dan ook functies en het heeft geen zin meer onderscheid te maken tussen functie en afbeelding.

Relaties komen, evenals verzamelingen, in het meest eenvoudige zinnetje uit de omgangstaal voor.

Ik geef Jan dit boek. Hier wordt iets gezegd over mij, Jan en dit boek. Er is sprake van een relatie tussen mij, Jan en dit boek. De naam van deze relatie is: geef. Grammaticaal is dit een werkwoord. Vuistregel: met de werkwoorden uit de grammaticale analyse van de taal corresponderen de relaties uit de logische analyse. Werkwoorden moeten daarbij eventueel samengenomen worden met het naamwoordelijk deel van het gezegde, zoals: is ouder dan, is een broer van. De CMLW in 1968 streefde naar unificatie van de logische structuren. Centraal werden de verzamelingen geplaatst. De relaties waren bijzondere verzamelin-gen, namelijk verzamelingen van geordende paren, geordende tripels enz. En op zijn beurt waren de functies weer bijzondere relaties, namelijk relaties van V naar W waarin elk element van V gekoppeld is aan hoogstens één element van W . Men krijgt zo een overzichtelijk logisch geheel. Geen wonder dan ook, dat men bij de meeste, echter niet bij alle logici deze opbouw aantreft, waarin de functie een bijzondere relatie is.

Kijken we nog eens naar het begin van deze paragraaf, dan zien we dat het

grammaticale correlaat van functie duidelijk verschillend is van het grammaticale correlaat van relatie. Geen wonder dat voor de niet specifiek logisch geschoolde mens en zeker voor de leerling functie iets geheel anders is dan relatie en niet een speciaal soort relatie. Freudenthal heeft in zijn *Exacte Logica* het functiebegrip autonoom ontwikkeld, los van het begrip relatie. Hij heeft laten zien, dat dit zeer goed mogelijk is. Zijn logische systeem staat daardoor dichterbij het natuurlijke denken.

Geen wonder dat bij de didactici verzet gerezen is tegen de fundering van het functiebegrip op het relatiebegrip. De leerling komt eerder in aanraking met meetkundige afbeeldingen dan met relaties. De functies in de algebra zijn gemakkelijker te doorgronden dan de relaties. Kortom, vanuit didactisch oogpunt is er alles voor te zeggen eerst functies en eerst later relaties te behandelen, hetgeen dan ook meer en meer de normale gang van zaken is geworden. Wie het functiebegrip wil verduidelijken, kan beter als model kiezen de automaat waar men een element van V in gooit en waar een element van W uitkomt, dan het relatiemodel.

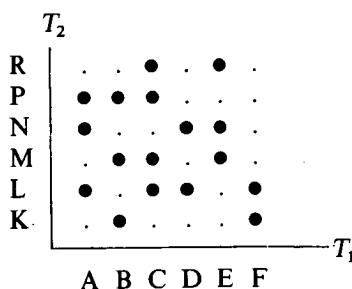
Wat is het essentiële van relaties in ons wiskundeonderwijs?

Essentieel is dat een relatie van V naar W een verzameling geordende paren (x, y) is waarin $x \in V$ en $y \in W$.

Elke verzameling wordt gedefinieerd als deelverzameling van een reeds gedefinieerde. Een relatie van V naar W wordt gedefinieerd als deelverzameling van de verzameling van alle geordende paren (x, y) waarin $x \in V$ en $y \in W$, dus van $V \times W$. Onmisbaar is dus dat we weten wat het produkt van twee verzamelingen is en dat een relatie hiervan een deelverzameling is.

Hoe kunnen we op een snelle manier het nodige hierover onze leerlingen bijbrengen?

Ik ga uit van een praktisch voorbeeld. Er zijn twee tennisclubs, T_1 en T_2 . De leden van T_1 spelen tegen die van T_2 . De bedoeling is, dat op de duur alle leden van T_1 één keer spelen tegen alle leden van T_2 . Zover zijn we nog niet: er is nog slechts een deel van de wedstrijden gespeeld. Hieronder staat een roosterdiagram van de gespeelde wedstrijden. Het zijn de dikke stippen uit het rooster.



Straks zijn alle wedstrijden gespeeld. Het roosterdiagram bestaat dan uit alle stippen, zowel de dikke als de dunne. Hiermee correspondeert de verzameling $T_1 \times T_2$. De relatie die met de dikke stippen correspondeert, is hiervan een deelverzameling.

Dit voorbeeld geeft een snelle voorbereiding tot relaties van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ en hun grafieken. Bijv.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 2y = 6\}$$

De grafiek hiervan is gauw gevonden. Omdat

$$3x + 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3 - \frac{3}{2}x$$

is de grafiek van

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 2y = 6\}$$

dezelfde als de grafiek van de functie

$$x \rightarrow 3 - \frac{3}{2}x$$

Functies zijn reeds behandeld. Deze grafiek is dus al bekend.

De grafiek van een relatie als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 2y > 6\}$$

geeft nu weinig moeilijkheden meer.

Nu het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee veranderlijken, zoals

$$3x + 5y = 7$$

$$2x - 8y = 5 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Wat wordt hier gevraagd?

We weten, dat

$$\text{los } x \text{ op uit } 7x - 2 = 10x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$$

wil zeggen:

vind de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid 7x - 2 = 10x + 5\}^1$.

Oplossen van bovengenoemd stelsel betekent analoog:

vind de verzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 5y = 7 \wedge 2x - 8y = 5\}$.

De zgn. krommen met vergelijking ... zijn niet anders dan grafieken van relaties. Zo is een ellips de grafiek van een relatie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax^2 + by^2 = 1\} \quad (a > 0, b > 0)$$

Voor 1968 kwamen relaties ook al in ons onderwijs voor, zelfs expliciet. Ze werden betrekkingen genoemd. Wat dat waren bleef als regel vrij duister.

Zo werd gevraagd:

welke betrekking bestaat er tussen p en q , als de grafiek van de functie $px^2 + px - q$ de x -as in twee verschillende punten snijdt?

Zulke rare terminologie gebruikten we echt: ik hoop dat men zich dat tegenwoordig nauwelijks meer kan voorstellen. Ik licht er twee zonderlinge dingen uit:

het gebruik van 'als' houdt in, dat men een betrekking vraagt die *volgt uit* het snijden in twee punten, terwijl men in werkelijkheid *gelijkwaardigheid* eist:

het woord 'betrekking' bleef vaag.

Ik herinner me situaties als:

leerling: betrekking, mijnheer, wat is dat?

¹⁾ 'Vind' is hier een term uit de opdrachtentaal, dus uit de natuurlijke taal. Het is geen term uit de wiskunde zelf. Vandaar dat ik moet afzien van een definitie ervan en zou moeten volstaan met een omschrijving van de bedoeling. Ik doe dit niet, omdat dit hier niet van belang is.

leraar: dat is zoiets als $3p + 7q^2 = 5$ of $p^2 - q^2 > pq - 1$.

leerling: o, bedoelt u dat.

Hoe stellen we de vraag thans?

Voor welke $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geldt: de grafiek van de functie $x \rightarrow px^2 + px - q$ heeft twee punten met de x-as gemeen?

Deze vraag is scherp gesteld. Om dit duidelijke taalgebruik te kunnen bereiken, moeten we beschikken over twee dingen:

verzamelingen geordende paren:

produkt van twee verzamelingen.

Dus over relaties.

D.w.z. we hebben het begrip 'relatie' nodig. Of we de term 'relatie' nodig hebben, is een andere zaak. Ik kom daar nog op terug.

Structuren

In het programma 1968 stonden de ekwivalentierelaties. Waarom? Omdat de CMLW toen nog de illusie had iets in het onderwijs te laten doorklinken van de moderne ontwikkelingen in de wiskunde waarin de structuren zo'n belangrijke rol spelen. Belangrijk zijn in dit verband ekwivalentierelaties. Deze spelen een rol bij de begripsvorming door middel van ekwivalentieklassen (parten van een partitie).

De congruenties (spiegelingen, translaties, rotaties en hun samenstellingen) vormen een groep. De relatie congruent ($F_1 \cong F_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{er is een congruentie waarbij } F_2 \text{ het beeld van } F_1 \text{ is}$) is daardoor reflexief, symmetrisch en transitief, dus een ekwivalentierelatie. Deze relatie verdeelt de verzameling van de figuren in ekwivalentieklassen van onderling congruente figuren: gedaanten.

Hetzelfde patroon treedt op bij de homothetische afbeeldingen (translaties, vermenigvuldigingen en hun samenstellingen). Ook deze vormen een groep.

En opnieuw bij de gelijkvormigheidsafbeeldingen. Zo ontstaat het begrip vorm van een figuur als ekwivalentieklasse.

Verder spelen ekwivalentierelaties een belangrijke rol bij het tot stand komen van de begrippen richting en verhouding. Deze zijn op hun beurt van belang bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Voor vwo-leerlingen was dit een aantrekkelijk programma. Om het goed te brengen was echter tijd nodig. En deze tijd ontbrak. Verder was het de vraag of bij voldoende tijd het programma toch niet iets te ambitieus was. Hoe het ook zij; er is niets van terecht gekomen. Voorzover dat nog niet geschied was bij het formuleren van het definitieve programma zijn de resten van deze opzet door de commissie HEWET opgeruimd, en terecht.

Ik juich het dan ook toe, dat de reflexieve, de symmetrische, de transitieve relaties en de ekwivalentierelaties overboord gezet zijn. Ze droegen bij tot een onverantwoord uitgroeien van het onderwerp relaties.

Het advies van de commissie HEWET

Het voorstel luidt:

Schrappen:

Relaties, de grafiek van een relatie; de relaties

$$\{(x, y) | ax + by + c \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0\}:$$

reflexieve, symmetrische, transitieve relaties, ekwivalentierelaties.

Met de reflexieve, symmetrische en transitieve relaties heeft de commissie HEWET de relaties überhaupt overboord gezet. Dat is het kind met het badwater weggooien.

De motivering luidt (blz. 44 van het rapport):

a behandeling van deze onderwerpen vanuit het gezichtspunt van het begrip relatie als deelverzameling van een cartesisch produkt kan een goede ontwikkeling van het functiebegrip in de weg staan;

b de notatie $\{\dots\}$ blijft nuttig en nodig, maar past beter in de taal van de verzamelingen dan in de taal van de relaties.

Ad a. M.i. is dit zonder twijfel juist. Maar daarom dienen de functies dan ook los van de relaties behandeld te worden.

Ad b. Dit lijkt me onjuist. Een relatie is een verzameling, nl. een verzameling geordende paren. Zie verder hieronder.

We hebben bij de vernieuwing in 1968 de beschikking gekregen over een taal in de schoolwiskunde waarin we ons duidelijk konden uitdrukken, omdat hij voldoende logische scherpte heeft. Dat kan ook didactisch niet anders dan een voordeel zijn.

