

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

**55e jaargang
1979/1980
no. 9
mei**

SPECIAL

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 20,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Voorwoord

In de aankondiging van de plannen van de redactie voor de lopende jaargang deelden wij u mee dat er, afgezien van het examennummer, geen bijzondere nummers te verwachten zouden zijn. Wij zijn blij u dit nummer te kunnen aanbieden dat deze mededeling logenstrafte: een speciaal nummer dat u verslag doet van de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 27 oktober 1979 onder het motto: 'Het zijn de kleine dagelijkse dingen die het hem doen', zoals die was voorbereid door de didaktiekkommissie van de Vereniging. Deze studiedag bestond na een inleiding op de dag uit een aantal werkgroepen met de namen: blikwisseling, het teruggeven van een proefwerk, kleine redeneringen, het gebruik van de geo-driehoek en merkwaardige producten. Dit geheel werd onderbroken door een lezing over π .

In dit nummer vindt u de inleiding, die als een leeswijzer te beschouwen is, de inleidingen bij de werkgroepen blikwisseling, het teruggeven van een proefwerk en gebruik en misbruik van de geodriehoek en de lezing over π .

In de inleiding wordt natuurlijk ook naar de werkgroepen verwezen waarover u niets in dit nummer aantreft. Dat u niets over deze werkgroepen aantreft komt door de snelheid waarmee we dit nummer hebben moeten maken. Op de dag zelf is er door een deelnemer naar verslag in Euclides gevraagd. Er is toen toegezegd dat dit bekeken zal worden. Dit bekijken en het bewerken van de inleidingen voor publikatie heeft tijd gekost. De redactie heeft toen in overleg met de didaktiekkommissie gekozen voor publikatie in de jaargang 79/80 en niet voor volledige verslaggeving.

Wij hopen in de toekomst de samenwerking met de didaktiekkommissie zo te verbeteren dat met nummers als dit al rekening gehouden kan worden bij het maken van de plannen voor een nieuwe jaargang.

De redactie

Het zijn de kleine dagelijkse dingen die het hem doen*

HARRIE BROEKMAN

Mij is gevraagd u enige toelichting te geven op het thema van deze dag; iets dat ik maar al te graag doe. Waarom ik dat graag doe hoop ik u duidelijk te maken via een aantal kleine (?) alledaagse (?) dingen die het 'm voor mij persoonlijk doen. Ik praat dus niet direct over kleine alledaagse dingen die het hem voor de leerlingen doen, zoals het vergeten hebben van brood, het kwijt zijn van de jas, een onvoldoende repetitie terugkrijgen, etc.

Voor ik aan mijn persoonlijke kleine dagelijkse dingen begin, wil ik u echter een tweetal uitspraken voorleggen waarmee al iets aangegeven wordt t.a.v. het thema van deze dag.

De eerste uitspraak is van de auteur Sawyer die in het boekje 'Wiskunde zonder omslag' schrijft: *de wiskunde is moeilijk wanneer zij wordt aangezien als iets dat geheel buiten het dagelijkse leven staat.*

De tweede uitspraak kwam ik tegen in een artikel over kinderboeken, en heette een oud Chinees spreekwoord te zijn. Het luidde als volgt: *'Een rijstkom mag niet te klein zijn voor de hand die hem moet omvatten'*. Het omgekeerde is echter even waar: *hij mag evenmin te groot zijn.*

Hopelijk proeft u in deze twee uitspraken al iets van de achtergrondideeën van de samenstellers van deze dag, zodat ik me daar niet meer zo erg over hoeft te bekommeren. Dat geeft me namelijk de gelegenheid om u iets te vertellen over een aantal kleine (?) dagelijkse (?) dingen die het hem voor mij persoonlijk deden gedurende de laatste paar weken.

1) Als eerste wil ik kwijt de opmerking van een mo-cursist. Hij had – evenals de rest van de groep – de opdracht meegekregen om motieven te verzamelen vóór en tegen het voor het bord roepen van leerlingen. Zijn opmerking luidde: 'Ik ben opnieuw naar de leerlingen gaan kijken toen ze voor het bord stonden en schrok van hun gespannen gedrag. Ik heb ze toen maar weer eens uitgelegd waarom ik wie op welk moment naar voren liet komen. Maar ik zal daar toch nog vaak met ze over moeten praten, want ze *ervaren het toch steeds anders dan ik het bedoel*'.

* Inleiding gehouden op de thema-dag van de N.V.v.W. te Utrecht op 27 oktober 1979, met als motto 'het zijn de kleine dagelijkse dingen die het hem doen'.

2) Ten tweede zou ik willen noemen het didaktisch werkstuk van J. v. d. Berg uit Elst. De titel luidde 'Affectieve doelstellingen in het wiskundeonderwijs'. Het deed mij wat, omdat hij t.b.v. dat werkstukje een onderzoekje van Kremers dat in Euclides (jrg. 54 no. 8, april '79) beschreven is, in zijn eigen klassen herhaalde en niet zomaar vriendelijk glimlachend naast zich neer legde.

Misschien bent u benieuwd naar enkele van zijn conclusies. Een wil ik u er in ieder geval geven: 'Het erg negatief uitvallen van de subschaal "plezier en motivatie" kan veroorzaakt worden door het feit dat er bij het wiskunde-onderwijs nog te weinig aandacht wordt besteed aan de motivatie'. Hij verwijst hier ook naar Van Hiele die in zijn boek 'Begrip en Inzicht' op pag. 47 schrijft: 'In het onderwijs wordt nog weinig gedaan aan het zoeken naar de juiste motivatie. Wie het onderwijs wil vernieuwen, kan op dit terrein nog belangrijk werk verrichten'.

Ach ja, we weten het wel, maar daarom is het nog niet makkelijk met dat weten iets te doen.

3) Wie wel iets deden waren opnieuw twee leraren, Heykoop en Bohmer, die een didaktisch werkstuk maakten over 'Motivatie'. Een belangrijk deel daarvan werd in beslag genomen door een onderzoek bij elkaars leerlingen over hoe die hun eigen leraar zagen.

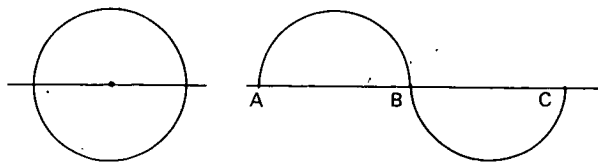
Kunt u zich dat voorstellen: U laat een collega van een andere school bij úw leerlingen een onderzoekje doen om er achter te komen hoe ze ú als leraar ervaren.

Wat ik in deze drie gevallen zo belangrijk vond was het feit dat hier mensen aan het werk waren, die probeerden de bekende weg kritisch te bekijken, eventueel te doorbreken. Ze deden dit door naar hun leerlingen te kijken en te luisteren, om van daar uit energie op te doen voor... ja, voor wat eigenlijk?

Nou misschien wel om naar de 'Grundkurs Mathematik' te kijken op Duitsland II. Ik kan u dat van harte aanbevelen als u een keer wilt meemaken hoe een stukje strak opgezette wiskunde in hoog tempo gepresenteerd wordt door een vlot geklede, licht kalende professor, die gebruik maakt van schoolbord, viltbord, wegklappanelen, foto's etc.

4) Maar daar wilde ik het nu niet over hebben, wel over een vierde voorbeeld van een 'klein ding dat het hem doet'! Tussen de axiomatic en de reële getallen vertelde de professor op Duitsland II namelijk iets over π dat mij hogelijk boeide: nl. dat π gelijk is aan 2.

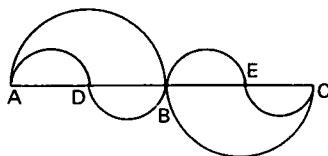
Geloof u dat ook? Nou, kijk dan zelf maar.



Omtrek cirkel is $2\pi r$; kies $r = \frac{1}{2}$ en verschuif de onderste helft van de cirkel naar

rechts. Via de boog is de afstand van A via B naar C uiteraard gelijk aan π . Via de rechte lijn is deze afstand 2.

Kies nu een cirkel met straal $\frac{1}{4}$ en plaats deze op de volgende wijze binnen de figuur.



De afstand van A via D, B en E naar C via de boog is opnieuw gelijk aan π . Kies nu cirkels met straal $1/8$, $1/16$, etc. en het zal u duidelijk zijn dat de boogjes steeds dichter naderen tot de rechte AC, zodat we kunnen conkluderen dat π gelijk is aan 2.

Toen ik dat van de week aan een wiskunde-leraar vertelde zei hij 'ja, maar zo doen we dat niet'.

5) Aan de opmerking – zo doen we dat niet – moest ik denken toen een meisje in 2-havo op het bord schreef $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{5}x + 7$ $\frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x + 2$ en toen verder ging met $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x = 2$.

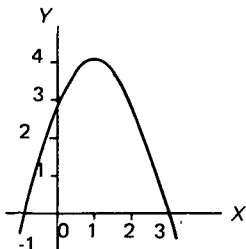
De hospitant die op dat moment de les verzorgde liet de leerlinge dit uitvegen en verlangde van haar dat ze eerst de breuken zou wegwerken. Goed bedoeld weliswaar, maar oh wat een star patroon. Mogen leerlingen dan niet zelf denken, zelf een probleem aanpakken?

Natuurlijk krijg je dan wel eens fouten en redeneringen waar je als leraar niet op bedacht bent, maar maakt dat het leven van alle dag niet meer aantrekkelijk?

Langzamerhand moet ik komen tot een afronding van mijn verhaal en u iets vertellen over de werkgroepen die zo dadelijk gaan starten.

6) Eerst wil ik u echter nog één voorbeeld geven waar ik persoonlijk erg blij mee was, maar dat mij ook wel wat teleurstelde.

Het kwam van mijn dochter Daphne. Bij haar schoolonderzoek zat de bekende vraag naar het berekenen van de top van de grafiek van de functie $x \rightarrow -x^2 + 2x + 3$. Zoals veel visueel ingestelde leerlingen die zich door het onderwijs niet al te zeer van de wijs hebben laten brengen, had zij eerst de grafiek getekend (via substitutie van de waarden -1 , 0 , 1 , 2). Dat leverde haar het volgende plaatje.



Tevens was ze kwadraat gaan afsplitsen, hetgeen haar via een rekenfout de vorm $-(x-1)^2 + 5$ opleverde.

Als antwoord noteerde zij: De top is (1,4) of (1,5).

Toen ik haar vroeg waarom ze dat opgeschreven had zei ze 'óf de tekening is goed, óf de berekening'. Toen ik haar vroeg wat ze als antwoord zou geven als ze moest kiezen aarzelde ze geen moment. (1,4) natuurlijk, want het is een parabool en de symmetrie-as moet bij 1 lopen, omdat 0 het getal 3 oplevert en 2 ook.

Als iemand weet hoe zij dat volgende keer zó kan opschrijven dat de leraar haar voor de klas een complimentje geeft dan hoor ik dat graag, want ze heeft best behoefte aan ook eens een compliment in het bijzijn van de andere leerlingen.

In de hier door mij genoemde 'kleine dagelijkse dingen die het hem voor mij deden de laatste paar weken' zaten een aantal boodschappen verstopt die hopelijk een beetje uitgekomen zijn. Voor alle zekerheid pak ik ze toch nog even op.

In voorbeeld 1, 2, 3 klonk hopelijk door het belang van het lef hebben om te luisteren naar en te kijken naar de leerlingen en onderwijszaken eens van een andere kant te bekijken.

U kunt daarvan iets terug vinden in de groepen 'blikwisseling', 'het teruggeven van een proefwerk' en 'kleine redeneringen'.

Voorbeeld 5 gaf aan dat we vaak goed bedoeld in een star patroon zitten met onze wiskunde. Als we daar uit willen, hebben we erg veel behoefte aan goede ideeën.

Het lijkt me dat dat best aan z'n trekken komt in de groepen 'geodriehoek' en 'merkwaardige produkten'.

Voorbeeld 4 was bedoeld als een tussendoortje en verwijst naar de causerie van Jan Hogendijk over het getal π .

En het laatste voorbeeld? Ziet u dat maar als een uiting van een bezorgde vader, die hoopt dat de wiskunde-leraren van zijn kinderen hier een plezierige dag zullen hebben.

Blikwisseling

GERARD DOEVENDANS EN JOOP VAN DORMOLEN

1 De term blikwisseling is afkomstig van professor Freudenthal. In eerste instantie is het te zien als een intuïtieve vaardigheid bij het oplossen van problemen. Het is echter meer dan dat. Dat zal verderop toegelicht worden. Eerst zal duidelijk gemaakt worden wat we er hier onder zullen verstaan.

Een voorbeeld.

Twee treinen bevinden zich op een afstand van 100 km van elkaar en rijden naar elkaar toe met een snelheid van elk 80 km/u. Op het moment dat ze 100 km van elkaar af zijn start een vlieg van de voorkant van een van de treinen en vliegt met een snelheid van 150 km/u naar de andere trein. Zodra hij die andere trein bereikt vliegt hij met dezelfde snelheid terug. Zodra hij de eerste trein bereikt vliegt hij weer heen. Enzovoort. Aangenomen dat de treinen op hetzelfde spoor rijden en dus botsen en dat dus de vlieg tussen de treinen verpletterd zal worden, hoeveel km heeft die vlieg er dan in totaal opzitten?

