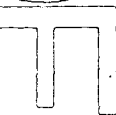




**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**



55e jaargang

1979/1980

no. 8

april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 20,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

In memoriam Gerrit Krooshof

Op 2 februari is Gerrit Krooshof, of Kroos zoals zijn vrienden hem noemden, overleden.

Lang is hij redacteur van Euclides geweest. In 1964 werd hij redactielid als vertegenwoordiger van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. December 1968 volgde hij Johan Wansink op als voorzitter. Voor korte tijd, zoals hij zei, want het voorzitterschap diende in handen te zijn van jongeren. Toch heeft hij deze functie acht jaar vervuld. We hebben een prima voorzitter aan hem gehad.

Als mijn gedachten naar hem teruggaan, denk ik echter in de eerste plaats aan zijn persoon. Hij was integer, bekwaam, bescheiden. Plezierig in de omgang; men kon niet met hem in een conflict-situatie geraken.

Hij was conrector van het Thorbecke Lyceum in Groningen. Ook daar had hij als mens een uitstekende reputatie. Voor 1968 heette deze school: Middelbare school voor meisjes en H.B.S.-B. Juist het wiskunde-onderwijs aan de leerlingen van de M.M.S. was voor hem een speciale uitdaging. Hij heeft zich dermate in de problemen van dit onderwijs verdiept, dat hij ertoe overgegaan is zijn gedachten hierover op schrift te stellen. In 1961 verscheen van zijn hand Wiskunde voor de M.M.S., in samenwerking met het echtpaar Van Hiele en met De Miranda. Drie deeltjes waarin geheel nieuwe wegen ingeslagen werden om leerlingen voor wie wiskunde geen examendoel was, te boeien.

Dit streven nieuwe, didactisch verantwoorde wegen in te slaan maakte hem uitermate geschikt om produktief werk te verrichten bij het uitvoeren van de vernieuwingen omstreeks 1968. Hij heeft dan ook een leidende rol gespeeld bij het tot stand komen van de serie Moderne Wiskunde. Dit baanbrekende werk is van grote waarde geweest voor de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. We kunnen gerust zeggen dat zonder Moderne Wiskunde invoeren van het nieuwe programma in 1968 bij de M.A.V.O. op zeer grote weerstand gestuit was.

Kroos, we danken je voor alles wat je in je leven geweest bent in de eerste plaats voor je medemensen in de persoonlijke sfeer, en ook voor het onderwijs en voor ons tijdschrift.

Piet Vredenduin

Ter nagedachtenis aan G. Krooshof

Op 2 februari j.l. overleed G. Krooshof. De lezers van Euclides kenden hem uit de lange reeks artikelen in de laatste twintig jaren. Kroos was daarnaast gedurende een deel van die periode eindredakteur van Pythagoras, voorzitter van de redactie van Euclides en eindredakteur van Moderne Wiskunde. Zijn vrienden kenden hem vooral als een onderwijzman.

Een onderwijzman; dat betekende voor Kroos dat hij had nagedacht en bleef nadenken over zijn leerlingen, over wat hij ze te vertellen had en over zichzelf.

Wat hij over kinderen dacht wordt wellicht duidelijk uit zijn antwoord op de vraag of het nu echt waar is dat het rekenen door opeenvolgende generaties brugklasleerlingen steeds minder wordt beheerst: 'Dat moet wel zo zijn ... want ik hoor die klacht al veertig jaar'.

Dat hij over wiskunde(onderwijs) bleef denken blijkt uit zijn laatste artikel dat nog in dit blad is opgenomen.

Voor nabije vrienden zal Kroos vooral voortleven als de man die had gekozen voor 'georiënteerd zijn op de ander' en in die houding ook consequent was. Zó consequent dat hij tot in de laatste uren in het ziekenhuis er voor zorgde dat zijn bezoekers niet werden overbelast.

De mensen van Wolters-Noordhoff zijn daarom blij zolang de gelegenheid te hebben gehad met hem samen te werken.

WN

Simulaties met de pocketcalculator

J. DOMPELING

In een der artikelen door 'Euclides' aan de rekenmachientjes gewijd (jrg. 55, no. 1), brak ik een lans voor de programmeerbare rekenmachine.

Nu het interimrapport 'Herverkaveling Wiskunde I en II' verschenen is en 'simulaties' volgens dit rapport in het programma van de V.W.O. wiskunde-A opgenomen dient te worden, lijkt het me gewenst de mogelijkheden van de programmeerbare pocketcalculator voor het automatisch simuleren die ik destijds aan het eind van het betreffende artikeltje aanstipte, wat uitvoeriger te illustreren. Te meer daar het rapport bijna geheel voorbij gaat aan de mogelijkheden van de programmeerbare zakrekenmachine als hulpmiddel in het wiskunde-A programma.

Nu moet ik onmiddellijk erkennen dat een dergelijk apparaat niet aan alle desiderata die het rapport in het onderdeel 'Informatica' van het A-programma opsomt, kan voldoen, maar stel daartegenover dat deze apparaatjes de mogelijkheid bieden tenminste een redelijk deel van de wensen op dit gebied op korte termijn en op grote schaal te vervullen, terwijl we zonder dergelijke apparaten wel heel lang moeten wachten op het moment dat elke leerling die het wisk-A programma volgt, het automatisch verwerken van gegevens in de praktijk kan beoefenen. Laat ik niemand vermoeien met een opsomming van allerlei argumenten maar dadelijk overgaan tot de beloofde illustratie.

Elke leraar die nu de 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek' in de bovenbouw V.W.O. introduceert, wordt wellicht aangenaam getroffen door allerlei aardige simulatie opdrachten die hij in de leerboekjes tegenkomt, maar het schrikbeeld van knikkers die door het lokaal vliegen, of het feit dat het hanteren van een tabel toevalsgetallen een tijdrovende bezigheid is, weerhoudt menig een van simulaties in en met de klas werkelijk uit te voeren.

Wie echter het A-programma uitvoert, ontkomt hier aan nauwelijks: de kwestie van de 'modelvorming', die terecht als een van de belangrijke wiskunde-A activiteiten wordt gezien, is belangrijk genoeg. Gelukkig stelt de programmeerbare rekenmachine ons in staat een en ander snel en efficiënt met de klas uit te voeren, terwijl we hiermee twee vliegen in één klap vangen: modelvorming én automatische gegevens verwerking.

De calculator TI 58 van Texas Instruments produceert een aantal uniform tussen 0 en 1 verdeelde toevalsgetallen (in 5 decimalen) via een programmaatje dat even zoveel keer de opdracht:

uitvoert, nadat door de gebruiker de resp. opdrachten:

PGM 15 E'

een willekeurig getal invoeren

en

E

éénmalig en in deze volgorde uitgevoerd zijn.

Een aantal steekproeven is zodoende met de TI 58 heel goed te simuleren, terwijl bovendien de resultaten gemakkelijk automatisch gerubriceerd kunnen worden.

Als tweede illustratie gebruik ik een probleem dat aan het boekje 'Computerkunde 2.' van Görts e.a. ontleend is en hier in enigszins gewijzigde vorm weergegeven wordt:

'Bij een bedrijf worden de klanten geholpen aan een loket. De tijd die de loketbediende gemiddeld nodig heeft, om een klant te helpen is 5 minuten. Als de loketbediende bezig is met iemand en een volgende klant komt, dan moet die in een rij staan wachten tot hij aan de beurt is. De tijd tussen de aankomst van een klant en die van de volgende (de aankomsttijd) is gemiddeld ook 5 minuten.

Simuleer 20 werkdagen van 8 uur. Laat van elke dag de maximale rij-lengte zien'.

In genoemd boekje worden de leerlingen geacht de simulatie te verrichten op basis van een rij uniform verdeelde toevalsgetallen. Met een dergelijke simulatie echter wordt de werkelijkheid teveel geweld aangedaan.

In 'Euclides' (jrg. 47, no. 7/8) een nummer dat niet vaak genoeg aangehaald kan worden, wordt uitvoerig ingegaan op het probleem van de wachttijden. Daar blijkt dat men de simulatie moet baseren op een rij exponentieel verdeelde toevalsgetallen.

Ik acht het echter niet waarschijnlijk dat veel leerlingen, die wisk-A in hun pakket zullen hebben, bereid of in staat zijn de mathematische introductie tot een dergelijke rij, zoals die in dit nummer van 'Euclides' gegeven wordt, te volgen. Nu is, met enige fantasie, het gebruik van zo'n rij exponentieel verdeelde toevalsgetallen, toch wel acceptabel te maken voor de leerlingen. Dan wordt het wachttijdenprobleem een onderwerp dat zich uitstekend leent voor behandeling en onderzoek in het kader van de A-wiskunde, omdat hierin zoveel delen en aspecten van de A-wiskunde tot hun recht komen: analyse, waarschijnlijkheidsrekening, modelvorming en automatisering.

De behandeling van het probleem stel ik me aan de hand van de volgende punten voor:

1. We verdelen de werkdag in tijdsintervalletjes van 1 sec: het is uit te sluiten dat in één zo'n tijdsintervalletje twee klanten tegelijk binnen komen.
2. De kans dat de eerste x seconden géén klant binnenkomt is dan gelijk aan $(1 - \frac{1}{300})^x$, wat bij benadering gelijk is aan: $e^{-x/300}$.
3. Dit wil zeggen: de kans dat je meer dan x seconden op een volgende klant moet wachten, is ongeveer gelijk aan $e^{-x/300}$.
4. Om hiermee succesvol te opereren, denken we ons een waarnemer bij het loket geplaatst. Van elke klant noteert hij op een apart briefje de tijd die

verliep tussen zijn aankomst en die van de vorige. Net zo lang totdat hij een grote stapel van, zeg 100.000 briefjes heeft. Dan sorteert hij deze stapel briefjes in volgorde van de erop voorkomende aankomsttijd, de kleinste bovenop. Zijn de klanten volgens 'model' binnengekomen, dan kunnen we aannemelijk maken dat bijv. een aankomsttijd van 225 sec. voorkomt op de briefjes met de nrs. 4716-4732. (M.b.v. de graf. van de functie $x \rightarrow e^{-x/300}$, zie fig. 1).

Omgekeerd leiden we via de inverse van deze functie uit het nummer van een briefje de er op voorkomende aankomsttijd af: is $a = \frac{\text{nummer}}{100000}$, dan is de aankomsttijd gelijk aan $-300 \ln a$.

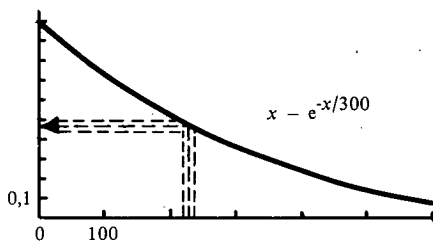


Fig. 1

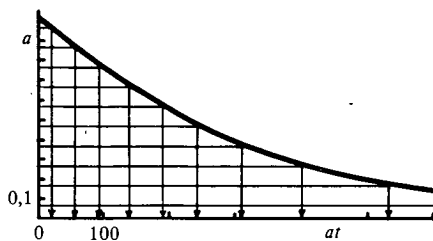


Fig. 2

5. Een stel uniform verdeelde toevalsgetallen a_i ($i = 1, \dots, n$) correspondeert met een trekking van n briefjes uit de stapel (met nummers $100.000a_i$), die weer correspondeert met een stel van n aankomsttijden $-300 \ln a_i$ (fig. 2). Met de pocketcalculator simuleer je het aankomen van klanten op een werkdag door deze de opdracht

$$\text{PGM 15 SBR DMS } \ln x \times 300 \pm =$$

zó vaak te laten uitvoeren dat het totaal van de wachttijden die hierdoor geproduceerd worden, de duur van de werkdag overschrijdt.

6. De hulptijden die de klanten nodig hebben, terwijl ze aan de beurt zijn, kun je net zo simuleren.
7. Aan de hand van enkele aankomst- en hulptijden kunnen we ons het proces van het komen en gaan der klanten voorstellen met behulp van de figuren 3 en 4 (de tijden zijn in minuten gegeven).
8. Om tot een blokschema te komen waarin we het proces schematisch weer-geven, moeten we letten op een paar zaken:

Wordt een nieuwe at 'gegoekt', dan betekent dat het aankomen van een nieuwe klant en dat de rij wachtenden met 1 aangroeit.

