



**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

55e jaargang

1979/1980

no. 7

maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 20,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Functionele en formele taal

SIEB KEMME

Inleiding

In mijn vorig opstel: 'talig bezig zijn met wiskunde-onderwijs' heb ik een aantal suggesties gegeven voor een benadering van wiskunde-onderwijs vanuit de omgangstaal. In dit opstel wil ik proberen wat meer theoretische informatie te geven. Daardoor krijgen die suggesties wat meer onderlinge samenhang en weet je misschien ook beter waar je op moet letten als je zoiets bij je eigen onderwijs zou gaan doen.

Denk- en omgangstaal

Stel je eens voor: je woont in K. en je moet op woensdag 20 december 10.00 uur in U. zijn. Je vraagt je af hoe je daar het beste kunt komen: met de auto of het openbaar vervoer? Bij die keuze spelen veel uiteenlopende argumenten een rol, ze worden vooral bepaald door je eigen persoonlijke opvattingen en voorkeuren. Je kiest de trein. Onmiddellijk roept deze beslissing een nieuwe sliert van problemen op: welke trein, hoe laat van huis, genoeg tijd om over te stappen? Weer kom je op grond van een aantal feiten (het spoorboekje bv.) en persoonlijke opvattingen en voorkeuren tot een beslissing.

In dat hele proces van afwegen en beslissen heb je gebruik gemaakt van je denk-taal. Je hebt een beetje voor jezelf zitten redeneren (vijf minuten van spoor 11 naar 2 moeten kunnen). Door de taal wordt het hele kompleks van argumenten en feiten tot samenhang gekit. Denk maar eens aan 'als ... dan' constructies. De taal heeft hier een inwendige functie: het is een onderdeel van je denken.

Door de omgangstaal kun je verbanden leggen tussen je eigen gedachten en gevoelens en die van anderen. Deze taal heeft een uitwendige functie.

Gebruik maken van taal (inwendig of uitwendig) geeft men aan met de term 'taaldaden'. Hoe functioneren taaldaden (wat is hun betekenis)? 'Neem het axioma: tussen ieder tweetal punten kun je een rechte lijn trekken. Dat is natuurlijk niet waar, zou je zeggen. Probeer maar eens lijn te trekken tussen een punt op de maan en punt op Sirius, wat een punt dan ook mag zijn'. (Uit: Wittgenstein's lectures on the foundation of mathematics, Cambridge 1939, ed. by Cora Diamond, Harvester Press, Hassocks, Sussex 1976).

Je bent geneigd dit voorbeeld flauw of gezocht te noemen: natuurlijk was dit niet de bedoeling van het axioma. Maar bv. als jij twee punten op dit papier

zet, dan kan ik daar altijd (met een lineaal) precies één lijn doortrekken; zet je maar één punt of meer dan twee, dan hoeft dat niet altijd te kunnen. De betekenis van het axioma wordt dus vooral bepaald door het gebruik ervan.

Met name Wittgenstein heeft erop gewezen dat taaldaden hun betekenis ontleenen aan de situaties waarin ze gebruikt worden. Die situaties zijn vaak heel kompleks. Je moet dan ook niet verbaasd zijn als die taaldaden naast aanwijzende (bloem → ) ook andere associaties oproepen (bv. emotionele: bloem → → mooi, ruikt lekker, ...). Al die associaties lopen als een onontwarbare kluwen door elkaar. Ze geven voortdurend aanleiding tot misverstanden, zowel inwendig als uitwendig. In de loop van je ontwikkeling raak je erin getraind om bepaalde associaties te negeren als je die op dat ogenblik niet zo goed kunt gebruiken.

Emotionele associaties spelen een belangrijke rol bij het herkennen van taaldaden. Je hebt ze nodig om je die taaldaden 'eigen' te maken. Ze geven je een vertrouwd gevoel of ze wekken aversie op (maar dat is ook een vorm van je iets eigen maken). Als je nog niet goed kunt selecteren tussen al die associaties komen taaldaden met alleen maar aanwijzende associaties (als die bestaan) nogal vreemd op je over. In dit opzicht dienen denk- en omgangstaal dus bij elkaar aan te sluiten.

Ook andere associaties spelen bij die herkenning een rol. Omgangstaal is nooit af. Er is altijd een speld tussen een bewering te krijgen. Spelregels (en spellingsregels) zijn in ontwikkeling. Woord-betekeningen verschuiven. Dubbelzinnigheden en misverstanden zijn hiervan het gevolg. Maar die leveren juist de aangrijpingspunten voor verdere verscherping van taalgedrag en houden daarmee de denктаal in beweging. Ondubbelzinnig taalgebruik, vastgelegd in onwrikbare regels, levert te weinig houvast op om denктаal te zijn (welke wiskundige denkt volgens de regels van de formele logika?)

Denk nu eens aan de situatie leraar-leerling. Je wilt als wiskundeleraar het denken van je leerlingen beïnvloeden. Je bent er door je studie aan gewend geraakt te letten op de aanwijzende associaties van je taaldaden en je bent er zelfs in getraind om emotionele associaties weg te werken. Je weet ook heel goed waarom: al die malle bij-betekeningen maken de boel onzuiver (een vektor is een pijl? Dat zou veel te eng zijn). Je denk- en omgangstaal zijn door die training nogal veranderd. Daar heb je zelf misschien niet zo'n erg in ('je probeert me op mijn woorden te vangen' zei mijn collega nederlands laatst weer eens toen hij ongelijk had).

Je leerlingen ervaren dat heel anders. Die zitten nog midden in een ontwikkelingsproces waarin nog geen sprake is van die selectie van associaties. Dergelijk aanwijzend taalgedrag is wezensvreemd voor ze, het strookt niet met hun denктаal. Ze gaan op zoek naar die andere associaties door vragen te stellen of ze verwerpen de hele zaak. Durf nu nog maar eens vol te houden dat die reacties niet er zake zijn.

Het inwendige plan van handelen

Sommige Sovjet-psychologen hanteren de term 'inwendig plan van handelen'

naast het 'kunnen handelen op uitwendig plan'. Onder 'inwendig handelen' wordt verstaan het 'handelen in de geest', waarbij het 'uitwendig handelen' gekoppeld wordt aan materiële handelingen. Het functioneren van het inwendige plan wordt daarbij opgevat als een mogelijkheid om het uitwendige handelen voor te bereiden, te ontwerpen. Een dergelijke opvatting zou een verklaring zijn voor het kunnen optellen van alle mogelijke optellingen terwijl we het het slechts aan de hand van een beperkt aantal lessen geleerd hebben. Ook dat we zinnen kunnen schrijven die we daarvoor nog nooit hebben gelezen, en dat we zelfstandig $(\frac{1}{3}x^2 + 7)^2$ kunnen uitrekenen terwijl we dat nog nooit eerder hebben gedaan.

Door de aanwezigheid van een 'inwendig plan' kunnen we handelen in nieuwe situaties. De ontwikkeling van een inwendig plan van handelen wordt als wezenlijk voor de cognitieve ontwikkeling ervaren. Vaak gebeurt dat aan de hand van een op volgorde gezette rij van materiële handelingen, die een steeds hoger niveau van het inwendige plan noodzakelijk maakt. Men noemt dit ook wel het proces van 'verinnerlijking'.

In dat verinnerlijken spelen denk- en omgangstaal een belangrijke rol. Een voorbeeld hiervan is het volgende leergesprek dat ontleend is aan het boek van Krutetskii.

Een leerling heeft zojuist de formule voor $(a + b)^2$ en het principe om die toe te passen geleerd, en wordt gevraagd om het voorbeeld $(1 + \frac{1}{2}a^3 \cdot b^2)^2$ uit te werken

Lr: Kun je hierbij de formule voor het merkwaardig produkt gebruiken?

Ll: Het is hier wat anders $-a$ en b zijn rechts niet door een plus teken gescheiden ... (schrijft op: $\frac{1}{4}a^6 + 2 \cdot \frac{1}{2}a^3b^2 + b^4$).

Lr: Wat gebeurde er met de 1?

De leerling reageert niet.

Lr: Wel neem dit voorbeeld: $(2x + y)^2$.

De leerling schrijft terwijl hij hardop voorleest: $4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

Lr: Goed, los nu het vorige probleem op dezelfde manier op.

Ll: Maar er is iets verschillend ... Het kwadraat van de eerste is $\frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{1}{2}a^3$.

Lr: Laten we het samen eens proberen. Om de formule te gebruiken moeten we er zeker van zijn dat we te maken hebben met kwadraat van twee getallen. Zie je dat dit het kwadraat is van een som?

Ll: Hier (wijst) stelt het getal 2 voor dat wat tussen haakjes staat met zichzelf vermenigvuldigd moet worden.

Lr: Goed. Maar staat er een tweeterm tussen haakjes? Laat zien waar de eerste term staat, waar het eerste 'getal' staat.