De redactie van het vraagstuk schijnt de oplossingsmethode te suggereren: bereken achtereenvolgens elk van de stukken die de vlieg aflegt. Dat levert een oneindige rij. Sommeer die rij. (Aan het eind van dit artikel staat een oplossing op deze manier.)

Men kan zich ook losschudden van de gesuggereerde oplossingsmethode en niet naar de beweging van de vlieg, maar naar die van de treinen kijken, en niet naar de afgelegde weg, maar naar de tijd, die daarover is gedaan: De tijd tussen begin en de botsing van de treinen is ook de tijd die de vlieg heeft mogen leven. Reken dan uit hoeveel hij in dat korte leven heeft gevlogen.

De botsing vindt plaats na $\frac{a}{2v}$ uur. In die tijd heeft de vlieg een afstand afgelegd van $\frac{a}{2v} \cdot p$ km.

Door blikwisseling is het probleem ineens veel eenvoudiger op te lossen: in plaats van te kijken naar de vlieg en de afstanden die hij aflegt, wordt er gekeken naar de treinen en de tijd die zij rijden.

Een ander voorbeeld, afkomstig van Freudenthal:

Als de koster in zijn woonkamer voor het raam staat kan hij op de klok van de kerktoeren kijken. Als hij achterin zijn kamer staat kan hij de klok niet zien. Waar kan hij in de kamer de klok nog net wel zien.

Als dit probleem opgelost moet worden op de manier, die door de vraagstelling wordt gesuggereerd, kan dat alleen empirisch: Laat de koster een beetje heen en weer lopen en dan vindt hij de goede plek wel. Als je er een meetkundig probleem van wilt maken met een exacte oplossing, dan moet je niet naar de koster kijken, maar in de klok gaan zitten en van daaruit in de kamer van de koster kijken. Een mooi voorbeeld van blikwisseling in figuurlijke en tevens letterlijke betekenis.

Het komt er dus op neer, dat de gegevens en het gevraagde op een andere manier geordend worden, dan door de vraagstelling wordt gesuggereerd.

Het volgende verhaal schijnt waar gebeurd te zijn. Het is een prachtig voorbeeld van blikwisseling.

In een kantoorgebouw is de lift tijdens de spitsuren overbelast. Daardoor ontstaan wachttijden en ergernis bij de mensen die in het gebouw werken. Het probleem suggereert een oplossing in de richting van het verminderen van de wachttijden door bijvoorbeeld uitbreiding van het aantal liften, of een grotere spreiding in begin- en eindtijden van de kantooruren. De oplossing werd echter gevonden door blikwisseling: De ergernis ontstaat niet door het wachten, maar door het gedwongen niets doen tijdens het wachten. De eigenaars van het kantoorgebouw lieten naast de liften grote spiegels ophangen. De ergernis werd aanzienlijk minder.

Nu komen dergelijke spectaculaire voorbeelden als hierboven gegeven zijn in de praktijk van het wiskundeonderwijs zelden voor. Ze zijn dan ook gegeven om het begrip helder te maken. Blikwisseling zelf daarentegen komt weldegelijk veel voor, juist in de kleine dagelijkse dingen die het hem doen.

In tal van simpele (die vinden wij leraren tenminste simpel) situaties ontmoet men blikwisseling. Het is de bedoeling om vandaag een aantal van dergelijke situaties op te sporen. Het voorbeeld van de kerktoeren was er al zo een.

Hier komt nog een belangrijke:

Een groot aantal vergelijkingen, zoals $x + 5 = 8$, $x - 2 = 11$, $3x = 15$, kan worden opgelost op de manier zoals de vraagstelling suggereert: wat moet je bij 5 optellen om 8 te krijgen, enz. Je hoeft daarbij niet een optel-, aftrek- of vermenigvuldigregel te hanteren. Eigenlijk doe je niets anders dan slim raden. Met deze directe methode kun je zelfs een vergelijking als $3x + 2 = 15$ oplossen, door twee keer een soortgelijke vraag te stellen.

Als je dan de vergelijking $x + 137 = 281$ voor je krijgt, merk je dat je intuïtie te kort schiet. Je kunt niet meer slim raden. Je moet een nieuwe regel verzinnen. Dat kan met de wisselgeldmethode: tel eerst bij de 7 zoveel dat je een 1 bij de eenheden krijgt: 4 erbij geeft 141. Dan 40 erbij om 8 in de tientallen te krijgen: 40 erbij geeft 181. Dan nog eens 100 erbij om een 2 in de honderdtallen te krijgen. In totaal komt er dus 144 bij. Dus $x = 144$. Hier is er nog geen sprake van blikwisseling. Het is eerder een uitbreiding van de directe methode.

Veel leerlingen komen hier overigens spontaan tot blikwisseling: Trek van 281 137 af.

Waarom is dit blikwisseling?

Omdat deze werkwijze niet overeenstemt met de in eerste instantie gesuggereerde: in plaats van kijken naar 137, welk getal aangevuld moet worden tot 281, ga je kijken naar 281. Dat getal moet afgebroken worden tot 137. Door de blikwisseling verkeert optellen in aftrekken.

Formeel zijn $x + 137 = 281$ en $x = 281 - 137$ gelijkwaardig. Maar dat is een constatering achteraf. Het is juist door blikwisseling, dat we de gelijkwaardigheid kunnen begrijpen.

Hieronder worden nog meer voorbeelden gegeven.

We komen nu terug op wat we in de aanhef hebben gezegd en aangekondigd. Op het eerste gezicht lijkt blikwisseling een intuïtieve vaardigheid: sommigen doen het spontaan en dat zijn dan de mensen met een wiskundeknobbel; anderen komen er niet aan toe en leren de regel, die het gevolg is van blikwisseling. Deze laatsten worden wellicht versterkt in hun overtuiging, dat wiskunde voor hen te hoog gegrepen is.

Daar zijn twee aanmerkingen op te maken:

In de eerste plaats komt blikwisseling ook voor op plaatsen waar het niet moet gebeuren. Dan leidt blikwisseling helemaal niet tot oplossing van het probleem, of tot een onjuiste oplossing.

Een leraar wilde zijn leerlingen in 2 havo (nog weer eens) duidelijk maken dat je teller en noemer van een breuk niet ongestraft met hetzelfde getal kunt vermeerderen. Hij ging daarbij uit van een stuk cake, die in vier stukken verdeeld was.



Meneer *A* had meer betaald voor de cake, dan meneer *B* en daarom kreeg hij drie stukken en meneer *B* één. Toen kwam hij met zijn probleemstelling: 'Stel nu eens dat de cake niet in vier, maar in zes stukken is verdeeld. Dan zegt meneer *A*: "Zes min vier, dat is twee. Er komen twee stukken bij. Die zijn dus voor mij, dus ik krijg vijf stukken." Wat vind je daar nu van?' Natuurlijk kwamen er protesten. Dat was oneerlijk. Er werden diverse voorstellen gedaan. Eén ervan: Geef elk één stuk erbij. Een ander: geef ze elk eerst twee stukken, dan kunnen ze er elk één bij krijgen. Een derde oplossing was een echte blikwisseling: Die ging niet uit van de chronologische handelingen waarvan in het probleem sprake was, maar van het eindresultaat: de verdeling van de zes stukken. De oplossing was geniaal: Geef ze er nog een cake bij, dan heb je twaalf stukken en die kun je wel zo verdelen als het moet: meneer *A* krijgt er negen en meneer *B* drie.

In de opgave was de suggestie gewekt, dat de aantallen stukken belangrijk zijn en dat de aantallen van de eerste verdeling iets met die van de tweede verdeling te maken zouden hebben. Het meisje, dat de tweede cake voorstelde voelde intuïtief, dat het niet om aantallen, maar om verhoudingen ging.

We zijn geneigd, deze oplossing met een toegeeflijke glimlach te ontvangen, maar hem wel fout te rekenen. Als je afgaat op het antwoord is het natuurlijk niet goed,

maar als we kijken naar de methode, dan beginnen we aardig te twijfelen. Er zijn drie oplossingen aangedragen. Bij de eerste twee werd de variabele 'aantal cakes' constant gehouden, maar de verdeling gewijzigd. Bij de laatste oplossing werd de variabele 'aantal cakes' gewijzigd, maar de verdeling constant gehouden. Beide oplossingen zijn creatief, zij het dat de laatste fundamenteel goed is. Een klein stapje verder zou de juiste oplossing gegeven hebben: er is dus nu twee maal zoveel. Neem nu nog van ieder de helft.

Dit brengt ons op de tweede aanmerking.

Blikwisseling is meer dan een handige truc van mensen met een wiskundeknobbel. Het is meer dan een vaardigheid, die voorbehouden is aan wiskundeleraars en een enkele knappe leerling in de klas. Het is een houding, die in belangrijke mate aangeleerd kan worden. In plaats van te wachten tot blikwisseling intuïtief optreedt en als dat ten onrechte gebeurt, de oplossing af te keuren, of, als het niet gebeurt te vertellen wat knappe wiskundigen bedacht hebben, kan men de vaardigheid 'blikwisseling' proberen tot leerstof te maken. We kunnen proberen onze leerlingen bewust te maken, dat 'de zaak eens van een heel andere kant bekijken' een bezigheid is, die bewust nagestreefd kan worden als de directe manier van oplossen niet mogelijk is.

Als we wiskundeonderwijs zo gaan bekijken, dan zou het wel eens kunnen zijn, dat we bij de omzetting van $x + 137 = 281$ naar $x = 281 - 137$ niet zo hard de nadruk leggen op de aftrekregel, maar op de regel:

PROBEER JEZELF TE VERTELLEN WAT JE ZOEKT EN ALS JE
DAT KAN,
PROBEER DAN EENS OF JE OOK EENS NAAR ANDERE DIN-
GEN KUNT KIJKEN.

Natuurlijk is dit eenvoudiger gezegd dan gedaan. Het noemen van deze regel op zich is zinloos (net als het noemen van alle mogelijke andere regels trouwens). Maar als we telkens, waar we blikwisseling herkennen met onze leerlingen nagaan dat er in dat speciale geval (oplossen van een vergelijking, verdelen van een cake, zeggen waar de koster kan staan) iemand iets 'van een heel andere kant heeft bekeken', dan is het niet onmogelijk, dat we op den duur bij leerlingen een houding van blikwisseling kunnen versterken.

Blikwisseling is één van de hulpmiddelen en dus ook één van de houdingen bij het oplossen van problemen. Of dat nu wiskunde- of andere problemen zijn. Zelfstandig problemen kunnen oplossen lijkt ons een belangrijke doelstelling van het onderwijs. We kunnen die zelfstandigheid (onder meer!) nastreven door in de kleine dagelijkse dingen te letten op blikwisseling en die bij onze leerlingen bewust te maken.

2 Literatuur: H. Freudenthal, Weeding and sowing, blz. 242–252, (Reidel, Dordrecht 1978).

Edward de Bono, The use of lateral thinking, (Pelican Books, 1971).

3 Oplossing van het vlieg-trein-probleem volgens de 'rij-methode'.

Neem voor de snelheden van de treinen v km/u en voor die van de vlieg p km/u.

Neem de beginafstand a km. Als de vlieg begint bij een van de treinen op het moment dat die zich op een afstand a_k ($a_0 = a$) van elkaar bevinden en als hij het volgende traject w_{k+1} in een tijd t_{k+1} aflegt, dan is (vgl de grafiek hieronder)

$$w_{k+1} = t_{k+1} \cdot p \text{ en } a_k = w_{k+1} + t_{k+1} \cdot v.$$

Hieruit valt af te leiden:

$$t_{k+1} = a_k \cdot \frac{1}{p+v} \quad (1) \text{ en } w_{k+1} = a_k \cdot \frac{p}{p+v} \quad (2)$$

Verder is, doordat na afleggen van dat traject de afstand tussen de treinen met $2t_{k+1} \cdot v$ is verminderd:

$$a_{k+1} = a_k - 2t_{k+1} \cdot v,$$

Met (1) voert dit tot:

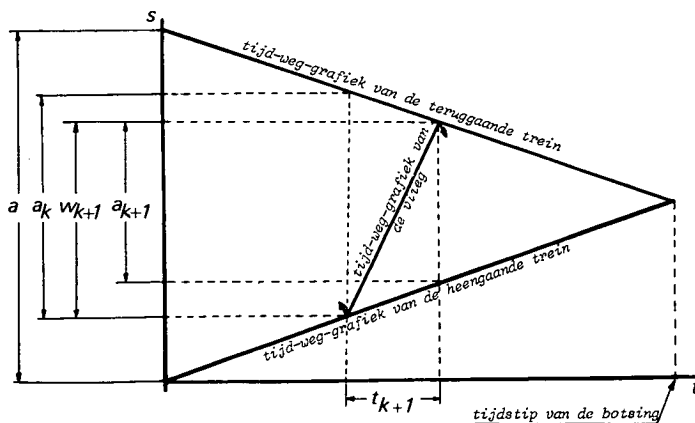
$$a_{k+1} = a_k \cdot \frac{p-v}{p+v} \quad (3)$$

Uit (2) en (3) is af te leiden:

$$w_{k+1} = \frac{ap}{p+v} \cdot \left(\frac{p-v}{p+v} \right)^k$$

De termen van de rij w_k vormen een sommeerbare meetkundige rij:

$$w = \sum_1^{\infty} w_k = \frac{ap}{2v}$$



4 Op de studiedag van 27 oktober van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren was 'Blikwisseling' een van de thema's. Daarbij werd, behalve bovenstaande tekst, onderstaande series problemen aan de deelnemers aangeboden.