Als $at < ht$, dan wordt de opdracht

$$ht := ht - at$$

uitgevoerd (ht is steeds de tijd die degene die aan de beurt is, aan het loket nodig heeft voor de laatstbinnengekomene). Na evt. bijstelling van de maximale file-lengte, kan een nieuwe at gegokt worden, net zolang totdat $at \geq ht$.

tijden van nr aankomst hulp		
i	at	ht
1	-	3
2	5	5
3	4	6
4	2	7
5	3	2
6	3	3
7	4	8
8	7	2

Fig. 3

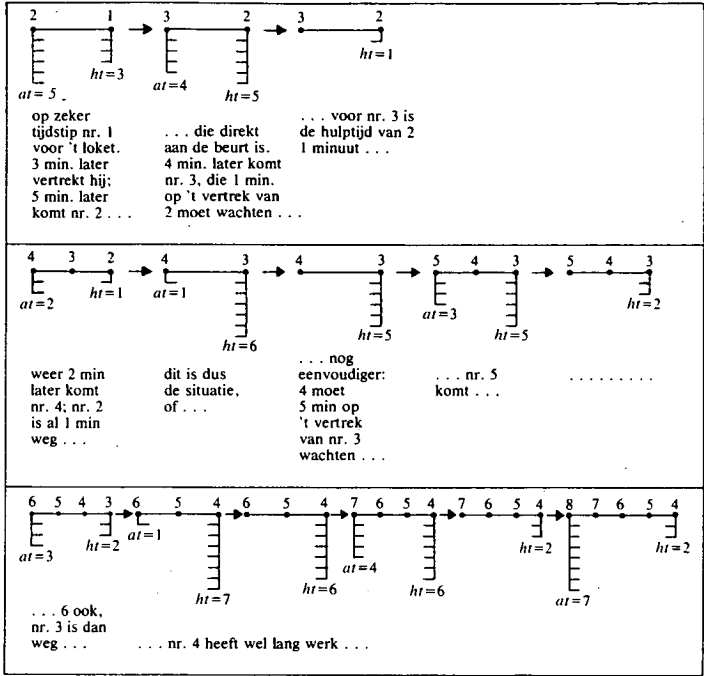


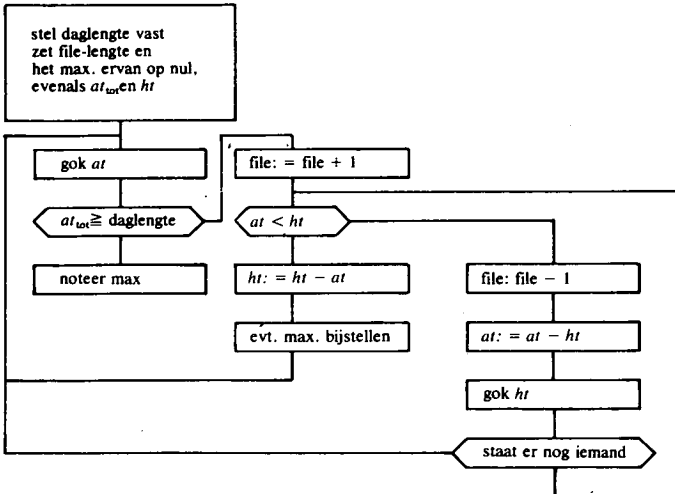
Fig.4

Als $at \geq ht$, dan wordt de opdracht

$$at := at - ht$$

uitgevoerd ('t gaat om de aankomsttijd van de laatstbinnengekomene vanaf het moment dat de volgende klant aan de beurt is gekomen), van de filelengte kan 1 af, een nieuwe ht kan gegokt worden, deze moet met at vergeleken worden, enz.

Nu het blokschema:



9. Het programma voor de pocketcalculator TI 58 dat de max. file-lengte bepaalt, luidt als volgt:

0 STO 06 STO 03 STO 04 STO 01 STO 08	
1bl A PGM 15 SBR DMS $\ln x \pm \times$ RCL 10 = STO 08	 at gokken
SUM 06 RCL 05 $x \leftrightarrow t$ RCL 06 $x \geq t$ E	 als dag om, dan E
1 SUM 04	 file := file + 1
1bl B RCL 01 $x \leftrightarrow t$ RCL 08 INV $x \geq t$ C	 als $at < ht$ dan C
1 INV SUM 04	 file := file - 1
$x \leftrightarrow t$ INV SUM 08	 at := at - ht
PGM 15 SBR DMS $\ln x \pm \times$ RCL 11 = STO 01	 ht ?gokken
CP RCL 04 $x = t$ A GOTO B	 naar A als er niemand is, anders naar B
1bl C INV SUM 01	 ht := ht - at
RCL 04 $x \leftrightarrow t$ RCL 03 $x \geq t$ A $x \leftrightarrow t$ STO 03 GOTO A	 max. bijstellen en nr A
1bl E RCL 03 R/S RST	 max. oproepen, als dag om is. KLAAR

Voordat dit programma in werking gesteld wordt, moet eerst het herhaaldelijk oproepen van een toevalsgetal voorbereid zijn d.m.v. de opdrachten:

PGM 15 E', invoering willekeurig getal en E

en dienen vervolgens het aantal seconden in een werkdag, de gemiddelde aankomsttijd (in ons voorbeeld 300 sec) en de gemiddelde ht (= 300 sec) in in de resp. geheugens 5,10 en 11 gezet te worden.

10. Het simuleren van een werkdag kost het apparaat 10 minuten. In één avond kun je al gauw 20 werkdagen simuleren en 't kan allemaal tussen allerlei andere bedrijven door. Wie de resultaten bekijkt, waant zich in de wachtkamer van de dokter, zó lang zijn soms de files:

dag i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
max. lengte file	24	24	20	8	10	33	7	21	16	28	34	9	20	7	13	8	25	11	14	16

Het kan zijn dat die lange rijen wachtenden het werktempo van de loketbediende verhogen: wie de gemiddelde hulptijd weet te reduceren tot 200 sec. zal de gemiddelde max. lengte gehalveerd zien. De loketbediende die, uitgaande van de gedachte dat hard werken schadelijk is voor de werkgelegenheid, zijn werktempo handhaaft en zo de opening van een tweede loket weet te bewerkstelligen, zorgt tevens voor een interessante uitbreiding van het onderhavige probleem.

Met een paar modificaties in het 9. gegeven programma kan gemakkelijk het effect van twee loketten op de max. lengte van de file bekeken worden.

Merkwaardig eigenlijk dat het simulatie-programma van het hiervoor geschetste probleem en de verwerking ervan pas in de laatste fase ter sprake kwamen. Zoiets zal echter symptomatisch blijken te zijn voor de meeste problemen die

in het kader van de informatica de revue zullen passeren. Programma's en hun verwerkingen zijn immers slechts middelen om resultaten te verkrijgen. Als nu programma's op schrapkaarten geschreven en door een computercentrum verwerkt worden, dan is het gevaar helemaal niet denkbeeldig, dat leerlingen onvoldoende programma's verwerkt krijgen, of na zeer lange tijd enig positief resultaat boeken en op de duur het programmeren maar laten zitten. Met behulp van een pocketcalculator van nog geen 300 gulden boek je daarentegen wel snel resultaten voor de meeste programma's die aan de orde zouden kunnen komen binnen het kader van de A-wiskunde. En dan betreft het niet eens de eenvoudigste, zoals hierboven geïllustreerd werd.

Het I.O.W.O. moet blijven

In het vorige nummer van EUCLIDES heeft u kunnen lezen dat de staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen besloten heeft per 1 januari 1981 het I.O.W.O. op te heffen.

In oppperste verontwaardiging heeft de redactie hiervan kennisgenomen.

Uit de brief van de heer A. J. Hermes waarin hij dit besluit aan de betrokkenen mededeelt, blijkt als zijn mening, dat door de splitsing van de activiteiten van het I.O.W.O. (leerplanontwikkeling overhevelen naar de stichting Leerplanontwikkeling en een kleine onderzoekseenheid bij de rijksuniversiteit van Utrecht onderbrengen) het doorgaan van deze activiteiten gewaarborgd is. Op geen enkele wijze gaat hij in op het argument dat juist het samengaan van deze activiteiten in één instituut de voorwaarde is voor de ontwikkeling van goed wiskunde-onderwijs voor grote groepen leerlingen in het basis- en voortgezet onderwijs. Door deze splitsing haalt hij de ziel uit het werk van het I.O.W.O.

Met alle anderen, in binnen- en buitenland, die vorig jaar al een beroep hebben gedaan het I.O.W.O. te laten voortbestaan, protesteert de redactie nogmaals tegen dit beleid.

Zij hoopt dat alle lezers in woord en daad zich bij dit protest willen aansluiten. Hopelijk zijn deze protesten niet tevergeefs en komt de staatssecretaris terug op zijn heilloze besluit.

De redactie

Schotse ervaringen

H. J. SMID

Het is een verfrissende ervaring eens buiten het eigen (onderwijs)wereldje rond te kunnen kijken. Vandaar dat ik de gelegenheid geboden door een beurs van de Raad van Europa een conferentie van Schotse wiskundeleraren bij te wonen, gehouden in juni 1979, niet voorbij heb laten gaan. Door dit verslagje wil ik proberen u iets van mijn ervaringen te laten meebeleven.

Eerst even iets over het Schotse onderwijssysteem. Sinds het begin van de jaren zeventig bestaat in Schotland voor het voortgezet onderwijs een 'comprehensive' systeem, een soort middenschool dus. Anders dan in Engeland geldt dit voor alle scholen, dus een concurrentie-situatie tussen verschillende schooltypen komt niet voor. Deze overgang naar het 'comprehensive systeem' werd door de deelnemers van deze conferentie gezien als een politieke beslissing waarop hoe dan ook niet meer terug te komen is, en is dan ook geen punt van serieuze discussie meer. De meeste deelnemers stonden overigens positief tegenover het middenschool systeem, waarbij zij overigens zelf al opmerkten, dat naar zo'n conferentie nu eenmaal meestal de meest actieve docenten komen, wat nogal eens samenvalt met voorstanders van dergelijke vernieuwingen in het onderwijs. Vrijwel alle docenten hebben een ongeveer vier jaar durende universitaire (vak)opleiding achter de rug, gevolgd door één jaar beroepsopleiding op een 'college of education'.

De conferentie zelf was gewijd aan een aantal problemen die in dit systeem voor de zwakkere leerlingen op het gebied van het wiskundeonderwijs gebleken zijn.

De conferentie was getiteld 'Mathematics for the less able in S1 en S2' (1e en 2e klas van het voortgezet onderwijs). Met 'less able' werd (meestal) bedoeld de zwakste 15% uit een gewone heterogeen samengestelde klas ('mixed ability class').

De conferentie vormde de afronding van een groot aantal activiteiten die door de Schotse wiskundeleraren de afgelopen jaren zijn ondernomen. Daarom eerst iets over de voorgeschiedenis van deze bijeenkomst.

Het werd na de overgang naar wat ik nu maar verder de middenschool zal

noemen, spoedig duidelijk dat dit, anders dan misschien sommigen zouden verwachten, vooral voor de zwakke leerlingen veel problemen opleverde. Sinds 1975 is een speciale 'Newsletter' uitgegeven door de 'Scottish Curriculum Development Service', gewijd aan de problemen van deze leerlingen. In 1976 werd door 'The Central Committee on Mathematics' een werkgroep opgericht ter bestudering van de problematiek van de 'less able'. De opdracht voor deze werkgroep bestond uit drie onderdelen: na te gaan welke wiskundige scholing de zwakkere leerlingen zouden moeten krijgen, de moeilijkheden van deze leerlingen te onderzoeken, zonodig geschikte tests te ontwerpen, en hulp te bieden voor de docenten die met deze leerlingen te maken hebben. Deze opdracht werd in een aantal onderdelen gesplitst waaraan door regionaal georganiseerde groepjes gewerkt werd. Deze groepjes waren samengesteld uit leraren, vakdidactici van de lerarenopleiding en zogenaamde 'advisers', mensen in dienst van de overheid die de overheid van advies dienen op het gebied van het onderwijs. Op de conferentie werd door deze groepen verslag uitgebracht over hun werkzaamheden. Voorbeelden van onderwerpen zijn:

- *Wat zijn nu de essentiële vaardigheden die iedere leerling om zich sociaal te kunnen handhaven moet beheersen.*
 - *Hoe kunnen bestaande boeken geschikt gemaakt worden voor de zwakkere leerlingen.*
 - *Hoe spoor je de zwakke leerlingen op.*
 - *Hoe zou het onderwijs voor de zwakke leerlingen ingericht moeten zijn.*
- Op deze vier voorbeelden van onderwerpen zal ik wat nader ingaan.

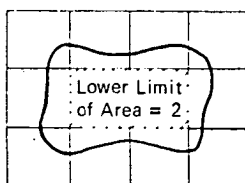
- *Wat zijn de essentiële vaardigheden?* De groep die zich met dit onderwerp bezig hield, heeft geprobeerd, heel concreet een lijst met vaardigheden op te stellen, die iedereen regelmatig in het dagelijks leven nodig heeft (uiteraard dan voor zover die op wiskunde betrekking hebben). Hierbij werd o.a. gebruik gemaakt van vragenlijsten. Het zal niemand verbazen dat die vooral op het gebied van het rekenen liggen, zoals optellen van een aantal positieve getallen kleiner dan 1000, het kunnen rekenen met de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, procenten zoals 10, 20, 50% e.d. Heel veel, ook in het rekenonderwijs, is nu eenmaal traditioneel bepaald en blijkt eigenlijk heel moeilijk als echt voor iedereen noodzakelijk waar te maken. Opvallend was dat er eigenlijk weinig over het gebruik van Calculators werd gesproken.
- *Hoe maak je bestaande boeken geschikt?* In zo'n 60% van de Schotse scholen wordt gebruik gemaakt van boeken van de Scottish Mathematics Group, waarvan de boeken in Nederland tot de bekende 'Moderne Wiskunde' serie bewerkt zijn. De Schotse versie is veel minder dan de Nederlandse, waarvan een groot aantal versies voor de verschillende schooltypes verschenen zijn, geschikt voor de zwakkere leerlingen. Dit veroorzaakt in de heterogeen samengestelde klassen grote problemen. Het blijkt voor veel docenten een onmogelijke taak zelf materiaal voor hun leerlingen samen te stellen. Er verschijnen nu op de engelstalige markt wel wat methoden die meer geschikt zijn, zoals Modular Math, maar op de conferentie bleek duidelijk dat het gebrek aan goede leerboeken voor de zwakkere leerlingen een enorm pro-

bleem vormde. Met boeken voor gedifferentieerd onderwijs was men nauwelijks bekend.