Ll: $\frac{1}{2}a^3$ of nee, wat zeg ik? ... Er zou een plus teken tussen de termen moeten staan. Er is hier geen eerste term, alleen een tweede.

Lr: Maar de 1? Iedere term, ieder 'getal' kan een uitdrukking zijn, zoals je weet.

Ll: Waarom, ja ... Dan is de eerste term 1.

Lr: Wel, welk teken scheidt de termen binnen de haakjes?

Ll: Een plus teken, dat betekent dat het een som is.

- Lr: Zie je nu de overeenkomst tussen dit voorbeeld en dat wat je oploste, $(2x + y)^2$?
- Ll: Nee, ze zijn verschillend. Daar zaten in de eerste en tweede term letters, maar niet alleen in de tweede.
- Lr: Dat is natuurlijk juist. De tweetermen tussen haakjes zijn verschillend. Maar zie je dat zowel daar als hier een kwadraat is, daar en hier hebben we een som, daar en hier hebben we een som van twee getallen? In dit opzicht hebben ze dan toch iets gemeenschappelijks?
- Ll: Dat is zo. Zowel daar als hier wordt de som van twee termen gekwadrateerd.
- Lr: En, zoals je al eerder is verteld, alleen dit is belangrijk, om de formule te gebruiken: het is belangrijk dat de algebraïsche uitdrukking het kwadraat is van de som van twee getallen. Duidelijk? Los het nu op.
- Ll: Het is duidelijk.
- (Met behulp van de leraar lost de leerling het probleem korrekt op.)

Op het eerste gezicht is hier niets bijzonders aan te zien. De leerling is er gewoon nog niet aan toe om $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2$ uit te rekenen. Hij heeft misschien wel te weinig voorbeelden gezien. De leraar geeft echter maar één tussenvoorbeeld en probeert samen met de leerling de gelijksoortigheid tussen dit voorbeeld en het oorspronkelijke probleem te formuleren. De reacties van de leerling zijn nogal verward. Hij is als het ware hardop aan het denken. De leraar haakt hier heel konsekwent op in. Hij dwingt de leerling vanuit zijn verwarring verder te komen door bepaalde opmerkingen te negeren, maar andere juist heel bewust op te pakken. Door het heen en weer pendelen tussen omgangsdenktaal van de leerling, daarbij gestimuleerd en gestuurd door de leraar, komt het inwendig plan van handelen tot ontwikkeling. Er ontstaat een gedachtenpatroon van waaruit de leerling in nieuwe situaties op soortgelijke manier kan handelen.

Hardop denken en verwoorden

Door hardop te denken wordt je jezelf bewust van je eigen denkpatroon. Je ziet de malle kronkels zitten en bent daardoor in staat er verandering in te brengen. Het is daarmee een middel om tot een inwendig plan van handelen te komen. Bovendien kun je als leraar heel direkt inspelen op dat ontwikkelingsproces.

Hardop denken kun je niet zomaar. Je moet er een bepaalde weerstand voor overwinnen. Je mag niet van leerlingen verwachten dat ze dat meteen zullen gaan doen. Er gaat eerst een periode van gegiechel en denk-stiltes aan vooraf. Zeker in die periode is het ongeschikt om klassikaal te beoefenen. Bovendien eist het veel geduld van de leraar. Je loopt gauw het risico dat je te vroeg en teveel ingrijpt waardoor het geheel nogal dwangmatig kan worden.

Het expliciteren van verworven kennis en vaardigheden is een vorm van verwoorden. Daarbij heeft het de functie van consolidatie van die kennis en vaardigheden. Het ligt in het inwendig plan van handelen vast zodat je het via de omgangstaal weer kunt oproepen. Maar verwoorden is meer. Na het stellen

van een probleem kun je leerlingen vragen daarop te reageren. Je geeft daarbij ook gelegenheid tot fantaseren en kunt dat zelf stimuleren. 'Nutteloze' zijpaden worden niet meteen ter zijde geschoven. Hier heeft het verwoorden de functie van het zich eigen maken van het probleem. Je loopt daarbij het risico dat ze het probleem 'ontmaskeren' als een gekunsteld, niet ter zake doend on-eigenlijk probleem. Soms ook ontdek je door het verwoorden van datgene wat je gevonden hebt nieuwe verbanden of beperkingen. De diverse verwoordingen van de begrippen continuïteit zijn daar een mooi voorbeeld van. Steeds weer opnieuw waren de ontdekte mogelijkheden en beperkingen van een gevonden formulering aanleiding tot een ander begrip en dus ook een andere verwoording (zie het boek van Lakatos). Daarnaast heeft het verwoorden natuurlijk een nogal communicatieve waarde. Je kunt je beter verdiepen in de gedachten-wereld van de ander.

Het funktionele van formele taal

Functionaliteit is ook één van die herkenningpunten bij het bezig zijn met taal. Een spreker of schrijver, toehoorder of lezer, heeft er konstant behoefte aan te weten waar hij mee bezig is en waarom.

Een fout die nogal vaak voorkomt is:

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$$

Nog opvallender is het klakkeloos gebruiken van het bi-implicatieteken bij het oplossen van stelsels vergelijkingen. Daar waar een 'beroeps'-wiskundige dat teken nooit zal gebruiken, zie je hele klassen vergelijkingen aan elkaar rijgen onder voortdurend gemompel van: 'is equivalent met'.

Wanneer gebruikt een 'beroeps'-wiskundige het bi-implicatieteken eigenlijk? Als hij zich bezig houdt met formele logika. Dan kan $\Leftrightarrow$ een operationeel symbool zijn tussen formules. Zoiets als het plus-teken tussen getallen of termen. Je kunt het nauwelijks missen en het gebruik ervan is nauwkeurig vastgelegd. Of als hij bezig is een stukje eigen werk wat netjes op te schrijven en de voorkeur geeft aan $\Leftrightarrow$ boven andere uitdrukkingen uit efficiency- of schoonheids-overwegingen. In beide gevallen is het teken een onderdeel van de vaktaal. Het is een heel bijzondere taaluitdrukking. Vanuit taalkundig gezichtspunt bekeken hoort het thuis in het rijtje vaktermen dat eigen is aan ieder beroep. Het zijn uitdrukkingen die op hele specifieke situaties van toepassing zijn en betekenis ook ontlene aan die specifieke situaties. (Zoals de woorden die we kennen voor de zeilen op een schip).

Als die 'vreemde' woorden en termen hebben een duidelijke functie voor de gebruiker. Een gebruiker kan je haarfijn duidelijk maken wanneer hij de ene term wel gebruikt en de andere juist niet. Dat je zijn uitleg soms niet begrijpt komt omdat je te weinig van het vak afweet (je hebt bv. nog nooit een zeilboot gezien met meer dan twee masten). De vaktermen blijven vreemd voor niet-gebruikers. Ze sterven uit met het beroep (en worden begraven in musea of woordenboeken). Ze zijn aan mode onderhevig. Ze worden spontaan vanuit

een duidelijke behoefte geboren. Die behoefte geeft de functionaliteit aan. Het gebruiken van geformaliseerde taal in de wiskunde is terug te voeren tot het ogenblik dat het taalgebruik zó complex was geworden dat het gebruik van symbolen de overzichtelijkheid ten goede kwam. Je kan allerlei zaken sneller overzien, je kan er handiger mee werken, en het beter onthouden. Denk maar eens aan het gebruik van letters voor variabelen. Daarnaast werden de gebruiksregels voor die symbolen zó interessant gevonden (of onduidelijk) dat die regels zèlf object van studie werden.

Wat kun je van die functionaliteit van de formele wiskunde verwachten in het wiskundeonderwijs?

In hoeverre zullen de formalismen een vak-taal voor de leerlingen kunnen zijn? Dat hangt ervan af wat je van het vak wil bijbrengen. In ieder geval zul je leerlingen in de gelegenheid moeten stellen functionele vak-taal te leren. Het gebruik van vaktermen moet aansluiten bij de behoeften die het beoefenen van het vak met zich meebrengt. Dat is niet per definitie de geformaliseerde vaktaal van beroepswiskundigen. Die opvatting, in strikte zin doorgevoerd, leidt tot de vorming van jargon en het uitspreken van slogans.

Een voorbeeld van een slogan in het wiskundeonderwijs: een functie $f: A \rightarrow B$ is een deelverzameling van het cartesisch produkt $A \times B$ waarbij ...

Natuurlijk komt een dergelijke zin niet zomaar uit de lucht vallen. Het is bedoeld om het in het voorafgaande opgebouwde functie-begrip nog eens 'ondubbelzinnig' vast te leggen. In het vervolg kun je daarop teruggrijpen. Zo funktioneert het ook binnen het beroep. Het begrip functie is opgebouwd uit een aantal onderliggende begrippen die op hun beurt weer helder en ondubbelzinnig zijn vastgelegd. Belangrijker is echter dat het functiebegrip ook de abstrakte betekenis heeft die je erin de definitie uit kunt aflezen. Wiskundigen hanteren functies ook in de situaties waarbij ze die definities nodig hebben (anders was die definitie natuurlijk ook nooit ontstaan). Dat de definitie in de schoolwiskunde voorkomt is te wijten aan de gedachte dat er maar één begrip functie zou zijn, dat optreedt in vele gedaantes. Eerst kies je een gedaante die het dichtst bij de belevingswereld ligt, tenslotte kom je tot een formulering die het begrip, los van alle andere situaties, zuiver inhoudelijk vastlegt.