Serie A is bedoeld om de deelnemers het begrip blikwisseling bij zichzelf duidelijk te maken.

Serie B gaat over blikwisseling bij leerlingen.

Let wel: er zijn opgaven bij over leerstof die de leerlingen nog niet hebben gehad, maar waar ze net mee beginnen. Zo kennen ze bijvoorbeeld bij opgave 8 de distributieve wet nog niet.

Serie C heeft de bedoeling de consequenties van het begrip voor het wiskundeonderwijs in het algemeen te doorgronden.

Serie A

Onderzoek na het oplossen van elk van de volgende opgaven of er tijdens dat oplossen bij u een blikwisseling is opgetreden. Zo ja, wanneer? Droeg dat bij tot meerdere vreugd van het bereikte resultaat? Waarin kwam dat tot uiting?

Zo nee, heeft u dan nog enige behoefte om nog eens naar een andere oplossing te gaan zoeken?

1 Afvalcompetitie

83 ploegen spelen een afvalcompetitie: in elke ronde spelen zoveel mogelijk ploegen, telkens twee tegen elkaar. Als het aantal ploegen in een ronde oneven is, loot een van hen uit om zonder meer in de volgende ronde te spelen. Wie wint komt in de volgende ronde; verliezers vallen af.

Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

2 De vlieg en de treinen

Twee treinen bevinden zich op een afstand van 100 km van elkaar. Ze rijden naar elkaar toe met een snelheid van elk 80 km/u.

Op het moment dat ze 100 km van elkaar af zijn start een vlieg van de voorkant van een der treinen en vliegt met een snelheid van 150 km/u naar de andere trein. Zodra hij die bereikt vliegt hij met dezelfde snelheid terug. Zodra hij de eerste trein bereikt keert hij weer en vliegt weer heen. Enzovoort.

Aangenomen dat de treinen op hetzelfde spoor rijden en dus botsen en dat dus de vlieg tussen de treinen verpletterd zal worden, hoeveel km heeft die vlieg er dan in totaal opzitten?

3 Het forensenprobleem

Een man komt elke dag om vijf uur op het station aan. Zijn vrouw komt dan juist met de auto aanrijden. Hij stapt in en ze rijden naar huis. Op een dag komt hij al om vier uur aan. Hij besluit alvast te gaan lopen. Onderweg komt zijn vrouw hem tegen. Hij stapt in, ze keren en rijden naar huis. Hij is tien minuten eerder thuis dan gewoonlijk.

Neem aan dat de auto steeds dezelfde snelheid heeft en dat het keren geen tijd kost.

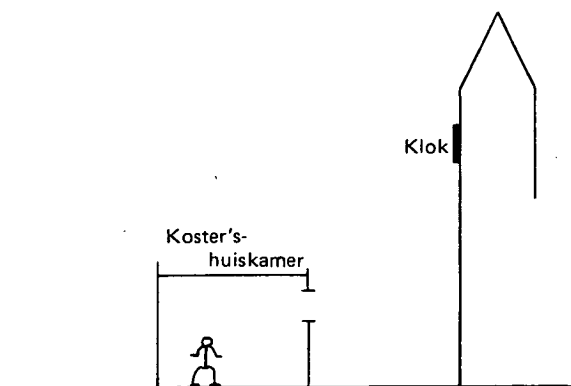
Hoe lang heeft hij gelopen?

- 4 Bepaal een primitieve van de functie $[1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$
- 5 Roosterpunten
Kies vijf roosterpunten. Trek alle verbindingslijnstukken en bepaal daar het midden van. Is het mogelijk de vijf punten zo te kiezen dat geen van de middens een roosterpunt is?
- 6 $2x^2 - 7x + p = 0$ en $5x^2 + 2x + q = 0$ hebben tenminste één gemeenschappelijke oplossing. Aan welke betrekking moeten p en q voldoen opdat aan deze voorwaarde is voldaan?
- 7 Construeer een driehoek waarvan de drie zwaartelijnen zijn gegeven.
- 8 Wat zou iemand kunnen doen, die een ruzie bij wil leggen?

Serie B

Bij het uitwerken van een van de volgende opdrachten kan er bij een leerling blikwisseling optreden. Herkent u zulke momenten? Hoe zou u dergelijke ervaringen van uw leerlingen willen voorbereiden? Hoe zou u er mee om willen gaan?

- 1 Ik neem een getal in gedachten, ik tel er 5 bij op, vermenigvuldig het resultaat met 3 en trek van die uitkomst 7 af. Ik krijg 9.
Welk getal had ik in mijn gedachten?
- 2 $x + 138 = 281$
- 3 Als de koster in zijn woonkamer voor het raam staat kan hij op de klok van de kerktoeren kijken. Als hij achterin zijn kamer staat kan hij de klok niet zien. Waar kan hij in de kamer de klok nog net wel zien?



- 4 Bereken de kans om met een dobbelsteen 1, 2, 3, 4 of 5 ogen te gooien.
- 5 Telkens op het hele uur vertrekt er uit Amsterdam een trein, die naar Maastricht rijdt. Telkens op 30 minuten over het uur vertrekt er een trein van Maastricht naar Amsterdam. Ze doen 3 uren over de reis.
Hoeveel treinen uit Maastricht komt de trein uit Amsterdam tegen, die daar om 9.00 uur vertrekt?

- 6 Koop een artikel voor f 65,90. Daarin zit 18 % BTW begrepen. Hoeveel is de BTW?
- 7 Bewijs dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan.
- 8 Waarom is $2ab + 3ab$ gelijk aan $5ab$? (*Leerlingen kennen de distributieve wet niet.*)
- 9 Van een functie f is de afgeleide gegeven door $f'(x) = \cos x$. Welke functies komen in aanmerking voor f ?
- 10 $3a$ betekent $a + a + a$; $4a$ betekent $a + a + a + a$; enzovoort.
Waarom is $3a + 4a$ gelijk aan $(3 + 4)a$?
- 11 Ontbind in factoren: $a^2 + 5a + 6$.
- 12 Eén van de scherpe hoeken van een rechthoekige driehoek is x° .
Hoe groot is de andere scherpe hoek?
- 13 Bereken $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \, dx$
- 14 Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2-x}}{x}$
- 15 Los op: $x^2 + 2x = 10$
- 16 Los op: $3 \sin x + 4 \cos x = 2$.
- 17 Ontbind in factoren: $3p^2 - 15pq + 3p$.
- 18 Wat kun je zeggen over een afbeelding, die de samenstelling is van twee rotaties?

Serie C

Bij het leren kan blikwisseling een belangrijke rol spelen. Wilt u daar bewust gebruik van maken? Waarom? Hoe?
Onderstaande notities zijn bedoeld om het beantwoorden van dergelijke vragen wat minder moeilijk te helpen maken.

- 1 Stel de onbekende x .
- 2 Van achteren naar voren werken bij een bewijs. Vooral in meetkundige bewijzen komt dit dikwijls voor.
- 3 Freudenthal geeft een voorbeeld van een leerling (tweede klas basisschool) die geen kans zag om het volgende sommetje op te lossen.
Zet een rondje in de hokjes waar de som 20 is en een kruisje in de hokjes waar de som 30 is.

+	6	12	18	11	22	16	8	21
8								
14								
24								
12								
18								
2								
9								
19								

Toen deze leerling geholpen werd door de vraag: 'Waar zou je in deze eerste kolom een rondje kunnen schrijven?' (waarbij de eerste kolom aangewezen werd) had hij het probleem ineens door en in een minimum van tijd opgelost. Er had blikwisseling plaats van het oplossen van een vergelijking met twee onbekenden naar het oplossen van een vergelijking met één onbekende.

- 4 Iemand die gewend is aan bewijzen van het type: 'Bewijs dat voor alle ...' heeft moeite met een bewijs van het type: 'Bewijs dat er een ... is, zodat ...'.
- 5 Verstandig raden is een goede methode bij het oplossen van problemen.
- 6 Het is de moeite waard leerlingen te leren bewust blikwisseling te hanteren.
- 7 Het herkennen van onverwachte blikwisseling, ook als het probleem zelf onjuist beantwoord wordt, is een (van de vele) belangrijke vaardigheden van een leraar, want dat is een van de middelen om adequaat op onverwachte creatieve momenten van leerlingen te reageren.
- 8 Door blikwisseling bewust te hanteren worden vele trucjes tot methoden.
- 9 Er naar streven, dat een leerling blikwisseling als methode accepteert en die bij problemen oplossen wil gebruiken is een (van de vele) doelen op lange termijn in het onderwijs.
- 10 Blikwisseling accepteren eist bereidheid tot accomoderen van denkschema's.
- 11 U maakte al vele jaren gebruik van blikwisseling.
- 12 Blikwisseling helpt systeemscheiding te doorbreken.
- 13 Praten over blikwisseling bevordert blikwisseling.

Het teruggeven en bespreken van een proefwerk

FRANCIS MEESTER EN JAAP VEDDER

Dit artikel is geschreven mede naar aanleiding van de op 27 oktober 1979 te Utrecht gehouden studiedag van de Ned. Ver. van Wiskunde-leraren en zal ook verschijnen als paragraaf in een publikatie over 'rekening houden met individuele verschillen', die wij samen met George Schoemaker geschreven hebben. In die publikatie proberen wij enige duidelijkheid te brengen in de problematiek rond het thema 'differentiatie'.

Op welke manieren kunt u een proefwerk teruggeven?

We noemen drie manieren. Uiteraard zijn er nog een x aantal aan toe te voegen.

- a cijfers voorlezen; blaadjes uitdelen en de sommen die 't meest fout gemaakt zijn, bespreken. Vragen over je overige fouten kun je aan je buurman of -vrouw of aan de leraar (tijdens het huiswerk maken) voorleggen.
- b blaadjes teruggeven. Huiswerk voor de volgende les: maak de fout gemaakte sommen nog eens, en kom je er niet uit, probeer te formuleren waar je probleem zit. Dit bespreken we dan.
- c cijfers voorlezen aan het begin van de les; de blaadjes een kwartier voordat de bel gaat, uitdelen. De leerlingen kunnen dan de leraar vragen stellen.

Bij iedere manier van teruggeven en bespreken van een proefwerk zijn een aantal vragen te stellen:

- *Aan het begin of aan het eind van de les teruggeven?*
- *Cijfers voorlezen of niet? Als ik ze voorlees: op volgorde van 1 t.e.m. 10 of alfabetisch of van 10 t.e.m. 1?*
- *Hoeveel vraagstukken bespreek ik klassikaal: alle, enkele of geen?*
- *Wat moet Piet doen, die alle opgaven goed heeft: opletten als ik er één op het bord voor doe of mag hij Duits gaan doen?*
- *Maakt u een uitgebreide foutenanalyse van het proefwerk en bespreekt u die met uw leerlingen?*
- *Moeten leerlingen de opgaven die besproken worden, opschrijven of hoeft dat niet?*

Naast deze vragen roept het teruggeven en bespreken van een proefwerk ook beelden op van: gejuich en teleurstellingen van leerlingen en een matige interesse tijdens de nabespreking.

Het is erg moeilijk een proefwerk met bijbehorend cijfer terug te geven aan een groep leerlingen, zonder je achteraf af te vragen of dit niet op een zinvollere manier gekund had.

In theorie zijn er prachtige formuleringen te geven: de manier van teruggeven hangt af van de doelen van uw onderwijs, van uw wiskunde-doelen, van uw wijze van omgaan met de klas, van het uur van de dag en ga zo maar door. Waar gaat het allemaal om bij het teruggeven van het proefwerk?

Een voorbeeld

We willen proberen om een aantal punten naar voren te halen, die bij het teruggeven van een proefwerk van belang zijn.

Om deze punten te verduidelijken beschrijven we eerst een *voorbeeld*:

De leraar geeft het werk terug. De leerlingen krijgen een kwartier de tijd om fouten te verbeteren. Daarbij mogen ze de hulp van hun buurman buurvrouw vragen. Er worden alleen grenzen aan het lawaai en de tijd gesteld. Daarna loopt de leraar rond om de verbeteringen te bekijken en te helpen als er nog problemen zijn. De leerlingen kunnen dan aan hun (huis)werk beginnen.

Uit dit voorbeeld blijkt, dat deze leraar ervoor kiest dat leerlingen zelf hun fouten bekijken en verbeteren. Ze kunnen elkaar daarbij helpen. De leraar probeert in deze samenwerkingssituatie zelfstandigheid te stimuleren, en geeft daar dan ook ruimte voor. De organisatie van de les past hij hier bij aan. Hij wil wel weten of alle fout gemaakte sommen goed verbeterd zijn.

In dit voorbeeld zitten o.a. de volgende punten:

- wat is de bedoeling van het teruggeven en bespreken (*vraag naar het doel*) en hoe zou je dat op de meest effectieve wijze kunnen nastreven (*hoe organiseer je dat*)?
- wat betekent een bepaalde manier van teruggeven (*organisatie*) voor de goede en de zwakkere leerling (*pedagogisch klimaat in een klas, motivatie*)?