- *Hoe spoor je zwakke leerlingen op?* Ook in Schotland spelen de problemen over de aansluiting basisschool-voortgezet onderwijs. Op het Dundee college of Education wordt op het ogenblik gewerkt aan het opstellen van tests waarbij snel en effectief kennisniveau, en gebreken in kennis kunnen worden opgespoord. Diagnostische tests, zoals die van het Cito, worden ontworpen. Er worden ook pogingen ondernomen om betere verslaggeving tussen basisschool en 'secondary' school te realiseren. Het probleem daarbij is natuurlijk hoe een te gedetailleerde verslaggeving, die daardoor eenvoudig niet uitgevoerd wordt, te vermijden, zonder te vervallen in een aantal gemeenplaatsen waar niemand iets aan heeft. Naar wat ik in Schotland te zien kreeg vrees ik dat men wat te veel naar de grote gedetailleerdheid geneigd is.
- *Hoe moet aan zwakke leerlingen onderwezen worden?* Er werd op deze conferentie door een aantal groepen materiaal gepresenteerd dat speciaal voor de zwakkere leerlingen ontworpen was. Interessant was het, dat vaak ideeën zoals die in het I.O.W.O. materiaal voorkomen, ook hier te vinden waren, (men was overigens met werk van het I.O.W.O. niet bekend). Als voorbeeld geef ik hier een stukje uit een pakketje over 'oppervlakte'. Het benaderen met onder- en bovengrens vindt men bijvoorbeeld ook in het NOT-project voor de brugklas, het vermijden van de geijkte kreet 'oppervlakte is lengte maal breedte' is al terug te vinden in de L.B.O.-brochure van het I.O.W.O in 1973.

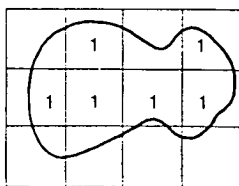
- (i) Area = $\frac{1}{2}$ (Upper Limit + Lower Limit)

eg. $A = \frac{12+2}{2} = 7$



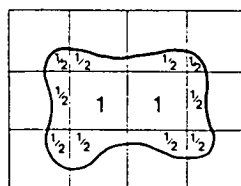
Upper Limit of Area = 12

- (ii) Count each part of a square which exceeds or equals a half square as 1 unit and disregard all other part squares.



For example, here Area = 6 units.

- (iii) Count every part of square as a half unit (irrespective of size). eg.



Area = $2 + 10(\frac{1}{2}) = 7$.

Een bijkomend probleem in veel heterogene klassen is, dat men bij gedifferentieerd onderwijs veel gebruik maakt van geschreven opdrachten, werkbladen en dergelijke. Juist de zwakste leerlingen hebben met geschreven tekst veel moeite en blijken vaak niet in staat zelf de opdrachten door te werken.

Een ander onderwerp dat op de conferentie een duidelijke rol speelde was de plaats en de functie van de 'remedial teacher'.

In Schotland kunnen aan een school remedial teachers verbonden zijn, hoeveel is sterk bepaald door regionale (financiële) omstandigheden. In sommige scholen werken zij samen met de wiskundeleraren in de klas, waarbij zij speciale aandacht besteden aan de zwakste leerlingen, een vorm van team-teaching, soms worden aparte remedial classes gevormd waarin leerlingen alleen tijdelijk kunnen zitten, soms worden zelfs aparte, permanente remedial classes gevormd. Tijdens de conferentie was een duidelijke stemming te bespeuren tot het instellen van dergelijke permanente remedial classes, juist omdat naar veler overtuiging bij de huidige gebrekkige middelen en mogelijkheden de zwakste leerlingen de dupe werden. Dit ligt echter politiek nogal moeilijk, omdat het vormen van dergelijke aparte klassen strijdig is met de uitgangspunten van de middenschool. Het waren echter zeker niet de tegenstanders van dit schooltype die hierop aandrongen, maar docenten die eenvoudigweg in hun situatie geen mogelijkheden meer zagen om voor deze zwakke leerlingen zinvol onderwijs te verzorgen.

Opvallend was dat het probleem van de (de)motivatie van de leerlingen niet of nauwelijks aan de orde kwam. Als ik in persoonlijke gesprekken daarnaar vroeg, bleek dit soms wel problemen op te leveren, maar een overheersend thema zoals weleens in het Nederlandse onderwijs leek het mij niet.

Samenvattend overheerst bij mij de volgende indruk:

- Een te snelle invoering van een middenschool, zonder geschikte programma's, materialen, scholing voor de docenten gaat vooral ten koste van de zwakke leerlingen.

Voor de goede leerlingen is het in die situatie gemakkelijker geschikt extra materiaal te vinden, zij kunnen zich ook makkelijker zelf helpen. Een goed systeem van remedial teaching, waarvan de opzet grondig doordacht wordt zal dan ook noodzakelijk zijn. En het belangrijkste van alles: de enthousiaste inzet van de docenten zal niet gemist kunnen worden. Er wordt in zo'n systeem veel van de docenten geëist.

Zou aan bovengenoemde voorwaarden niet voldaan worden, dan valt te vrezen dat een middenschool vooral voor de zwakste leerlingen geen aangename ervaring zal zijn.

Over de auteur:

*H. J. Smid heeft wis- en natuurkunde gestudeerd aan de RU te Leiden en was van 1966 tot 1975 werkzaam als leraar wiskunde aan het Chr. Lyceum 'Dr. W. A. Visser 't Hooft' te Leiden.
Sinds 1975 is hij werkzaam op de lerarenopleiding Zuid-West Nederland te Delft.*

Strabbe

JOH. H. WANSINK

1 Het *Wiskundig Genootschap*, dat in 1978 zijn tweehonderdjarig jubileum vierde, heeft zijn ontstaan te danken gehad aan de activiteiten van *Arnoldus Bastiaan Strabbe* (1741-1805). Dit feit alleen is dunkt me reeds een voldoende motief om in *Euclides* een paar regels te wijden aan zijn persoon en zijn werk. Strabbe heeft de leidende functie van eerste secretaris van het Genootschap uitgeoefend vanaf het jaar van de stichting tot in 1804, in welk jaar O. S. Bangma hem opvolgde. Op het werk van het Genootschap in de eerste kwart-eeuw van zijn bestaan heeft Strabbe duidelijk zijn stempel gedrukt.

2 Over Strabbe's leven en werken worden we uitvoerig ingelicht door *M. van Haften* in diens in 1923 bij P. Noordhoff verschenen studie '*Het Wiskundig Genootschap, zijn oudste geschiedenis, zijn werkzaamheden en zijn beteekenis voor het verzekeringswezen*'. Strabbe treedt erin ons tegemoet, niet als man van wetenschap, maar als onderwijsman en als organisator. We citeren (t.a.p., pag. 10):

'Strabbe was geen man, wiens naam voor het nageslacht bewaard zou blijven door de belangrijkheid zijner eigen vondsten, en uit de voorredenen van zijn werken blijkt wel, dat hij in die richting ook geenerlei pretenaties heeft gehad. Maar hij behoort als een Vlacq en De Decker uit de eerste helft der zeventiende, en een Bierens de Haan uit de tweede helft van de negentiende eeuw – om van de thans levenden te zwijgen – tot een groep van personen, welke, bij alle verschil in omvang en gehalte van hetgeen als hun geestelijk eigendom kan worden aangemerkt, toch op dit punt overeenstemmen, dat zij door hun organisatorischen arbeid op wiskundig terrein, de kennis der mathesis krachtig hebben helpen verbreiden.

Die organisatorische arbeid, waaronder wij in tegenstelling met zelfstandige onderzoekingen begrijpen het schrijven en bewerken van leerboeken, het redigeeren van tijdschriften, het publiceeren van tafels, benevens alle

* De heer H. N. Schuring in Arnhem ben ik dankbaar voor het ter lezing geven van Strabbe's werkje en voor de wijze waarop hij de reproductie van de in het aanhangsel opgenomen bladzijden uit Strabbe's '*Arithmetica*' mogelijk heeft gemaakt.

historio-, biblio- en biografische prestaties is voor het leven der wetenschap een zaak van het grootste gewicht en wie als Strabbe daarin zijn sporen heeft verdiend, kan zeker op belangstelling aanspraak maken, ook al bleven zijn verdiensten uitsluitend tot dit gebied beperkt, en al lagen zij zelfs nog meer in de kwantiteit dan in de kwaliteit van zijn werk'.

Strabbe's leven en werken zal in enige 'geschiedenis der wiskunde' dan ook niet of nauwelijks ter sprake komen, in een 'geschiedenis van de schoolwiskunde' daarentegen zou aan hem voor wat Nederland betreft niet voorbijgegaan mogen worden. Strabbe moet worden ingedeeld bij de categorie 'leermeesters der wiskunde', bij de 'rekenmeesters' en de 'schoolmeesters', die zoals we uit de beschouwingen van Van Haaften leren, in de eerste decennia van het Wiskundig Genootschap in het ledenbestand een belangrijke plaats hebben ingenomen. Ruime aandacht wordt aan Strabbe's werken en aan de organisatorische en persoonlijke conflicten waartoe zijn eigenmachtig optreden op de duur aanleiding gaf, geschonken in het artikel van P. C. Baaijen: '*WISKUNDIG GENOOTSCHAP*' 1778-1978: *some facts and figures concerning two centuries of the Dutch Mathematical Society* 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgenomen in de bundel *Chapters in the recent history of mathematics*, uitgegeven door het Mathematisch Centrum, 1978.

3 Strabbe heeft veel, zeer veel geschreven. Zijn volledig oeuvre omvat meer dan twintig werken.

We noemen er enige van.

I *Gronden der Algebra en Beginzelen der Geometrie*, vertalingen van twee werken van de Franse wiskundige A. Cl. C. Clairaut (1713-1765) werken die didactisch gezien door de wijze van bestrijding van deductief gegeven onderwijs zelfs voor het onderwijs van vandaag hun betekenis nog niet hebben verloren. Clairaut verzette zich tegen de overheersende invloed die Euclides' *Elementen* nog steeds uitoefenden en prefereerde voor de meetkunde een aanschouwelijke grondslag. Hij was een uitgesproken antipode van A. M. Legendre ((1752-1833) die als een tweede Euclides naar systematische opbouw van de meetkunde streefde en wiens invloed op de schoolwiskunde die van Clairaut verre zou overtreffen. Dat de nog geen twintigjarige Strabbe zijn publicaties begon met de vertaling van de beide boeken van Clairaut pleit m.i. voor zijn didactische flair.

II *Oeffenschool der Mathematische Wetenschappen*, een periodiek dat nog voor de stichting van het Wiskundig Genootschap tot stand kwam, en dat zijn stempel zou drukken op de *Kunst-Oeffeningen over verscheidene nuttige onderwerpen der wiskunde*, later door het Genootschap uitgegeven.

III *De Historie der Wiskunde*, een vertaling in vier delen van de *Histoire des Mathématiques* van J. E. Montucla (1725-1799).

IV *De vernieuwde Cijfferinge van mr. Willem Bartjens, tweede deel*. Dat Strabbe het zinvol vond Bartjens' uit 1604 daterend rekenboek nog aan het eind van de achttiende eeuw opnieuw uit te geven pleit niet voor het peil van het rekenonderwijs van die tijd en evenmin voor Strabbe's vernieuwingsdrift op didac-

tisch gebied. Het ontbrak Strabbe overigens niet aan kritiek op Bartjens' werk zoals hij in zijn *Cijfferinge* laat uitkomen en zoals duidelijker zou blijken uit zijn onder V te vermelden eigen rekenuitgave.

V *Eerste Beginselen van de Arihmetica of Rekenkunst, ten gebruike der Scholen*, in vier deeltjes uitgegeven.

Op een enkel door Strabbe in deze schoolboekjes aangesneden probleem gaan we ter kenschetsing van zijn betoogtrant in de volgende paragrafen nader in.

VI De *Eerste Beginselen der Fluxie-rekening*, evenals de onder II vermelde Kunstoeffeningen en de onder III vermelde Historie der Wiskunde een uitgave van het Wiskundig Genootschap. De *Arithmetica* is geen uitgave van het Genootschap geweest, maar werd zoals op de titelpagina werd aangegeven door Strabbe aan het Genootschap opgedragen. De fluxie-rekening was een differentiaalrekening in de geest van de Engelse schrijvers, waarin het werk van de Duitse en de Franse auteurs onvoldoende tot zijn recht kwam en dat dan ook zelfs in de kringen van het Genootschap zelf maar matige waardering zou oogsten.

VII *Grondbeginselen der Driehoeksmeting*, een leerboek waarin de stof tot vlakke driehoeksmeting beperkt bleef.

VIII Een *Inleiding tot het Koopmans-Boekhouden*, eerst na Strabbe's dood verschenen; in 1771 had Strabbe reeds zijn *Koopmans Onderwijzer* verzorgd en in 1790 *Het vernieuwde Licht des Koophandels, of Grondig Onderricht in de Koopmans Rekenkunst*.

Voor een vollediger overzicht van Strabbe's werk verwijzen we naar de bovenvermelde publicatie van Van Haaften en naar de *Bibliographie Néerlandaise* uit 1883 van Bierens de Haan. Voor waardevolle bijzonderheden over Strabbe's eigenzinnig optreden en over het misbruik dat hij van zijn machtspositie binnen het *Wiskundig Genootschap* maakte, verwijzen we voorts naar het reeds genoemde artikel van Baaijen.

4 Met een enkel voorbeeld zullen we de moeilijkheden illustreren die Strabbe ondervonden heeft bij het in zijn tijd blijkbaar nog hachelijke onderwerp oneindige meetkundige reeksen, moeilijkheden waartegen hij niet geheel opgewassen bleek. Om daarbij zijn betoog enigszins in de lijst van zijn tijd te plaatsen wijzen we erop, dat eerst vanaf de zeventiende eeuw aan de repeterende breuken een wetenschappelijke behandeling te beurt is gevallen en dat dit onderwerp pas in de negentiende eeuw voor behandeling op onze scholen in aanmerking is gekomen. Hetzelfde geldt voor het sombegrip bij oneindige reeksen. Reeds in 1544 had *Stifel* de som berekend van een oneindig aantal termen van de reeks:

$$1\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$$

en daarbij geconstateerd, dat men de rij der termen oneindig kan voortzetten, maar dat men niet van een 'kleinste term' mag spreken. Strabbe doet dat in 1802 nog wel!