Tot deze taal behoren zinswendingen als

voor welke $x \in V$ geldt?

voor welke $(x, y) \in V \times W$ geldt?

Een onmisbaar bestanddeel van onze taal vormen dus:

verzamelingen geordende paren en het produkt van twee verzamelingen.

Joop van Dormolen heeft me erop attent gemaakt, dat we deze taal heel goed kunnen aanleren zonder ooit het woord 'relatie' te gebruiken. Hij heeft gelijk. Het gebruik van dit woord suggereert iets geheel nieuws, dat moeilijk is en goed getraind moet worden. Akkoord, laat dit woord weg. We streven al decennia naar vereenvoudiging en didactisch beter toegankelijk maken. Dat is weer een stap in de goede richting.

Maar verzamelingen geordende paren en hun grafieken, zoals rechte lijnen (ook verticale), cirkels, halfvlakken, kunnen we niet missen.

Mijn advies is dan ook te laten staan:

Verzamelingen geordende paren, het produkt van twee verzamelingen: grafiek

van $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | ax + by + c \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0\}$: het oplossen van een stelsel van twee

eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken.

Ik hoop dat deze wijziging nog aangebracht kan worden.

Wiskundig denken in de klas*

A. VERMANDEL

Men dient ons er niet van te overtuigen dat we doorheen ons wiskunde-onderwijs de leerlingen leren denken. We hebben geen diepgaande psychologische scholing nodig om aan te voelen dat er in elk van onze lessen momenten zijn waarop gewoontehandelingen niet meer volstaan en de denkcapaciteit van de leerlingen wordt aangesproken. Zo bijv. bij de volgende vragen:

- Als een functie f continu is in het punt a , is f dan afleidbaar in a ?
- Zouden we een kenmerk kunnen vaststellen voor de matrices, t.o.v. een orthonormale basis, van de orthogonale transformaties van het vectorvlak Π_0 ?
- Hoe kunnen we een eindig voortbrengend stel elementen van de vectorruimte $\mathbb{R}, V, +$ herleiden tot een basis?
- We hebben op Π_0 een wet $+$ kunnen definiëren en kennen de betekenis van een uitdrukking als $\vec{x} + \vec{y}$. Wat zou nu $\vec{x} \cdot \vec{y}$ kunnen betekenen?

Naargelang hun kennisniveau en hun ingesteldheid kunnen zulke vragen door de leerlingen ervaren worden als een moeilijkheid die hen aanzet tot nadenken. Dit is dan een goede gelegenheid voor ons om de leerlingen ertoe te brengen niet onmiddellijk te gissen en te antwoorden, maar de moeilijkheid nauwkeurig te localiseren en te preciseren, oplossingsmogelijkheden te zoeken, deze eerst inwendig te testen en dan pas de gekozen oplossingsmogelijkheid in de reële situatie uit te proberen.

De wiskunde biedt een zodanig arsenaal van gevarieerde situaties en oplossingsprocedures met elke graad van complexiteit dat we kunnen stellen dat dit het schoolvak bij uitstek is waar de doelstellingen bereikt kunnen worden van elk onderwijs dat formele vorming nastreeft.

Is onze intentie echter om de leerlingen op een systematische wijze een geheel van denkmethoden bij te brengen en gaan we daarvoor te rade bij de denkpsychologie, dan worden we geconfronteerd met een moeilijk overzienbare grote variëteit van theoretische benaderingswijzen en scholen.

* Voordracht gehouden ter gelegenheid van de gemeenschappelijke studiedag van de N.V.v.W. en de V.V.W.L. (Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars) op zaterdag 24 maart 1979.

Een kennisname van de verschillende onderzoeksdomeinen biedt het voordeel een idee te geven van de mogelijkheden en de taakgebieden van de denkvorming. In figuur 1 geven we hiervan een overzicht met als leidraad volgende redenering. Een analyse van het denkinstrumentarium dat elke wetenschap – en zeker de wiskunde – ons biedt levert als constituerende elementen: begrippen, principes, proposities, regels, problemen, structuren e.d.m. We kunnen ze met het oog op vormingsdoelen omzetten in mentale handelingen of – naar gelang de gehanteerde terminologie – in denkoperaties, geestelijke activiteiten, denkbewegingen, intra psychische transformaties tussen prikkel en reactie enz.... Dit geeft de studies over o.m. begripsvorming, redeneren, regelherkenning, probleemoplossen, structurering (herstructurering).

We kunnen ook aandacht besteden aan meer *elementaire denkactiviteiten* die fundamenteel blijken te zijn voor elke wetenschapsbeoefening zoals: aan een object een eigenschap toekennen, de betrekking vaststellen tussen deel en geheel, relaties vaststellen, educatie van relaties, vergelijken, discrimineren, classificeren, categoriseren, ordenen, abstraheren, symboliseren, veralgemenen, synthetiseren, induceren, deduceren, enz. We ontmoeten ze op elk denkniveau met elke moeilijkheidsgraad.

Onderzoek naar de wijze waarop het denken dient te verlopen om tot (correcte) resultaten te komen leidt ons tot het definiëren van denknormen en denkvormen. Aldus komen we tot noties als logisch denken, vertikaal denken, gericht denken, relationeel denken, lateraal denken, transformationeel denken, enz....

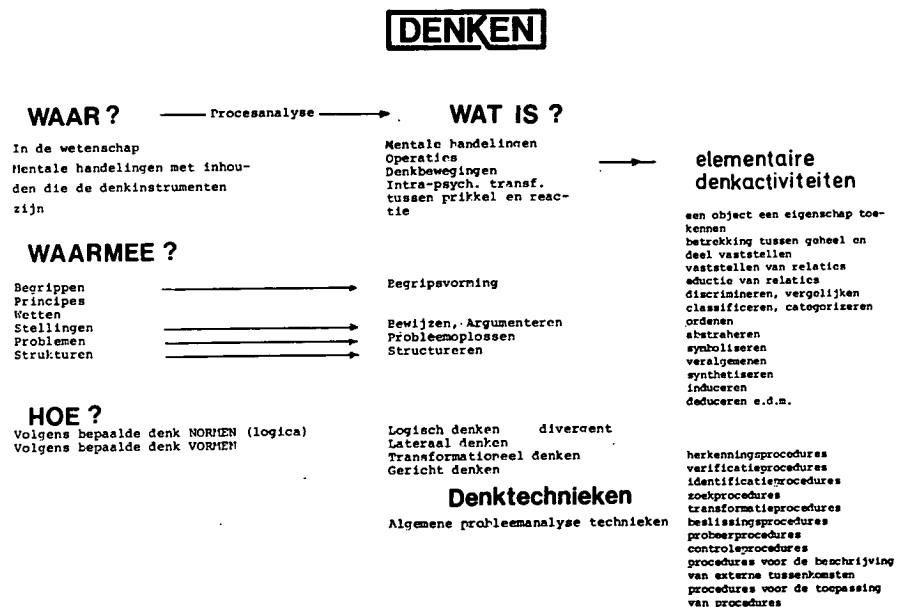


Fig. 1

Kijken we eerder naar de resultaten dan vinden we belangrijk: het divergent (versus convergent) denken, creatief en (re)productief denken als ook de begrippen ontdekken en uitvinden.

Georganiseerde gehelen van meer elementaire denkactiviteiten vormen de *denktechnieken* die onderscheiden kunnen worden in:

- a) Algemene probleemanalysetechnieken zoals herkenningsprocedures, verificatieprocedures, identificatieprocedures, zoekprocedures, transformatieprocedures, beslissingsprocedures, probeerprocedures, controleprocedures, procedures voor de beschrijving van externe tussenkomsten, procedures voor de toepassing van procedures enz. . . .
- b) Heuristieken in engere betekenis
- c) Algoritmen [1]

Belangrijk is ook nog de studie van *denkprocessen* als verloop van informatie-verwerkende operaties en de *denkstrategieën* die het denken meer efficiënt maken.

Het is duidelijk dat al deze studies een belangrijke basis vormen voor een op denkvorming gericht onderwijs en dat al deze componenten van het denken aan bod komen in het schoolvak wiskunde, een denkvak bij uitstek. Een verdoorgedreven operationele kennis ervan dient naar mijn mening een noodzakelijk attribuut van elke leraar te zijn.

De vraag die zich hier onvermijdelijk voor ons opdringt is: wat is het eigen karakter van het 'wiskundig' denken?

We kunnen toch aannemen dat de wiskunde buiten het gewone denken nog iets specifiek heeft, namelijk juist datgene waarvan de aanwijsbaarheid een identiteit geeft aan het beroepsgedrag van een 'wiskundige'.

Ik wil nu trachten een preciesere inhoud te geven aan de uitdrukking *wiskundig* denken en meer bepaald aan de term 'wiskundige mentale handeling'. Om dit te kunnen doen moeten we eerst heel summier enkele psychologische termen invoeren. We kiezen de activiteits-gerichte terminologie van Gal'perin [2] omdat deze het best past bij onze opvatting dat de wiskunde ook onderwezen dient te worden als een bewuste activiteit en niet alleen als een geheel van geprefabriceerde kennissystemen en automatismen. We nemen met Gal'perin aan dat een *handeling* een doelgerichte verandering aan objecten is. Wanneer een handeling verricht wordt aan materiële voorwerpen (of hun symbolische representaties) hebben we te doen met materiële handelingen (resp. gematerialiseerde handelingen). Een *mentale handeling* daarentegen wordt uitgevoerd op niet-materiële begripsmatige objecten of voorstellingen, bijv. het optellen uit het hoofd van twee getallen.

Volgens Gal'perin ontstaan inwendige bewuste activiteiten uit of zijn geïnterioriseerde vormen van uitwendig gedrag. Een belangrijke rol spelen daarbij de *verbale* handelingen d.w.z. handelingen die verricht worden aan woor-

den die begrippen vertegenwoordigen. Het zijn hardop gesproken handelingen zonder materiële objecten, bijv. een kind telt hardop bij het maken van een optelling. Deze verbale handelingen vormen een overgang van het materieel naar het mentaal handelen. Via innerlijk spreken ontwikkelen zich daaruit typische intellectuele gedragsvormen.

Om zijn oriënterende functie optimaal te kunnen vervullen dient een ‘volwaardige’ mentale handeling aan vier voorwaarden te voldoen:

- 1 inzichtig te zijn, d.w.z. gericht op de relevante eigenschappen van de betrokken objecten;
- 2 algemeen (veralgemeend) te zijn d.w.z. niet gebonden aan specifieke objecten en aldus toepasbaar in diverse situaties;
- 3 bewust uitgevoerd en aldus controleerbaar;
- 4 snel uitvoerbaar om een efficiënte oriëntatie toe te laten.

Het verwerven van nieuwe, volwaardige mentale handelingen kan volgens Gal’perin het best gebeuren via trapsgewijze opbouw.