Hoewel de bovengenoemde punten niet echt te scheiden zijn, willen we toch proberen ze achtereenvolgens te bespreken.

Doelen

Moet een proefwerk wel besproken worden?

Waarom doet u dat?

Zo ja, bespreekt u dan het gehele proefwerk of een gedeelte?

Kontroleert u of de leerlingen de leerstof na de bespreking wel begrepen hebben?

En hoe doet u dat?

Vragen die we stellen, omdat daar allemaal keuzes in het geding zijn. Keuzes die u maakt of gemaakt heeft. In veel gevallen bewust, in veel gevallen onbewust (uit gewoonte).

- U kunt kiezen voor het bespreken van het gehele werk, omdat de stof zó belangrijk is, dat alle fouten hersteld moeten worden. Het bespreken van het gehele werk is een probleem op zich.

Het is voor ons, leraren, dikwijls een teleurstellende ervaring, dat leerlingen wel geïnteresseerd zijn in het cijfer, maar nauwelijks in de bespreking 'Er is toch niets meer aan te doen', of 'Wat zal ik opletten, ik had het redelijk'. Voor de klas doet de leraar verwoede pogingen het geheel op het bord te zetten, vriendelijk, soms stilte afdwingend, er nog eens op wijzend waar ze die sommen gehad hebben, zonder dat hij (veel) aandacht krijgt. Misschien zijn er een paar leerlingen die goed meedoen, daar richt hij zich dan ook volledig op.

- Een gerichtere nabespreking kan veel meer vruchten afwerpen. Naar aanleiding van een door u gemaakte foutenanalyse, kunnen bijvoorbeeld alleen de drie meest voorkomende fouten besproken worden. De overige fout gemaakte opgaven kan ieder vragen in het laatste kwartier van de les als er huiswerk gemaakt wordt.

Dit is een heel andere strategie, waar dan ook andere bedoelingen achter zitten. Iedere leerling heeft recht op feedback op zijn fouten. De leraar geeft de leerlingen ruimte om die feedback te vragen. De leraar bepaalt in ieder geval de sommen, waarop iedereen feedback krijgt.

- Een andere vorm van gericht nabespreken is: in een leergesprek (klassegesprek) een brug slaan tussen vroegere en toekomstige wiskunde via proefwerksommen (en fouten daarin!).

Je zou ook kunnen zeggen: proefwerkbespreking aangrijpen om het verband tussen de wiskunde-onderdelen (de lange lijn in de schoolwiskunde) nog eens goed door te nemen. Een voordeel is dat leerlingen met een goed cijfer ook uitgenodigd worden mee te doen.

- In het *voorbeeld* aan het begin van dit artikel blijken weer heel andere bedoelingen van de leraar te zitten. In dat voorbeeld mogen leerlingen elkaar helpen. In feite moeten leerlingen kritisch hun eigen werk gaan bekijken en kunnen ze verbeteringen binnen hun groepje samen met medeleerlingen bespreken.

Hier wordt een poging gedaan die kan leiden tot meer zelfstandigheid en verantwoordelijkheid bij de leerling.

In deze paragraaf over *doelen* zijn we via vakdoelstellingen (beheersen van de leerstof) gekomen op de algemeen vormende doelen (zelfstandigheid e.a.). Een belangrijke katalysator bij het bereiken van al deze doelen is een goed pedagogisch klimaat, d.w.z. een wijze van omgaan van leraar en leerlingen met elkaar, waardoor maximale samenwerking mogelijk wordt. Zo zullen

rekening-houden-met-elkaar en de organisatie van de les nauw met elkaar samenhangen.

Pedagogisch klimaat en organisatie

Een eerste beslissing die genomen moet worden is: lees ik de cijfers van het proefwerk voor terwijl de hele klas toehoort?

Het cijfer voorlezen. Met welk doel gebeurt dit?

Er zijn verschillende mogelijkheden, ieder met zijn eigen betekenis voor de leerling en invloed op de les.

- ‘Leerlingen willen toch van elkaar weten wat ze voor een proefwerk hebben. Er ontstaat anders een eindeloos heen en weer gepraat en geroep. Ik vind dat ik het dan beter zelf kan doen in een rustige sfeer. Ik kan daarna aan de nabespreking beginnen’.
- ‘Ik lees de cijfers van laag naar hoog voor. Er is een grote spanning, iedereen hangt aan mijn lippen’.
- ‘Ik lees de cijfers voor als controle van mijn agenda’.

Het is voor een leerling meestal niet vervelend als een goede prestatie aan een grote groep bekend wordt. Maar wat betekent het voorlezen van een onvoldoende voor de zwakke leerling? Hoe voelt deze zich als zijn onvoldoende wordt prijsgegeven aan de grote groep? Er kan dan een houding van onverschilligheid of van teneergeslagenheid volgen. Beide houdingen zijn niet positief om de verdere les te kunnen volgen.

Een tweede beslissing zal zijn: geef ik het proefwerk terug aan het begin of aan het eind van de les of ergens in het midden?

Deze keuze hangt af van het antwoord op de vraag: ‘Wat wordt er daarna gedaan?’

- Krijgen leerlingen tijd en ruimte om vragen te stellen en gaat u daarna over tot de orde van de dag?
- Wordt het werk op het bord gemaakt zodat ieder kan kijken wat het had moeten zijn?
- Of resten er nog 5 minuten, zodat de eventuele problemen in het volgende lesuur besproken worden bij uw kollega?
- enzovoorts.

Samengevat: de manier van teruggeven en nabespreken zal het best tot zijn recht komen als er gestreefd wordt naar *veiligheid voor de leerling en motivatie van de leerling*. Veiligheid wil bijvoorbeeld zeggen dat een leerling zich ten opzichte van leraar en leerlingen niet hoeft te generen voor bepaalde fouten. Motivatie vooral ten opzichte van nabespreken van het proefwerk: we zouden al een heel eind verder komen als leraren in duidelijke taal leerlingen hun bedoelingen met het nabespreken konden vertellen.

Nog een gedachte

In het gewone lesgebeuren hebben we de controle of leerlingen de wiskunde

begrijpen, op allerlei manieren ingebouwd en als slotkontrolle is er het proefwerk. Wanneer een leerling daar nu faalt, dan moet hij/zij na nog één keer uitleggen alles wel begrijpen, maar een kontrolle daarop wordt haast niet of nooit uitgevoerd.

Toch zijn er wel eenvoudige mogelijkheden om die kontrolle uit te voeren.

- U kunt een probleem geven met ongeveer dezelfde moeilijkheid als het vorige.
- Leerlingen kunnen de parallel versie van het proefwerk maken (links en rechts werk). Dit kan thuis gebeuren als huiswerk en de volgende les inleveren of met de buurman/-vrouw vergelijken.
- Het proefwerk kan opnieuw gemaakt worden.
- Een opdracht kan zijn om in het hoofdstuk op te zoeken, waar een soortgelijke opgave staat, en die dan te maken.

Onze argumentatie om leerlingen te motiveren voor een proefwerkbespreking luidt dikwijls:

‘Let nu maar op, deze wiskunde heb je bij het volgende hoofdstuk weer nodig’. De reactie van de leerlingen is dan vaak: ‘Dat zien we dan wel weer’.

Een bespreking van een proefwerk dat volgende week herkanst mag worden, wordt met veel meer interesse gevolgd dan een bespreking van een werk, waar voorlopig niets meer aan te doen is.

Maar wij schrikken van leraren die herkansingen geven, opdat leerlingen tijdens het bespreken van een proefwerk, beter opletten. Kiezen voor herkansingen zou toch op andere gronden moeten gebeuren.

Meer mogelijkheden

Tenslotte geven we nog een paar mogelijkheden om een proefwerk terug te geven en te bespreken. Misschien kunt u als u voor uzelf een aantal keuzes gemaakt hebt, hier iets van gebruiken.

- een proefwerk in het eerste uur van het blokuur geven, en in het tweede uur meteen bespreken. Leerlingen zijn zeer gemotiveerd om te weten wat ze goed of fout hebben. De volgende les het proefwerk alleen maar teruggeven en eventuele vragen in een zelf-werk-periode individueel of in groepjes behandelen.
- een proefwerk zo opstellen dat het 10 minuten voor het einde van de les ingeleverd kan worden. Op dat moment kan de leraar een blad met de uitgewerkte sommen van het proefwerk uitdelen.
- proefwerk teruggeven in het begin van de les en meteen het huiswerk voor de volgende les opgeven: ‘Bekijk dit werk grondig, maak de fout gemaakte sommen nog eens. Kom je er niet uit, probeer dan te formuleren waar het probleem zit. Die problemen bespreken we dan’. Tijdens de zelf-werk-periode van de volgende les worden die problemen besproken.
- het werk wordt uitgedeeld tijdens een zelf-werk-periode en de leraar kan ieder die vragen heeft, individueel helpen. Dat hoeft niet persé allemaal in dit

lesuur, dat kan ook nog in volgende uren, terwijl de leerlingen gewoon verder werken aan de nieuwe leerstof.

- een zorgvuldige fouten-analyse aan de klas voorleggen. Oorzaken van de fouten aangeven en bespreken. Daarna het werk teruggeven.
- de goede uitwerkingen van het proefwerk via de overheadprojektor laten zien. U heeft dan alle tijd om rond te lopen en leerlingen te helpen.

Over de auteurs:

Beiden zijn lid van de didaktiekkommissie en werk(t)en mee aan het voorbereiden en uitvoeren van A-, B- en C-kursussen.

Francis Meester geeft sinds 1970 les aan het Ignatiuscollege, nu in Purmerend. Al die jaren is haar sectie bezig met vormen van differentiatie binnen de wiskunde.

Jaap Vedder heeft 6 jaar les gegeven aan een HAVO in Amsterdam en daarna 3 jaar aan de V.L.-V.U. Vanaf 1976 is hij medewerker aan het Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de leraarsopleiding van de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Gebruik en misbruik van de geodriehoek

BEN KNIP

GEORGE SCHOEMAKER

Inleiding

Al ruim voordat de leerlingen in augustus de brugklas binnen stormen, hebben ze met de geodriehoek zitten spelen. Dit spelen kan in de wiskundelessen worden voortgezet en verdiept. Er zijn daarbij twee zaken waarop we hier speciaal de aandacht willen richten.

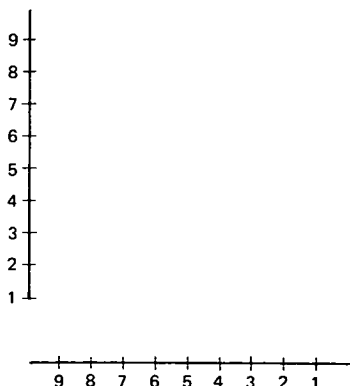
- De geodriehoek is een veelzijdig hulpmiddel; het zou jammer zijn als hij alleen als liniaal wordt gebruikt.
- De geodriehoek kan storend werken bij het aanleren van het hoekbegrip.

Stelling 1

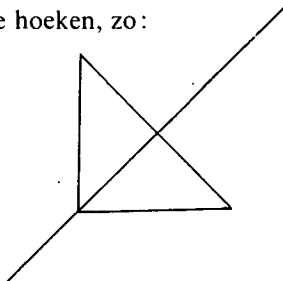
Het gebruik van de geodriehoek in de eerste maanden van de brugperiode, is als het hanteren van een ingewikkeld padvindingsmes, uitsluitend voor het schillen van onbespoten appels.

Hoe meer de leerling de geodriehoek leert gebruiken in verschillende situaties, des te vaker zal hij ook spontaan van het apparaat gebruik gaan maken. Er zijn allerlei oefeningen te ontwerpen:

- het arceren van (delen van) figuren (gebruik makend van de millimeter aanduiding).
- het bepalen van de middens van lijnstukken bijv. in een figuur als deze (de middens van 1-1, van 2-2, enz.)



- het construeren van rechte hoeken, zo:



- grafieken tekenen op blanco papier (althans papier zonder rooster)
- completeren van symmetrische figuren waarvan de helft is getekend m.b.v. het spiegellende oppervlak van de driehoek door deze loodrecht op het papier, op de spiegelas te plaatsen.

Met deze activiteiten streven we twee doelen na:

- het didaktische doel van het verkennen van allerlei mogelijkheden van de geodriehoek en een zekere vaardigheid in het hanteren ervan.
- het pedagogische doel van het scheppen van een klimaat van vertrouwen en zekerheid. Juist omdat veel kinderen van huis uit niet veel zelfvertrouwen hebben t.a.v. hun wiskundige vermogens, komen de hierboven bedoelde activiteiten goed van pas.

Over het gebruik van de passer zijn soortgelijke opmerkingen van toepassing. Ook daar kan wat meer vertrouwen groeien als er eens 'fraaie' figuren getekend mogen worden.

Bij de geodriehoek leidt het veelsoortig gebruik in de verkenningfase ertoe dat er voor vrijwel elke leerling een instapmogelijkheid zal zijn. Als we daarmee bereiken dat de leerlingen onbevangen hun geodriehoek gaan gebruiken, en openstaan voor het vak wiskunde, dan is er een basis waarop in de volgende lessen kan worden voortgebouwd.

Stelling 2

De geodriehoek is op vele plaatsen in en buiten het wiskundeonderwijs zinvol te gebruiken, maar nu net niet bij het aanleren van het hoekbegrip.