Met de toepassingen en voorbeelden waarmee je denkt het begrip geïntroduceerd te hebben, introduceer je voor leerlingen echter een heel ander begrip functie. Tijdens een discussie met een tweedejaars student op een lerarenopleiding werd de tabel-vorm niet als functie geaccepteerd. Hoewel hij heel goed op de hoogte was van de formele definitie en zag dat de tabel daaraan voldeed, vond hij dat een functie 'iets moet doen', of een wetmatig verband tussen twee grootheden moest zijn. Dat kun je aan een formule zo mooi zien. Door de exacte definitie is het begrip veranderd. Het is van activiteit ontdaan. Dat is ook niet zo verwonderlijk als je bedenkt dat die formulering het resultaat is van een proces van vallen en opstaan waarin bestaande begrippen steeds gedwongen werden zich te wijzigen zodat ze bruikbaar werden gemaakt voor algemene situaties of zodat extreme (monsterachtige) situaties werden uitgesloten. Dat 'actieve' functiebegrip leidde

tot beperktheid en tot dubbelzinnigheid. Ook hier echter ontleend het begrip haar betekenis aan datgene wat je ermee doet. Voor een natuurkundige is een functie nog steeds een formule die je met enige goede wil (of bijgestaan door een computer) kunt differentiëren of integreren. Die heeft geen boodschap aan die definitie. En dat werkt prima.

We hebben hier te maken met taaldaden die voor leerlingen te weinig associaties oproepen en waar zijn denk-taal geen houvast op heeft zodat er van een inwendig plan weinig terecht komt. Geen wonder dat hij het 'actieve' begrip blijft verkiezen boven het 'exacte'. Dat functioneert bij hem nooit in de rol waarvoor het geschapen is en blijft daarom tot een stukje wijsheid waarmee je sommen kunt maken.

Hiermee wil ik geen pleidooi afsteken om meteen alle formele zaken uit de schoolwiskunde te schrappen. Ik probeer alleen een aantal criteria op te stellen waaraan je kunt zien wat je van dat formele taalgebruik mag verwachten bij leerlingen. Juist bij wiskunde zul je niet kunnen ontkomen aan gesymboliseerd taalgebruik met heel eigenzinnige regels. Wiskunde is theorievormend. Het ontwikkelt inwendige plannen van handelingen. Het beïnvloedt daarmee de denktaal en dus ook de omgangstaal. Zorg ervoor dat het dan ook zo is. Stel je op de hoogte in hoeverre leerlingen in staat zijn, met jouw hulp, tot theorievorming te komen en pas het taalgedrag daarbij aan.

Samenvatting

In dit opstel heb ik proberen aan te geven waarom je leerlingen volop de gelegenheid moet geven hun eigen omgangstaal te gebruiken als ze met wiskunde bezig zijn. Taalgedrag wekt vele associaties op. Emotionele associaties en functionaliteit zijn belangrijk voor het je eigen maken van problemen en begrippen. Taalgedrag dat te vroeg wordt ontdaan van emotionele associaties en sterk inhoudelijk is gericht geeft te weinig houvast voor het proces van verinnerlijking voor leerlingen die daar nog niet aan gewend zijn. Het roept niets op. Daarnaast dient het gebruik van vaktaal aan te sluiten bij de behoeften van de beoefenaars van het vak. Het is een functionaliteitskenmerk dat met name geldt geldt voor onderdelen van formele wiskunde.

Literatuur

Het bovenstaande heb ik natuurlijk niet zelf bedacht. Het is gestolen. Maar ik zal de plaatsen van de misdaad aangeven, zodat u zelf de zwaarte daarvan kunt vaststellen.

I. Lakatos: *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press; Cambridge, 1976.

(Geen gemakkelijk boek, maar je inspanningen worden wel beloond. Het toont aan dat begrippen en wetmatigheden bij de ontwikkeling van een theorie voortdurend veranderen en dat dit weerpiegeld wordt in het taalgebruik).

Paul Feyerabend: *Against Method*. Verso Edition, London, 1978.

(Een beetje modieus boek over wetenschapsfilosofie. Bevat veel waardevols, vooral over het ontstaan van jargon bij de opbouw van een theorie. Er bestaat een nederlandse vertaling).

Hans Freudenthal: *Weeding and Sowing*. Reidel Dordrecht, 1978.

Hans Freudenthal: *Mathematics as an educational task*. Reidel Dordrecht, 1973.

(Een belangrijke bron van inspiratie: wiskunde bedrijven is een creatieve intelligente bezigheid, dat moet in je onderwijs uitgangspunt zijn).

C. F. van Parreren: e.a.: *Sovjet-psychologen aan het woord*. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

C. F. van Parreren e.a.: *Denken*. Tjeenk Willink, Groningen, 1975.

(Een serie vertaalde artikelen, ingeleid door van Parreren. Heel helder en leesbaar).

V. A. Krutetskii: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. The University of Chicago and London, 1976.

(Een gedegen verslag van een sovjet-onderzoek naar de aard van wiskundige begaaftheid).

L. Wittgenstein: *Filosofische onderzoekingen*. Boom, Meppel 1976.

(Vooral voor belang voor de betekenis die je kunt hechten aan betekenis van taal).

G. Manouri: *Mathesis en Mystiek*. Bohn, Scheltema en Holkema, Utrecht 1978.

(Laat zien dat een taaldaad niet alleen inhoudelijke maar ook emotionele lading heeft).

Theo Thijssen: *De gelukkige klas*. Van Oorschot.

(Verplichte lectuur? Omdat hij aantoont dat je op papier wel alles kunt beweren en zo aardig laat zien hoe je de vakterm 'onvoltooid tegenwoordige tijd' in de vierde klas van de basisschool kunt gebruiken).

Problemen met een reële context, standaardprocedures

HARRIE BROEKMAN met dank aan KLAAS BIEWENGA

Dat het verzet tegen het aanleren van louter standaardprocedures in het wiskunde-onderwijs niet nieuw is, was mij al langer bekend. Dat dit verzet ook kwam van een man die jarenlang een bundel examenopgaven verzorgde verraste mij toch wel enigszins.

Door een van mijn studenten¹ werd ik attent gemaakt op het volgende citaat van Kruytbosch in het door hem – zo'n 50 jaar geleden – geschreven en van talrijke voorbeelden voorziene boek 'Avontuurlijk Wiskunde Onderwijs'.²

'De traditionele didactiek stelt den regel: richt de vraag altijd zoo in, dat er maar een antwoord op mogelijk is. Vandaar ook, dat de uitwerking dier gangbare didactiek eerder het afleeren dan het aanleeren van denken moet worden genoemd. Uit louter vrees voor remmingen door eenige onbepaaldheid laat men het kind helemaal geen keus meer en belet het dus juist tot zelfstandig denken te komen'.

Een leuk voorbeeld van deze praktijk neemt Kruytbosch over uit: 'Die Meggen-dorfer Blätter', een brief van een tot wanhoop gedreven vader:

'Mijn zoon heeft een opgave over de samengestelde regel van drieën uit school meegebracht: Als 10 metselaars, die 10 uur per dag werken in 150 dagen een huis bouwen, hoeveel metselaars bouwen dan dit zelfde huis, bij een werktijd van 3 uur per dag in 20 dagen? Mijn zoon zette zich aan het werk en berekende volgens het bekende voorschrift:

$$\frac{10 \times 10 \times 150}{3 \times 20} = 250.$$

'Vader, ik heb het' zei mijn zoon, '250 metselaars kunnen het huis in 20 dagen bouwen'. 'Mm', zei ik, 'dat zit nog, dat moesten ze maar eens proberen'. Natuurlijk vertelt de volgende dag mijn zoon aan zijn onderwijzer, dat ik het niet met het antwoord eens was. En daarop gaf de onderwijzer aan mijn zoon de boodschap mee of ik zo goed wilde zijn om te zeggen wat ik op de opgave had aan te merken.

'Niets, mijnheer', schreef ik den onderwijzer, 'dan dat ik zou willen opmerken, dat 5000 metselaars dit huis in één dag zouden kunnen bouwen, aangenomen dat ze elkaar niet voortdurend op de eksterogen trappen. En weet

U, mijnheer, als een onderwijzer een jongen 7 jaar lang onderwijs geeft, om een flink mens van hem te maken, hoeveel onderwijzers dit karwei in één dag kunnen volbrengen? Ongeveer 2100 onderwijzers, mijnheer,’.