Wiskundige handelingen

In deze terminologie is nu de grote vraag: wat is een wiskundige mentale handeling? We hebben onmiddellijk de neiging wiskundige handeling te noemen een handeling uitgevoerd met ‘wiskundige objecten’ zoals getallen, vectoren, rechten, meetkundige lichamen e.d.m. Afgezien van het feit dat de notie ‘wiskundig object’ niet duidelijk is, kan dit standpunt ons niet bevredigen. We voelen ons ongemakkelijk als mensen zeggen dat ze wiskunde doen als ze een kegel doorsnijden of een vloer betegelen met parallellogrammen. Ik ben er ook niet van overtuigd dat leerlingen die veeltermen ontbinden in factoren of breuken vermenigvuldigen veel wiskunde bedrijven.

Is het wiskunde omdat men met symbolen werkt en ze combineert en transformeert volgens welbepaalde en geprefabriceerde regels? Meer aanvaardbaar lijkt ons het standpunt, deze activiteiten wiskundig te noemen die men hoeft te verrichten om een deductieve (en dus wiskundige) theorie te construeren, zoals bijv. het definiëren, het creëren van structuren, het logisch ordenen van beweringen e.d.m. De probleemstelling wordt misschien duidelijker als we de mogelijkheden bekijken die de volgende tabel ons biedt:

	wiskundige objecten	niet-wiskundige objecten
wiskundige handelingen	1	2
niet-wiskundige handelingen	3	4

Fig. 2

Van veld 1 kunnen we naar ons gevoelens zeker voorbeelden geven. Van veld 4 ook. Veld 2 en 3 stemmen tot nadenken.

Een andere mogelijkheid, wiskundige activiteiten te vinden die alsdusdanig aanvaardbaar zijn en dus meer zijn dan gewone denkactiviteiten in een wiskundige context, is een psychologische analyse te maken van een methode die universeel als wiskundige methode wordt aanvaard zoals bijvoorbeeld: de axiomatische methode. De axiomatische methode is inderdaad in de huidige wiskunde gegroeid tot iets dat meer is dan een technische procedure die de wiskundige gebruikt om zijn wetenschap van binnenin te organiseren. Zij speelt nog steeds een organiserende rol, maar dank zij het structuurbegrip en het daaraan verbonden morfismedenken gaat zij verder dan de traditionele deductiviteit.

Zij verschijnt als een uitstekend onderzoeksinstrument dat ten dienste staat van de unificatie van de wiskunde en onmisbaar is voor het fundamenteel onderzoek. Zij biedt een model sui generis van een denkproces die de mogelijkheid biedt zonder beroep te doen op de uitwendige ervaringswereld, eigenschappen van de realiteit te kennen.

Nemen we als uitgangspunt van de analyse de uitspraak van iemand die door iedereen onmiskenbaar beschouwd wordt als een echte creatieve beroepswiskundige nl. Jean Dieudonné. De axiomatische methode is volgens Dieudonné [3] niets anders dan de toepassing van een principe dat sinds Aristoteles aan de basis ligt van elke wetenschap nl. *het principe van de bewust onvolledige kennis*, volgens dewelke men systematisch bepaalde aspecten van de objecten die men beschouwt verwaarloost. In de wiskunde zorgt men ervoor op een exhaustieve wijze de eigenschappen op te sommen van de bestudeerde objecten (de axioma's) en verbiedt men vervolgens beroep te doen op iets anders dan op deze eigenschappen en de regels van de logica. Deze activiteit die psychologisch identiek is met het op de voorgrond brengen van de wiskundige karakteristieken van een probleem in de toegepaste wiskunde zullen we aanduiden door de term *schematiseren*.

De keuze van deze benaming kunnen we rechtvaardigen door een voorbeeld te geven van een eenvoudig schema: een aardrijkskundige kaart. Haar eigenschappen zijn de volgende: ze geeft *geen* volledig getrouwe beschrijving van de werkelijkheid. Noch de bomen van het bos, noch de diepte van de rivieren zijn aangeduid. De kaart onthoudt er zich niet enkel van alles te beschrijven, maar de beschrijving die ze geeft is vereenvoudigd en beknopt. De steden, de straten, de bergtoppen zijn er slechts op aangeduid door conventionele tekens, symbolen die geen rekening houden met alle bijzonderheden van de aangeduide dingen en die men moet kunnen interpreteren. De kaart geeft niet alles, maar niets belet er ons ze op een of ander aspect bij te werken, ze is maar af in de mate dat we dat bestlist hebben. Als essentiële kenmerken van een schema kunnen we dus reeds geven: onvolledig, vereenvoudigd, gesymboliseerd. Wat de kaart wil beschrijven, dit of dat land, kunnen we noemen: zijn 'uitwendige betekenis'. Op zichzelf beschouwd, als autonoom object bezit ze echter een eigen realiteit; we kunnen spreken van een 'intrinsieke structuur'.

Niets belet ons deze laatste op zichzelf te beschouwen, zonder rekening te houden met de betekenis die ze kan hebben als men ze raadpleegt met het oog op haar uitwendige betekenis. Zelfs aldus beschouwd, stelt de kaart tal van problemen, meetkundige, topologische, kleuringsproblemen enz.... waarvan het nuttig kan zijn ze op te lossen.

Bij het intrinsiek redeneren in een schema, wenden we ons wel af van zijn oorspronkelijke betekenis, maar de resultaten van de redenering doen ze ons beter vatten. Aangezien de bedoeling van een axiomatiek juist is, zonder beroep te doen op de uitwendige betekenis (de ervaring) van de objecten er eigenschappen van aan te tonen, zullen we aan het schematiseren in verband met het axiomatiseren de volgende eis opleggen: het resulterend schema moet intrinsieke redenering mogelijk maken. We zullen om dit aan te duiden spreken van *extrapolerend schematiseren*.

Zo kan men de elementaire meetkunde beschouwen als een schema van ideeën waarvan de 'uitwendige betekenis' te zoeken is in een zekere natuurlijke structuur van de omringende fysische wereld. De intrinsieke structuur van dit schema is zijn logische structuur. Zij komt te voorschijn in de mogelijkheid ze axiomatisch op te bouwen. Het schema 'meetkunde' opmaken bestaat in het bedenken, vertrekkende van de wereld van de verschijnselen, van een zeker aantal vereenvoudigende en ordenende begrippen die voldoende juist zijn en zekere relaties, de axioma's die schematische vormen zijn van bepaalde natuurlijk noodzakelijke samenhangen. Intrinsiek redeneren is dan eenvoudigweg expliciteren wat eigen is aan deze vereenvoudigende begrippen, we zouden kunnen zeggen het ontrollen van de keten 'intrinsiek noodzakelijke' gevolgen. Kortweg: intrinsiek redeneren is doodeenvoudig logisch redeneren zoals we gewoon zijn.

Kijken we nog naar het volgende voorbeeld: Een verzameling P van personen brengen samen de avond door. De gastheer wijst de genodigden hun plaats aan tafel aan. Kiezen we tussen de vele mogelijke relaties de volgende twee uit: $G: \dots$ heeft voor geboort ... en $F: \dots$ behoort tot dezelfde familie als ...

Iedere persoon heeft twee geburen. Geburen behoren niet tot dezelfde familie. Deze situatie kan dan op de volgende wijze gesymboliseerd worden:

- 1 $\forall x \in P, G\{x\}$ is een strikt paar
- 2 $G = G^{-1}$
- 3 $G \cap F = \emptyset$
- 4 F is een equivalentie

Ons enkel baserend op deze informatie en zelfs onafhankelijk van de bijzondere betekenis van de letters P, G, F kunnen we allerlei gevolgtrekkingen maken. Bijv. $\forall x, y \in P$: Als $(x, y) \in G$ en $(y, z) \in F$, dan $(x, z) \notin F$. De resultaten van de redeneringen gelden daarbij niet enkel voor de oorspronkelijke situatie, maar voor elke verzameling voorzien van relaties F en G die aan bovenstaande eisen

voldoen (bijv. P gehele getallen, $G : |x - y| = 1$; $F : x - y$ even of $P = \Pi_0 \setminus \{0\}$, $G = \vec{x} \perp \vec{y}$ en $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$; $F : \vec{x}, \vec{y}$ collineair).

Met Hilbert [4] kunnen we het extrapolerend schematiseren beschouwen als een soort afbeelding waarbij elk gekozen object van een kennisgebied gerefleeteerd wordt op een begrip van een *vakwerk van ordenende begrippen* en elk gekozen feit correspondeert met een logische betrekking tussen deze begrippen. Op elk extrapolerend schema kan het principe van de bewust onvolledige kennis weer toegepast worden. We bekommen aldus een hiërarchie van op elkaar volgende extrapolerende schema's.

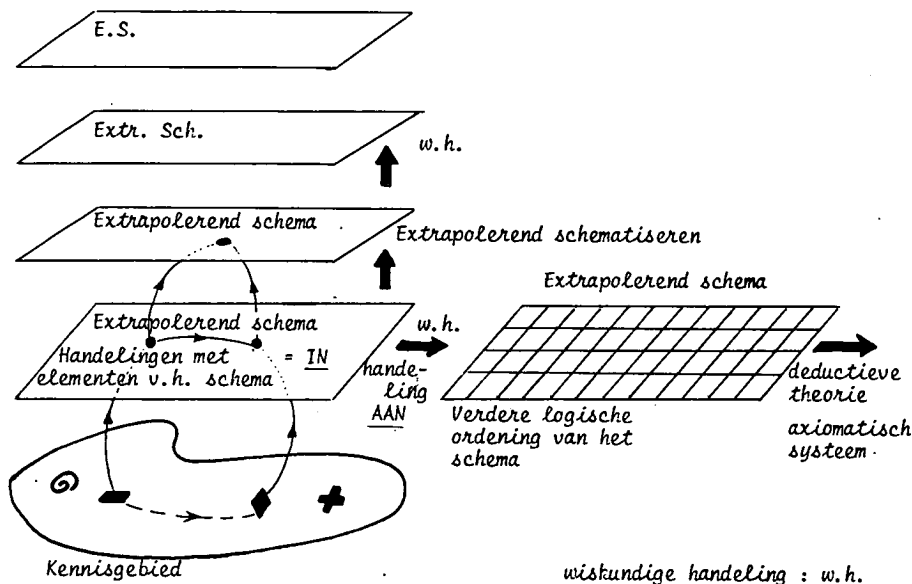


Fig. 3

Ik stel dan de volgende bepaling voor:

We noemen *wiskundige (mentale) handeling*, elke handeling die uitgevoerd wordt *AAN* een extrapolerend schema.

Zoals bijvoorbeeld verder logisch ordenen van dit schema tot een deductief systeem, het transformeren, axiomatiseren, formaliseren of het op zijn beurt extrapolerend schematiseren.