We zijn van mening dat meetactiviteiten pas plaats mogen vinden, nadat een grondige verkenning van de objecten, waaraan gemeten wordt, heeft plaatsgehad.* Dus eerst 'spelen' met lijnstukken, daarna vergelijken en tenslotte: meten van lijnstukken. Evenzo: eerst ervaringen opdoen met hoeken, daarna: vergelijken van hoeken en (veel?) later meten van hoeken.

* Er is onderzoek gedaan naar de konstitutie van het mentale object hoek door mevr. Ehrenfest-Afanassjewa en mevr. Van Hiele-Geldof.

1 Ehrenfest-Afanassjewa, T: *Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse* (Den Haag 1931)

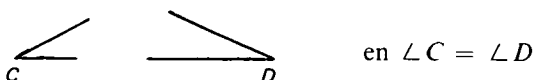
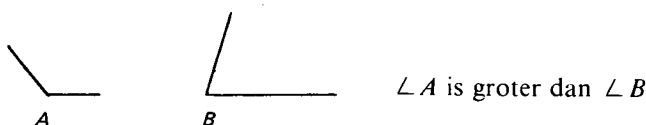
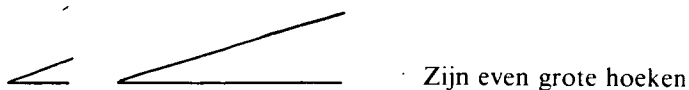
2 Ehrenfest-Afanassjewa, T: *Wat kan en moet meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* (Groningen 1924)

3 Hiele-Geldof, D. van: *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het VHMO.* (Amsterdam 1957)

Bij de introductie van het hoekbegrip in de brugklas moeten we ons ervan bewust zijn dat er het woord 'hoek' al in diverse betekenissen wordt gebruikt en dat dit gebruik wel eens storend kan zijn. Zoals:

- ik wacht op de hoek
- de winkel om de hoek
- in de hoek staan
- aardig uit de hoek komen.

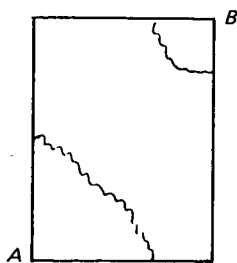
In de wiskunde krijgt het woord hoek een veel engere betekenis. Het is dan belangrijk dat kinderen ontdekken dat de grootte van een hoek onafhankelijk is van de lengte van de benen.



Allemaal ervaringen die vooraf dienen te gaan aan het meten van hoeken. Er wordt dan ook nog geen maat ingevoerd. Wel kunnen hoeken worden vergeleken, je kunt ze samenvoegen, halveren (dubbel-vouwen) enz. zonder over een maat te beschikken.

Kinderen zouden eerst hoeken moeten onderkennen in hun omgeving, in tal van figuren en situaties. Het vergelijken van hoeken is echter lang niet eenvoudig. Het 'zien' dat een hoek groter is dan een andere gaat sommige leerlingen niet goed af.

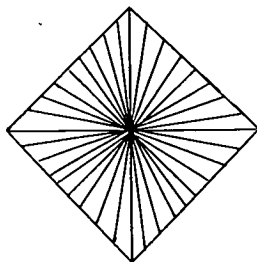
We menen dat het zinvol is aan te sluiten bij ervaringen van kinderen in het maken van een kwartdraai en een halve draai. Kinderen gebruiken deze taal op natuurlijke wijze bij het spelletje van het sturen van een klasgenoot als robot door het lokaal. De route van de robot wordt daarna getekend. Na deze draaiervaringen en het tekenen van hoeken komen dan oefeningen in het vergelijken van hoeken aan de beurt.



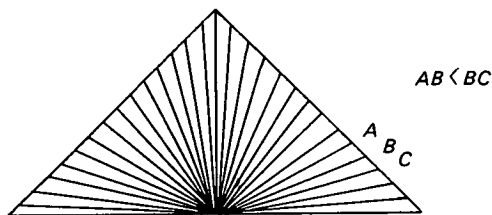
Kinderen zijn geneigd de (afgescheurde) hoek A groter te noemen dan de hoek

B. Deze 'oppervlakte-storing' kan door bovengenoemde activiteiten hopelijk worden voorkomen of anders, worden hersteld.

Als we dan nu stappen gaan zetten in de richting van het meten van hoeken dan kan gebruik worden gemaakt van vierkante vouwblaadjes. Hierbij kunnen hoeken tussen diverse vouwen worden uitgedrukt in de kleinste hoek ($= \frac{1}{16}$ gestrekte hoek). Deze 'natuurlijke' maat heet in de scheepvaart een streek.



Daarmee wordt het vouwblaadje (althans de helft ervan) een voorloper van de geodriehoek-als-hoekmeter.



Het is tevens een hulpmiddel waarmee de 'randstoring' kan worden verklaard. Op de geodriehoek zelf is deze 'randstoring' veel minder duidelijk te zien (te veel streepjes).

Op de jaarvergadering kregen de deelnemers de volgende opgaven:

VOORSTEL: werk in groepjes van 3 of 4 personen:

We hebben voor deze fase 40 minuten beschikbaar. Een redelijke tijdsverdeling lijkt ons: voor 1 (10 min.). Voor 2 (10 min.). Voor 3 (20 min.). De vierde en vijfde zijn voor degenen die onder dit schema duiken.

1 (10 min.)

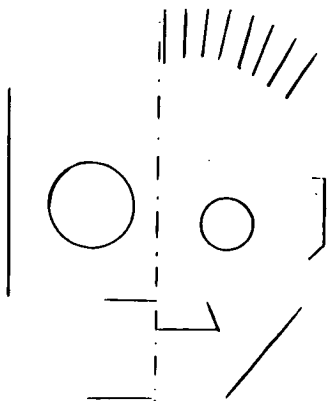
Op het bijgaande blad staan 3 figuren (A, B, C) en een spiegelas.

a Construeer op een of andere manier van elk van deze figuren het spiegelbeeld.

b welke manieren zijn in uw groepje gebruikt?

c welke moeilijkheden verwacht u voor brugklasleerlingen bij opgave C?

figuur A

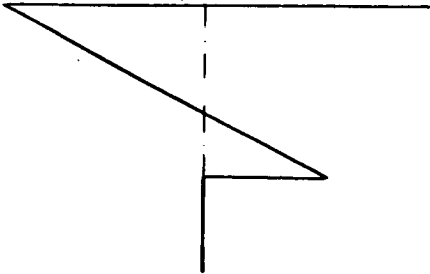


figuur B

Spiegel -

Spiegel

figuur C



spiegelglas →

2 (10 min.)

Neem een vouwblaadje. Het midden van het papier (het snijpunt van de diagonalen) noemen we het hart.

- a knip het blaadje langs een diagonaal door en ga verder met één helft. Vouw het papier dubbel langs de deellijn van de hoek waarvan het hart het hoekpunt is (aanw.: markeer het hart).

Herhaal het dubbelvouwen nog drie maal.

U heeft nu een voorloper van de geodriehoek!

- b Bespreek in uw groep de didaktische bruikbaarheid van deze 'geodriehoek'.
- c Bij het vouwen gaan kinderen dikwijls bij de derde vouw in de fout.

3 (20 min.)

- a Vouw een vouwblaadje dubbel langs een diagonaal.
- b Vouw het dubbel langs de deellijn van de hoek waarvan het hart het hoekpunt is.
- c Als na het vouwen de beide helften elkaar nu niet geheel bedekken, knip dan het uitstekende puntje af enz. Er ontstaat zo een limiet.

4

- a Leg van 4 congruente geodriehoeken eerst 1 daarna 2 vierkanten.
- b Om van 8 congruente vierkanten 1 vierkant te vormen, zullen er enige gehalveerd moeten worden (tot geodriehoeken). Hoeveel?
- c Als b maar nu voor 512 vierkanten.

5 Verdeel een stomphoekige driehoek in scherphoekige driehoeken.

Twee vertellingen over π

J. P. HOGENDIJK

Tekst van een voordracht, gehouden op de jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 27 oktober 1979 te Utrecht.

Dames en Heren,

De 'twee vertellingen over π ', waarover deze voordracht gaat, zijn echt gebeurd; ze spelen zich af in de bloeitijd van de Islam. De hoofdpersonen van beide vertellingen zijn Islamitische meetkundigen: de eerste is Al-Kuhi, die in de tiende eeuw leefde, wat hij met π deed houd ik nog even geheim. De tweede vertelling gaat over Al-Kashi (± 1430). Hij heeft 2π in 16 decimalen benaderd, zijn resultaat $2\pi = 6,2831853071795865$ is tot in de laatste decimaal correct.

Er zijn een aantal redenen waarom ik deze twee vertellingen over π heb uitgekozen als onderwerp voor vandaag. Allereerst is π een getal dat je vaak tegenkomt in de dagelijkse praktijk van het onderwijs, en als zodanig dacht ik dat π wel paste in het thema van vandaag. Verder ligt het onderwerp in de sfeer van de geschiedenis van de wiskunde, op verzoek van de organisatoren. Tenslotte hoop ik dat ik met deze twee vertellingen de meesten van u iets zal vertellen dat hen nog niet bekend is; deze vertellingen zijn ook leuk omdat ze niet helemaal zonder verband zijn met wat vandaag in verschillende werkgroepen hier gebeurt, vooral in de werkgroepen over merkwaardige producten, kleine redeneringen en blikwisseling.

De indeling van de lezing is verder als volgt. Eerst zal ik een korte inleiding geven over de wetenschap en de wiskunde in de Islam. Dan zal ik iets moeten vertellen over het werk van Archimedes.

Hierop volgen de verhalen over Al-Kuhi en Al-Kashi.

Zo'n 120 jaar na de dood van Mohammed, we leven dan in het jaar 750 na Chr., is Bagdad de hoofdstad van het Islamitische rijk. De kaliefen beginnen nu van Bagdad een centrum van wetenschap te maken, doordat zij zoveel mogelijk handschriften met wetenschappelijke werken in het Grieks, het Oud-Syrisch en het Sanskrit naar Bagdad laten komen, en daar laten vertalen. En vanaf dat moment ontstaat er een Islamitische wetenschap met een eigen karakter, een Islamitische wetenschappelijke traditie die bijvoorbeeld in Perzië tot ver in de 19e eeuw levend is gebleven. Met wetenschappen bedoel ik hier dan vooral geneeskunde, filosofie, wiskunde, natuurwetenschappen en aardwetenschappen. De taal van de wetenschappen blijft tot in de 15e eeuw het Arabisch, alhoewel lang niet alle geleerden die binnen deze traditie werkten Arabieren waren. Het meren-

deel was Moslim van andere nationaliteit (bijv. Perzen), en er waren ook Christelijke en Joodse geleerden, die binnen de Islamitische wetenschappelijke traditie gewerkt hebben.

Ik wil en kan hier geen overzicht geven van de ontwikkeling van die wetenschappen, of zelfs alleen van de wiskunde of de meetkunde; bovendien zou ik u dan moeten plagen met een hele lijst van Arabische namen, die u misschien wat vreemd in het gehoor zouden liggen. Ik zal mij beperken tot de namen Al-Kuhi en Al-Kashi.

De Islam heeft het bestuderen van de wetenschappen bijna altijd aangemoedigd: God wil namelijk, dat de mens studeert. Vandaar dat de wetenschappen vaak in een spiritueel kader geplaatst worden, dit zullen we straks ook zien in het werk van Al-Kuhi.

De wiskunde staat binnen de wetenschappen hoog in aanzien, niet alleen omdat ze toegepast kon worden, maar ook omwille van zichzelf. Want veel wiskundigen dachten, dat getallen en meetkundige figuren deel uitmaakten van een onvergankelijke, onstoffelijke wereld, die dichter bij God is dan onze stoffelijke aarde.

De wiskunde werd vooral van de 9e tot de 15e eeuw beoefend. Er zijn nog heel veel wiskundige teksten uit deze periode over, in bibliotheken over de hele wereld. Hiervan is maar een klein deel onderzocht, en vooral op het gebied van de meetkunde hebben we nog helemaal geen overzicht van wat er gepresteerd is. Daarom is het beeld van de Islamitische meetkunde, dat in samenvattende boeken over de geschiedenis van de wiskunde gegeven wordt, bijna altijd erg karikaturaal. De geleerden hebben veel meer gedaan dan in deze boeken vermeld staat. Soms vind je zelfs de opvatting dat de geleerden van de Islam 'ons' (wij westerlingen) weliswaar een dienst bewezen hebben, doordat ze de oude Griekse werken over meetkunde vertaald en bewaard hebben – zodat ze weer in het Latijn vertaald konden worden en wij er kennis van konden nemen – maar dat die geleerden verder niets anders konden dan het schrijven van droge en onvruchtbare commentaren. Dat is niet waar, en dat hoop ik u onder andere met deze voordracht te laten zien.

Want de Islamitische meetkundigen waren wel degelijk in staat tot creatieve prestaties. Hiervan wordt de laatste jaren steeds meer bekend, en zo is ook het werk van Al-Kuhi en Al-Kashi bekend geworden. Hierbij moet ik aantekenen dat het werk van Al-Kuhi over π nog niet vertaald en uitgegeven is. Over dit werk bestaan samenvattende artikelen, maar wie de finesses wil weten moet nog steeds het manuscript erbij halen.