Wat gebeurt? De onderwijzer wil wegens belediging een klacht tegen me indienen. Maar het is toch niet mijn schuld, maar alleen maar die van de regel van drieën’.

Een ander voorbeeld noemt Kruytbosch op blz. 102, 103:

‘Een jonge Griek wordt levensgevaarlijk ziek en beleeft het niet meer dat zijn vrouw hem een kind zal schenken. Op zijn sterfbed maakt hij zijn testament en bepaalt: als hem een zoon wordt geboren, erft de moeder 4 delen en de zoon 5 delen van zijn vermogen. Wordt hem echter een dochter geboren, dan zal de moeder 3 en de dochter 2 delen ontvangen.

Er wordt een tweeling geboren. Er wordt een oplossing gegeven. Men kan niet zeggen dat de ene oplossing absoluut foutief en de andere absoluut goed is. Hier moest immers een vraagstuk worden opgelost, waarvoor de gegevens niet toereikend waren en er moest dus maar naar een oplossing worden gezocht, die geacht werd het best aan de bedoeling van de erflater te beantwoorden’.

Opvallend is dat we in ons onderwijs zo weinig problemen kunnen inbrengen zoals hiervoor genoemd werden. En als er dan al eens een kans is, schrappen we zo’n opgave vaak omdat hij veel te moeilijk zal zijn voor de leerlingen, of niet?³

Dit heeft als konsekwentie dat we de leerlingen opvoeden tot het idee dat alle problemen een eenduidig antwoord hebben en dat je dat kunt vinden door netjes een aantal algoritmen (standaardprocedures) toe te passen.⁴

Ja, het gaat zelfs nog verder: de leerling verwacht dat de leraar altijd het goede antwoord geeft, ook al valt dat soms te betwijfelen.

Een aardig voorbeeld van dit laatste kreeg ik van de eerder genoemde student.

‘De brugklasleerlingen hebben een aantal hoeken gemeten en zij staan er op dat ook de leraar zelf een antwoord noemt, wat dan onmiddellijk *het* antwoord is’.

Een klein stapje verder en we zijn op een didactiekcursus. De deelnemers krijgen als opdracht een aantal stukjes van een schoolboektekst in een voor de leerlingen aanvaardbare (leerzame) volgorde te leggen, en . . . zij willen van de gespreksleider weten welke volgorde hij heeft, want dat is dan *de* goede volgorde.⁵

Heeft dit iets te maken met een manier van opgevoed zijn (worden) en onderwezen zijn (worden)? Met een beeld dat veel van ons hebben van een volwassene?

Prof. Dr. N. Beets⁶ typeerde deze volwassene als volgt: ‘Een volwassene, als een rots in de branding, met gevestigde opvattingen en meningen en veelal een vast geloof. Twijfel en onzekerheid hebben nooit lang vat op hem’. – en – ‘De

stoere volwassenheid wordt beheerst door waarden en normen waarmee we vertrouwd raken vanuit onze kindertijd'.

Hoe moet dat nu als vrijwel alle problemen die we de leerlingen voorleggen een eenduidig antwoord hebben en het best volgens een vaste standaardprocedure opgelost kunnen worden; wat helpt ons een reële context dan? Worden ze daardoor echt gemotiveerd als ze verder toch alleen maar *onze* algoritmen mogen volgen om tot *ons* antwoord te komen?

Hopelijk ben ik te pessimistisch op deze door ijzel en sneeuw tot nadenken aanzettende dag.

Noten:

- 1) Klaas Biewenga; heeft naast zijn studie wiskunde een part-time functie als leraar.
- 2) Ir. D. J. Kruytbosch, 'Avontuurlijk Wiskunde Onderwijs'.
- 3) Dat niet iedereen alle opgaven met meer dan één goede weg naar één antwoord schrappen wil, las ik o.a. bij Bram Lagerwerf in zijn artikel 'Wiskunde "doen"' in Eucl., 54e jrg. nr. 4.
- 4) Dat dit echt niet altijd hoeft kan men o.a. halen uit bijv. het artikel van Harm Bosscher in Eucl., 52e jrg. nr. 8 'Keuze en ordening van vraagstukken'. Speciaal bij de verwerkingsopgaven – bij P. van Hiele zouden dit de opgaven in de integratiefase heten – is het nuttig en nodig buiten de standaardsituaties en – procedures te treden.
- 5) Een voorbeeld van zo'n verknipt stukje leerstof is te vinden in Eucl., 48e jrg. nr. 10.
- 6) Prof. Dr. N. Beets, 'Volwassenheid en Volwassenheid'.

Over de auteur:

Harrie Broekman behaalde het doctoraalexamen wiskunde met groot bijvak pedagogiek en didactiek en is – na een zevental jaren leraar wiskunde geweest te zijn – sinds september '67 verbonden aan het Ped. Did. Instituut voor de Lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Hij is vooral geïnteresseerd in het samenbrengen van theorie en praktijk. Het observeren van leerlingen en aankomende leraren daarbij een grote plaats in.

Logica en schoolwiskunde

P. G. J. VREDENDUIN

In de schoolwiskunde werken we met uitdrukkingen die niet voor alle waarden van de erin voorkomende vrije variabelen betekenis hebben.

We nemen in dit artikel gemakshalve aan dat we in het reële getalstelsel werken. Voor een variabele mag dus elk reëel getal gesubstitueerd worden.

Voorbeelden van uitdrukkingen die niet voor elk reëel getal betekenis hebben,

zijn $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\ln x$. Deze uitdrukkingen hebben geen betekenis voor resp. $x = 0$, $x < 0$ en $x \leq 0$. Gevolg hiervan is, dat er taalvormsels voorkomen, zoals $\frac{1}{x} > 0$, die de structuur van een uitspraak hebben en die voor sommige waarden van de variabele x waar zijn, voor andere onwaar en voor weer andere geen betekenis hebben.

In de tweewaardige logica kennen we een dergelijke situatie niet. Of een taalvormsel een uitspraak voorstelt, hangt daar uitsluitend af van de structuur ervan. Vooronderstelling is daar, dat uitspraken waarin een vrije variabele voorkomt, na substitutie van een waarde voor die variabele overgaan in een uitspraak die hetzij waar hetzij onwaar is. Betekenisloze taalvormsels die de structuur van een uitspraak hebben, kent men daar niet.

Als we in de schoolwiskunde enerzijds betekenisloze uitdrukkingen toelaten en anderzijds volgens de regels van de tweewaardige logica willen redeneren, zouden we wel eens in moeilijkheden kunnen komen.

Aan de hand van een voorbeeld wil ik laten zien, dat dergelijke moeilijkheden inderdaad optreden.

Een uitspraak die in de schoolwiskunde geaccepteerd wordt, is

$$\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad (1)$$

We moeten (1) als volgt lezen.

a Uit $\frac{1}{x} > 0$ volgt $x > 0$.

D.w.z. als x een of ander reëel getal voorstelt waarvoor $\frac{1}{x} > 0$, dan is ook $x > 0$.

b Uit $x > 0$ volgt $\frac{1}{x} > 0$.

D.w.z. als x een of ander reëel getal voorstelt waarvoor $x > 0$, dan is ook $\frac{1}{x} > 0$.

Er is ook een andere interpretatiemogelijkheid. Het teken $\Leftrightarrow$ wordt veelal gelezen: is ekwivalent met. De betekenis van het teken wordt dan vastgelegd door een waarheidswaardentabel. Volgens deze interpretatie betekent ' $p \Leftrightarrow q$ ', dat p en q dezelfde waarheidswaarde hebben. Ze zijn hetzij beide waar, hetzij beide onwaar.

Laten we eens proberen (1) op deze manier te interpreteren. Dat zou betekenen, dat

a als $\frac{1}{x} > 0$ waar is, dan is ook $x > 0$ waar, en omgekeerd;

b als $\frac{1}{x} > 0$ onwaar is, dan is ook $x > 0$ onwaar, en omgekeerd.

Nu gaat het mis. Immers $0 > 0$ is onwaar en $\frac{1}{0} > 0$ is niet onwaar, maar betekenisloos.

De eerste interpretatie van $\Leftrightarrow$ levert een correct resultaat, de tweede echter niet.

Hoe is de situatie in de tweewaardige logica? Daar geldt:

- a als uit p volgt q en uit q volgt p , dan hebben p en q dezelfde waarheidswaarde;
 - b als p en q dezelfde waarheidswaarde hebben, dan volgt p uit q en q uit p .
- (Misschien wordt het sommigen duidelijker, als ik toevoeg, dat 'uit p volgt q ' hetzelfde betekent als: q is deduceerbaar uit p .)

Uit het voorgaande volgt: in de schoolwiskunde moeten we

$p \Leftrightarrow q$	en $p \Leftrightarrow q$															
interpreteren:	niet interpreteren:															
uit p volgt q en uit q volgt p	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Leftrightarrow q$</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	p	q	$p \Leftrightarrow q$	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
p	q	$p \Leftrightarrow q$														
1	1	1														
1	0	0														
0	1	0														
0	0	1														

Hiermee gaat gepaard, dat we

$p \Rightarrow q$
 interpreteren:
 uit p volgt q

en $p \Rightarrow q$
 niet interpreteren:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Volgens de tweewaardige logistiek leveren beide interpretaties dezelfde resultaten. De logica van de schoolwiskunde wijkt blijkbaar af van de tweewaardige.