Handelingen die uitgevoerd worden *IN* een schema; d.i. met de elementen van een schema, zijn geen wiskundige handelingen; zoals bijvoorbeeld rekenen met getallen, uitvoeren van algoritmen, algebraïsche formules toepassen, de waarheidswaarde van een bewering nagaan e.d.m.

Het zijn waardevolle denkhandelingen die door de wiskundige noodzakelijk moeten gesteld worden om aan wiskunde te kunnen doen, waarin hij zelfs zeer bedreven dient te zijn, maar ze krijgen het statuut niet van wiskundige (mentale) handeling.

Volgende situatie brengt enkele wiskundige handelingen op de voorgrond:

- Het denkend omgaan met gehele getallen doet ons allerlei feiten ontdekken, zo bijv.:

$$\begin{aligned} (-5) + 7 &= 2 & (-7) + (-3) &= -10 \\ 0 + 5 &= 5 & 7 + (-7) &= 0 & 5 + 0 &= 5 \\ 13 + 7 &= 7 + 13 & -(3 + 4) &= (-3) + (-4) \\ 5 + x &= 8 \Leftrightarrow x = 8 + (-5) \\ (3 + (-8)) + 6 &= 3 + ((-8) + 6) \end{aligned}$$

- We gaan nu systematisch de individualiteit van de getallen verwaarlozen en letters gebruiken om gelijk welk getal aan te duiden (extrapolerend schematiseren). In het extrapolerend schema Z doen we met betrekking tot + allerlei vaststellingen zoals bijv.

$$\begin{aligned} a + b &\in Z \\ a + c &= b + c \Leftrightarrow a = b \\ a + 0 &= a = 0 + a \\ a - (-b) &= a + b \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \\ -(a + b) &= (-a) + (-b) \\ a + b &= b + a \\ a + (-a) &= 0 = (-a) + a \\ a + x &= b \Leftrightarrow x = b - a \\ a - b &= a + (-b) \\ -(-a) &= a \\ a + (-b) &= -(b - a) \quad \text{enz.} \end{aligned}$$

- Deze eigenschappen worden logisch geordend m.a.w. we kunnen aantonen dat sommige eigenschappen uit andere kunnen afgeleid worden (handeling van het deduceren).

- We zoeken nu enkele eigenschappen waaruit alle andere kunnen afgeleid worden (axiomatiseren).

We weerhouden volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} 1 \quad \forall a, b \in Z : a + b &\in Z \\ 2 \quad \forall a, b, c \in Z : (a + b) + c &= a + (b + c) \\ 3 \quad 0 \in Z : \forall a \in Z : a + 0 &= a = 0 + a \\ 4 \quad \forall a \in Z : (-a) \in Z \wedge a + (-a) &= 0 = (-a) + a \\ 5 \quad \forall a, b \in Z : a + b &= b + a \end{aligned}$$

- Het denkend omgaan met translaties doet ons allerlei feiten ontdekken, zo bijv.:

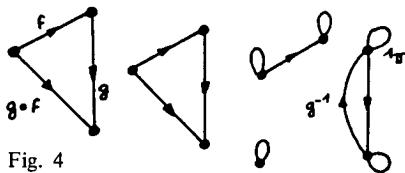


Fig. 4

- We maken vervolgens abstractie van de individualiteit van de pijlvoorstellingen en gebruiken letters om gelijk welke translatie aan te duiden (extrapolerend schematiseren). In het extrapolerend schema doen we met betrekking tot $\circ$ allerlei vaststelling zoals bijv.

$$\begin{aligned} g \circ f &\in \mathcal{T} \\ g \circ h &= f \circ h \Leftrightarrow g = f \\ f \circ 1_\pi &= f = 1_\pi \circ f \\ g \circ (f^{-1})^{-1} &= g \circ f \\ (g \circ f) \circ h &= g \circ (f \circ h) \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1} \\ (g \circ f) &= (f \circ g) \\ g \circ (g^{-1}) &= 1_\pi = (g^{-1}) \circ g \\ g \circ x &= f \Leftrightarrow x = g^{-1} \circ f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g^{-1})^{-1} &= g \\ f \circ g^{-1} &= (g \circ f^{-1})^{-1} \quad \text{enz.} \end{aligned}$$

- Deze eigenschappen worden logisch geordend m.a.w. we gaan aantonen dat sommige eigenschappen logisch gevolg zijn van andere, zodat we niet alle eigenschappen moeten onthouden.

- We weerhouden uiteindelijk een geheel van eigenschappen waaruit alle andere kunnen afgeleid worden (axiomatiseren).

$$\begin{aligned} 1 \quad \forall f, g \in \mathcal{T} : g \circ f &\in \mathcal{T} \\ 2 \quad \forall f, g, h \in \mathcal{T} : (h \circ g) \circ f &= h \circ (g \circ f) \\ 3 \quad 1_\pi \in \mathcal{T} : \forall f \in \mathcal{T} : f \circ 1_\pi &= 1_\pi \circ f \\ 4 \quad \forall f \in \mathcal{T} : f^{-1} \in \mathcal{T} \wedge f^{-1} \circ f &= 1_\pi = f \circ f^{-1} \\ 5 \quad \forall f, g \in \mathcal{T} : g \circ f &= f \circ g \end{aligned}$$

De opvallende analogie van de eigenschappen in beide situaties leidt tot een volgende extrapolerende schematisering.

We gaan abstractie maken van de aard van de objecten en een niet lege verzameling G beschouwen waarvan de elementen niet nader bepaald zijn. We gaan algemeen een samenstellingswet aanduiden

door *. We postuleren vervolgens dat de wet * moet voldoen aan de volgende eigenschappen:

- 1 $\forall x, y \in G : x * y \in G$
- 2 $\forall x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$
- 3 $\exists n \in G, \forall x \in G : x * n = x = n * x$
- 4 $\forall x \in G, \exists \bar{x} \in G : x * \bar{x} = n = \bar{x} * x$
- 5 $\forall x, y \in G : x * y = y * x$

Door intrinsiek redeneren in dit schema wordt de groepenleer (deductieve theorie) opgebouwd.

De notie 'kennisgebied' waarmee we bedoelen het gebied op het laagste niveau dat extrapolierend geschematiseerd wordt, is zoals de voorbeelden aantonen relatief. De getallen en pijltjesvoorstellingen zijn eigenlijk reeds schema's. Voor leerlingen van een bepaalde klas kunnen ze door langdurige omgang zo vertrouwd zijn dat ze voor hen een concreet werkelijkheidsgebied uitmaken en niet meer hoeven te denken aan het eventueel onderliggend gebied. Voor leerlingen van een andere klas kan dezelfde situatie ervaren worden als het extrapolierend schematiseren naar een tweede niveau.

Het extrapolierend schematiseren m.a.w. het afbeelden van gekozen elementen en feiten van een bepaald kennisgebied op een vakwerk van ordenende begrippen op een eerste niveau rekenen we niet tot het wiskundig handelen. Deze activiteit is niet specifiek voor de wiskundige maar is essentieel voor elke wetenschapsbeoefening. Het schematiseren van de regelmatigheden van een natuurlijke taal tot een grammatica is daar een voorbeeld van. Construeren we uitgaande van enkele grammatica's een formele grammatica (bijv. een Chomsky-grammatica) dan hebben we te doen met een wiskundige activiteit. Ze behoort tot een gebied dat dan ook mathematische of algebraïsche linguïstiek genoemd wordt. Het gebruik van de regels van een formele grammatica in de taalkunde is evenmin een wiskundige handeling als het *gebruik* van rekenregels [5]. Het weergeven in de biologie van het proces van het verschijnen en voortzetten van een prikkeling in een zenuwweefsel door middel van een wiskundig vakwerk is geen wiskundige handeling. Het construeren van een axiomatische theorie van de middens die vatbaar zijn voor prikkeling (bijv. N. WIENER en A. ROSENBLUETH) is wel een wiskundige activiteit [6]. Het gebruik van dit axiomatisch systeem bij de studie van de verschillende pathologische vormen van het functioneren van de hartspeer is evenmin wiskundig denken als het gebruik van de groepsaxioma's voor het bewijzen van een stelling.

Literatuur

- 1 C. F. VAN PARREREN, *Algoritmen en heuristieken in het onderwijs*. Pedagogische Studiën. Jg. 52, Nr. 10, 1975, p. 394-405.
- 2 C. F. VAN PARREREN en J. A. M. CARPAY, *Sowjetpsychologen aan het woord*. Groningen Wolters-Noordhoff.
- 3 J. DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris, Hermann, 1964, p. 21.
- 4 D. HILBERT, *Axiomatisches Denken*, Mathematische Annalen, Bd. 78, 1918, p. 405.

- 5 A. VERMANDEL en E. COHORS-FRESENBORG, *The nature of mathematical thinking*, in E. COHORS-FRESENBORG, I. WACHSMUTH ed. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Band 1, 1978, Universität Osnabrück, p. 356-368
- 6 S. FOMINE en M. BERKINBLIT, *Problèmes mathématiques en biologie*, Moscou, Mir, 1975.

Over de auteur:

Prof. Dr. A. VERMANDEL, verantwoordelijke voor de lerarenopleiding en de didactiek wiskunde aan de Universitaire Instelling Antwerpen.

De achtste wiskunde-olympiade in de Verenigde Staten

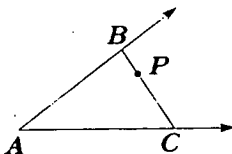
Aan deze olympiade namen 98 leerlingen deel. Ze waren geselecteerd op grond van de resultaten van het Annual High School Mathematics Examination. Op grond van de behaalde scores werd vastgesteld wie deel mocht nemen aan de internationale wiskunde-olympiade. De opgaven waren:

EIGHTH U.S.A. MATHEMATICAL OLYMPIAD 1 MAY 1979

1. Determine all non-negative integral solutions $(n_1, n_2, \dots, n_{14})$ if any, apart from permutations, of the Diophantine equation

$$n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{14}^4 = 1,599.$$

2. A *great circle* $\mathcal{E}$ on a sphere is one whose center is the center O of the sphere. A *pole* P of the great circle $\mathcal{E}$ is a point on the sphere such that $\overline{OP}$ is perpendicular to the plane of $\mathcal{E}$. On any great circle through P , two points A and B are chosen equidistant from P . For any *spherical triangle* ABC (the sides are great circle arcs) where C is on $\mathcal{E}$, prove that the great circle arc CP is the angle bisector of angle C .
3. Given three identical n -faced dice whose corresponding faces are identically numbered with arbitrary integers. Prove that if they are tossed at random, the probability that the sum of the top three face numbers is divisible by 3 is greater or equal to $1/4$.
4. Show how to construct a chord BPC of a given angle A through a given point P within the angle A such that $1/BP + 1/PC$ is a maximum.



5. A certain organization has n members ($n \geq 5$) and it has $n + 1$ three member committees, no two of which have identical membership. Prove that there are two committees which share *exactly one* member.

De volgende tabellen geven een overzicht over de scores.