Ik zal nu een samenvatting geven van een deel van het werk van Archimedes. Allereerst is in dit verband belangrijk de manier waarop Archimedes π benadert. Zijn idee is u waarschijnlijk wel bekend: benader de cirkelomtrek met omtrekken van regelmatige in- en omgeschreven veelhoeken die je kunt uitrekenen (zie fig. 1).

Ik voer enkele afkortingen in:

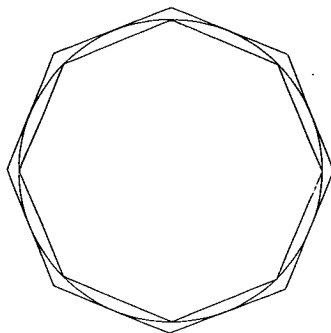
r : straal van de cirkel

i_n : omtrek van de ingeschreven regelmatige n -hoek

o_n : omtrek van de omgeschreven regelmatige n -hoek

z_n : zijde van de ingeschreven regelmatige n -hoek

Z_n : zijde van de omgeschreven regelmatige n -hoek



Figuur 1

Archimedes doet in feite het volgende. Hij begint met de ingeschreven regelmatige zeshoek en de omgeschreven regelmatige twaalfhoek. Het is bekend dat

$$\frac{z_6}{r} = 1, \frac{Z_{12}}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{153}{265}.$$

Archimedes spreekt niet over quotiënten maar over verhoudingen; ik heb dit gemakshalve in modernere terminologie vertaald.

Dan benadert hij $\frac{z_{2n}}{r}$ uit $\frac{z_n}{r}$ voor $n = 6, 12, 24, 48$; $\frac{Z_{2n}}{r}$ uit $\frac{Z_n}{r}$ voor $n = 12, 24, 48$.

Hij moet bij deze overgangen worteltrekken; hij geeft bij de overgang op $\frac{z_{2n}}{r}$ een afschatting van de wortel naar beneden, bij de overgang op $\frac{Z_{2n}}{r}$ een afschatting van de wortel naar boven.

Zo geeft hij een exact bewijs van zijn eindresultaat:

$$3\frac{10}{71} < \frac{i_{96}}{2r} < \pi < \frac{o_{96}}{2r} < 3\frac{1}{7} \text{ ('Cirkelmeting', prop. 3)}$$

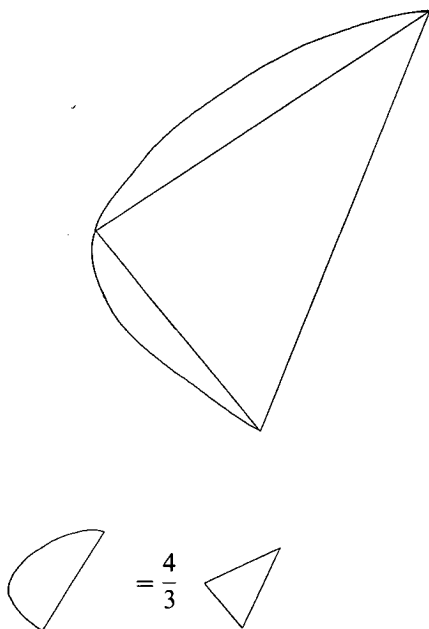
Het is eigenlijk anachronistisch hier het symbool π te gebruiken. Dit symbool werd pas in 1706 voor het eerst gebruikt, Archimedes spreekt over de verhouding van diameter en omtrek van de cirkel.

Ter introductie van het werk van Al-Kuhi moet ik u iets vertellen over de overlevering van het werk van Archimedes over oppervlakten, inhoud en zwaartepunten van figuren. Hiervan is slechts een gedeelte in het Arabisch vertaald, zodat de Islamitische geleerden niet alle resultaten van Archimedes kenden.

Wel vertaald in het Arabisch zijn de twee boeken over de bol en de cylinder van Archimedes, en zijn 'Cirkelmeting'; hierdoor waren zijn stellingen over omtrek en oppervlakte van de cirkel, oppervlakte en inhoud van de bol en het bolsegment, en manteloppervlakte van de kegel binnen de Islam bekend.

Men wist echter niet dat Archimedes ook de oppervlakte van de ellips, de inhoud

van de rotatielichamen van de ellips, een paraboolsegment en een hyperboolsegment, en de zwaartepunten van een paraboolsegment, zijn rotatielichaam en een bolsegment bepaald had. Verder heeft Archimedes de oppervlakte van het paraboolsegment bepaald, maar ook de boeken waarin hij dit resultaat bewijst zijn niet vertaald in het Arabisch. Archimedes noemt echter zijn stelling over de oppervlakte van het paraboolsegment in het voorwoord van zijn eerste boek over de bol en de cylinder. Omdat dit boek wel in het Arabisch vertaald was, wisten de Islamitische geleerden dat Archimedes de oppervlakte van het paraboolsegment bepaald had, al wisten ze niet hoe. Maar het duurde niet lang totdat zij zelf ook een bewijs vonden – op een andere manier. Spoedig daarna werden de stellingen over de inhoud van het rotatielichaam van het paraboolsegment en de oppervlakte van de ellips herontdekt en bewezen.



Figuur 2

Als ik zeg dat Archimedes of een Islamitische meetkundige de oppervlakte of inhoud van een figuur bepaalt, dan bedoel ik niet dat hij een formule geeft, maar dat hij bewijst dat de oppervlakte of inhoud van de figuur gelijk is aan bijvoorbeeld de oppervlakte van een bepaalde driehoek, of de inhoud van een bepaalde cylinder. Zo bewijzen Archimedes en zijn Islamitische collega's dat de oppervlakte van een paraboolsegment gelijk is aan vier derde maal de oppervlakte van de driehoek met dezelfde basis en top als het segment (fig. 2).

Nu komen we aan in de tiende eeuw, bij Al-Kuhi, die het werk heeft voortgezet waarmee zijn voorgangers in de negende eeuw begonnen waren. Maar laat ik u eerst iets over het leven van Al-Kuhi vertellen.

Al-Kuhi had in zijn jeugd niet zo'n serieuze instelling, hij hoorde bij een groepje

komedianten of acrobaten, die op de markten optraden. Maar daarna, zo gaat een biograaf verder, 'greep hem de zorg om de eeuwigheid', en hij wijdde zich aan de studie van de wetenschap. Hij werd een zeer vooraanstaand meetkundige, in de tweede plaats ook astronoom. Onder zijn leiding werd een observatorium gebouwd in de tuin van het koninklijk paleis te Bagdad; hier werden, alweer onder zijn leiding, astronomische waarnemingen gedaan. Al-Kuhi had veel leerlingen, een knap uiterlijk en is hoogbejaard geworden.

Er zijn een aantal van zijn uitspraken bewaard gebleven, onder andere: 'Door verheven, zuivere intentie wordt de mens datgene gegeven wat hij vraagt; niet door hard werken.' Toch heeft Al-Kuhi zelf hard gewerkt, er zijn ongeveer 40 meetkundige werken van hem bewaard gebleven, en hij moet er nog meer geschreven hebben.

Van de bewaarde werken zijn op dit moment zeven goed onderzocht, van de resterende 33 is vaak niet meer dan de titel bekend.

Al-Kuhi heeft o.a. de stelling die de inhoud van het rotatielichaam van een ellips geeft, herontdekt, en ook resultaten van Archimedes over zwaartepunten van het paraboolsegment, zijn rotatielichaam, en de halve bol. Dit heeft hij onafhankelijk van Archimedes gedaan, hij schrijft dat hem geen resultaten van anderen op dit gebied bekend waren.

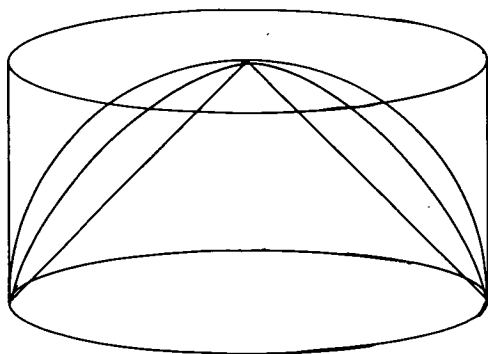
We weten niet hoe Al-Kuhi zijn stellingen afgeleid heeft, want zijn grote leerboek in zes delen over de theorie van de zwaartepunten is verloren gegaan. Maar gelukkig noemt Al-Kuhi enkele van zijn resultaten in een bewaard gebleven correspondentie met een vriend (wiens naam ik niet zal noemen om uw geheugen niet met Arabische namen op de proef te stellen).

En nu komen we bij π terecht, want de vriend vraagt in zijn eerste brief (Ik geef overal vrije weergaven):

'Ik heb gehoord dat jij bewezen hebt, dat omtrek en diameter van de cirkel zich verhouden als twee gehele getallen.' De vriend vraagt hierover opheldering.

Al-Kuhi zegt in zijn antwoord het volgende:

Beschouw eens een halve bol, een omwentelingslichaam van een paraboolsegment, en een kegel, die alle drie in één en dezelfde cylinder ingeschreven zijn, als in fig. 3. Is het nu niet verbazingwekkend dat de inhoud van de halve bol, het rotatielichaam van het paraboolsegment en de kegel gelijk zijn aan respectievelijk



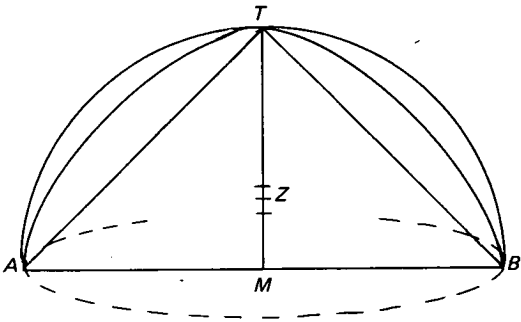
Figuur 3

twee derde, de helft en één derde van de inhoud van de cylinder? Dit wijst erop, dat God de dingen toch op wonderbaarlijke wijze geordend heeft!

Maar ik heb een nog mooiere volgorde gevonden in de zwaartepunten van sommige figuren!

Beschouw hiertoe een halve cirkel ABT met diameter AB , middelpunt M ; $MT \perp AB$, en tegelijkertijd de gelijkbenige driehoek ABT en het parabolsegment ABT van de parabool met top T , as TM , die door A en B gaat.

Als we deze drie figuren om TM draaien, ontstaan drie nieuwe: uit de halve cirkel een halve bol, uit het parabolsegment een rotatielichaam en uit de driehoek een kegel, zie fig. 4.



Figuur 4

We duiden het zwaartepunt van elk van deze zes figuren aan met Z . Nu vind je de volgende wonderbaarlijke ordening (die Al-Kuhi in een tabel geeft) in de verhoudingen $ZM : TM$

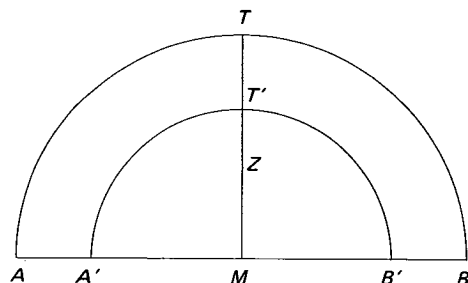
$ZM : TM$			
vlakke figuren		omwentelingslichamen	
driehoek	1 : 3	kegel	1 : 4
parabolsegment	2 : 5	omw. lichaam parabolsegment	2 : 6
halve cirkel	3 : 7	halve bol	3 : 8

Dan gaat Al-Kuhi met zijn resultaat voor de halve cirkel aan het werk (fig. 5, notaties dezelfde als in fig. 4).

We weten: $ZM : TM = 3 : 7$.

Kies nu A' op MA zodat

$MA' = \frac{2}{3} MA$ en trek een nieuwe halve cirkel $A'B'T'$ met middelpunt M , als in de figuur.



Figuur 5

Nu past Al-Kuhi twee stellingen toe (die hij voor willekeurige cirkelsectoren en cirkelbogen formuleert).

1. Omdat Z het zwaartepunt is van de *halve cirkel* ATB , is Z ook zwaartepunt van de *boog* $A'T'B'$.
2. Omdat Z het zwaartepunt van de boog $A'T'B'$ is, geldt, dat de lengte van de boog $A'B'$ zich verhoudt tot de lengte van de rechte $A'B'$ als $A'M$ tot MZ .

Het bewijs van deze twee stellingen was te vinden in zijn grote zesdelige werk over zwaartepunten, we kunnen het dus helaas niet meer nalezen. De twee stellingen zijn echter wel waar, en ik geef u graag de opgave mee een bewijs ervoor te construeren.

Hierbij mag u dan geen moderne hulpmiddelen zoals symbolische notaties en integralen gebruiken, u moet een bewijs vinden zoals Al-Kuhi het ook gegeven zou kunnen hebben. Ik verwacht dat uw bewondering voor Al-Kuhi door deze oefening zeer zal toenemen.