Ik wil nu verder nagaan op welke wijze men in de schoolwiskunde uitdrukkingen hanteert die soms betekenisloos zijn.

1 Herleidingen

$$a \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a-1} = \frac{2a-1}{a(a-1)} \quad (2)$$

Dit is voor elke a waar waarvoor beide leden betekenis hebben. We kunnen nog meer opmerken. Als we in een ware uitspraak $\frac{1}{a} + \frac{1}{a-1}$ vervangen door $\frac{2a-1}{a(a-1)}$, of omgekeerd, dan ontstaat weer een ware uitspraak. En uit een onware uitspraak ontstaat dan een onware uitspraak. Dientengevolge ontstaat uit een betekenisloze uitspraak weer een betekenisloze uitspraak.

We zouden $\frac{1}{a} + \frac{1}{a-1}$ en $\frac{2a-1}{a(a-1)}$ voor elkaar substitueerbaar kunnen noemen.

De traditionele interpretatie van gelijkheid is substitueerbaarheid. Houden we aan deze interpretatie vast, dan is (2) verantwoord.

Echter is

$$\forall a \in \mathbb{R}: \frac{1}{a} + \frac{1}{a-1} = \frac{2a-1}{a(a-1)}$$

geen ware uitspraak. Want voor $a = 0$ en ook voor $a = 1$ is

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a-1} = \frac{2a-1}{a(a-1)} \text{ geen ware uitspraak.}$$

$$b \quad \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 3a + 2} = \frac{a-1}{a-2} \quad (3)$$

Een als regel gestelde eis is, dat breuken vereenvoudigd worden. Dit is hier geschied; teller en noemer zijn 'gedeeld' door $a - 1$.

Ook dit is voor elke a waar waarvoor beide leden betekenis hebben. Van substitueerbaarheid is hier echter geen sprake. Bijv. is $a = 1 \Rightarrow \frac{a-1}{a-2} = 0$

een ware uitspraak (volgens de gekozen interpretatie van $\Rightarrow$), maar $a = 1 \Rightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 3a + 2} = 0$ is onwaar. Zodat we (3) niet verdedigen kunnen.

Toch komen we uitspraken van de vorm (3) in de schoolwiskunde vaak tegen. Als vanzelfsprekend wordt dan ondersteld, dat aan a de beperking opgelegd is ongelijk aan 1 te zijn.

$$c \quad \frac{1}{\tan a} = \frac{\cos a}{\sin a} \quad (4)$$

Analoge situatie. De verzameling van de getallen waarvoor het rechter lid wel en het linker geen betekenis heeft, is $\{x \mid \cos x = 0\}$. Dit is een oneindige, maar wel discrete verzameling. Men pleegt dit niet expliciet te vermelden.

$$d \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a-3} = \sqrt{a(a-3)} \quad (5)$$

De verzameling van de getallen waarvoor het rechter lid betekenis heeft en het linker niet, is $\{x \mid x < 0\}$.

Dit is een interval. Meestal vindt men daarin aanleiding de beperking waaronder (5) juist is, wel expliciet te vermelden.

Zo heeft men als regel geen scrupules bij $\frac{a^2}{a} = a$ en bij $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, maar wel bij $(\sqrt{a})^2 = a$ en bij $\ln a^2 = 2 \ln a$.

De lezer zal met mij wel opmerken, dat de beperking eigenlijk altijd vermeld dient te worden, maar dat het moeizaam en didactisch niet of nauwelijks verantwoord zou zijn dit te doen.

2 Oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden

Het kritiekloos uitvoeren van bovengenoemde herleidingen kan bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden fatale gevolgen hebben. We dienen hier dus op onze hoede te zijn. Aan enkele voorbeelden licht ik dit toe.

$$a \quad \text{Los } x \text{ op uit } \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} \leq 2$$

Eerste methode

$$\begin{aligned}\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-3)} &\leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x(x-3)} \leq 2 \wedge x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x(x-3) \leq 4 \wedge x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4 \wedge x \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4\end{aligned}$$

Tweede methode

We beperken ons tot waarden van x waarvoor $\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-3)}$ betekenis heeft.

Dus tot waarden van x waarvoor $x \geq 3$.

Onder deze voorwaarde geldt

$$\begin{aligned}\sqrt{x} \cdot \sqrt{(x-3)} &\leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x(x-3)} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x(x-3) \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4\end{aligned}$$

De oplossingsverzameling is dus $\{x \mid x \geq 3 \wedge -1 \leq x \leq 4\}$, dus $\{x \mid 3 \leq x \leq 4\}$.

Variaties zijn mogelijk.

b Los x op uit $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 + x - 3}{(x+1)(x-2)}$

Eerste methode

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} &= \frac{x^2 + x - 3}{(x+1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow x-2 + x+1 &= x^2 + x - 3 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \\ \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2) &\wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \in \emptyset\end{aligned}$$

Tweede methode

We beperken ons tot waarden van x waarvoor beide leden van de vergelijking betekenis hebben. Dus tot waarden van x waarvoor

$$x \neq -1 \wedge x \neq 2$$

Onder deze voorwaarde geldt

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} &= \frac{x^2 + x - 3}{(x+1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow x-2 + x+1 &= x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2\end{aligned}$$

De oplossingsverzameling is dus

$$\{x \mid (x = -1 \vee x = 2) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2\}, \text{ dus } \emptyset.$$

Variaties zijn mogelijk.

Dus in essentie twee methoden :

- a We vervangen de ongelijkheid of vergelijking tot een daarmee gelijkwaardige. Hierbij dient het teken $\Leftrightarrow$ op de bovenomschreven manier geïnterpreteerd te worden.
- b We beperken ons tot die waarden van de variabele waarvoor de leden van de ongelijkheid of vergelijking betekenis hebben. Hierna vervangen we de vergelijking of ongelijkheid door een daarmee gelijkwaardige. Ten slotte combineren we beide resultaten.

Beide methoden worden in de schoolwiskunde toegepast.

3 Functies

De functie

$$f : x \rightarrow f(x)$$

heeft als domein de verzameling van de waarden van x waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

Bijv.

$$f : x \rightarrow \sqrt{x}$$

heeft als domein $D_f = \{x \mid x \geq 0\}$.

4 Complementverzameling

Het complement V^c van de verzameling V definiëren we

$$V^c = \mathbb{R} \setminus V.$$

Dat wil zeggen, dat V^c bestaat uit alle reële getallen die niet tot V behoren. 'x behoort niet tot V ' schrijven we meestal korter: $x \notin V$.
Zodat we ook kunnen schrijven

$$V^c = \{x \mid x \notin V\}$$

Voor de schoolwiskunde is hiermee de kous af. Toch wil ik wel enige theoretische kanttekeningen maken, die echter niet voor de leerling bedoeld zijn.
Onderstel

$$V = \{x \mid \sqrt{x} > 4\}$$

Dan is

$$W = \{x \mid \neg \sqrt{x} > 4\}$$

niet het complement van V . Want

$$V^c = \{x \mid x \leq 16\} \text{ en } W = \{x \mid 0 \leq x \leq 16\}$$

Nu is

$$x \in V \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4$$

en dus

$$\neg x \in V \Leftrightarrow \neg \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 16$$

Terwijl

$$x \notin V \Leftrightarrow x \in V^c \Leftrightarrow x \leq 16$$

Hieruit volgt:

$x \notin V$ betekent niet hetzelfde als $\neg x \in V$.

$x \notin V$ betekent, dat $x \in V$ (d.i. hier $\sqrt{x} > 4$) niet waar is, dus hetzij onwaar hetzij betekenisloos.

Inderdaad is dit in overeenstemming met de gangbare interpretatie van $x \notin V$ in de schoolwiskunde.

Commentaar

1 Totnogtoe heb ik me ertoe beperkt een, m.i. objectieve analyse te geven van de taal van de schoolwiskunde. Ik heb geconstateerd hoe daarin gedachten onder woorden (incl. formules) gebracht worden.

Veel spectaculairs is daarbij niet gevonden. Het voor mij belangrijkste resultaat is, dat de pijl $\Rightarrow$ geïnterpreteerd dient te worden als 'uit . . . volgt' en niet door middel van een waarheidswaardentabel. Dat vind ik een verademing, want de intuïtieve betekenis die een leerling aan de pijl hecht, wordt nu de officiële. De waarheidswaardentabel werd door leerlingen nimmer begrepen. Men kon hoogstens ze aanpraten, dat $p = 0$ oplevert, dat ook $p \Rightarrow q = 0$. Ervaring heb ik in deze niet, want ik heb het mijn leerlingen nooit verteld. De studenten in Delft die leraar willen worden, moet ik het wel vertellen. En die hebben er, terecht, grote moeite mee.