5 Strabbe houdt in zijn *Arithmetica* zijn betoog zoals hij dat noemt 'eenvoudig', wat voor hem meebrengt dat hij formules zolang mogelijk vermijdt. Het gevolg

is, dat *Strabbe's* uitvoerige tekstomschrijvingen weergeven, wat wij gaarne door formules uitgedrukt zouden willen zien. Op p. 50 en 51 van deel IV van zijn *Arithmetica* ontmoeten wij een betoog, waarin een relatie wordt beschreven, die we voor een afdalende meetkundige reeks als volgt kunnen aangeven:

$$s_n = \frac{t_1 - r \cdot t_n}{1 - r}.$$

waarbij t_1 en t_n bij Strabbe voorkomen onder de namen 'grootste term' en 'laatste term', t_n ook als 'kleinste lid'.

Strabbe past nu deze relatie toe op de reeks:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Aan de som van deze reeks kent hij, op grond van wat hij van repeterende breuken weet, de waarde $\frac{1}{3}$ toe.

Door nu in de boven aangegeven somformule voor s_n , t_1 en r opvolgend de waarden $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$ en $\frac{1}{10}$ te kiezen, komt hij tot de conclusie:

$$t_n = 0.$$

En hieruit leidt hij tenslotte af: de *kleinste term* van een oneindige meetkundige reeks met reden kleiner dan 1, is 0.

Het lijkt me toe, dat dit betoog karakteristiek is voor het niveau van de schoolwiskunde in Strabbe's tijd. De feilen zijn apert: Strabbe 'bewijst' uiteraard nergens dat de kleinste term van de door hem beschouwde reeks nul zou zijn, maar hoogstens dat 'als' er bij zo'n reeks nog van een kleinste term gesproken zou kunnen worden, hieraan de waarde 0 toegekend zou dienen te worden. We hebben echter niet het recht over 'de kleinste term' van de beschouwde reeks te spreken en deze als t_n te laten optreden.

Het limietbegrip gaat volledig de mist in door dit gammele betoog van Strabbe. Maar de 'regel' die hij ermee afleidt blijkt voor de uit te voeren berekeningen uitstekend bruikbaar!

6 Tot besluit nemen we ter nadere karakterisering van Strabbe's *Arithmetica* uit het slotdeeltje het volgende over:

A de titelpagina van dit deeltje;

B de inhoudsopgave;

C de inleidende beschouwingen uit het '*Aanhangsel*'.

De inhoudsopgave confronteert ons met enige onderwerpen die nu geheel uit de schoolrekenkunde zijn verdwenen, en geeft voorts relief aan een zwaar geladen vakjargon. In het aanhangsel treffen we de passage aan die we in par. 4 becritiseerden en we zien dat reeds Strabbe daar geen scherpe grens tussen rekenkunde en algebra wenste te trekken.

EERSTE BEGINSELEN
VAN DE
ARITHMETICA,
OF
REKENKUNST,
TEN GEBRUIKE DER SCHOLEN.
VIERDE DEEL.

*Opgedragen aan 't genootschap der mathematische
wetenschappen, onder de spreuk:*

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN;

DOOR,

ARNOLDUS BASTIAAN STRABBE,

*Lid en secretaris van het gezegde genootschap; lid van
de sociëteit der kunst-rekenaren te Hamburg, en
leermeeſter der wiſkunſt te Amſterdam.*

TWEEDE DRUK.

Te AMSTERDAM, bij

J. B. ELWE, boekverkooper,
op de Pijpenmarkt bij den Dam.

1814.

B L A D W I J Z E R

der regelen, welke in dit deel voorkomen.

	Bladz.
VERHEFFING TOT MAGTEN.	5.
EVOLUTIO of WORTEL TREKKING.	7.
a.) Tafel van magten.	<i>ibid.</i>
b.) Hoe de getallen voor iedere magt afgedeeld moeten worden.	8.
UITTREKKING VAN DEN VIERRANTS-WORTEL.	9.
a.) Algemeene regel.	14.
b.) Om den vierkants-wortel uit eene breuk of gemengd getal te trekken.	16.
c.) Om uit een getal, dat geen volkomen <i>quaadraat</i> is, den vierkants-wortel ten naaste bij te trekken.	18.
UITTREKKING VAN DEN TEERLINGS-WORTEL.	23.
a.) Algemeene regel.	29.
b.) Om den teerlings-wortel uit een getal, dat geen volkomen <i>cubic</i> is, te trekken.	33.
ALGEMEENE REGEL, om de WORTELS van alle MAGTEN te trekken.	37.
VAN DE PROPORTIE IN 'T GEMEEN.	39.
VAN DE ARITHMETISCHE PROGRESSIE.	41.
VAN DE GEOMETRISCHE PROGRESSIE.	47.
REGEL om tusſchen twee gegevene getallen verſcheidene mid-denevenredigen te vinden.	50.
GOUD- EN ZILVER-REKENING.	53.
REGEL VAN MENGING, anders genaamd REGULA ALLIGATIONIS.	61.
a.) REGEL op het EERSTE GEVAL.	<i>ibid.</i>
b.) REGEL op het TWEEDE GEVAL.	65.
REGEL CÆCIS of VIRGINUM.	80.
a.) REGEL op het EERSTE GEVAL.	81.
b.) REGEL op het TWEEDE GEVAL.	84.
c.) Om <i>arithmeticè</i> een getal te vinden, dat door een gege-ven getal often deelbaar is, en door een ander gegeven getal gedeeld wordende, een gegeven rest overlaat.	107.
REGEL FALSI of REGEL VAN VALSCHE POSITIEN.	108.
a.) REGEL op het EERSTE GEVAL.	<i>ibid.</i>
b.) REGEL op het TWEEDE GEVAL.	111.
REKENKUNSTIGE VOORSTELLEN, waarin <i>meetkun-ſtige eigenschappen</i> voorkomen.	121.
AANHANGSEL.	127.
a.) Over de <i>sommering der ONEINDIGE REEKSEN</i> , of RIJEN VAN BREUKEN.	128.
b.) Van <i>Decimaal-reeksen</i> , en voorbeelden van breuken, die in enkelvoudige wederkerende <i>decimaal-getallen</i> veran-derd kunnen worden.	144.
VOORSTELLEN TOT BESLUIT.	160.

A A N H A N G S E L.

Ik heb het volgende onder dezen titel willen voordragen, om dat het stoffen beheist, waar van ik, volgens mijn ontwerp, geene de minste vatbaarheid in mijne leerlingen mag onderstellen: evenwel was dit aanhangsel volstrekt noodzakelijk, om dat het zaken bevat, die het reeds verhandelde kunnen ophelderen; zaken die ten minsten den leermeesteren den weg zullen baten, om mijne verhandeling over de *decimaal-rekening* (Zie III. DEEL, bladz. 71 en volg.) beter te leeren verstaan, en hunnen leerlingen grondiger te kunnen voordragen. Ik zal daarom ook die eenvoudigheid, welke ik tot dus verre stiptelijk heb waargenomen, eenigzins moeten laten varen, om eene algemeenere rekenkunde (zonder welke ik mijn tegenwoordig onderwerp niet behoortlijk kan volvoeren), de algebra namelijk, daarvoor in de plaats te gebruiken; en denk niet, dat ik noodig zal hebben mijnen lezeren deswegens om verchooning te verzoeken, vermits wij thans 'een' tijd beleven, waar in schrijvers gevonden worden, die tot de eerste begiufelen der rekenkunst de algebra gebruikt willen hebben. (Zie JEAN DES FONTAINES: *De cijferkunst gemakkelijk gemaakt*, I. DEEL, bij de additio bladz. 15 en volg.) Om mijn voorgenomen onderwerp in eene geschikte orde af te handelen, moet ik alvorens spreken,

Over de sommeering der ONEINDIGE REEKEN, of RIJEN VAN BREUKEN.

Eene oneindige reeks is een vervolg van breuken, die steeds in eene bestendige orde voortgaan, en, hoe verre ook vervolgd, nog altoos voortgezet kunnen worden, en waar van de som een bepaald getal is.

Bij Voorbeeld: $\frac{1}{3}$ is gelijk . 3333 enz. tot in 't oneindige; of wel $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ enz. welke rij van breuken oneindig voortgezet kan worden, en men weet *à priori*, dat hare som ($\frac{1}{3}$) een bepaald getal of breuk is.

Men begrijpt nu ligtelijk, dat als deze rij van breuken, waar van ieder volgend lid $\frac{1}{10}$ des naastvoorgaanden is, oneindig wordt voortgezet, men

einde-

eindelijk tot een lid zal komen, dat, uit hoofde zijner oneindige kleinheid, ten aanzien van het eerste als niets of 0 geacht kan worden: en naardien $\frac{1}{10}$ dus de afklimmende *ratio* der *progresie* is, zoo is het omgekeerde $\frac{10}{1}$ of 10 de opklimmende *ratio*: derhalve hebben wij van eene *geometrische progresie* bekend, het grootste lid $\frac{1}{10^3}$, de *ratio* 10, en de som $\frac{1}{9}$, waar uit onwederfprekelijk volgt, dat het kleinste lid 0 is (Zie OEFENSCHOOL DER MATHEN. WETENSCHAPP. I. DEEL; *Mathem. Handl.* bladz. 72, Prob. 8).

Men ziet dus, dat de kleinste *term* der reeks van zelf op niet uitloopt, zonder dat men noodig heeft in het onëindige te dringen; en hadde de Heer A. F. MARCI, een anders niet onbedreven wiskunstenaar, de zaak insgelijks van voren beschouwd, hij zou zekerlijk van zijne *annihilatio ultimi termini* zoo veel ophefs niet gemaakt hebben: dit in 't voorbijgaan.

Om derhalve de som van eene oneindige afklimmende *geometrische progresie* te vinden, heeft men dezen

R E G E L:

I.) Vermenigvuldig het eerste of grootste lid met de opklimmende *ratio* der *progresie*, zoo heeft men het lid, dat het grootste het naast voorgaat.

II.) Deel dit gevonden lid door de gemelde *ratio* der *progresie* min 1, zoo bekomt men de begeerde som.

Deze regel is niets anders dan die, welke wij hier voor (bladz. 50) voor de *geometrische progresien* gegeven hebben, behalve dat hier het kleinste lid, als zijnde 0, niet van het gemelde naast groo-tere dan het grootste lid behoeft afgetrokken te worden.

Een vraagstuk uit de ruimtevaart

O. BOTTEMA

I Ruim dertig jaar geleden verscheen in dit tijdschrift een opstel over Jules Verne en de reis naar de maan¹. Het bevatte, naast uitingen van bewondering en dankbaarheid voor de verbeeldingskracht, de kennis en veelzijdigheid van de auteur, enige kritische beschouwingen over zijn relaties tot de theorema's der theoretische mechanica. In het bijzonder werd nog eens aandacht gevraagd voor een fundamentele vergissing in het verhaal: er wordt ons medegedeeld dat de zwaartekracht in het projectiel van lieverlede afnam toen het tussen de aarde en de maan gelegen punt E werd genaderd waar de Newtonsche attractiekrachten van deze hemellichamen elkaar opheffen. Er is sinds 1945 op het gebied der ruimtevaart het een en ander gebeurd en tegenwoordig weet iedereen dat de gewichtsloosheid intreedt zodra het projectiel de aarde heeft verlaten. De moderne ontwikkelingen waarbij al zijn *voyages extra-ordinaires* (behalve die naar het middelpunt der aarde) gerealiseerd zijn, blijken de belangstelling voor Jules Verne te hebben vernieuwd. Verscheidene van zijn boeken, waaronder de maanreis, zijn nu als *livres de poche* verkrijgbaar². Het jubileumjaar 1978, anderhalve eeuw na Verne's geboorte, zag vele herdenkingsartikelen verschijnen en ook minstens één nieuwe biografie³. Vertalingen worden herdrukt en in ons land kan men nu voor reeksen van zijn geschriften zelfs bij twee uitgevers terecht⁴.

De mededelingen bij Verne over het verdwijnen van de zwaartekracht berusten niet alleen op een overigens zeer vergeeflijke misvatting maar zijn ook weinig consequent. Van wat zich bij het bereiken van het bewuste punt E afspeelt was zeker meer te maken geweest. In tegenspraak met de gedachtengang is ook de gebeurtenis in het begin naar aanleiding van het droevige lot van een der meegenomen honden. In het origineel draagt deze de ons tegenwoordig welvertrouwde naam *Satellite*, die in de nederlandse vertaling met het wat ouderwetse woord *Wachter* wordt weergegeven. De bemanning had hem samen met de *chienne* Diana meegenomen met het oog op enige op de maan te verrichten vaag omschreven biologische experimenten. Hij wordt bij de uiteraad wat gewelddadige start door een *contrecoup, assez inexplicable*, ernstig gewond (p. 44). Als op p. 80 het einde komt besluit men op hygiënische motieven het kadaver buiten boord te zetten.

De gravure op p. 84 doet de plechtigheid zien: door een soort mangat in de vloer laat men *la pauvre bête* zakken. Veel later blijkt het zich echter nog steeds

vlak bij de cabine te bevinden (het plaatje op p. 99 geeft dat realistisch weer). Verne noemt dat (p. 101) *un phénomène curieux, mais logique, bizarre mais explicable* en geeft als toelichting:

'Tout objet lancé au-dehors du projectile devait suivre la même trajectoire'. Hij voegt erbij dat je daar wel een hele avond over kunt praten, *il y eut là un texte de conversation que la soirée ne put épuiser*. Laten wij maar met de discussie meedoen.