De toepassing van de twee stellingen leidt tot het volgende resultaat:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\text{boog } A'B'}{A'B'} = \frac{A'M}{ZM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{TM}{ZM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{9},$$

$$\text{dus } \pi = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}. \text{ (Al-Kuhi leidt dit op iets omslachtiger manier met}$$

gebruik van verhoudingen af)

Een droom is werkelijkheid geworden! Er is alleen een kleine moeilijkheid:

Al-Kuhi kent de Cirkelmeting van Archimedes, en dus ook diens resultaat

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Nu is $3\frac{1}{9}$ wel kleiner dan $3\frac{1}{7}$, maar $3\frac{1}{9}$ is niet groter dan $3\frac{10}{71}$. Al-Kuhi

heeft een slimme oplossing van dit probleem bedacht: de $3\frac{10}{71}$ is een verschrijving

in het handschrift, er heeft oorspronkelijk $3\frac{10}{91}$ gestaan.

Wanneer de getallen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{10}{91}$ in het Arabisch in woorden worden uitgeschreven, lijken ze inderdaad veel op elkaar:

$$3\frac{10}{71} = \text{ثلاثة و عشرة اجزاء من احد و سبعين جزء}$$

$$3\frac{10}{91} = \text{ثلاثة و عشرة اجزاء من احد و تسعين جزء}$$

Alleen de twee woorden **سبعين** (70) en **تسعين** (90) zijn verschillend, en het verschil wordt nog kleiner wanneer men bedenkt dat de puntjes boven en onder de woorden vaak werden weggelaten in handschriften. Ik moet hierbij opmerken, dat Al-Kuhi misschien een versie van de Cirkelmeting van Archimedes kende, waarin het bewijs van de Archimedische benadering van π ontbrak.

Ik zal de verdere argumenten van Al-Kuhi laten rusten, en zelf enig commentaar op de redenering geven. Tot uw geruststelling kan ik zeggen dat Al-Kuhi's redenering inderdaad een fout bevat, de verhouding $ZM:TM = 3:7$ voor de halve cirkel is onjuist. Alle andere waarden voor $ZM:TM$ in de tabel kloppen wel, en in de tweede brief van Al-Kuhi aan zijn vriend komt de aap uit de mouw: Al-Kuhi heeft zijn resultaten voor de vijf andere gevallen meetkundig bewezen, maar zijn resultaat voor de halve cirkel nog niet.

Al-Kuhi wijt dit echter uitsluitend aan zijn eigen onkunde. De verhouding $ZM:TM$ moet immers wel $3:7$ zijn, wegens het bestaan van de wonderbaarlijke ordening – het zou toch heel vreemd zijn, wanneer die verhouding niet $3:7$ was. Daar moet u niet om lachen, want Al-Kuhi bedoelde dit heel serieus.

Het juiste resultaat voor de halve cirkel is $ZM:TM = 4:3\pi$, maar dit is feitelijk ook wat Al-Kuhi afleidt door zijn twee stellingen uit zijn leerboek over zwaartepunten toe te passen! We kunnen zijn redenering zelfs als volgt weergeven: Hij leidt af $ZM:TM = 4:3\pi$, wegens filosofische redenen moet gelden $ZM:TM = 3:7$, conclusie: $\pi = \frac{28}{9}$.

De redenering van Al-Kuhi is dus minder fout dan op het eerste gezicht zou worden vermoed.

We kunnen verder het volgende zeggen; wat Al-Kuhi nog wilde doen – het bepalen van het zwaartepunt van de halve cirkel – had hij in feite al gedaan. Dat zag hij zelf niet, hiervoor had hij het probleem van een heel andere kant moeten bezien – iets dat wij tegenwoordig wel een blikwisseling noemen. Het lijkt mij dat een dergelijke blikwisseling erg moeilijk geweest zou zijn voor Al-Kuhi: daarvoor had hij zijn geloof in de wonderbaarlijke ordening van de zwaartepunten moeten opgeven.

Van het vervolg van het verhaal weten we weinig; we weten niet, hoe de collega's van Al-Kuhi op deze vondst gereageerd hebben, en of de blikwisseling later toch is opgetreden. Er zijn slechts een paar kritieken bewaard gebleven van mensen, die de wiskunde van Al-Kuhi niet helemaal begrepen. Zo horen we dat onder de sterrenkundigen de mening heerste, dat omtrek en diameter van de cirkel zich niet als twee gehele getallen konden verhouden, omdat een rechte lijn en een cirkel twee lijnstukken 'van verschillende soort' waren. (Hierop antwoordde Al-Kuhi dat Archimedes toch bewezen had dat de oppervlakken van een bol en een kegel toch ook een rationale verhouding konden hebben, twee oppervlakken die toch veel meer van elkaar verschilden dat twee eenvoudige delen van het platte vlak; een cirkel en het vierkant van de straal)

U heeft nu een onjuiste berekening gezien van een Islamitische geleerde. De geleerden in de Islam hebben ook juiste berekeningen van π uitgevoerd, en ik wil het laatste gedeelte van mijn voordracht besteden aan zo'n juiste berekening, namelijk de berekening van de 15e-eeuwse rekenmeester Al-Kashi.

Al-Kashi hoorde tot een groep van 60 à 70 wiskundigen en sterrenkundigen die in de jaren 1420–1430 in Samarkand werkten. Samarkand ligt tegenwoordig in de Sovjet-Unie, niet ver van de Afghaanse grens. De wis- en sterrenkunde kwamen in deze periode in Samarkand tot grote bloei, onder andere omdat de plaatselijke koning een goed wis- en sterrenkundige was.

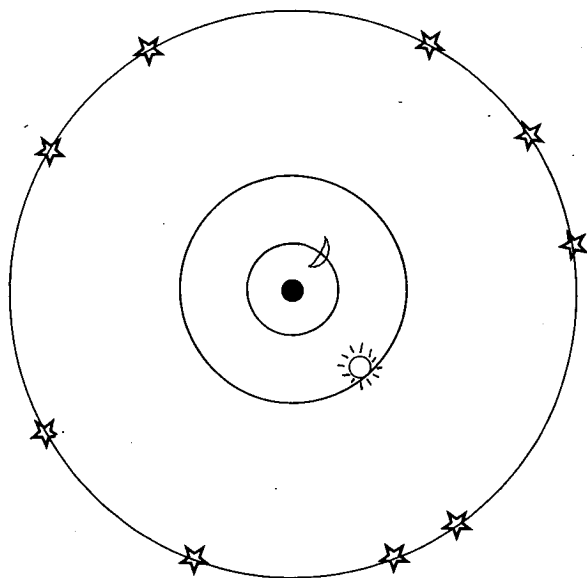
Voordat ik Al-Kashi's berekening van π kan bespreken moet ik laten zien hoe het heelal er in die periode uitzag in de ogen van de astronomen.

In het begin van zijn brief over de cirkelomtrek zegt Al-Kashi (ik geef steeds vrije aarde op 13.500 km (in tegenwoordige lengtematen uitgedrukt). Om de aarde draaiden zon, maan en planeten, daarbuiten was de sfeer van de vaste sterren, die eenmaal in 24 uur om de aarde draaide. Men schatte de diameter van deze buitenste sfeer op 20.000 aarddiameters, dit is 270 miljoen km. Zie fig. 6.

In het begin van zijn brief over de cirkelomtrek zegt Al-Kashi (ik geef steeds vrije weergaves): Archimedes heeft bewezen dat de verhouding van omtrek en diameter

groter is dan $3\frac{10}{71}$ en kleiner dan $3\frac{1}{7}$. Het verschil van deze twee waarden is $\frac{1}{497}$,

als we de omtrek van een cirkel met diameter 270 miljoen km willen uitrekenen, geeft dit een onnauwkeurigheid van ± 550.000 km. Later heeft men π nauwkeuriger benaderd, maar toch zo, dat de onzekerheid in de omtrek van deze cirkel nog steeds ± 100.000 km is. Als we oppervlakten of inhouds berekenen, kan de onnauwkeurigheid nog veel groter worden.



Figuur 6

Kennelijk is het de bedoeling van Al-Kashi geweest, π zo goed te benaderen, dat deze benadering voor altijd nauwkeurig genoeg zou zijn, want nu maakt hij bekend, wat hij van plan is: hij wil een benadering van π berekenen met een zo grote precisie, dat men de omtrek van een cirkel met diameter 600.000 aarddiameters met een onnauwkeurigheid van hoogstens een haarbreedte kan bepalen.

De haarbreedte is een goed gedefinieerde lengtemaat van ongeveer 0,5 mm, de cirkel die Al-Kashi hier beschouwt heeft een straal van ruim 4 miljard kilometer, ongeveer de afstand van de planeet Pluto tot de zon.

Ikzelf vind het opvallend dat deze cirkel in de wereld van Al-Kashi helemaal niet bestaan kan (de diameter van de sfeer van de vaste sterren was immers slechts 20000 aarddiameters), dit verhindert Al-Kashi blijkbaar niet, toch over een dergelijke cirkel na te denken.

Al-Kashi kiest een nieuwe cirkel met straal 60, en toont aan dat het voldoende is, de omtrek van deze cirkel met een precisie van 60^{-8} te bepalen, om de vereiste nauwkeurigheid van π te bereiken.

De omtrek van deze cirkel wil hij benaderen door de omtrek van een geschikte regelmatige ingeschreven $3 \cdot 2^n$ -hoek te berekenen: deze omtrek kan immers voor elke n met willekeurige precisie berekend worden uitgaande van de ingeschreven regelmatige zeshoek.

Ik herinner u aan mijn notaties i_k en o_k voor de omtrekken van respectievelijk de ingeschreven en omgeschreven regelmatige k -hoek.

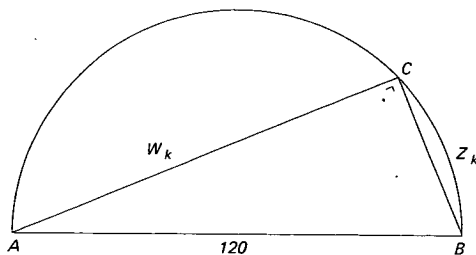
Al-Kashi moet nu een n bepalen zodat $i_{3 \cdot 2^n}$ minder dan 60^{-8} van de cirkelomtrek verschilt. Aan deze voorwaarde is zeker voldaan wanneer $i_{3 \cdot 2^n}$ en $o_{3 \cdot 2^n}$ minder dan 60^{-8} van elkaar verschillen. In een vernuftig bewijs toont Al-Kashi aan, dat dit laatste het geval is wanneer n minstens 28 is. Al-Kashi ziet zich dus de taak gesteld $i_{3 \cdot 2^{28}}$ te berekenen: de omtrek van een regelmatige ingeschreven 800.335.168-hoek. Hij hoeft $o_{3 \cdot 2^{28}}$ niet uit te rekenen, immers hij weet van te voren, dat $i_{3 \cdot 2^{28}}$ minder dan 60^{-8} van de cirkelomtrek verschilt. In dit opzicht is zijn methode dus een duidelijke vooruitgang op de methode van Archimedes.

Al-Kashi stelt zich ook de vraag hoe nauwkeurig, dat wil zeggen in hoeveel sexagesimalen, hij zijn berekeningen moet uitvoeren. Al-Kashi geeft zijn berekeningen niet in het decimale, maar in het sexagesimale stelsel, het talstelsel met grondtal 60. Om zijn redenering te kunnen begrijpen, moeten we eerst de methode beschouwen waarmee hij $i_{3 \cdot 2^{28}}$ berekent.

Essentieel hierin is de manier waarop Al-Kashi van de regelmatige ingeschreven k -hoek op de regelmatige ingeschreven $2k$ -hoek overgaat. Ik noem de zijde van de regelmatige ingeschreven k -hoek weer z_k , z_k is de koorde van een boog van $\frac{360}{k}$ graden.

Al-Kashi berekent voor $k = 6, 12, 24, \dots, 3 \cdot 2^{27}$ niet z_k , maar een andere grootte die ik w_k zal noemen, w_k is de koorde van een boog van $180 - \frac{360}{k}$ graden. In fig. 7 is

AB de diameter van de cirkel, $BC = z_k$, $AC = w_k$. De stelling van Pythagoras levert ons het verband tussen z_k en w_k : $z_k^2 + w_k^2 = AB^2 = 120^2$ (de straal van de cirkel is 60). Al-Kashi bewijst, dat w_{2k} uit w_k berekend kan worden via $w_{2k}^2 = 60(120 + w_k)$.



Figuur 7

Al-Kashi berekent eerst zijn 'startwaarde' $w_6 = 60\sqrt{3}$, dan voor $n = 1, 2, \dots, 26$ $w_{3,2n+1}$ door de vierkantswortel te trekken uit $60(120 + w_{3,2n})$. Hierna kunnen $(w_{3,28})^2$ en $6z(z_{3,28})^2$ berekend worden uit

$$w_{2k}^2 = 60(120 + w_k) \text{ voor } k = 3 \cdot 2^{27} \text{ en } z_k^2 + w_k^2 = 120^2 \text{ voor } k = 3 \cdot 2^{28}.$$

Tenslotte volgt $z_{3,28}$ door worteltrekking.