2 Een taal moet voldoen aan de eis, dat we er onze gedachten op adequate manier in kunnen uitdrukken. De praktijk heeft genoegzaam aangetoond, dat de taal van de schoolwiskunde aan deze eis voldoet.

De vraag is volgens welke regels de taal gehanteerd wordt.

Welke betekenis hebben de erin voorkomende logische connectieven?

Welke deductieregels worden gehanteerd?

Abusievelijk heeft men gedacht, dat dit de regels van de tweewaardige logica zijn. Dat blijkt niet het geval te zijn. Een interessante opgave is na te gaan welke regels dan wel gehanteerd worden. D.w.z. een, bij mijn weten nog nimmer uitgevoerde taak is na te gaan wat de logica van de schoolwiskunde is.

Dat deze taak nog niet uitgevoerd is, pleit uiteraard niet tegen de schoolwiskunde.

3 Wie geen lust heeft een logica van de schoolwiskunde te ontwerpen, kan een andere weg inslaan. Hij kan de taal van de schoolwiskunde zo modificeren, dat geen betekenisloze uitspraken meer voorkomen. Men kan door wijziging van de definities een taal ontwerpen waarin de vroeger betekenisloze uitspraken betekenis krijgen. Ruw gezegd worden in deze taal de betekenisloze uitspraken tot onware uitspraken, hun negaties tot ware uitspraken enz.¹

De tweewaardige logica wordt nu weer toepasbaar.

Deze oplossing heeft wetenschappelijk belang, maar is uiteraard totaal ongeschikt voor doorvoering op school.

4 Veel interessanter voor de praktijk is de opvatting van N. G. de Bruijn.² Hij verbiedt het voorkomen in de taal van bestanddelen die betekenisloos zijn of kunnen zijn. Als ergens voorkomt $\sqrt{x}$, dan zal te voren moeten worden gesteld: $x \geq 0$. D.w.z. eerst moet worden vastgesteld, dat x in het vervolg een reëel getal voorstelt, dat groter of gelijk aan 0 is, en eerst daarna mag men de symboolcombinatie $\sqrt{x}$ gebruiken.

De taal die zo ontstaat is fraai en doorzichtig. Of hij voor schoolgebruik geschikter of minder geschikt is dan de gebruikelijke, durf ik niet te beoordelen. Wel vraag ik mij af: denkt De Bruijn anders dan ik of schrijft hij alleen maar een andere taal?

Ik zou bijv. opschrijven: $\sqrt{(1 - x^2)}$ en constateren, dat dit betekenis heeft voor $-1 \leq x \leq 1$ en geen betekenis voor andere waarden van x .

Als ik mij niet vergis, denkt De Bruijn: de wortel uit $1 - x^2$ heeft betekenis voor $-1 \leq x \leq 1$ en geen betekenis voor andere waarden van x . Daarna gaat hij eerst aan het schrijven. Hij schrijft nu op: $-1 \leq x \leq 1$. Eerst hierna gaat hij verder en schrijft bijv. op: $\sqrt{(1 - x^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Een gedeelte van zijn denkarbeid gaat dus vooraf aan de formulering van zijn gedachten en laat zich in zijn taal niet uitdrukken.

Men kan het misschien beter zo zeggen. Hij hanteert een informele taal, waarin hij onderzoekt voor welke x de uitdrukking $\sqrt{(1 - x^2)}$ betekenis heeft. Eerst nadat dit, alleen in informele taal uitdrukbaar denkwerk verricht is, hanteert hij de formele taal waarin betekenisloze symboolcombinaties geen rol meer spelen.

Deze opmerkingen zijn geenszins als kritiek bedoeld op het fraaie werk van De Bruijn, doch alleen maar als een poging zijn opvatting te analyseren en te vergelijken met de gebruikelijke in de schoolwiskunde.

1) P. G. J. Vredenduin, *Logische Perikelen*, Euclides 51, nr. 9, p. 350-354.

Zie ook: G. Pickert, *Logische Gesichtspunkte der Gleichungslehre*, Mathematisch Naturwissenschaftlich Unterricht 23, Heft 2, 1970, p. 78-83;

G. Pickert *Wissenschaftliche Grundlagen des Funktionsbegriffs*, Der Mathematikunterricht 15, Heft 3, p. 40-52.

2) Prof. Dr. N. G. de Bruijn, *Wees contextbewust in WOT*, Euclides 79/80, nr. 1, blz. 7.

N.B. Wie zich interesseert voor een logische behandeling van uitspraken die niet voor alle waarden van de erin voorkomende variabelen betekenis hebben, kan ik het recent verschenen uitstekende artikel aanraden van D. van Dalen, *Delen door nul; noodzaak of misverstand?*, dat gepubliceerd is in *Wiskunde en Onderwijs* 5e jaargang (1979), nr. 18, blz. 65-76.

Setvorming en wiskundeonderwijs

II De aard van de leerervaring

S. P. VAN 'T RIET

1 Inleiding

In een vorig artikel (Van 't Riet, 1979) heb ik uitvoerig het verschijnsel setvorming aan de orde gesteld, met name in relatie tot het oplossen van wiskundige vraagstukken. Daarbij werden de begrippen *Einstellung* en *rigiditeit* gedefinieerd, twee aspecten van setvorming. Voorts werd de E-test van Luchins besproken, die een belangrijk instrument vormt om setvorming te onderzoeken. In dit tweede artikel zal ik enige determinanten van setvorming de revue laten passeren, zoals ze tevoorschijn komen uit het onderzoek dat mij uit de literatuur bekend is. Die determinanten of factoren die van invloed zijn op de setvorming betreffen vooral de aard van de leerervaring. Daarnaast zijn er ook andere factoren van invloed op setvorming, bijvoorbeeld factoren van motivationele en perceptuele aard. Het zou echter te ver voeren binnen het bestek van dit artikel ook deze factoren te bespreken. Ik zal mij dus beperken tot de aard van het leerproces zoals zich dat bij het maken van bepaalde opgaven afspeelt.

2 Konkretisering van de taken

Zoals ik in de vorige aflevering vermeldde, weten Luchins en Luchins (1950) het setvormig reageren van vele leerlingen aan hun attitude ten opzichte van aritmetische vraagstukken. Het onderwijs, gericht op training en drill van allerlei geïsoleerde vaardigheden, werkt het mechanisch oplossen van rekenkundige vraagstukken in de hand. In een van hun experimenten voegden Luchins en Luchins aan de basisopzet van de E-test (zie Tabel 1, vorige aflevering) de problemen uit Tabel 2 toe. Het eerste van die problemen zou men een kritisch probleem kunnen noemen, met dien verstande dat de eenvoudige, directe oplossing ervan wel zeer eenvoudig is: Het afmeten van nul liter vloeistof is iets waarvoor niets gedaan hoeft te worden. Toch gaf 50% van de studenten van een Amerikaanse college-class de oplossing $25 - 5 - 2 \times 10$, overeenkomstig de regel van de setproblemen. In een andere college-class gaf 30% van de studenten op het tweede probleem van Tabel 2 de oplossing $65 - 29 - 11 \times 3$. Hier werd dus elf maal 3 liter afgemeten alvorens men meende 3 liter te hebben afgemeten! Luchins en Luchins konkludeerden dat een groot deel van hun proefpersonen

Tabel 1 De taken van de E-test : Instruktieprobleem (*I*), setproblemen (*S*), kritische problemen (*K*), extinktiefprobleem (*E*).

	Probleem	Inhoud van de kannen (in liters)				Regel om het probleem op te lossen: $D =$
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
<i>I</i>	1	29	3		20	$A - 3B$
<i>S</i>	2	21	127	3	100	$B - A - 2C$
	3	14	163	25	99	$B - A - 2C$
	4	18	43	10	5	$B - A - 2C$
	5	9	42	6	21	$B - A - 2C$
	6	20	59	4	31	$B - A - 2C$
<i>K</i>	7	23	49	3	20	$B - A - 2C$ of $A - C$
	8	15	39	3	18	$B - A - 2C$ of $A + C$
<i>E</i>	9	28	76	3	25	$A - C$
<i>K</i>	10	18	48	4	22	$B - A - 2C$ of $A + C$
	11	14	36	8	6	$B - A - 2C$ of $A - C$

Tabel 2 Aan de basisopzet van de E-test toegevoegde kannenproblemen in een van de experimenten van Luchins en Luchins.