TABLE 1

Problem	Average Score
1	8.2
2	2.8
3	4.2
4	3.1
5	3.7

TABLE 2

Problem	Score		
	0	1-10	11-20
1	34	26	38
2	81	3	14
3	52	35	11
4	71	17	10
5	31	59	8

TABLE 3

Score	Number of Students
80-99	2
60-79	5
40-59	13
20-39	26
0-19	52

Overgenomen uit The Mathematics Teacher van december 1979 (vol. 72, nr. 9).

P. G. J. Vredenduin

Hoe kraak ik een databank?

JAN KOEN ANNOT EN EVERT-JAN POL

Wegens het 100-jarig bestaan van de VU te Amsterdam organiseerde die universiteit een tentoonstelling met als onderwerp: 'computer en beroep'. In de speciaal daarvoor uitgegeven computerkrant stond de aan de tentoonstelling verbonden prijsvraag: 'hoe kraak ik een databank?'.

De formulering van de prijsvraag

In de databank van de VU zijn gegevens opgenomen over de 16000 personen die er werken en/of studeren. De 12000 studenten zijn over de alpha, beta en gamma faculteiten verdeeld in een verhouding van precies 3 : 4 : 5. Vele van de studenten en de 5000 personeelsleden zijn lid van de honderden commissies met elk één voorzitter. Het dagelijks bestuur van de universiteit wordt gevormd door het 8 leden tellende College van Bestuur (CvB) en het algemeen bestuur door de Universiteitsraad (UR). Een andere belangrijke commissie is die voor Onderwijs en Onderzoek (OO). Voor het belang van de prijsvraag geldt verder dat een lid van het CvB geen voorzitter van een andere commissie kan zijn. De gegevens die per persoon zijn opgenomen zijn behalve de namen, een aantal van de volgende eigenschappen:

student, personeelslid,
mannelijk, vrouwelijk,
alpha, beta, gamma,
voorzitter, secretaris,
CvB, UR, OO,
CDA, PvdA, VVD, PSP, CPN, D66, SGP, GPV, PPR,
Gereformeerd, Ned. Hervormd, Rooms-Katholiek.

Als een persoon, Jan Jansen, een mannelijk student is, studerend in de alpha faculteit, lid (maar geen voorzitter) van de UR en van de PSP en het GPV en tenslotte gereformeerd is, dan staat van Jan Jansen in de databank geregistreerd dat hij de volgende eigenschappen heeft:

student, mannelijk, alpha, UR, PSP, GPV, Gereformeerd

en geen andere.

De enige soort vraag die gesteld mag worden en onder bepaalde restricties ook beantwoord wordt door de databank is **hoeveel** personen aan een zeker criterium voldoen. Bijvoorbeeld: 1: hoeveel personen zijn student en lid van de UR of OO? 2: hoeveel personen zijn voorzitter van het CvB en lid van de PvdA?

Het criterium kan als een logische formule worden opgeschreven met operatoren: 'en', 'of' en 'niet'. De operanden in die formule zijn bovengenoemde eigenschappen. Een vraag noteren we als een formule tussen twee | strepen. Bovenstaande vragen zien er dus als volgt uit:

- 1: |student en (UR of OO)|
- 2: |voorzitter en CvB en PvdA|

Omdat slechts één persoon voorzitter van het CvB is, geeft het antwoord op de tweede vraag meteen enige informatie over de politieke gezindheid van die persoon. Om te voorkomen dat de privacy zo eenvoudig te verbreken is, geldt de regel dat het aantal personen, dat aan de vraag voldoet, groot genoeg moet zijn. Als we het aantal personen met eigenschappen, zoals in de vraag gespecificeerd, aanduiden met p , dan geeft de databank alleen antwoord als $p \geq k$, waarbij k een positief geheel getal is. Als $p < k$ dan wordt het antwoord geweigerd. Als dit de enige eis was, dan zou het nog eenvoudig zijn op elke vraag een antwoord te krijgen. Immers, stel dat $k < 8000$ en dat de vraag '|f|' geweigerd wordt, dan stellen we de vraag '|niet f|'. Hiervoor geldt:

$$|\text{niet } f| = 16000 - |f| > k$$

en dus wordt '|niet f|' beantwoord, waaruit het antwoord op '|f|' volgt. Voorbeeld: het antwoord op vraag 2 wordt gegeven door:

$$16000 - |\text{niet (voorzitter en CvB en PvdA)}|.$$

Vandaar dat de beperking voor de beantwoording van een vraag zowel naar beneden als naar boven geldt.

Alleen als $k \leq p \leq 16000 - k$, voor zekere $k < 8000$, wordt het antwoord gegeven. In alle andere gevallen wordt het antwoord geweigerd. Voor kleine k , bijvoorbeeld $k = 2$, is het nog steeds niet zo moeilijk inbreuk te maken op de privacy van de voorzitter van het CvB. Maak gebruik van het gegeven dat het CvB uit 8 leden bestaat! De volgende strategie leidt dan tot het gezochte antwoord:

$$8 - |\text{CvB en niet (voorzitter en PvdA)}|$$

De opgave luidt nu om voor $k = 4000$, strategieën van vragen te ontwerpen, die antwoord geven op:

a) Is de voorzitter van het CvB lid van de PvdA?

- b) Hoeveel percent van de leden van de UR zijn lid van de CPN?
(N.B. grootte en samenstelling van de UR zijn voor deze prijsvraag onbekend)

Hoe wij de databank kraakten

De computerkrant werd op onze school door dhr. Bolt (wiskunde) verspreid. Twee leerlingen uit 6 vwo, Jan Koen Annot en Evert-Jan Pol, gingen gelijk aan de slag. De oplossingen waren al gauw gevonden, maar later werden nog verbeteringen aangebracht. Om te kijken of er nog andere oplossers en oplossingen waren werden er een aantal vergaderingen in het lokaal van de heer Bolt georganiseerd, waar dhr. Wiersma (scheikunde) en Peter Lambooy (4 vwo) en anderen naar toe zijn gekomen. Er werden echter geen andere oplossingen naar voren gebracht. De door Jan Koen opgestelde tekst is toen door dhr. Bolt uitgetypt. De oplossing spreekt verder voor zich.

- a De eerste oplossingsstrategie voor vraag a bestond uit twee vragen:

$A: |\text{delta of (voorzitter en CvB en PvdA)}|$ en

$B: |\text{niet delta of (voorzitter en CvB en PvdA)}|$ waarbij 'delta' een of ander (eventueel samengesteld) criterium is met bekende $|\text{delta}|$ en $4000 \leq |\text{delta}| \leq 12000$. Voor 'delta' kun je bijvoorbeeld het criterium 'gamma' nemen, want je weet dat $|\text{gamma}| = 5000$. We definiëren:

$C = |\text{delta en voorzitter en CvB en PvdA}|$

$D = |\text{delta}|$

$E = |\text{niet delta en voorzitter en CvB en PvdA}|$

Er geldt:

$$\begin{aligned} A &= |\text{delta of (voorzitter en CvB en PvdA)}| = \\ &= |\text{delta}| + |\text{niet delta en voorzitter en CvB en PvdA}| = \\ &= D + E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= |\text{niet delta of (voorzitter en CvB en PvdA)}| = \\ &= |\text{niet delta}| + |\text{delta en voorzitter en CvB en PvdA}| = \\ &= 16000 - |\text{delta}| + |\text{delta en voorzitter en CvB en PvdA}| = \\ &= 16000 - D + C \end{aligned}$$

Tabel 1

voorz. v/h CvB						
PvdA	delta	D	C	E	$A = D + E$	$B = C + 16000 - D$
nee	nee	D	0	0	D	$16000 - D$
nee	ja	D	0	0	D	$16000 - D$
ja	nee	D	0	1	$D + 1$	$16000 - D$
ja	ja	D	1	0	D	$16001 - D$

Uit tabel 1 blijkt, dat de voorzitter van het CvB lid van de PvdA is als $A = D + 1$ of $B = 16001 - D$, en dat hij geen lid van de PvdA is als $A = D$ en $B = 16000 - D$. Als $4000 < D < 12000$ dan geldt $4001 \leq A \leq 12000$ en $4001 \leq B \leq 12000$ dus A en B worden altijd beantwoord. Als $D = 4000$ (bijvoorbeeld 'delta' = 'beta') dan geldt: $A = 4000$ of $A = 4001$, dus A wordt beantwoord, maar $B = 12000$ of $B = 12001$. In het laatste geval geeft de databank geen antwoord, maar niettemin volgt daaruit dat $B = 12001$. Evenzo als $D = 12000$ (bijvoorbeeld 'delta' = 'student'): $B = 4000$ of $B = 4001$, $A = 12000$ of $A = 12001$. Zo blijkt dat de databank ook informatie kan verraden door *niet* te antwoorden!

Voor databankkrakers die haast hebben ontwierpen we ook nog een strategie die slechts uit één vraag bestaat. Deze vraag (we noemen hem V) is echter wat ingewikkelder dan bovengenoemde vragen A en B (V is eigenlijk een samenstelling van A en B). We gebruiken dezelfde definities als boven en definiëren bovendien: $F = |\text{voorzitter en CvB en PvdA}|$.

Er geldt:

$$\begin{aligned} V &= |(\text{delta en niet (voorzitter en CvB en PvdA)}) \text{ of} \\ &\quad (\text{niet delta en voorzitter en CvB en PvdA})| = \\ &= |\text{delta}| - |\text{delta en voorzitter en CvB en PvdA}| + \\ &\quad + |\text{voorzitter en CvB en PvdA}| - \\ &\quad - |\text{delta en voorzitter en CvB en PvdA}| = \\ &= D - C + F - C = D + F - 2C \end{aligned}$$

Tabel 2

voorz. v/h CvB		C	D	F	$V = D + F - 2C$
PvdA	delta				
nee	nee	0	D	0	D
nee	ja	0	D	0	D
ja	nee	0	D	1	$D + 1$
ja	ja	1	D	1	$D - 1$

Uit Tabel 2 blijkt dat de voorzitter van het CvB lid is van de PvdA als $V = D \pm 1$ en dat hij geen PvdA-lid is als $V = D$. Ook nu geldt weer: als $D = 4000$ of $D = 12000$ en de databank geeft geen antwoord, dan moet $V = 3999$ resp. $V = 12001$ zijn, dus de voorzitter van het CvB is PvdA-er!

b Ook voor vraag b vonden we meer dan één oplossing. Om het gevraagde percentage te berekenen moeten we zowel $|\text{UR}|$ als $|\text{UR en CPN}|$ bepalen. Aanvankelijk bepaalden we $|\text{UR}|$ door het stellen van de volgende vier vragen:

$$\begin{aligned} P &= |(\text{alpha of gamma}) \text{ en UR}| \\ Q &= |(\text{alpha of gamma}) \text{ en niet UR}| \\ R &= |\text{niet (alpha of gamma)} \text{ en UR}| \\ S &= |\text{niet (alpha of gamma)} \text{ en niet UR}| \end{aligned}$$

Omdat

$$\begin{aligned} P + Q &= |\text{alpha of gamma}| = 3000 + 5000 = 8000 \text{ en} \\ R + S &= |\text{niet (alpha of gamma)}| = 16000 - 8000 = 8000 \end{aligned}$$

antwoordt de databank altijd op minstens één van de vragen P en Q en op minstens één van de vragen R en S . De niet beantwoorde vragen kun je dan berekenen uit $P + Q = 8000$ en $R + S = 8000$. $|UR|$ en $|\text{niet } UR|$ zijn nu te berekenen uit $P + R = |UR|$ en $Q + S = |\text{niet } UR|$.