2 O is het middelpunt, R de straal en M de massa van de in rust gedachte aarde. Het projectiel P , voor de gelegenheid gereduceerd tot een stoffelijk punt met massa m , wordt uit punt A in de richting OA gelanceerd met de beginsnelheid v_0 . Als $OP = x$ dan ondervindt het een naar O gerichte kracht, groot fMm/x^2 , waarbij f de attractieconstante voorstelt; alle andere krachten, ook de attractie door de maan laten wij buiten beschouwing. Het krachtveld heeft de potentiaal $-fM/x$. Daaruit volgt dat $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - fM/x$ constant is en daar voor $t = 0$ geldt $x = R$, $\dot{x} = v_0$, krijgen wij

$$\dot{x}^2 - \frac{2fM}{x} = v_0^2 - \frac{2fM}{R}. \quad (1)$$

x blijft alleen dan onbegrensd toenemen als $v_0 \geq v_k = \sqrt{2fM/R}$; v_k is de ontsnappingsnelheid, waarvan iedereen tegenwoordig weet dat zij ongeveer 11,3 km/sec. bedraagt, een getal dat ook aan Verne bekend is. Zij $v_0^2 - v_k^2 = v_i^2 \geq 0$, dan lezen we uit

$$\dot{x}^2 - \frac{k^2}{x} = v_i^2, \quad (2)$$

met $k^2 = 2fM$, af dat $\dot{x}$ voor grote x tot v_i nadert en de beweging van P derhalve tot een eenparige.

(2) is een differentiaalvergelijking van de eerste orde. Zij kan elementair worden geïntegreerd, maar geeft een moeilijk hanteerbare betrekking tussen t en x . Wij bepalen ons daarom verder tot een kwalitatieve beschouwing.

Zij op het tijdstip $t = t_1$ P in A_1 met $x = r$ en dus $\dot{x} = v_1 = (v_i^2 + k^2/r)^{\frac{1}{2}}$. Wordt op dat ogenblik het punt Q met massa m_1 uit het projectiel verwijderd dan zal, als m_1 klein is t.o.v. m , de beweging van P niet merkbaar veranderen. Er zijn verder verschillende mogelijkheden. Wordt Q alleen maar buiten P geplaatst dan zal het zijn beweging handhaven en dus voortdurend bij P blijven; dat is blijkbaar de situatie die Verne heeft bedoeld. Anders wordt het als Q in de richting naar de aarde de snelheid w meekrijgt. Is $w \geq v_1$ dan zal Q zich dadelijk versneld (versneld versneld) naar O begeven. Wij veronderstellen nu verder $0 < w < v_1$ en vergelijken de bewegingen van P en Q .

Zij beginnen voor $t = t_1$ in A_1 maar Q heeft een kleinere beginsnelheid, nl. $v_1 - w$; voor $t > t_1$ is bovendien de versnelling Q kleiner (of als men wil de vertraging groter) dan die van P . Het gevolg is dat Q steeds meer achterop raakt. De bewegingsvergelijking voor Q , met $OQ = y$, is dezelfde als voor P , maar nu met de begincondities $y(t_1) = r$, $\dot{y}(t_1) = v_1 - w$, zodat

$$\dot{y}^2 - \frac{k^2}{y} = (v_1 - w)^2 - \frac{k^2}{r}$$

ofwel

$$\dot{y}^2 - \frac{k^2}{y} = w^2 - 2v_1w + v_1^2. \quad (3)$$

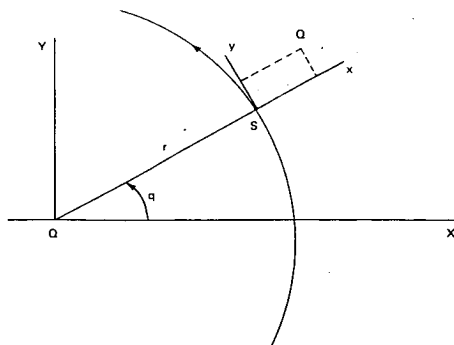
Er zijn nu twee mogelijkheden: het rechterlid van (3) is < 0 of ≥ 0 . In het eerste geval is er een waarde van y waarvoor $\dot{y} = 0$: Q keert om en gaat naar de aarde terug, terwijl P blijft doorgaan. In het andere geval heeft Q genoeg energie om evenals P het oneindige te bereiken, maar zijn snelheid nadert tot $(w^2 - 2v_1w + v_1^2)^{\frac{1}{2}}$ en dat is wegens $w < v_1$, dus $w < 2v_1$, kleiner dan v_1 . De achterstand van Q neemt evenredig met de tijd toe en overschrijdt derhalve elke grens.

Het rechterlid van (3) heeft als functie van w beschouwd, de twee reële en positieve nulpunten $v_1 \pm \sqrt{k^2/r}$; daaruit volgt dat het tweede geval intreedt als $0 < w \leq v_1 - \sqrt{k^2/r}$ en het eerste als $v_1 - \sqrt{k^2/r} < w < v_1$.

De conclusie is: als Q zeer voorzichtig buiten P wordt geplaatst ($w = 0$) dan blijft Q bij P ; is w positief, hoe klein ook, dan neemt de afstand QP onbeperkt toe.

3 Maanreizen zullen wel niet veel meer ondernomen worden. Dagelijkse voorvallen in de ruimtevaart zijn echter de bewegingen van satellieten om de aarde. Men kan zich ook daarbij afvragen hoe een stoffelijk punt zich gedraagt dat uit een satelliet, in de richting van de aarde, wordt weggegooid. Dit probleem wordt als voorbeeld behandeld in het fraaie, maar door zijn compacte stijl veeleisende werk van *V. Arnold*⁵.

De satelliet S beweegt zich met constante hoeksnelheid ω langs een cirkel met middelpunt O en straal r . De daarvoor nodige centripetale versnelling wordt door de attractie van de aarde geleverd; daaruit volgt $r\omega^2 = fM/r^2$, dus $fM = r^3\omega^2$. Op een gegeven moment verlaat het punt Q met kleine massa m_1 de satelliet, met de langs SO gerichte snelheid v_1 . De vraag hoe Q zich verder t.o.v. S beweegt zou met behulp van de dynamica der relatieve beweging kunnen worden behandeld, maar wij willen deze niet bekend veronderstellen.



Figuur 1

Wij bevestigen aan S een meebewegend assenstelsel Sxy , (fig. 1) met Sx langs OS en Sy in de richting van de snelheid van S . Zij OXY een vast assenstelsel met $\angle XOS = \varphi$ en dus $\dot{\varphi} = \omega$, $\varphi = \omega t$. De relatieve coördinaten van Q zijn x, y en de absolute X, Y . Daaruit volgt

$$X = (r + x)\cos \varphi - y \sin \varphi, \quad Y = (r + x)\sin \varphi + y \cos \varphi,$$

zodat

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{x} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi - \omega(r + x)\sin \varphi - \omega y \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= \dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi + \omega(r + x)\cos \varphi - \omega y \sin \varphi, \\ \ddot{X} &= \ddot{x} \cos \varphi - \ddot{y} \sin \varphi - 2\omega\dot{x} \sin \varphi - 2\omega\dot{y} \cos \varphi - \\ &\quad - \omega^2(r + x)\cos \varphi + \omega^2 y \sin \varphi, \\ \ddot{Y} &= \ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi + 2\omega\dot{x} \cos \varphi - 2\omega\dot{y} \sin \varphi - \omega^2(r + x)\sin \varphi - \\ &\quad - \omega^2 y \cos \varphi.\end{aligned}\tag{4}$$

$\ddot{X}$ en $\ddot{Y}$ zijn de componenten van de versnelling van Q langs de vaste assen. Die langs Sx is dus $\ddot{X} \cos \varphi + \ddot{Y} \sin \varphi$ en die langs Sy is $-\ddot{X} \sin \varphi + \ddot{Y} \cos \varphi$. Noemen wij deze respectievelijk a_x en a_y dan vindt men

$$\begin{aligned}a_x &= \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2(r + x), \\ a_y &= \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y.\end{aligned}\tag{5}$$

De op Q werkende kracht is naar O gericht en groot $F = fMm_1/OQ^2$; de component langs Sx is $F_x = -F(r + x)/OQ$ en die langs Sy is $F_y = -Fy/OQ$. De bewegingsvergelijkingen zijn dan

$$m_1 a_x = F_x, \quad m_1 a_y = F_y.\tag{6}$$

Daar $OQ = \{(x + r)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}$ zijn deze differentiaalvergelijkingen niet lineair. Wij volgen een gedachtengang die bij dergelijke problemen in de mechanica (bijv. in de theorie der kleine trillingen) veel wordt toegepast.

Wij gaan de vergelijkingen *lineariseren*: wij veronderstellen dat Q in de buurt van S blijft, zodat x en y klein blijven t.o.v. r . Wij zullen alle termen in $x, y, \dot{x}$ en $\dot{y}$ van een graad groter dan één verwaarlozen.

Men heeft $OQ = \{r^2 + 2rx + x^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}$ wat gereduceerd wordt tot $\{r^2 + 2rx\}^{\frac{1}{2}} = r(1 + \frac{2x}{r})^{\frac{1}{2}} = r(1 + \frac{x}{r})$. Daaruit volgt $OQ^{-3} = \frac{1}{r^3}(1 - 3\frac{x}{r})$.

Wij krijgen dan wegens $fM = r^3\omega^2$ tenslotte voor (6):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

twee homogene lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met constante coëfficiënten.

De oplossingsmethode is bekend: men stelt $x = Ae^{it}$, $y = Be^{it}$, vindt na substitutie in (7) twee homogene lineaire vergelijkingen voor A en B die alleen een van nul verschillende oplossing hebben als hun determinant nul is; dat levert een vergelijking van de vierde graad voor λ ; bij elk der vier wortels behoort een verhouding van A en B waarna dan de algemene oplossing van (7), met naar behoren vier integratie-constanten, volgt.

Passen wij dit procédé toe op (7) dan vertonen zij bij alle eenvoud toch nog een complicatie. De vergelijking voor λ luidt:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 3\omega^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

met de wortels $\lambda = 0$ (tweemaal) en $\lambda = \pm i\omega$. Er treedt dus een dubbele wortel op en dat betekent dat ook termen van het type te^{it} oplossing kunnen zijn. Wij vinden, en men kan dat gemakkelijk verifiëren, als algemene oplossing:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + C_3, \\ y &= 2C_2 \cos \omega t - 2C_1 \sin \omega t - \frac{3}{2}C_3 \omega t + C_4, \end{aligned} \quad (9)$$

met de vier integratie-constanten C_i .

Als Q uit S in *willekeurige* richting wordt geworpen met beginsnelheid $-v_1$ in x -richting en v_2 in y -richting, op het tijdstip $t = 0$, zodat $x(0) = y(0) = 0$, dan komt er

$$C_1 = -2v_2/\omega, C_2 = -v_1/\omega, C_3 = 2v_2/\omega, C_4 = 2v_1/\omega,$$

zodat

$$\begin{aligned} \omega x &= -2v_2 \cos \omega t - v_1 \sin \omega t + 2v_2, \\ \omega y &= -2v_1 \cos \omega t + 4v_2 \sin \omega t - 3v_2 t + 2v_1. \end{aligned} \quad (10)$$

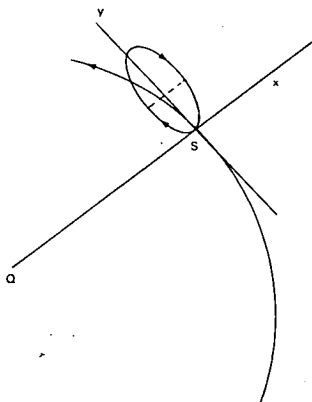
In het door *Arnold* beschouwde geval waarbij de beginsnelheid van Q naar de aarde is gericht heeft men $v_2 = 0$ en men krijgt

$$\begin{aligned} \omega x &= -v_1 \sin \omega t \\ \omega y &= -2v_1 \cos \omega t + 2v_1, \end{aligned} \quad (11)$$

waaruit volgt dat de beweging periodiek is, terwijl, als v_1 klein is het punt Q in de buurt van S blijft. De baan van Q in het Sxy -stelsel is de ellips met de vergelijking

$$4x^2 + y^2 - 4\frac{v_1}{\omega}y = 0.$$

Zij raakt in S aan Sx , het middelpunt is $(0, 2v_1/\omega)$, de lange as valt langs Sy en is $4v_1/\omega$, de korte as is evenwijdig met Sx en half zo lang (fig. 2). Voor de snelheid v van Q geldt $v^2 = v_1^2(1 + 3 \sin^2 \omega t)$.



Figuur 2

Is echter $v_2 \neq 0$, dan valt in (10) de term $-3v_2t$ niet weg. Voor elke nog zo kleine waarde van v_2 neemt de afstand van Q tot S evenredig met t toe. De condities waarvoor de linearisatie geldt zijn niet vervuld en de daaruit volgende oplossing vervalt. De beweging voor $v_2 = 0$ is ten duidelijkste labiel. Het verschijnsel vertoont enige gelijkenis met dat van het in 2. beschouwde probleem bij Jules Verne.