Probleem	Inhoud van de kannen (in liters)				Regel om het probleem op te lossen: $D =$
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
12	5	25	10	0	$B - A - 2C$ of 0
13	3	65	29	3	$B - C - 11A$ of A

deze vraagstukken oplossen op het nivo van abstracte symbolische relaties, waarop zij de symbolen (getallen) niet meer zagen als representanten van een fysische-grootheid zoals de inhoud van kannen. Deze houding tegenover de vraagstukken zou worden opgewekt door de schoolse situatie waarin de E-test wordt afgenomen en door het feit dat de problemen worden opgelost met pen en papier. De zo op setvorming ingestelde attitude van de leerlingen zou hen verhinderen te zoeken naar nieuwe, eenvoudiger oplossingen. Daarom besloten deze onderzoekers de E-test op een groep proefpersonen af te nemen niet in de vorm van een enigszins abstracte rekenopdracht, maar konkreet met behulp van echte kannen en echte vloeistof. Ze hoopten dat daardoor de attitude van de leerlingen ten opzichte van de gebruikelijke schoolrekenkunde geen rol zou spelen, waardoor de leerlingen met meer inzicht en meer creativiteit de problemen te lijf zouden gaan. De veronderstelling omtrent de uitslag van de test was dan ook dat er op de kritische problemen minder Einstellung gekonstateerd zou worden. De test werd in tegenstelling tot de basisopzet niet klassikaal, maar individueel afgenomen. Op de gebruikte kannen werden de getallen die de inhoud aangaven vermeld. Deze inhouden werden nu echter om begrijpelijke redenen niet in liters, maar in kubieke centimeters uitgedrukt. Als proefpersonen deden leerlingen uit het zesde jaar van een Newyorkse elementary-school aan het experiment mee. Het resultaat was zeer teleurstellend voor de opvattingen van Luchins en Luchins. De groep vertoonde voor 68 % Einstellung en voor 64 % rigiditeit, hetgeen in dezelfde orde van grootte lag als de resultaten van vergelijkbare groepen die aan de basisopzet van de E-test onderworpen waren.

Konkretisering van de taken had in dit geval dus geen enkel effect op het al dan niet setmatig oplossen van de kannenproblemen.

Uit dit experiment blijkt de grote overeenkomst die er bestaat tussen het denken dat zich direkt richt op konkrete handelingen en het meer mentale denken van het gebruikelijke rekenonderwijs. Hoewel dit ene experiment daarvoor in het geheel geen solide bewijs vormt, kunnen we desondanks stellen dat het een indicatie geeft, dat konkretisering van het reken- en wiskundeonderwijs zonder meer, geen voldoende voorwaarde is om bij leerlingen een creatieve attitude ten opzichte van de wiskunde te bevorderen. In het licht van de huidige tendens naar konkretisering van het wiskundeonderwijs (zie b.v.: Freudenthal, 1978; Vredenduin, 1978) is het goed dit in de gaten te houden. De ontwikkeling van een creatieve, mathematiserende houding van leerlingen wordt ook door andere factoren beïnvloed, dan alleen de konkretisering van de wiskundige inhoud van ons onderwijs.

3 Irrelevante gegevens

Om te demonstreren dat het onderzoek naar setvorming allerlei onverwachte methodologische problemen met zich mee kan brengen, bespreek ik in deze paragraaf twee experimenten van Luchins en Luchins (1950), die tot een twijfelachtig resultaat leidden.

Het was deze onderzoekers in hun experimenten met de basisopzet van de E-test opgevallen, dat de meeste proefpersonen bij hun aanvankelijk zoekgedrag niet alledrie de getallen A , B en C betrokken, maar direkt de grootste twee selekteerden en die als uitgangspunt namen bij het zoeken naar de juiste oplossing. De onderzoekers besloten toen een vierde, overtollige kan X aan de drie kannen A , B en C toe te voegen. Ook met deze kan X mocht de proefpersoon nu de vloeistof afmeten om de inhoud van kan D te krijgen. De inhoud van deze kan X was steeds kleiner dan die van kan B , maar bij de meeste problemen groter dan die van kan A of kan C . Verondersteld werd dat deze nieuwe opzet van de E-test het zoekgedrag tijdens de fase van de setproblemen dermate zou bevorderen, dat bij de overgang naar de kritische problemen gemakkelijker de eenvoudige regels $A - C = D$ en $A + C = D$ gevonden zouden kunnen worden. De resultaten verschilden echter nauwelijks van die van de experimenten met de basisopzet (zie Van 't Riet, 1979). De invoering van een overtollige kan als irrelevant gegeven bleek dus geen invloed te hebben op de setvorming. Uit een nadere analyse bleek dat dit te wijten zou kunnen zijn aan het feit dat men kan X steeds dezelfde positie had gegeven t.o.v. de kannen A , B en C .

In een volgend experiment gaf men kan X een variabele positie t.o.v. de kannen A , B en C . Bij het ene probleem stond X links van A , bij een ander probleem tussen B en C , enz. Als proefpersonen deden 148 leerlingen op het nivo van het zesde leerjaar van de Elementary School mee. De resultaten waren opmerkelijk. De groep als geheel gaf tussen de 80 en 90 % eenvoudige oplossingen ($A - C = D$ en $A + C = D$) op de kritische problemen. Dit is geheel tegenovergesteld aan de uitkomsten met de basisopzet van de E-test, als die op een vergelijkbare groep kinderen wordt afgenomen. Echter treden er aanzienlijke

komplikaties op bij de interpretatie van dit resultaat. Het bleek namelijk dat 65% van de hele groep gefaald had de laatste twee setproblemen op te lossen en nog eens 15% had deze twee problemen niet met de setregel ($B - A - 2C = D$) opgelost, maar met een ingewikkelder regel. Dit betekent dat men bij slechts 20% van leerlingen kan spreken van setvorming. (In het basisexperiment is dit ongeveer 80%). Deze 20% vertoonde nu een zeer gering seteffect: 28% ervan gaf op de kritische problemen de oplossing $B - A - 2C = D$, terwijl 7% van deze leerlingen faalde het extinktieprobleem op te lossen. Het is echter de vraag welke waarde men aan deze laatste cijfers mag hechten. Twee dingen wil ik opmerken.

Ten eerste is het begrijpelijk dat de setvorming wordt tegengewerkt door een overvloedige kan X met variabele positie. In de basisopzet van de E-test zal er namelijk snel een identifikatie ontstaan tussen de kannen (getallen) en hun positie. De set, d.w.z. het mechanisch uitvoeren van de oplossing, grijpt direct aan bij de positie van de getallen ten opzichte van elkaar: Het tweede getal minus het eerste getal minus tweemaal het derde getal. Worden deze posities gewijzigd door toevoeging van een vierde getal X , dan wordt de positie als uitgangspunt voor de setmatige oplossing ondoelmatig. Het duurt veel langer voor de leerling de setregel gevonden heeft. Zoekgedrag blijft noodzakelijk en op de kritische problemen wordt de eenvoudige oplossing eerder gevonden. Zoals de resultaten van het tweede experiment laten zien, wordt er nauwelijks setmatig gedrag opgebouwd. We hebben hier dus een faktor gevonden die het ontstaan van een set voorkomt. Biedt deze procedure op de kritische problemen een groot voordeel, het nadeel wordt zichtbaar op de setproblemen, waarop 65% van de proefpersonen faalt. Ook dat is bepaald niet wat men met de inrichting van het onderwijs voor ogen heeft. Ideaal is de situatie waarin de leerlingen de setproblemen korrekt oplossen op de wijze van de setregel ($B - A - 2C = D$), maar op de kritische problemen direkt overstappen op de eenvoudiger oplossingen, m.a.w. de set gemakkelijk overwinnen. De opzet van de E-test met de kan X in variabele positie is dus voor ons onderzoek naar setvorming geen geschikt middel. Methodologisch gezien is de vergelijkbaarheid van deze opzet met het basisexperiment te gering.

Ten tweede is de konklusie van een grotere setdoorbreking in deze opzet alleen te baseren op de 20% van de proefpersonen die de laatste twee setproblemen had opgelost met de setregel. Het is nu echter in het geheel niet meer na te gaan of deze groep nog vergelijkbaar is met de groep die het basisexperiment onderging. Waarschijnlijk hebben we te doen met de 'beste' 20%, die ook met de basisopzet weinig of geen last van setvorming zou hebben gehad. Ook hier stuiten we dus op onoverkomelijke, methodologische bezwaren tegen het trekken van konklusies over het verschijnsel setvorming.

Ondanks dit alles is er mijns inziens uit deze experimenten wel enig profijt te trekken voor het wiskundeonderwijs. Met name het tweede in deze paragraaf besproken experiment brengt een belangrijke faktor aan het licht, die het vormen van setmatig gedrag kan tegengaan. Men kan de gegevens die de leerling voor het oplossen van bepaalde problemen nodig heeft in gevarieerde posities aanbieden. Daardoor zal de leerling alvorens een probleem te kunnen oplossen die gegevens opnieuw moeten rangschikken of tegen elkaar afwegen. Dit

leidt tot een oriënterende fase aan het begin van de oplossing, waarin relevante eigenschappen van en eenvoudiger verbanden tussen de gegevens kunnen worden ontdekt. Hierdoor komt de leerling wellicht tot het inzicht van een eenvoudiger oplossing en wordt het vervallen in het in beginsel mogelijke setgedrag voorkomen. Het volgende voorbeeld kan dit illustreren. Het werd echter door mij nimmer uitgetoetst op leerlingen, zodat het niet meer bedoeld te zijn dan een suggestie in deze richting.