Ook hier ontwierpen we een kortere maar ingewikkelder strategie. $|UR|$ kan namelijk ook in drie vragen bepaald worden. We noemen deze vragen K , L en M :

$$K = |\text{beta of } ((\text{alpha of gamma}) \text{ en } UR)|$$

$$L = |\text{gamma of } (\text{beta en } UR)|$$

$$M = |\text{gamma of } (\text{niet student en } UR)|$$

Er geldt:

$$\begin{aligned} K + L + M &= |\text{beta}| + |(\text{alpha of gamma}) \text{ en } UR| + \\ &\quad + |\text{gamma}| + |\text{beta en } UR| + \\ &\quad + |\text{gamma}| + |\text{niet student en } UR| = \\ &= |\text{beta}| + 2|\text{gamma}| + |UR| = |UR| + 14000 \end{aligned}$$

$|UR|$ is dus te bepalen uit $|UR| = K + L + M - 14000$.

De drie vragen worden altijd beantwoord want:

$$K \geq |\text{beta}| = 4000$$

$$K \leq |\text{beta of alpha of gamma}| = 12000$$

$$L \geq |\text{gamma}| = 5000$$

$$L \leq |\text{gamma of beta}| = 9000$$

$$M \geq |\text{gamma}| = 5000$$

$$\text{en } M \leq |\text{gamma of niet student}| = 9000$$

Met deze strategieën kun je niet alleen $|UR|$ bepalen maar iedere willekeurige $|\epsilon|$, dus ook $|UR \text{ en } CPN|$. Uit de aldus verkregen gegevens is het gevraagde percentage te bepalen.

Als de 16000 personen op de een of andere manier in vier groepen W , X , Y en Z van elk 4000 personen gesplitst zouden kunnen worden, zou $|UR|$ zelfs in twee vragen T en U te bepalen zijn:

$$T = |W \text{ of } ((X \text{ of } Y) \text{ en } UR)|$$

$$U = |X \text{ of } ((W \text{ of } Z) \text{ en } UR)|$$

$$\begin{aligned} T + U &= |W| + |(X \text{ of } Y) \text{ en } UR| + |X| + |(W \text{ of } Z) \text{ en } UR| = \\ &= |W| + |X| + |UR| = 8000 + |UR| \text{ dus } |UR| = T + U - 8000 \end{aligned}$$

T en U worden altijd beantwoord:

$$T \geq |W| = 4000$$

$$T \leq |W \text{ of } X \text{ of } Y| = 12000$$

$$U \geq |X| = 4000$$

$$U \leq |X \text{ of } W \text{ of } Z| = 12000$$

Helaas is zo'n onderverdeling niet mogelijk met de beschikbare gegevens.

Er bestaat geen strategie (zelfs niet als je meer gegevens hebt) waarmee je altijd in één vraag $|UR|$ kunt bepalen: voor $|UR|$ zijn 16001 mogelijkheden (0 t/m 16000), terwijl de databank slechts op 8002 manieren op een vraag kan reageren (4000 t/m 12000 of geen antwoord).

Voor databankkrakers hebben de verschillende strategieën verschillende voor- en nadelen.

De vragen A en B zijn samen korter dan vraag V , ze zijn eenvoudiger en gemakkelijker uit het hoofd te leren (een goede spion leert alles uit z'n hoofd!). Vraag

V heeft het voordeel dat er maar één vraag aan de databank gesteld hoeft te worden. Maar als je geluk hebt en de databank op vraag A met $D + 1$ antwoordt, ben je ook met de eerste methode in één vraag klaar: je weet dan al dat de voorzitter van het CvB lid van de PvdA is, dus vraag B hoeft je niet meer te stellen.

Ook de methoden voor vraag b hebben voor- en nadelen: als je de tweede methode gebruikt moet je zeker drie vragen stellen, met de eerste methode en wat geluk kun je volstaan met twee vragen: omdat $P + Q = R + S = 8000$ hoeft je vraag Q niet meer te stellen als vraag P beantwoord is en vraag S hoeft je niet meer te stellen als vraag R beantwoord is. De vragen K , L en M zijn kort en onderling nogal verschillend, zodat de databank geen (van tevoren geprogrammeerde) 'argwaan' krijgt. (Je kunt je voorstellen dat de databank 'argwaan' krijgt als een vraag erg lang is of als in één vraag tweemaal dezelfde eigenschap voorkomt (in V zelfs viermaal!) of als dat in meerdere opeenvolgende vragen het geval is (bij de vragen P , Q , R en S)). De vragen P , Q , R en S vertonen een prachtige regelmaat (een wiskundige databankkraker zou zeker deze methode kiezen!) en zijn daardoor gemakkelijker uit het hoofd te leren. Maar omdat in elke vraag de eigenschappen 'alpha', 'gamma' en 'UR' voorkomen, zou de databank wel eens 'argwaan' kunnen krijgen.

Omdat deze databank zelfs door gewone lyceumleerlingen 'gekraakt' blijkt te kunnen worden (de leraren hebben namelijk niet geholpen!) komt de vraag naar betere beveiliging op.

Het verbieden van één der operatoren 'en' of 'of' heeft geen nut, want met wat Boole-algebra is elke vraag te schrijven met als operatoren slechts 'en' en 'niet' of met 'of' en 'niet'. (bv. $A = |\text{delta of (voorzitter en CvB en PvdA)}| = |\text{delta of niet (niet voorzitter of niet CvB of niet PvdA)}| = |\text{niet (niet delta en niet (voorzitter en CvB en PvdA))}|$).

Ook het verbieden van de operator 'niet' biedt slechts uitstel van executie: na verloop van tijd is het vast wel mogelijk de 16000 personen in vier groepen van elk 4000 personen in te delen. Met de vragen T en U kan nu elke willekeurige $|\epsilon|$ bepaald worden, want T en U bevatten geen ontkenningen.

Het verbieden van haakjes heeft heel wat meer nut: we moeten dan *niet* de afspraak maken dat de bewerking 'en' vóór de bewerking 'of' gaat (of andersom). Spreken we dit wel af, dan is elke vraag d.m.v. Boole-algebra te schrijven zonder haakjes, bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} V &= |(\text{delta en niet (voorzitter en CvB en PvdA)}) \text{ of} \\ &\quad (\text{niet delta en (voorzitter en CvB en PvdA)})| = \\ &= |\text{delta en (niet voorzitter of niet CvB of niet PvdA)} \text{ of} \\ &\quad (\text{niet delta en voorzitter en CvB en PvdA})| = \\ &= |\text{delta en niet voorzitter of delta en niet CvB of} \\ &\quad \text{delta en niet PvdA of niet delta en voorzitter en CvB en PvdA}|. \end{aligned}$$

Zonder zo'n afspraak kan vrijwel geen van de genoemde vragen omgewerkt worden tot een vraag zonder haakjes.

Het verhogen van k biedt weinig perspectief. Zelfs als $k = 8000$ is het nog mogelijk te bepalen of de voorzitter van het CvB lid van de PvdA is: neem $|\text{delta}| = |\text{alpha of gamma}| = 8000$. Als je op de vragen A , B en V antwoordt

krijgt is hij geen PvdA-er: als je op V en op A of B geen antwoord krijgt is hij wel PvdA-er.

Het bovengenoemde 'argwaan' beperkt de mogelijkheden van 'bona fide' statistici te veel. Iemand die gegevens over studenten wil verzamelen, zal toch echt in bijna elke vraag de eigenschap 'student' moeten vermelden. Een handige databankkraker kan trouwens ook hier tussen de mazen van het net door: na elke serieuze vraag stelt hij een willekeurige tussenvraag. Vraag V , (de enige waarin meer dan vier eigenschappen genoemd worden en de enige waarin een eigenschap tweemaal voorkomt) kan hij vervangen door de vragen A en B .

Zo blijkt dat het moeilijk is deze databank volmaakt te beveiligen. De beste methode lijkt nog het verbieden van haakjes in de vragen, eventueel gecombineerd met een der andere genoemde methoden.

Over de auteurs:

Jan Koen Annot en Evert-Jan Pol, beiden geboren in 1962, slaagden dit jaar aan het Christelijk Lyceum te Veenendaal voor het eindexamen 6-VWO.

Jan Koen Annot gaat elektrotechniek studeren aan de Technische Hogeschool in Delft en Evert-Jan Pol wiskunde met informatica aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Opgaven

423. De cijfers van een getal van drie cijfers worden op alle mogelijke manieren gepermuteerd. De zo verkregen getallen worden opgeteld. Van deze som is het cijfers van de tientallen verschillend van dat van de honderdtallen. Bij welke cijfercombinaties is dit het geval. Begincijfer 0 is toegestaan. (Meegedeeld door Peter Sanders.)

424. a, b, c, d, e, f zijn zes verschillende positieve gehele getallen waarvoor

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4 + f^4$$

Bedenk een methode om dergelijke zestallen te vinden. (B. Kootstra)

Oplossingen

421. A noemt een van de getallen $0, 1, 2, \dots, 100$, B daarna een ander en C vervolgens nog een ander. Daarna wordt aselekt een van de getallen $0, 1, 2, \dots, 100$ gekozen. Wiens getal daar het dichtste bij is, heeft gewonnen. Zijn twee er even dicht bij, dan beslist het lot. Allen spelen volgens optimale winststrategie. Hebben keuzen gelijke winstkansen, dan beslist het lot. Welk getal kiest A ?

De getallen die A, B en C kiezen, noemen we resp. p, q, r . We nemen aan, dat $p \leq 50$.

Onderstel A kiest 40. Dan kiest B niet 41, want C zou dan 42 kiezen. Beter is 39, waarna C 41 kiest. Maar nog beter is 61, waarna C 39 kiest.

We bekijken deze situatie meer algemeen.



In de figuur is $q = 100 - p + 1$ en $r = p - 1$.