Literatuur

- 1 O. Bottema, *Jules Verne en de reis naar de maan*, Verscheidenheden XIII, Euclides 22, 1946-47, 245-253; het artikel is ook opgenomen in de bundel *Verscheidenheden*, uitgave van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 1977, 7-14.
- 2 *De la terre à la lune*, Librairie Hachette, 1966, 364 pp.; *Autour de la lune*, id., 325 pp.; beide uitgaven bevatten de oorspronkelijke illustraties en bovendien een biografie van Verne. Onze citaten zijn uit het laatst genoemde deel.
- 3 P. Costello, *Jules Verne, inventor of science fiction*, London, Hodder and Stoughton, 1978, 239 pp.
- 4 De editie bij Elsevier is welbekend; enkele werken van Verne verschenen in een sobere uitgave, verkort en zonder illustraties bij Het goede boek, Huizen, N.H. Daaronder is ook *De reis naar de maan*, 1978, 126 pp.
- 5 V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Traduit du Russe, Edition Mir, Moscou 1976, 45-47; van dit werk verscheen ook een Engelse vertaling, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

Vraagtekens bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs

J. ACOHEN

Sinds enkele jaren lees ik regelmatig 'Euclides' en de 'Wiskrant'. In deze bladen wordt een wijze van wiskundeonderwijs gepropageerd waar ik enkele vraagtekens bij wil zetten. Juist omdat hier meningen en nieuwe onderwijsmethoden naar voren worden gebracht, die van invloed kunnen zijn op de toekomst van het wiskundeonderwijs, wil ik graag een reactie laten horen, die enigszins afwijkt van de gepresenteerde opvattingen.

Het eerste punt dat mij elke keer opvalt, is dat men het wiskundeonderwijs meer praktisch gericht wil maken d.m.v. zogenaamde projecten waarin leerlingen samen bezig zijn met het ontdekken van wiskunde, bij voorkeur door plakken en knippen.

De idee hierachter komt voort uit modeontwikkelingen zoals het benadrukken van meer creatieve en minder intellectuele vorming. Maar volgens mij ontwikkelt het huidige individualistisch gerichte onderwijs eerder de creativiteit dan andere soorten onderwijs, omdat creatieve prestaties het resultaat zijn van individuen en niet van groepen.

De reactie van veel leraren hierop is vaak dat ze het gehele wiskundeonderwijs zo zouden ingericht willen zien, maar dat de tijd hen parten speelt, of dat de taak van de leraar te zwaar zou worden. Nooit hoor ik een principiële reactie die deze methode afwijst.

Misschien zijn er niet veel leraren die in hun doelstelling van hun onderwijs de helaas verouderde idee als 'leren generaliseren en abstraheren' hebben staan. Volgens mij worden juist deze doelstellingen nooit bereikt wanneer je de leerlingen van jongs af aan hier niet mee vertrouwd maakt en ze grotendeels met voorbeelden en praktische zaken laat werken.

In mijn lessituatie merk ik natuurlijk vaak op dat leerlingen moeite hebben met bovenstaande zaken, maar hoe vaak kom ik ook niet situaties tegen die erop wijzen dat leerlingen met een bepaalde voorstelling van een begrip zitten dat onjuist is omdat deze is geënt op een specifiek voorbeeld.

Mijn tweede bezwaar komt neer op het leuker en maatschappelijk relevanter maken van de wiskunde. Wanneer je eerst het nut van een vak moet aantonen alvorens je eraan begint maak je grote delen van bv. wetenschap en kunst onmogelijk. Om de school niet geheel buiten de maatschappij te plaatsen worden er vakken onderwezen die hierop inspelen. Maar niet elk vak moet hiervan in *diens*t staan. Bij het wiskundeonderwijs komen een aantal intellectua-

listische doelstellingen op de eerste plaats. Pas dan zou men zich af mogen vragen hoe men een onderwerp zo passend mogelijk kan brengen. Helaas heb ik sterk het gevoel dat deze volgorde vaak omgedraaid wordt: iets leuks en toepasbaars kiezen en dan de wiskunde redelijk onderbouwen.

Ik zou daarom enkele fundamentele redenen willen horen waarom men het onderwijs in bovengeschetste richting wil veranderen en tevens eventuele onderzoeksresultaten waaruit blijkt dat deze nieuwe methode beter beantwoordt aan duidelijk van te voren omschreven doelstellingen dan de huidige. Wanneer deze gegevens nog niet aanwezig zijn omdat men nog in een experimenteerfase verkeert, zou een betere theoretische onderbouwing van de gegeven onderwijsmodellen noodzakelijk zijn alvorens men allerlei projecten in verschillende bladen publiceert.

Over de auteur:

J. Acohen is leraar wiskunde aan het Spinoza Lyceum te Amsterdam.

Een reactie op

‘Vraagtekens bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs’

In het huidige wiskundeonderwijs zijn, niet alleen in Nederland, een aantal tendensen waar te nemen.

1. Het aantal leerlingen dat gedurende een aantal jaren wiskunde op school krijgt is vergeleken met een tiental jaren geleden sterk gestegen met alle problemen van dien.
2. Een gevolg hiervan is dat er gezocht is naar leerstof, die veel grotere groepen leerlingen aanspreekt: naar leeractiviteiten, die door docenten en leerlingen als zinnig worden ervaren; naar doelstellingen hierbij die op zich het nastreven waard zijn en voor leerlingen bereikbaar zijn: tenslotte is er gezocht naar de relatie tussen deze drie.

Neergeslagen hiervan zijn te onderkennen in een aantal activiteiten van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren:

- de A-, B- en C-kursussen
- de brochures ‘Handelen om te begrijpen’, ‘Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben’ en ‘Instappen en Toepassen (ter perse)’.*

Ook in het materiaal van uitgevers en het I.O.W.O. en in de erbij gepubliceerde geschriften zijn deze tendensen aan te wijzen.

* Deze uitgaven zijn te bestellen bij het I.O.W.O., Tiberdreef 4, Utrecht tegen een gering bedrag per uitgave.

3. Vooral de wiskunde die in het L.B.O. en het M.A.V.O. gedaan wordt vertoont de kenmerken hiervan: leerstof die zijn oorsprong in de praktijk en de ervaringen van alledag vindt, maar ook in zijn toepassingen daarop gericht is.
4. In de publikaties die ingaan op de doelstellingen van het wiskundeonderwijs blijkt dat
 - a. bij wiskundeonderwijs dat sterk individualistisch gericht is veel leerlingen begrippen en de relaties tussen begrippen leren en zich oefenen in algoritmen zonder enig idee te hebben waar een ander vandaan komt (en het komt *niet* uit de lucht vallen) en waar het voor gebruikt kan worden;
 - b. aan generaliseren en abstraheren als activiteit van leerlingen niet of slechts als lege activiteit wordt toegekomen, omdat leerstof op een verkeerd nivo wordt aangeboden;
 - c. juist wiskundeonderwijs erop gericht moet zijn de leerlingen het volgende (in veel wetenschappen te onderkennen) proces te laten doormaken:
De leerlingen ervaren dat het uitgangspunt steeds een konkrete probleem-situatie is. Vanuit die situatie beschrijven ze met wiskundige hulpmiddelen de problemen en lossen ze met wiskundige technieken die problemen op. Hierin moet in behoorlijke mate geabstraheerd worden. Als de wiskunde die vanuit deze probleemsituaties aangereikt is, geleerd is met natuurlijk ook oefening, kan het nieuw geleerde op nieuwe problemen worden toegepast. De ontwikkelde wiskunde blijkt dan een veel groter werkingsgebied te hebben dan de situatie waarvoor aanvankelijk ontwikkeld (generalisatie).
5. Docenten die het aandurven in de praktijk ondanks de tijdsdruk en het examen op deze wijze te gaan werken ervaren dat de leerlingen dit heel prettig vinden. Enerzijds worden ze gemotiveerd voor meer wiskundige activiteiten, anderzijds leren ze er veel van.
6. In onderwijs dat op deze manier georganiseerd wordt blijkt voldoende mogelijkheid te zitten de creativiteit van het individu, maar ook van het groepje of de klas te prikkelen en te stimuleren.
7. Op deze manier wiskunde doen is een menselijke activiteit die voor elke leerling op zijn nivo wat te bieden heeft en niet iets dat slechts voor heel weinigen is weggelegd.

Bert Zwaneveld

Implicatie

In The Mathematics Teacher van november 1978 vindt men een aardige bijdrage van Jack Bookman, getiteld: Why 'False $\rightarrow$ False' is True. Hij tracht de waarheidswaardentabel

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

aan leerlingen duidelijk te maken. De eerste twee regels geven geen moeilijkheid; het venijn zit in de laatste twee. Hij waagt de volgende poging:

Suppose I said, 'If Mary does her homework, then she will pass.' Then suppose Mary didn't do her homework and I pass her; the original sentence is true, since I kept my word. But suppose Mary didn't do her homework and I passed her; the original sentence should still be true, since I kept my word.'

Deze en soortgelijke argumenten bleken bij de leerlingen niet in te slaan. Vandaar een hernieuwde poging waarbij een geheel andere weg ingeslagen werd. Ieder was het erover eens dat

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q \tag{1}$$

een tautologie is. Bekijk nu de vier waarheidswaardentabellen die voor $p \rightarrow q$ mogelijk worden, als men de keus voor 0 en 1 in de laatste twee regels vrij laat. Ga na wat in deze vier gevallen de waarheidswaardentabel van (1) wordt. Het resultaat blijkt te zijn:

$p \rightarrow q$	(1)	$p \rightarrow q$	(1)	$p \rightarrow q$	(1)	$p \rightarrow q$	(1)
1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0

Tot zover het artikel. Ik vraag me af, of de leerlingen nu overtuigd waren. Waar zit de moeilijkheid? Wie definieert:

$$p \rightarrow q \stackrel{\text{def}}{=} \neg p \vee q$$

heeft natuurlijk geen enkele moeilijkheid. Maar daar gaat het niet om. De tekencombinatie ' $p \rightarrow q$ ' wordt uitgesproken: uit p volgt q . Hierbij denkt men aan een logische consequentie; aan de mogelijkheid uitgaande van p te komen tot een bewijs van q . Uitgaande van deze interpretatie van het pijlsymbool, leest de leerling de waarheidswaardentabel van $p \rightarrow q$ als volgt:

als p onwaar is en q ook onwaar, dan is het mogelijk door een redenering aan te tonen, dat q uit p volgt; het is dan mogelijk uitgaande van p te komen tot een bewijs van q ;

als p onwaar is en q is waar, dan is dit ook het geval.

Of q uit p deduceerbaar is, hangt alleen af van de waarheidswaarde van p en van q en niet van de structuur van deze uitspraken. Dat is een wonder. Zelfs de eerste regel van de tabel, die als regel wel aanvaard wordt, heeft hetzelfde wonderlijke karakter. Dat indien p en q beide waar zijn, ongeacht hun structuur uit p de uitspraak q gededuceerd kan worden, is eigenlijk al even merkwaardig.

Dit wonder moeten we, in zijn algemeenheid, de leerlingen verklaren. We maken de essentiële fout aan de hand van enkele voorbeelden te zien, dat het uitkomt en nu plots te beweren, dat het algemeen uitkomt. Wat dat betreft, is de tweede methode van Jack Bookman geen haar beter dan de eerste.

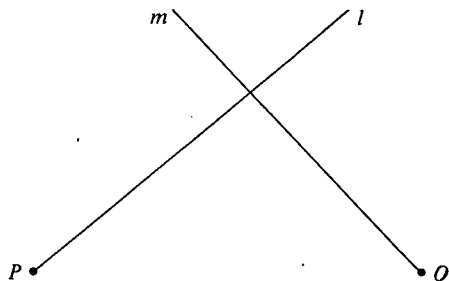
Wij weten dat het wonder bestaansrecht heeft. Wij weten, dat in de tweewaardige logica geldt: als uit p deduceerbaar is q , dan is zonder vooronderstellingen afleidbaar $\neg p \vee q$ (d.i. $p \rightarrow q$). Maar dat zegt onze leerlingen nog niets. Dat moeten we hun verklaren op de een of andere manier. Eerst dan kunnen ze de waarheidswaardentabel doorgronden.

Volgens mij is er een betere oplossing. Vertel uw leerlingen nooit iets over waarheidswaardentabellen. Of u het daarmee eens is, is uiteraard uw zaak.

P. G. J. Vredenduin

Opgaven

417. Langs de halve lijnen l en m bewegen twee stoffelijke punten p en q zich eenparig. Ze starten tegelijk in P resp. Q ; $|\vec{v}_p| = 2 |\vec{v}_q|$. Vind door constructie en zonder berekening de punten A en B waar p en q zich bevinden, als hun afstand minimaal is. (Naar aanleiding van een voordracht van A. Lagerwerf op het congres ter gelegenheid van het 200-jarig bestaan van het W.G.)



418. Het getal 112 is deelbaar door $1 \cdot 1 \cdot 2$, dus door het produkt van zijn cijfers. Dat is niets bijzonders. Aardiger is dat 735 deelbaar is door $7 \cdot 3 \cdot 5$. Zijn er ook getallen waarvan alle cijfers gelijk zijn en die deelbaar zijn door het produkt van hun cijfers? Getallen die bestaan uit allen 1'en sluiten we uit.

Oplossingen

$$415. \quad \frac{162435}{1785} = \frac{534261}{5871} = 91$$

$$\frac{435162}{4782} = \frac{261534}{2874} = 91$$

$$\frac{624351}{6861} = \frac{153426}{1686} = 91$$

$$\frac{351624}{3864} = \frac{426153}{4683} = 91$$

$$\frac{243516}{2676} = \frac{615342}{6762} = 91$$

$$\frac{516243}{5673} = \frac{342615}{3765} = 91$$

Verklaar de in het oog springende bijzonderheden (cyclische permutaties en symmetrieën).
 $162435 = 162 \cdot 1001 + (435 - 162) = 162 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 273$ en is dus deelbaar door 91.
 $624351 = 10 \cdot 162435 - 1 \cdot 999999 = 10 \cdot 162435 - 1 \cdot 1001 \cdot 999$ en is dus eveneens deelbaar door 91.