Voor de nauwkeurigheid waarmee gerekend moet worden heeft een en ander het volgende te betekenen: $i_{3,28}$ moet met een precisie van 60^{-8} , dus in 8 sexagesimalen nauwkeurig berekend worden. Omdat $3 \cdot 2^{28}$ ongeveer 60^5 is, moet elke zijde van de regelmatige ingeschreven $3 \cdot 2^{28}$ -hoek in 13 sexagesimalen worden berekend. $z_{3,28}$ wordt verkregen door worteltrekking; $z_{3,28}$ is ongeveer zo groot als het $3 \cdot 2^{28}$ -e deel van de cirkelomtrek, en daarom kan Al-Kashi een schatting geven van de orde ervan: $z_{3,28} \approx 60^{-4}$. Daarom moet het kwadraat in 17 sexagesimalen bekend zijn, om door worteldeling $z_{3,28}$ zelf in 13 sexagesimalen te berekenen (zo moet mijns inziens de redenering van Al-Kashi geweest zijn, de tekst geeft hierover niet helemaal uitsluitel, wellicht doordat de kopiïst hem verkeerd heeft overgeschreven).

Dus moet ook het kwadraat van $w_{3,28}$ in 17 sexagesimalen berekend worden. Het verband tussen dit kwadraat en $w_{3,27}$ wordt gegeven door de formule $w_{2k}^2 = 60(120 + w_k)$ voor $k = 3 \cdot 2^{27}$, wegens het voorkomen van de 60 in deze formule moet $w_{3,27}$ tot in 18 sexagesimalen bepaald worden. Al-Kashi besluit alle $w_{3,2n}$ in 18 sexagesimalen te berekenen.

Om $z_{3,28}$ te berekenen moet Al-Kashi 28 maal een vierkantswortel trekken. De overige rekenoperaties die hij moet uitvoeren (vermenigvuldigen met 60, optellen van 120) zijn zeer eenvoudig in het sexagesimale stelsel, zodat de worteltrekkingen de hoofdschotel vormen. In fig. 8 vindt u de eerste worteltrekking. Al-Kashi berekent hier w_6 , de koorde van een boog van 120 graden, $w_6 = 60\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 60^2}$.

Al-Kashi controleert alle worteltrekkingen door van het antwoord weer het kwadraat uit te rekenen.

Tenslotte geeft Al-Kashi $i_{3,28}$, in sexagesimalen en in decimalen, volledigheidshalve ook $w_{3,28}$ en $o_{3,28}$ (berekend uitgaande van $i_{3,28}$), en 2π in sexagesimalen en decimalen. In decimale notatie ('met Indische cijfers') is zijn resultaat

$$2\pi = 6,2831853071795865, \text{ tot in de laatste decimaal correct.}$$

[illegible]

tienden
elfden
twaalfde
dertien
veertien
vijftien
zestien
zeventien
achtien

Figuur 8

Toelichting bij fig. 8.

Al-Kashi noteert gehele en niet-gehele getallen in het sexagesimale stelsel, echter zonder gebruik te maken van een komma of een hieraan equivalent symbool. Zijn systeem is het volgende:

- 1×60^n heet een n -de macht ($n \geq 1$), een eenheid heet een graad,
- 1×60^{-1} heet een minuut, 1×60^{-2} heet een tweede (of: seconde),
- 1×60^{-3} heet een derde, algemeen heet 1×60^{-m} een m -de ($m \geq 2$).

Al-Kashi noteert nu het getal $2.60 + 53 + 1.60^{-1} + 24.60^{-2}$ als 2 eerste machten, 53 graden, 1 minuut en 24 tweeden, of als 2 53 1 24 tweeden.

Al-Kashi gebruikt om de getallen 1 tot en met 59 aan te duiden geen 59 verschillende symbolen, maar een letterschrift, dat feitelijk een Arabische vertaling is van een letterschrift uit de Griekse oudheid. Hierin worden de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 met verschillende letters aangeduid; het getal 23 bijv. wordt genoteerd met de letter voor het getal 20 en daarachter de letter voor het getal 3. In de bovenstaande berekening trekt Al-Kashi de vierkantswortel uit 3 tweede machten. Het antwoord: 1 43 55 22 58 27 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 57 achttienden is boven in de tabel te vinden. Hij vindt dit antwoord (dat ik met a zal aanduiden) op de volgende manier: Omdat $a^2 = 3.60^2$ zal het hoogste getal in de sexagesimale schrijfwijze van a een eerste macht zijn. Schrijf a in het sexagesimale stelsel,

$$a = a_{-1}.60 + a_0 + a_1.60^{-1} + \dots + a_{18}.60^{-18} + \dots \quad 0 \leq a_i \leq 59$$

Al-Kashi gebruikt hulpgetallen b_i , die hij onderaan in de tabel noteert:

$$b_{-1} = a_{-1}.60^2, b_i = 2a_{-1}.60^{-i+1} + \dots + 2a_{i-1}.60^{-2i+1} + a_i.60^{-2i} \text{ voor } i \geq 0.$$

a_{-1} is het grootste gehele getal met $a_{-1}^2 \leq 3$,

$$b_{-1} = a_{-1}.60^2 = 1 \text{ tweede macht (onderste regel tabel),}$$

$$a_{-1}.60^2 = a_{-1}.b_{-1} = 1 \text{ tweede macht (regel 2 van boven)}$$

$$a^2 - (a_{-1}.60)^2 = a^2 - a_{-1}.b_{-1} = 3 \text{ tweede machten (r.1 v.b.)} - 1 \text{ tweede macht (r.2 v.b.)} \\ = 2 \text{ tweede machten (r.3 v.b.)} = 2.60^2.$$

a_0 is het grootste gehele getal met $a_0.(2a_{-1}.60 + a_0) \leq 2.60^2$, $a_0 = 43$.

$$b_0 = 2a_{-1}.60 + a_0 = 2 \text{ 43 graden (r.2 v.o.),}$$

$$a_0.b_0 = 1 \text{ 56 49 graden (r.4 v.b.)}$$

$$a^2 - (a_{-1}.60 + a_0)^2 = (a^2 - a_{-1}.b_{-1}) - a_0.b_0 = 200 \text{ graden} - 1 \text{ 56 49 graden} = 3 \text{ 11 graden (r.5 v.b.)}$$

a_1 is het grootste gehele getal met $a_1.60^{-1}(2a_{-1}.60 + 2a_0 + a_1.60^{-1}) = a_1(2a_{-1} + 2a_0.60^{-1} + a_1.60^{-2}) \leq 3 \text{ 11 graden}$, $a_1 = 55$.

$$b_1 = 2a_{-1} + 2a_0.60^{-1} + a_1.60^{-2} = 3 \text{ 26 55 tweeden (r.3 v.o.)}$$

$$a_1.b_1 = 3 \text{ 940 25 tweeden (r.6 v.b.)}$$

$$a^2 - (a_{-1}.60 + a_0 + a_1.60^{-1})^2 = (a^2 - a_{-1}.b_{-1} - a_0.b_0) - a_1.b_1 = 3 \text{ 11 graden} - 3 \text{ 940 25 tweeden} = 1 \text{ 1935 tweeden (r.7 v.b.)}$$

Zo vormen zich in de tabel rijen getallen naar beneden en naar boven. Na het vinden van a_9 en b_9 begint Al-Kashi weer bovenaan, respectievelijk onderaan en vervolgt de berekeningen.

Al-Kashi gebruikt de 59-proef ('weegschaal') om zijn berekeningen te controleren. Deze proef berust o.a. op het feit dat in het zestigtallig stelsel ieder getal modulo 59 congruent is met de som van zijn sexagesimalen. Voorbeeld: het product van $a_3 = 58$ en $b_3 = 3 \text{ 27 50 44 58 zesden (r.5 v.o.)}$ is gelijk aan $3 \text{ 20 55 3 28 4 zesden (r.10 v.b.)}$. $3 + 27 + 50 + 44 + 58 = 182 \equiv 5 \pmod{59}$, $3 + 20 + 55 + 3 + 28 + 4 = 113 \equiv 54 \pmod{59}$, en inderdaad is nu $3 \text{ 27 50 44 58} \times 58 \equiv 5 \times 58 = 290 \equiv 54 \pmod{59}$. Al-Kashi noteert de getallen 5 en 54 onder 'weegschaal'.

De tabel waarin Al-Kashi ter controle het kwadraat van $a = 1 \text{ 43 55 22 58 27 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 57}$ achttienden berekent is hier niet weergegeven.

Al-Kashi is met dit resultaat recordhouder geweest tot 1596, in dat jaar benaderde Ludolf van Ceulen π in 20 decimalen nauwkeurig. Maar Ludolf van Ceulen heeft niet geweten, dat hij hiermee het record van Al-Kashi brak, want het werk van Al-Kashi is in het westen onbekend gebleven tot 1950.

Dames en Heren,

Ik heb grote bewondering voor deze prestatie van Al-Kashi, en ik hoop, dat dat bij u hetzelfde is. We moeten steeds bedenken, dat Al-Kashi niet de beschikking had over onze symbolische notaties (waarvan ik in het voorgaande dankbaar gebruik gemaakt heb). Hij moest alle gelijkheden, waarvoor wij deze notaties gebruiken, uitdrukken als gelijkheden van oppervlakten van rechthoeken, vierkanten, driehoeken enzovoort – op een manier waarvan wel eens gezegd wordt dat zij tot de ‘knip- en plakwiskunde’ behoort.

U moet beide vertellingen over π dan ook ten dele als pleidooi zien, om ‘primitievere’ vormen van wiskunde niet als minderwaardig te beschouwen. Deze vormen hebben hun nut gehad in de ontwikkeling van de mensheid als geheel, er zijn prachtige resultaten mee bereikt, en naar mijn idee hebben dergelijke ‘primitievere’ vormen nog steeds hun nut in de ontwikkelingsgang van ieder menselijk individu.

In het bijzonder zou ik mijn tweede vertelling als ondertitel willen meegeven: ‘Hoe we met knip- en plakwiskunde 2π in 16 decimalen kunnen benaderen.’

Ik dank u voor uw aandacht.

Literatuur

Geschiedenis van de wiskunde, algemeen:

D. J. Struik, *Geschiedenis van de Wiskunde*, Amsterdam, 1977.

Archimedes:

E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Groningen, 1938 (vervolgd in de jaargangen 1938–1944 van *Euclides*). Van dit werk van Dijksterhuis bestaat een Engelse vertaling, uitgegeven onder de titel ‘Archimedes’, Kopenhagen 1956.

Islamitische traditie:

A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig, 1964.

F. Sezgin, *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, Band V, *Mathematik*, Leiden 1974 (gaat tot het jaar 1050).

Al-Kuhi: zie p. 314–321 van het boek van F. Sezgin, voor het werk van Al-Kuhi over π zie

J. L. Berggren, *The barycentric theorems of Abū Sahl al-Kūhī*. Abstracts of Session Papers of the Second International Symposium on the History of Arabic Science, Aleppo, 5–12 april 1979, p. 48.

J. Sesiano, *Note sur trois théorèmes de Mécanique d'al-Qūhī et leur conséquence*. *Centaurus* 22/1979/281–297.

Al-Kashi's werk over π :

P. Luckey, *Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Ġamsid b. Mas'ud al-Kašī*. *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften*, 1950/6.

Een handschrift met de brief van Al-Kashi over π is in facsimile gepubliceerd in: B. A. Rosenfeld, V. S. Segal, A. P. Juschkewitsch, *Dzemsid Giyaseddin al-Kasi, Klyuč arifmetiki, Traktat ob obkruznosti*, Moskou 1956, p. 338–424. De tabel van fig. 8 bevindt zich in dit boek op p. 420, in het artikel van P. Luckey op p. 12 (Duits) en p. 84 (Arabisch).

Tenslotte dank ik Dr. J. L. Berggren, omdat hij mijn aandacht gevestigd heeft op het werk van Al-Kuhi over π .

Stichting de vrije leergangen Amsterdam

Part-time opleidingen voor de middelbare akten

Nederlands-A en B
Engels-A en B
Frans-A
Duits-A

Geschiedenis
Theologie
Economie
Wiskunde-A en B

De opleiding *Theologie*, die na de zomervakantie voor het eerst start, is een cursus op m.o.-A niveau.

Hulpcursussen voor Latijn, Onderwijskunde en Spreekonderwijs.

Voorlichting aan belangstellenden op woensdagavond 7 mei 1980, 20.00 uur in het hoofdgebouw van de Vrije Universiteit, De Boelelaan 1105, Amsterdam-Buitenveldert.

De studiegids is op *schriftelijke* aanvraag verkrijgbaar bij het M.O.-secretariaat, Postbus 90048, 1006 BA Amsterdam.

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32^I - Amsterdam (c) - Tel. 020-2628 10

INHOUD:

Voorwoord van de redactie 369

H. Broekman: Het zijn de kleine dagelijkse dingen die het hem doen 370

G. Doevendans en J. van Dormolen: Blikwisseling 374

F. Meester en J. Vedder: Het teruggeven en bespreken van een proefwerk 383

B. Knip en G. Schoemaker: Gebruik en misbruik van de geodriehoek 389

J. P. Hogendijk: Twee vertellingen over π 395

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

H. Broekman, Frans Halsstraat 27, 3583 BL Utrecht.

G. Doevendans, Clara Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam.

J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht.

J. P. Hogendijk, Mathematisch Instituut, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht.

B. Knip, Banstraat 43, 1071 JX Amsterdam.

F. Meester, Waalstraat 118^{III}, 1079 EC Amsterdam.

G. Schoemaker, De Dissel 11, 1251 ZA Laren.

J. Vedder, Nieuwendijk 7, 3443 BH Woerden.