De aantallen winstmogelijkheden worden:

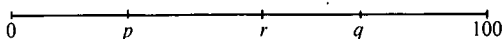
$$\text{voor } B: \frac{1}{2}(q - p + 1) + p - 1 = \frac{1}{2}(100 - 2p + 2) + p - 1 = 50$$

$$\text{voor } A: \frac{1}{2}(q - p + 1) = \frac{1}{2}(100 - 2p + 2) = 51 - p$$

$$\text{voor } C: p$$

Voordelig is dus voor A een zo klein mogelijk getal te kiezen. Dit heeft echter zijn grenzen. Op een gegeven ogenblik wordt het voor C voordeliger ook een getal groter dan p te kiezen en dan dalen A 's kansen weer.

Om te bepalen wanneer dit gaat gebeuren analyseren we de situatie waarin $q > p$ en $r > p$. We houden $q = 100 - p + 1$ en nemen aan, dat $p < r < q$.



De aantallen winstmogelijkheden worden nu:

$$\text{voor } B: \frac{1}{2}(q - r + 1) + p - 1$$

$$\text{voor } A: \frac{1}{2}(r - p + 1) + p$$

$$\text{voor } C: \frac{1}{2}(q - p)$$

Dit wordt voor C voordelig, zodra $\frac{1}{2}(q - p) > p$, dus als $p \leq 25$.

Nu gaat B zijn strategie opnieuw aanpassen. Er zijn twee mogelijkheden.

$$a \quad p < r < q$$

In dat geval zijn alle keuzen van r tussen p en q gelijkwaardig en kunnen we voor r het gemiddelde nemen, dus $\frac{1}{2}(p + q)$.

De aantallen winstmogelijkheden zijn dan:

voor B : $\frac{1}{2}(q - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q + 1) + p - 1 = \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}q - \frac{1}{2}$

voor A : $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - p + 1) + p = \frac{3}{4}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}$

voor C : $\frac{1}{2}(q - p)$

b $r = q + 1$

In dat geval zijn de aantallen winstmogelijkheden:

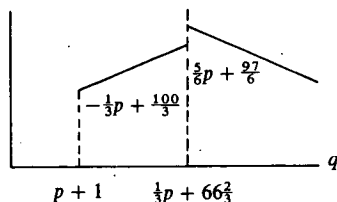
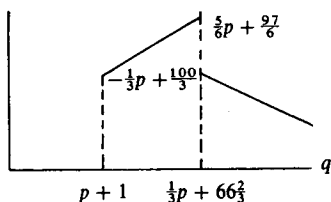
voor B : $\frac{1}{2}(q - p + 1)$

voor A : $\frac{1}{2}(q - p + 1) + p = \frac{1}{2}(q + p + 1)$

voor C : $100 - q$

Wat kiest C ?

Als $\frac{1}{2}(q - p) > 100 - q$, dus als $q > \frac{1}{3}p + 66\frac{2}{3}$, kiest C de eerste mogelijkheid, anders de tweede. Hier de grafiek van het aantal winstmogelijkheden van B als functie van q .



De eerste grafiek geldt voor $15 \leq p \leq 25$, de tweede voor $p \leq 14$.

In de eerste grafiek zal q gekozen worden zo dicht mogelijk rechts van $\frac{1}{3}p + 66\frac{2}{3}$, in de tweede zo dicht mogelijk links ervan.

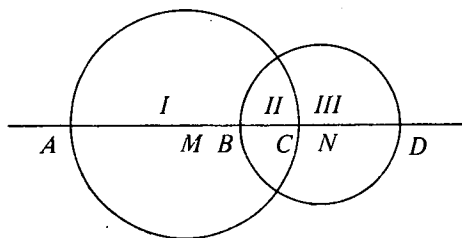
Bij $p = 25$ wordt dus $q = 76$ en het aantal winstmogelijkheden voor A $38\frac{1}{2}$. Bij dalende p neemt dit aantal af.

Bij $p = 14$ wordt $q = 71$. Dit levert voor het aantal winstmogelijkheden van A 43. Bij dalende p neemt dit aantal weer af.

Optimaal is dus voor A het getal 14 (of 86) te kiezen. Zijn aantal winstmogelijkheden is dan 43. B kiest 71 en C 72. Beide hebben 29 winstmogelijkheden.

422. De centraal MN deelt de drie vlakdelen I, II en III middendoor.

Een cirkel die I middendoor deelt, zal lijnstuk AB in een inwendig punt snijden. Een cirkel die ook II en III middendoor deelt, snijdt ook BC en CD in een inwendig punt. Het is niet mogelijk dat een cirkel de lijn MN in drie punten snijdt. En dus ook niet dat hij I, II en III middendoor deelt.



Boekbesprekingen

Daniel I. A. Cohen, *Basic technique of combinatorial theory*, John Wiley & Sons, 297 blz., £ 11.30 (\$ 20.65).

Combinatorial theory is widely regarded as the most delightful branch of mathematics. This is because of its double nature: it contains the cleverest proofs in all of abstract reasoning and yet it has the most comprehensive range of applicability of any contemporary science.

Met deze ontboezeming begint de schrijver zijn boek.

Een boek dat een vrij unieke plaats in de literatuur inneemt: er zijn maar weinig werken die zich volledig wijden aan telproblemen in de meest uitgebreide zin.

Een opsomming van de inhoud geeft een overzicht van deze uitgebreidheid:

introduction (counting, one-to-one correspondence, parity, problems); binomial coefficients (permutations and combinations, identities, applications, sampling with replacement, problems); generating functions (introduction, Fibonacci numbers, more generating functions, partitions, more recurrence relationships, problems); advanced counting numbers (multinomial coefficients, Stirling numbers, Catalan numbers, problems); two fundamental principles (the Dirichlet principle, Ramsey's theorem, the principle of inclusion - exclusion, problems); permutations (cycles, parity, conjugacy classes, orbits, Polya's theorem, problems); graphs (paths, trees, Cayley's formula, the enumeration of graphs, Eulers formula, problems); Appendix: Mathematical induction.

Als voorkennis wordt enige, zeer geringe, kennis van de analyse veronderstelt.

Naast het bereiken van *telresultaten* schenkt de schrijver speciale aandacht aan *telmethoden*. Dat is de reden dat hier en daar diverse problemen van meer dan een zijde belicht worden. Bij de introductie van de verschillende onderwerpen werkt de schrijver consequent van het bijzondere naar het algemene: een goede methode om de belangstelling te wekken, om afschrikkingsverschijnselen te voorkomen, om te demonstreren hoe wiskunde werkelijk ontstaat.

De opzet van dit boek lijkt mij uitstekend, de uitwerking van de genoemde beginselen prima. Het komt mij voor dat hiermee een boek ontstaan is dat ook in ons land door studenten in de beginfase van hun studie bestudeerd zou moeten worden. Een boek dat ik belangwekkend genoeg acht om iedere wiskundeleraar aan te bevelen.

Het geheel is prima uitgevoerd. Al met al de prijs naar mijn mening zeker waard.

W. Kleijne

Woulk, A., *A course of applied functional analysis*, New York etc. 1979, 443 p., \$ 33.20.

De functionaalanalyse is in de eerste decennia van onze eeuw tot ontwikkeling gekomen, hoewel reeds in de tachtiger jaren van de 19e eeuw aanzetten moeten worden gesignaleerd (Volterra). Verschillende theorieën, zoals de theorie van de integraalvergelijkingen en de theorie van de oneindige stelsels van lineaire vergelijkingen, hebben er toegeleid dat men algemenere functies ging onderzoeken dan de klassieke voorheen bestudeerde functies, dat zijn functies gedefiniëerd op een deelverzameling van een euclidische ruimte met waarden in $\mathbb{R}$. Deze algemenere reëelwaardige functies zijn gedefiniëerd op verzamelingen (ruimten) van functies; zij worden functionalen genoemd. In een volgend stadium kwam men tot de studie van functionalen, gedefiniëerd op genormeerde vectorruimten (Banachruimten) en, algemener, tot de studie van afbeeldingen - dan operatoren genoemd - van een dergelijke ruimte X in een ruimte Y . Deze functionalen en operatoren kunnen lineair dan wel niet lineair zijn. De functionaalanalyse is tot een omvangrijke discipline uitgegroeid.

Werd deze theorie aanvankelijk ontwikkeld als een axiomatische theorie, met behulp waarvan onder meer zekere existentiële stellingen kunnen worden bewezen, later bleek zij een onmisbaar apparaat te zijn voor de ontwikkeling van theorieën van toegepast wiskundige waarbij, naast existentie, constructiviteit belangrijk is, zoals de approximatietheorie, programmeringsproblemen, controletheorie, optimaliseringsproblemen, numerieke analyse.

Daarbij komen problemen aan de orde omtrent de approximatie van oplossingen van functionaal-vergelijkingen $F(x) = 0$, oplossingen van vergelijkingen $F(x) = y$, bepalingen van minima van functionalen. Men denke bijvoorbeeld aan fysische theorieën waarbij kwesties van minimale energie een rol spelen.

Dit boek is, met het oog op de toepassingen op de genoemde onderwerpen, speciaal gewijd aan de behandeling van problemen van dit type met behulp van het apparaat van de functionaalanalyse. Men vindt o.a.: theorie van de approximatieve methoden met toepassingen, minimalisatie van kwadratische functionalen, differentiatie van niet-lineaire operatoren (de Fréchet- en de Gâteaux differentiaal), convexiteit in verband met contrôle-theorie, ontwikkeling van algoritmen.

Toepassingen hiervan op de genoemde gebieden worden aangegeven. In afzonderlijke hoofdstukken wordt de algemene theorie van de Banachruimtes en de theorie van de operatoren behandeld, echter slechts voor zover dat voor het doel nodig is. Dit neemt echter niet weg dat voor de bestudering van dit specialistische boek een grondige wiskundige voorkennis is vereist. Het boek bevat vele opgaven; sommige daarvan dienen niet slechts tot illustratie van de behandelde onderwerpen, doch hebben een meer theoretische karakter. Er is een uitvoerige bibliographie. In aanmerking dat daarin enkele klassieke werken zijn opgenomen (Riesz, Banach), had naar rec.'s mening vermelding van een klassiek boek van P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Paris 1922), dat reeds veel bevat over de analyse van functionalen, op zijn plaats geweest.

A. F. Monna

G. Meinardus, G. Merz, *Praktische Mathematik I*, Bibliographisches Institut, Mannheim - Wien - Zürich, 1979, 337 blz.

Dit boek is een inleiding in de numerieke wiskunde. In dit eerste deel worden behandeld: polynoom-interpolatie, rationale en trigonometrische interpolatie, splines, numerieke kwadratuur, de discrete Fourier transformatie (met de Fast Fourier Transform) en het oplossen van een vergelijking in één onbekende. Onder deze onderwerpen neemt de FFT een aparte plaats in: het principe van de FFT wordt op een originele wijze uitgelegd, maar het grote belang van deze transformatie komt nauwelijks uit de verf. Hierbij sluit een ander punt van kritiek aan: de auteurs behandelen vele methoden maar zij behandelen niet de implementatie van de methoden op een computer. Zo zoekt men tevergeefs naar onderwerpen als automatische integratie, stopcriteria etc.