Enz. Door cyclische permutatie blijft dus de deelbaarheid door 91 behouden.

Vergelijk nu 162435 en 534261. Te bewijzen: als 162435 deelbaar is door 91, dan is ook 534261 dat.

Of: als $435 - 162$ deelbaar is door 91, dan is ook $534 - 261$ dat.

We vragen: onder welke voorwaarde geldt

$|abc - def|$ deelbaar door 91 $\Rightarrow |fed - cba|$ deelbaar door 91?

Of: $|a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c - d \cdot 10^2 - e \cdot 10 - f|$ deelbaar door 91

$\Rightarrow |a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 - d - e \cdot 10 - f \cdot 10^2|$ deelbaar door 91.

Dit is gelijkwaardig met $|(a - c - d + f)99|$ is deelbaar door 91, dus met $a + f = c + d$.

In ons geval is hieraan voldaan wegens $1 + 5 = 2 + 4$.

Zet nu de getallen 1, 6, 2, 4, 3, 5 in de hoekpunten van een zeshoek:

$$\begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}$$

Nu blijkt, dat niet alleen $1 + 5 = 2 + 4$, maar ook $1 + 6 = 3 + 4$ en $6 + 2 = 5 + 3$. Zodat omdat alle tellers van de linker breuken deelbaar zijn door 91, ook alle tellers van de rechter breuken dit zijn.

Blijft nog over te verklaren, waarom ook in de noemers symmetrie optreedt. Dus waarom $91 \cdot 1785 = 162435$ met zich meebrengt, dat ook $91 \cdot 5871 = 534261$.

Nu is $91 = 100 - 10 + 1$. De twee vermenigvuldigingen kunnen we daardoor als volgt schrijven:

$$\begin{array}{r} 1785 \cdot 91 \\ 178500 \\ - 17850 \\ \hline 1785 \\ \hline 162435 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5871 \cdot 91 \\ 5871 \\ - 58710 \\ \hline 587100 \\ \hline 534261 \end{array}$$

Laat de nullen weg. Door rotatie over 180° ontstaat dan de ene vermenigvuldiging uit de andere.

416. Voor de opgave zie het vorige nummer.

We moeten de cijfers

$$\begin{array}{cc} a & b \\ f & c \\ e & d \end{array}$$

zo kiezen, dat voldaan is aan de voorwaarden:

$$a + b = d + e$$

$$b + c = e + f$$

$$c + d = f + a$$

$$|\overline{abc} - \overline{def}| \text{ is deelbaar door } 91.$$

Dit is gelijkwaardig met

$$a - d = e - b = c - f$$

$$|100(a - d) + 10(b - e) + (c - f)| \text{ is deelbaar door } 91.$$

Of met

$$a - d = e - b = c - f$$

$$|(100 - 10 + 1)(a - b)| \text{ is deelbaar door } 91.$$

Dus met

$$a - d = e - b = c - f.$$

En nu kan men zelf realisaties kiezen.

Boekbesprekingen

Walter Felscher, *Naive Mengen und abstrakte Zahlen III, Transfinite Methoden*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1979, 270 blz., 24 DM.

Deel III staat los van deel II. Hier en daar wordt terugverwezen naar deel I. Wie enige voorkennis met betrekking tot de verzamelingenleer heeft, kan deel III lezen zonder deel I eerst bestudeerd te hebben.

De inhoud bestaat uit een gedegen brok verzamelingenleer, waarop de betiteling 'naive Mengen' stelling niet van toepassing is. De nadruk ligt op de transfinitie methoden. Het ligt dan ook voor de hand, dat begonnen wordt met een uitvoerige behandeling van de ordinaalgetallen.

Daarna volgt een exposé over verzamelingenleer. Eerst wordt uitgelegd wat verstaan wordt onder het gefundeerde deel van een klasse t.o.v. een relatie. Toegepast op de relatie $\in$ levert dit een inzicht in de betekenis van het funderingsaxioma.

Accepteren we dit axioma, dan blijkt de cumulatieve hiërarchie een goed model van de verzamelingstheoretische axioma's te zijn. Omgekeerd heeft dit model Scott ertoe gebracht de axioma's op een meer natuurlijke manier hiëraan aan te passen. Bewezen wordt de gelijkwaardigheid van de axioma's van Scott en het stelsel ZF (van Zermelo-Fraenkel).

Daarna een hoofdstuk over kardinaalgetallen. Ook enkele resultaten worden afgeleid die men in elementaire behandelingen niet tegenkomt, zoals $n > 4 \Rightarrow n^2 < 2^n$ en $2m = 2n \Rightarrow m = n$. Het bewijs van deze laatste stelling is lang niet eenvoudig.

Uitvoerig wordt stilgestaan bij de betekenis van het keuzeaxioma en bij de talrijke toepassingen ervan buiten het gebied van de verzamelingenleer. Verrassend voor mij was, dat het bewijs van de rekenregel $a^2 = a$ (de vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar) berust op het keuzeaxioma. Men pleegt dan aftelbaar veel rijtjes onder elkaar te zetten. Elke rij is een keuze uit alle mogelijke ordeningen van de betrokken verzameling. En hier duikt het keuzeaxioma op. Natuurlijk heeft men in speciale gevallen het axioma veelal niet nodig, bijv. niet om te bewijzen dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is.

In een slothoofdstuk vindt men nog een beschouwing over een ander model van de axioma's van ZF, namelijk de constructieve hiërarchie. Deze berust op uitsluiting van niet-predikatieve begripvorming, waardoor men niet beperkt wordt in de mogelijkheid van het vormen van deelverzamelingen. Binnen dit model is de welordeningsstelling bewijsbaar en daarmee het keuzeaxioma. De onafhankelijkheid van dit axioma is daarmee aangetoond.

Men krijgt zo enige indruk van de draagwijdte van dit boek. Het is gedegen lectuur. De lay-out bevordert de overzichtelijkheid niet.

P. G. J. Vredenduin

Werner Spies, Werner Habel, Manfred Heitzer, Hannelise Hottenbacher, *Morphologische Didaktik, oder: Wie man das paradoxe Geschäft des Erziehens und Unterrichtens in der Schule erträglich hält*, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover 1979, 104 p.

Een boekje waarvan men de bespreking nauwelijks in een wiskundig-didactisch tijdschrift zou verwachten. Het algemeen didactisch betoog wordt evenwel in het vierde hoofdstuk toegespitst op een voorbeeld uit het gebied van de wiskunde. Vandaar.

Voordat de lezer daaraan toe is heeft hij al heel wat inspanningen moeten verrichten. Tengevolge van een gekompliceerd taalgebruik en door de diverse verwijzingen is het boek niet gemakkelijk toegankelijk. Wie echter eerst wat oppervlakkig en al doorbladerend begint, zal wellicht getroffen worden door bepaalde uitspraken. Hierbij dient gezegd dat de wiskundeleraar weinig direkt verband met het eigen onderwijs zal kunnen ontdekken. Veeleer zal de opleider van wiskundeleraars, gewend om samen te werken met onderwijskundigen, door zekere passages gemotiveerd worden voor een diepgaander studie. Alleen al de ondertitels bij de hoofdstukken doen vermoeden dat er nuttige informatie over relevante onderwijszaken wordt gegeven.

Welke verwachtingen wekken bijvoorbeeld de volgende hoofdstuktitels:

Hoofdstuk 2: *Entwicklung von Lebensformen, oder: Wie eine Lehrerin wird, was sie ist.*

Hoofdstuk 3.1: *Die Wirkungseinheit, oder: Wie man Unterricht anlegen kann, bei dem Kinder nicht unglücklich werden.*

Hoofdstuk 4.2: *Prototypischer Unterricht, oder: Wie man anschaulich und sachmäßig bleibt und dennoch ein reines Wissenschaftler-Gewissen behält.*

Met deze aanduiding is reeds enigszins onthuld op welk terrein de auteurs zich bewegen. Globaal gezegd gaat het over de relatie ontwikkeling onderwijs. Het laatstgenoemde dient in dienst gesteld te worden van het eerste. De hoofdvraag van dit boek formuleren de auteurs zelf. 'Wie Entwicklung geschieht und wie man in der Schule bei Entwicklung hilft, ist die Frage dieses Buches'.

Men is duidelijk ontevreden met de richting waarin het pedagogisch denken en handelen zich de laatste decennia heeft bewogen. De grote aandacht voor curriculumontwikkeling (met de opbrengst in leerstofsekwenties, leerdoelenlijsten e.d.) heeft tot een grote verstarring geleid. 'Innerhalb heutiger Erziehungswissenschaft spielen offensichtlich reduktionistische Tendenzen eine erhebliche Rolle. Komplexität wird verkürzt. So sucht das lernziel-orientierte Verfahren die Erziehungsvorgänge in bequeme Linearität zu bringen. Das aber langt nur für Prüfungspädagogik ...'.

Wat wil men dan?

De morphologische didaktiek vraagt om (veel) meer aandacht voor de leerling. Leraren zouden pas echt zinvol (betekenisvol) kunnen onderwijzen, als zij hun leerlingen op fundamentele aspecten konden begrijpen. Observeren en analyseren is daarvoor noodzakelijk. Dit heeft tot gevolg dat opvoeding (en ook onderwijs) niet volledig te plannen is. Altijd blijft er een element van experiment, van onzekerheid bestaan.

De auteurs gaan in bijna elk hoofdstuk uit van een (schitterend) voorbeeld, dat op zichzelf steeds verduidelikend werkt. Zo laat men in hoofdstuk 2 Iris Mann aan het woord, een lerares die haar eigen ontwikkeling sinds het betreden van de basisschool (als leerling!) beschrijft. Over haar schooltijd in het v.o. zegt zij bijvoorbeeld: 'Zuhören, zuhören, immer wieder zuhören und dann nach-erzählen, das war im wesentlichen meine Schulzeit'.

Hoe kun je onderwijs beschrijven, waarin leerlingen niet in hun ontwikkeling belemmerd worden? De bekende modellen bieden die gelegenheid niet. Ook het afstandelijke gepraat over motivatie – ekstern, intern – draagt niet bij.

De auteurs menen een oplossing gevonden te hebben in Salbers Theorie van de 'Wirkungseinheiten'. (hoofdstuk 3)

In het volgende hoofdstuk gaat men in op 'Taktische Modelle von Unterricht'. De gedachten die hier ontwikkeld worden vertonen overeenkomst met het 'eksemplarische principe' van Martin Wagenschein, die ook genoemd wordt. Interessant is het feit dat men niet alleen afstand doet van logische leerstofsekwenties, maar dat ook de ontwikkelingspsychologische fasering naar de achtergrond wordt verwezen. In de plaats komt het idee van 'Verlaufstypen', waarbij het gaat om een fenomenologische analyse van ontwikkelingsprocessen.

Voor het onderwijs komt men zodoende tot aanbeveling: 'Prototypischer Unterricht'. Met een 'Prototyp' bedoelt men een leerstofinhoud, zodanig georganiseerd voor het onderwijs, dat de essentie anschouwelijk aanwezig is en dat bovendien de karakteristiek van het kennisgebied bewaard is gebleven. Een 'Prototyp' biedt enerzijds vastigheid, wat betreft feiten, verbanden, structuur, anderzijds is er grote beweeglijkheid, wat betreft de manier waarop de 'beoefenaren' (leerlingen, docenten, studenten, wetenschappers) te werk kunnen gaan.

En dan komt het voorbeeld uit de wiskunde: 'Morphologisch ergibt sich die Frage, ob in der Mathematik eine Darstellungsform denkbar ist, die dem 'Prototyp'-Begriff entspricht, also einerseits so anschauungsnah bleibt, dass der Schüler nicht erst nach langer Zeit Verständnis empfindet, andererseits auf die von der Fachwissenschaft gut begründete Vorzüge der 'neuen Mathematik' nicht verzichten muss'.

Men kiest voor de Boolse algebra, waarvan vier (isomorfe) modellen beschreven worden. De konklusie, dat met 'schakelalgebra' begonnen dient te worden, doet in verband met al het voorgaande banaal aan. Goede wiskundeleraren ten onzent, die de achtergrond van deze morphologische didaktiek wel begrepen zouden hebben, hadden wellicht een goed 'Prototype' kunnen invullen.

Kortom, een moeilijk toegankelijk boek met interessante denkbeelden, en een uitdaging voor wiskunde-didactici.

Fred Goffree

Karl Menger, *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Boston-London 1979. XII + 341 blz., f55. —.

Karl Menger (geb. 1902) is een van de grote mannen van deze eeuw met betrekking tot het onderzoek naar de fundamenteën van de logica en van de wiskunde.

Het boek bestaat uit een 26-tal artikelen die een goed inzicht geven in de veelzijdigheid van zijn werk. Men is natuurlijk bevreemd voor specialistische artikelen die op een technisch hoog niveau staan en daardoor voor een niet-ingewijde moeilijk leesbaar zijn. Niets is minder waar. Het boek bestaat uit een aantal boeiend geschreven, goed leesbare artikelen.

Ik doe een greep uit de inhoud. Gullivers reizen. Gulliver gaat op reis naar een land waar men een normale notatie voor de natuurlijke getallen heeft, echter een afwijkende voor 1, 2 en 3. Dit heeft allerlei zonderlinge consequenties. Hij komt thuis uit het land zonder 1, 2, 3. Hij ontdekt dat men thuis notaties heeft voor diverse functies, zoals $\tan$, $\sin$, $\ln$. Daaruit kan men gemakkelijk andere vormen, zoals $\ln \circ (\sin + \tan)$. Maar men heeft helaas geen specifieke notaties voor de meest elementaire functies, nl. $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^3$, ..., hetgeen tot analoge zonderlinge consequenties leidt. Had men maar bijv. de notaties j , j^2 , j^3 , ..., dan zou men daarvan veel gemak hebben. Maar we zijn thuis in het land zonder identiteit en machten.

Voor variabelen heeft de auteur grote belangstelling. Hij geeft een analyse van de veelsoortige wijze waarop variabelen kunnen voorkomen: representatie van een willekeurig element van een verzameling, onbekende, parameter, functievariabele, onbepaalde (in polynomen). Deze x -itis zou volgens Menger een reden zijn waarom het voor de leerling zo moeilijk is wiskunde te begrijpen. Ook in grootheden (fluents) speelt de variabele een rol. Van het begrip grootheid geeft hij een nauwkeurige analyse, die zonder enige twijfel verhelderend is.

Gooi met een munt. Wordt de eerste keer kop gegooid, dan ontvangt A 1 dollar van B . Wordt de tweede keer voor het eerst kop gegooid, dan ontvangt A 2 dollar, de derde keer voor het eerst kop, dan 4 dollar enz. De verwachte ontvangst is oneindig. Maar als A dit spel speelt, zal hij er slechts een beperkt bedrag voor over hebben als vooruit aan B te betalen som. Hoe analyseren we dit probleem?

Onze normale logica is tweewaardig. Maar men kan ook rekening houden met de mogelijkheid dat iets twijfelachtig is. Zo laat zich een logic of the doubtful ontwikkelen. Deze speelt een rol bij de ontwikkeling van een logica van de wensen en die van de geboden. Maar ook de gewone tweewaardige propositielogica laat een nieuwe analyse toe waarbij nagegaan wordt welke waarheidswaarde-functies als basis kunnen dienen voor het afleiden van alle mogelijke dergelijke functies.

Er is veel meer. Allemaal interessante bijdragen. Ook de didactische zijn de moeite waard. De rasdidactici moet ik waarschuwen, dat ze meer met wetenschap dan met didactiek te maken hebben. Een warm aanbevolen boek.

P. G. J. Vredenduin

Ontvangen boeken

Examentoets Wiskunde Mavo 4. ISBN 90 231 33064. f6.50, samengesteld door J. A. Hartman en P. M. van Hiele. Uitgeverij Muusses, Purmerend.

Mededelingen

Examenbesprekingen vwo, havo, mavo en lbo 1980

Evenals vorige jaren organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook dit jaar weer bijeenkomsten ter bespreking van de normen van de wiskunde-examens 1980. Deze bijeenkomsten worden gehouden

voor wiskunde I en havo op *vrijdag 9 mei a.s.*
voor mavo-4 op *maandag 12 mei a.s.*
voor mavo-3/lto-c op *maandag 12 mei a.s.*
voor lbo-c(leao, lhno, llo, lmo) op *dinsdag 13 mei a.s.*

Voor wiskunde II zal er één centrale bijeenkomst zijn op *maandag 12 mei a.s.* om 19.00 uur in het Jaarbeurscongrescentrum te Utrecht.

De normen zijn bindend zodat daar geen wijzigingen in kunnen worden aangebracht. Er kunnen wel afspraken gemaakt worden over een bepaalde verfijning van de normen. Bovendien zullen tijdens deze bijeenkomsten de opgaven worden besproken. De gemaakte op- en aanmerkingen worden opgenomen in een verslag dat de Commissie Vaststelling Opgaven zal worden aangeboden.

De bijeenkomsten beginnen indien hieronder niet anders vermeld om 16.00 uur en eindigen ongeveer 18.00 uur.

Bijeenkomsten ter bespreking van de normen wiskunde I en havo op vrijdag 9 mei 1980

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Groningen	Heymanscollege Nieuwe St. Jansstraat 11 050-120430	wisk I van 7 tot 9 uur n.m. J. V. Jansen Boterdiepwestzijde 5 Bedum 05900-3043 havo van 4 tot 6 uur n.m. M. van Steenis Kamplaan 8 Roden 05908-18121
Deventer	Alexander Hegius S. Gem. Het Vlier 1 05700-12064	wisk I van 4 tot 6 uur n.m. C. Meijboom Kolkmanweg 17 Schalkhaar 05700-21607 havo van 7 tot 9 uur n.m. J. de Groot Oudaenstraat 2 Deventer 05700-19708
Amsterdam	Gerrit van der Veen S. Gem. Gerrit van der Veenstraat 99 020-799905	wisk I van 4 tot 6 uur n.m. G. Zwaneveld Haringvlietstraat 9 ^{II} Amsterdam 020-738912 havo van 4 tot 6 uur Mevr. F. Meester Waalstraat 118 Amsterdam 020-425228

Rotterdam	St. Franciscuscollege Beukelsdijk 91 010-770033	wisk I van 4 tot 6 uur n.m. H. Ekstijn Mathenesserlaan 368 ^b Rotterdam 010-765926 havo van 7 tot 9 uur n.m. B. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 Krimpen a/d Lek 01807-15210
-----------	---	--

Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk Zuid 68 01640-41550	wisk I van 4 tot 6 uur n.m. A.L.D. van Mérode Kerkstraat 8 Dongen 01623-13746 havo van 4 tot 6 uur n.m. B. de Groot Rode Schouw 105 Halsteren 01641-3601
----------------	--	---

Roermond	Bisschoppelijk College Bob. Boumansstraat 30 04750-21241	wisk. I van 4 tot 6 uur n.m. Van Hulten Schakemberg 6 Roermond 04750-16113 havo van 4 tot 6 uur H. M. Derks Drossaart Saldenstraat 21 Elsloo 04402-3610
----------	--	--

Bijeenkomsten ter bespreking van de normen van het open werk wiskunde mavo-4 op 12 mei 1980

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Hoogezand	Dr. Alette Jacobs S. Gem. Nieuweweg 67 05980-92384	W. Visser Amalia van Solmslaan 11 Hoogezand 05980-20303
Leeuwarden	Mavo 'Nylan' Prinsesseweg 4 05100-27624	A. J. Langelaar Grietmanslaan 92 Oosterwolde 05160-2574
Emmen	Mavo 'Allee' Smedingeslag 1 05910-23456	H. Hendriks Wekingeslag 10 Emmen 05910-23301
Zwolle	Thorbecke Scholengemeenschap Eikenstraat 2 05200-35403	S. R. Zwaan Zwette 28 Zwolle 05200-41764
Hengelo	R. K. Mavo 't Lansink' Lansinkweg 80 074-913297	C. Th. J. Hoogsteder Prins Maurits Hof 4 Terborg 08350-4337
Arnhem	Thorbecke Scholengemeenschap Thorbeckestraat 17 085-423028	L. Hoekstra Rondehof 40 Elst 08819-3860
Schaesberg	Petrus en Paulusmavo Lopersbergweg 2 045-313755	J. P. Habets Kerkstraat 29 Bochholz 04442-2117
Roermond	R. K. Mavo Kapel. Lindanus Roersingel 28 04750-14054	W. Crijns Den Roover 17 Reuver 04704-1946

Alkmaar	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 072-113438	R. Pijning Tesselschadestraat 7 Alkmaar 072-112270
Amstelveen	Theo Tijssenschool (bij V en D) Burg. Haspelslaan 6 020-412156	A. P. J. O. Custers Fannius Scholtenstr. 9 Amsterdam 020-841272
Haarlem	R. K. Mavoschool 'Jeroen' Overtonstraat 42 023-251749	A. A. Rommelse Hammerskjöldstraat 43 Hoofddorp 02503-12183
's-Gravenhage	Groen van Prinsterercollege Alberdastraat 25 070-256260	W. van der Ley Heiloostraat 391 's-Gravenhage 070-254411
Utrecht	R. K. Mavo 'Overvecht' Pahud de Montagneweg 030-616946	G. Hilten Tigrisdreef 198 Utrecht 030-622628
Rotterdam	Chr. Mavoschool 'Het Lage Land' Kromhoutstraat 3-5 010-205393	L. Bozuwa Abeelstraat 7 Dordrecht 078-163946
Roosendaal	Mavo 'De Roosenborch' Bovendonk 1 01650-43871	A. Joosen P. C. Hooftlaan 30 Roosendaal 01650-35661
Middelburg	Oranje Nassauschool voor Chr. Mavo Oranjelaan 11 01180-25274	A. Kamraad v. Strijenstraat 19 Koudekerke 01185-2231
Eindhoven	Eckart-College Damocleslaan 3 040-433634	J. C. G. W. van den Berg Haakakker 26 Mierlo 04927-1744
s-Hertogenbosch	St. Leonardusmavo Emmaplein 19 073-135674	F. J. Mahieu Dommeldal 12 Boxtel 04116-73468

Bijeenkomsten ter bespreking van de normen van het open werk lto-c en mavo-3 examens op maandag 12 mei 1980

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Amsterdam	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenespad 3 020-198399	E. G. Doevendans Clara Bartonstraat 14 Amsterdam 020-362049
Arnhem	Technische School De Boulevard Boulevard Heuvelink 48 085-453455	J. v.d. Wijk Hamarskjöldweg 35 Lochem 05730-3320 J. Vink Dillenburg 132 Lochem 05730-3114

Breda	KTS De Blauwe Kei Van Riebeecklaan 2 076-139352	A. Braat Albastdijk 48 Roosendaal 01650-37242 R. Jonker Hameie 15 Teteringen 076-812218
Drachten	Christelijke Technische School Splitting 63 05120-19155	F. de Boer Linthorst Hohmanstr. 24 Franeker 05170-3610 S. Kooiman Illegaliteitslaan 11 Groningen 050-251289
Roermond	LTS Dr. Cuypers St. Odgerusstraat 1 04750-22940	M. Gielkens Herik 16 Ubach over Worms 045-315101 O. Bolech B. Schrijenstraat 10 Sittard 04490-18522
Rotterdam	Christiaan Huygensschool Benthemstraat 15 010-656088	W. de Porto Schubertthof 47 Waddinxveen 01828-4674 S. Schaafsma Betuwepad 25 Son 04990-3896

Bijeenkomsten ter bespreking van de normen van de lbo-c examens op dinsdag 13 mei 1980

<i>Plaats</i>	<i>Adres van de school</i>	<i>Gespreksleider</i>
Breda	Lhno-school Het Groene Woud Groene Woud 2 076-656250	M. Taal K. Julianastraat 12 Benthuisen 079-313572 A. Dona Prunus 6 Oisterwijk 04242-5394
Drachten	Christelijke School voor LEAO Splitting 17 05120-16905	M. P. L. Pool Weversrijge 3 Bedum 05900-3346 A. J. Tobi Kamgras 81 Leeuwarden 05100-81219
Roermond	Lhno-school De Heuvelkamp Kerkeveldlaan 1 04750-24041	H. M. Maes Grachtstraat 33a Oirsbeek 04492-2872 L. A. Muskens De Steenen Kamer 14 Schijndel 04104-2846
Utrecht	Mavo/leaoschool Lunetten Kampereiland 6 030-883551 vanaf C.S. bus lijn 5 tot eindpunt	J. van den Heuvel Kabof 53 Hoogland 033-803054 A. P. van den Brul Julianastraat 18 Harskamp 08383-6310

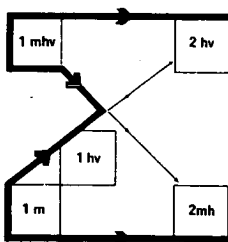


SIGMA (herzien) geeft u aangepast of aanpasbaar brugklasmateriaal

De herziening van de wiskundemethode Sigma is volledig geënt op de behoefte van docenten aan een gemakkelijk hanteerbare methode met voldoende flexibiliteit voor een soepele aanpassing aan de individuele stijl van lesgeven.

Pluspunten van Sigma

- + een speciaal deel (1-m) voor *homogene* mavo- klassen
- + keuze voor heterogene mavo- en/of havo- en/of vwo-klassen (deel 1-mhv òf deel 1-m, waar nodig aangevuld met de extra stof van deel 1-hv)
- + consequente samenhang van theorie en opgaven
- + duidelijk aangegeven extra stof in de delen 1-mhv en 2-mh
- + vooral in de brugklasdelen beperking tot het strikt noodzakelijke



U kunt het zelf verifiëren

Zelfs als de methode die u nu gebruikt aan uw eisen voldoet, loont het de moeite na te gaan wat Sigma u aan extra's te bieden heeft. Vraag beoordelingsexemplaren van de nieuwe brugklasdelen aan bij Wolters-Noordhoff bv, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. (050) 16 23 14 (mw. K. Linde)

244-26



Wolters-Noordhoff

INHOUD:

Piet Vredenduin: In memoriam Gerrit Krooshof	329
WN: Ter nagedachtenis aan G. Krooshof	330
J. Dompeling: Simulaties met de pocketcalculator	331
Het IOWO moet blijven	336
H. J. Smid: Schotse ervaringen	337
Joh. H. Wansink: Strabbe	341
O. Bottema: Een vraagstuk uit de ruimtevaart	349
J. Acohen: Vraagtekens bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs	355
B. Zwaneveld: Een reactie op 'Vraagtekens bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs'	356
P. G. J. Vredenduin: Korrel	358
Recreatie	360
Boekbesprekingen	362
Mededelingen	365

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

J. Acohen, Hofgeest 215, 1102 EK Amsterdam.
O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, 2628 BN Delft.
J. Dompeling, Keldercroftlaan 31, 1851 VG Heiloo.
H. J. Smid, Zeemanlaan 9, 2313 SV Leiden.
P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.
Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.
B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9¹¹, 1078 JX Amsterdam.