Naast deze tekortkomingen biedt het boek veel positiefs. De stellingen worden duidelijk geformuleerd. De bewijzen zijn soms lang, maar volledig. De resultaten worden duidelijk toegelicht. De vele numerieke voorbeelden dragen hiertoe bij. Deze numerieke voorbeelden zijn vrijwel alle na te rekenen op een eenvoudige zakrekenmachine. Ook wordt kort aangeduid hoe men de functies $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\log$ en m -de machts wortel kan benaderen.

Het boek veronderstelt als voorkennis calculus, enige lineaire algebra en enige complexe functietheorie.

Het is een goed boek voor wie de wiskundige achtergrond van enkele algoritmen uit de numerieke wiskunde wil leren kennen.

M. van Veldhuizen

Mededelingen

UITNODIGING

Wij (de docenten van de Gemeentelijke Dag/Avondschool voor Volwassenen voor MAVO, HAVO en ATHENEUM (dagafdeling)) hebben er al een tijd behoefte aan om met collega's van andere dagscholen te praten over hun en onze ervaringen met deze vorm van onderwijs.

Daarom hebben we het plan opgevat om een dag te organiseren, waarop we elkaar kunnen ontmoeten. De bedoeling is dat we 's ochtends per sectie met elkaar praten over punten die ons vak betreffen. We verwachten dat uit die gesprekken ook zaken van algemene aard naar voren zullen komen. We denken aan dingen als bijv.:

- het probleem van de afvallers
- de rechtspositie van docenten
- de wenselijkheid van studiebegeleiding.

Het is de bedoeling dat we 's middags over dergelijke dingen praten in groepen.

De dag zal worden gehouden op *zaterdag 11 oktober om 10 uur*.

Plaats:

Gemeentelijke Dag/Avondschool voor Volwassenen voor MAVO, HAVO, ATH.

Hoeken 3, Amsterdam-Osdorp, tel.: 100401.

We zouden het op prijs stellen als u zich zou willen aanmelden, zodat we weten op hoeveel mensen we kunnen rekenen.

Gemeentelijke Dag/Avondschool voor Volwassenen voor MAVO, HAVO, ATHENEUM t.a.v. commissie Interscholaire

Postbus 96062, 1006 EB Amsterdam.

VAKANTIECURSUS VOOR LERAREN IN DE EXACTE VAKKEN EN ANDERE BELANGSTELLENDEN te houden in EINDHOVEN op 21 en 22 oktober 1980

De vakantiecursus voor leraren, die dit jaar door de Stichting Mathematisch Centrum in Eindhoven zou worden georganiseerd op 21 en 22 augustus, moest helaas geannuleerd worden, doordat het aantal deelnemers tengevolge van de vakantiespreiding te gering was.

Dank zij de medewerking van velen is het ons gelukt deze cursus in Eindhoven nu te houden in de herfstvakantie en wel op *21 en 22 oktober 1980* in het Hoofgebouw van de Technische Hogeschool (ingang zuidzijde), vloer 6.09.

ONDERWERP: 'VERTELLINGEN OVER TELLINGEN'

Het programma zal er als volgt uitzien:

1e dag:

- | | |
|-------------|---|
| 10.00-11.00 | Prof. dr. H. J. A. DUPARC (Technische Hogeschool Delft)
<i>Inleiding en historische ontwikkeling (Fibonacci, Euler, Cayley, Lucas, Mac Mahon, Redfield, Polya)</i> |
| 11.30-12.30 | Dr. F. GÖBEL (Technische Hogeschool Twente) |
| 14.00-14.45 | <i>Teltechnieken (Incidentiestructuren, dubbel tellen, inclusie/exclusie, genererende functies, recurrente betrekkingen, Fibonacci-, Lucas- en Catalaanse- getallen, permanenten)</i> |
| 15.15-16.15 | Dr. ir. H. C. A. van TILBORG (Technische Hogeschool Eindhoven)
<i>Woorden tellen (Toepassingen in de coderingstheorie).</i> |

2e dag:

- | | |
|-------------|---|
| 9.30-10.30 | Prof. dr. N. G. de BRUIJN (Technische Hogeschool Eindhoven) |
| 11.00-12.00 | <i>Stelling van Polya (zie Selecta Mathematica III, Heidelberger Taschenbuch Bd. 86, p. 1-26, 1971)</i> |
| 13.30-14.30 | Prof. dr. N. G. de BRUIJN |

Tellingen van bomen en boomvormige moleculen (zie Selecta Mathematica III, Heidelberg Taschenbuch Bd. 86, p. 1-26, 1971).

15.00-16.00 Prof. dr. H. W. LENSTRA jr. (Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam)
Talstelsels (p-adische getallen).

SYLLABUS:

Aan diegenen, die zich voor deze cursus aanmelden, zal de syllabus tijdig worden toegezonden.

AANMELDING:

Inlichtingen en aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij de administratie van de Stichting Mathematisch Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, tel. 020-5929333.

N.B. Degenen, die zich voor de oorspronkelijk te organiseren cursus op 21 en 22 augustus reeds hebben opgegeven en die opgave wensen te handhaven, worden verzocht dit aan de administratie te melden.

Jaarvergadering/Studiedag van de Ned. Ver. van Wisk. Leraren

tijd/plaats

Deze jaarvergadering/studiedag zal gehouden worden op zaterdag 8 november 1980 in het gebouw van de S.O.L., Archimedeslaan 16, 3584 BA Utrecht.

maaltijd

Voor deelnemen aan de lunch wordt u verzocht vóór 15 oktober f8.50 over te maken op giro 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

thema

Voor het studiedeel van de dag is de didaktiekcommissie van de NVWL verantwoordelijk. Zij heeft als thema gekozen: *Gonio als invalshoek*.

werkwijze

U zult kunnen luisteren naar een *lezing* over goniometrie. Er zal in *werkgroepen* vanuit verschillende invalshoeken met goniometrie gewerkt worden. En er zal bovendien gelegenheid zijn *te praten met collega's* over hun 'vondsten' op het gebied van lesgeven over de goniometrie.

programma

- 9.30 aankomst en koffie
- 10.00 huishoudelijk deel waarin de jaarrede
- 10.30 inleiding over de samenhang van de verschillende werkgroepen
- 11.00 werkgroepen over de onderwerpen:
 - Gonio en taal
 - Gonio en de omgang tussen leraar en leerling
 - Vlieg er eens in
 - Landmeetkunde
 - Periodieke functies
- 12.15 lunch en markt
- 14.00 lezing over de geschiedenis van de gonio
- 15.00 werkgroepen (zie boven)
- 16.15 rondvraag en sluiting

oproep voor de markt

Er ligt veel ervaring t.a.v. dit onderwerp bij wiskunde-docenten opgeslagen. Wij verwachten dat er 'vondsten' zijn gedaan. B.v. op het gebied van leermiddelen (sinuskar, hoogtemeter, ...) of op het gebied van de didaktiek.

Wij nodigen u uit contact met ons op te nemen als u hiervan iets wilt laten zien aan uw collega's op de markt.

volgende aankondiging

U zult, via Euclides, nog nader geïnformeerd worden over de inhoud en werkwijzen van de verschillende werkgroepen.

de didaktiekcommissie van de NVWL

secretariaat: H. Pouw, Jac. v. Ruysdaelstraat 112, Utrecht.

Stichting TEACHIP opgericht



De ontwikkelingen in de maatschappij met betrekking tot de inschakeling van de microelektronica (de 'chip') kunnen door het onderwijsveld niet langer worden genegeerd. Op talrijke plaatsen zijn individuele en groepen leerkrachten reeds bezig met ontwikkelingswerk. Er zijn drie ontwikkelingen te signaleren:

- microelektronica, met name de microcomputers kunnen een interactief medium vormen in de klas. Daarom zal de docent zijn pedagogische normen en didactische vaardigheden moeten aanpassen aan deze veel gecompliceerdere leersituatie;
- de bestaande sociale relaties in de klas zullen veranderen als er van computers gebruik gemaakt gaat worden. Opgepast moet worden dat deze veranderingen geen verslechteringen zullen zijn;
- de computer komt via de consumentenmarkt, via de hobby in de school. Het professioneel omgaan met computers in de klas vergt een, wellicht ten dele autodidactische, bijscholing. Hiervoor moeten know how en middelen gevonden worden.

TEACHIP wil deze drie ontwikkelingsprocessen stimuleren door ten aanzien van het didactische en administratieve gebruik van elektronische rekentuigen in de school te inventariseren, coördineren, informeren, adviseren en ontwikkelen.

Als rechtsvorm is gekozen voor een stichting omdat deze slagvaardig optreden toestaat en continuïteit in behoorlijke mate garandeert. Ruimte aan persoonlijke initiatieven en inspraak van werkers in het onderwijsveld wordt mogelijk gemaakt door een Raad van Advies die onder meer zal bestaan uit begunstigers. Door jaarlijkse betaling van een zeker bedrag kan eenieder begunstiger worden en zo profiteren van het werk dat TEACHIP verricht.

Uit de vele reacties op eerdere berichten in de pers en de daarop volgende informatieve vergadering van 21 juni jl. zijn een aantal interessevelden in het onderwijsveld duidelijk geworden:

- men wil informatie
- men maakt al software (programma's) en zoekt naar mogelijkheden om deze uit te wisselen
- men wil leren programmeren, met de computer in de klas leren omgaan en leergangen computerkunde voor de diverse sectoren van het voortgezet onderwijs alsmede het basisonderwijs gaan maken
- men wil adviezen over apparatuur
- men wil weten welke andere instituties werkzaam zijn of geïnteresseerd zijn in toepassing van elektronische rekentuigen in de school

TEACHIP stelt zich daarom voor haar begunstigers te groeperen in de afdelingen: -informatieverwerving en verspreiding; -software en courseware ontwikkeling; -cursussen en leermiddelen; -hardware. Voorts is het waarschijnlijk zinvol de begunstigers regionaal te gaan organiseren.

Secretariaat: P.C. Hooftlaan 46, 3705 AJ Zeist

INHOUD:

J. van Maanen: Het hangt aan de muur en het klikt	41
P. G. J. Vredenduin: Verzamelingen, functies, relaties en het HEWET-rapport	49
A. Vermandel: Wiskundig denken in de klas	55
De achtste wiskunde-olympiade in de Verenigde Staten	65
J. K. Annot, E. J. Pol: Hoe kraak ik een databank?	67
Recreatie	74
Boekbesprekingen	76
Mededelingen	78

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

- J. K. Annot, Kerkewijk 56, 3901 EJ Veenendaal.
- J. van Maanen, Pieter de Hooghstraat 15, 3583 RG Utrecht.
- E. J. Pol, G. Terborchstraat 17, 3904 TE Veenendaal.
- A. Vermandel, Wilgenlaan 34, B 2610 Wilrijk (B).
- P. G. J. Vredenduin. Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.