Men kan de leerlingen vragen de snijpunten te bepalen van de grafieken van de functies $f: x \rightarrow \frac{2(x^2 + 4x + 3)}{x + 3}$ en $g: x \rightarrow x + \frac{1}{2}$. Vele leerlingen zullen als

een van de eerste stappen in hun oplossing automatisch de haakjes verdrijven uit de teller van $f(x)$. Om nu echter de kans te vergroten dat leerlingen tot het inzicht komen dat men hier beter die teller kan ontbinden, kan men de vraag ook als volgt stellen: Bepaal de snijpunten van de grafieken van de functies

$f: x \rightarrow \frac{2 \cdot T(x)}{x + 3}$ en $g: x \rightarrow x + \frac{1}{2}$, waarbij $T(x) = x^2 + 4x + 3$. De leerlingen

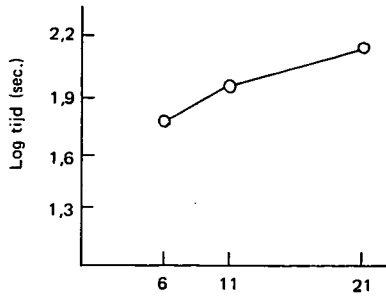
moeten zich dan even oriënteren op de wijze waarop $f(x)$ is opgebouwd en hebben daarbij meer gelegenheid de mogelijkheid tot ontbinding van $T(x)$ als een relevante eigenschap te ontdekken. Wellicht kan zo een bijdrage worden geleverd tot voorkoming van setmatig gedrag en zullen de leerlingen hiervan op den duur leren gespitst te zijn op zo eenvoudig mogelijke oplossingen.

Deze procedure van een gevarieerde aanbieding van gegevens verdient echter wel een zorgvuldige analyse, zoals het tweede experiment uit deze paragraaf laat zien. De problemen moeten er niet dermate moeilijk door worden dat het grootste gedeelte der leerlingen ze niet meer kan oplossen. Het zou interessant zijn vanuit de hier geschetste gedachtengang verder onderzoek te doen.

4 Het aantal setproblemen

Een belangrijke en voor de hand liggende faktor die de setvorming beïnvloedt is het aantal setproblemen, d.w.z. de omvang van de training op de setoplossing. In twee experimenten is deze faktor onderzocht. Van der Geer (1957) gebruikte een gewijzigde versie van de E-test, waarin acht kritische problemen gebruikt werden. Zijn onderzoek zegt dus alleen iets over Einstellung, niet over rigiditeit. Hij vergeleek groepen proefpersonen die 1 of 3 setproblemen kregen op te lossen met groepen die 5 of 7 setproblemen kregen op te lossen. Bij de laatste groepen vond hij een significant grotere Einstellung op de oplossingsregel van de setproblemen (p. 107).

Ook Gardner en Runquist (1958) gebruikten in verschillende groepen verschillende aantallen setproblemen, te weten 6, 11 en 21. In plaats van kritische problemen werkten zij met één extinktiefprobleem, waarvan zij de tijd die de proefpersoon nodig had om tot de juiste oplossing te komen als afhankelijke variabele namen. Men kan dit beschouwen als een maat voor de rigiditeit. In figuur 1 ziet men het resultaat van hun onderzoek: Een monotoon stijgend verband tussen het aantal setproblemen en de oplossingstijd benodigd voor het extink-



Figuur 1 Verband tussen het aantal setproblemen en het gemiddelde van de logaritme van de tijd die nodig is om het extinktiefprobleem op te lossen (Gardner en Runquist, 1958).

tieprobleem. Men ziet dus in het geval van zowel Einstellung als rigiditeit, dat langdurige training setmatig gedrag in de hand werkt en de flexibiliteit van de leerlingen doet afnemen. Interessant in verband hiermee is het volgende.

5 Opgehoopte tegenover gespreide training

De woorden 'opgehoopte' en 'gespreide' training heb ik gekozen als vertaling van de Engelse woorden 'massed' en 'distributed' training. Hiermee wordt het volgende onderscheid aangeduid. Opgehoopte training is ononderbroken training. Een handeling wordt bijvoorbeeld geoefend door hem tien keer achter elkaar te herhalen. Na afloop daarvan moet deze handeling beheerst worden en wordt de oefening ervan niet hervat. Gespreide training daarentegen is training die express wordt verspreid over een langere periode, waarbij de te leren handeling met tussenpozen wordt geoefend. In plaats van tien keer direkt achter elkaar oefent men een handeling nu bijvoorbeeld op vijf opeenvolgende dagen steeds twee keer achter elkaar. Uit psychologisch onderzoek blijkt dat gespreide training bij eenvoudige leertaken in het algemeen veel betere resultaten heeft dan opgehoopte training (zie b.v. Hilgard en Atkinson, 1967, p. 295, 336 e.v.). Vandaar ook Van Parrerens advies in zijn boekje 'Leren op school' om bij het memoriseren van leerstof herhalingen van dezelfde leerstof niet in te groot aantal achtereen te laten plaatsvinden, maar deze over verscheidene dagen te spreiden (Van Parreren, 1972, p. 67).

Dit onderscheid tussen opgehoopte en gespreide training is door Kendler, Greenberg en Richman (1952) onderzocht in verband met de setvorming. Zij gaven één groep proefpersonen de E-test in vrijwel ongewijzigde vorm. Een andere groep gaven zij de E-test met steeds een pauze van drie minuten tussen twee opvolgende setproblemen. De laatste groep vertoonde significant minder Einstellung dan de eerste groep. Rigiditeit is in dit onderzoek niet als afhankelijke variabele meegenomen.

De moeilijkheid bij het interpreteren van deze gegevens is dat de kannenproblemen van de E-test in eerste instantie niet tot eenvoudige leertaken behoren. Echter het verschijnsel van de setvorming treedt op in het overgangsge-

bied tussen inzichtelijk en mechanisch functioneren. De aanvankelijk met begrip uitgevoerde taak wordt op den duur 'blind' verricht en wordt in dat stadium vergelijkbaar met eenvoudige leertaken. Het is dus niet verwonderlijk dat empirische verbanden die bij eenvoudige leertaken gevonden worden, dit ook worden bij setvorming. Samen met het in de vorige paragraaf gevonden verband tussen de omvang van de training en de grootte van de setvorming kunnen we nu – met enige reserve – voor het onderwijs de volgende konklusie trekken. Stel men wil leerlingen een bepaald soort taken goed en snel leren uitvoeren en stel men is van mening dat hiervoor een omvangrijke training nodig is. Stel verder dat men desondanks wil dat de leerlingen inzichtelijk blijven functioneren op deze taken. Het is dan aan te raden de training zoveel mogelijk te spreiden in de tijd. Omvangrijke training immers werkt setmatig functioneren in de hand ofwel vermindert het inzichtelijk functioneren. Spreiding van training echter zal het ontstaan van seteffekten weer tegenwerken, zodat inzichtelijk functioneren tot de mogelijkheden van de leerling blijft behoren. Zo kan men in een brugklas bijvoorbeeld beter een maand lang elke les één som in breukrekenen behandelen, dan dat men al deze sommen in twee lessen achter elkaar afwerkt. Breukrekenen lijkt mij namelijk typisch een gebied waarop vele leerlingen het slachtoffer worden van seteffekten.

6 De inspanning bij de verwerving van een setregel

Knight (1963) heeft onderzocht welke de invloed is van de mate van inspanning die de proefpersoon nodig heeft om de set te verwerven. In een variant op de E-test gebruikte hij gehele getallen van 1 tot 1 000. Eén groep proefpersonen kreeg nu als eerste trainingsprobleem een opgave met grote getallen, een andere groep een opgave met kleine getallen. Verondersteld werd dat in de eerste groep de proefpersonen meer inspanning zouden moeten leveren om zich de setregel op dit eerste trainingsprobleem eigen te maken en dat deze grotere inspanning zou leiden tot een grotere mate van Einstellung. Inderdaad werd deze hypothese in dit onderzoek bevestigd: Een grotere inspanning bij het ontdekken van de setregel leidde tot een groter seteffekt. Dit is een belangwekkend gegeven voor het wiskundeonderwijs, waarin men sommen door middel van variatie van getallen moeilijker dan wel gemakkelijker kan maken. Ook is dit gegeven in overeenstemming met mijn boven vermelde opmerking over breukrekenen, een activiteit die veel leerlingen veel inspanning kost.

7 Snelheidspressie

Luchins en Luchins (1950) hebben in hun onderzoek naar factoren die setvorming zouden tegenwerken ook het effect van snelheidspressie onderzocht. Hieronder wordt verstaan de instructie aan de proefpersonen de problemen zo snel mogelijk op te lossen. Zij veronderstelden dat dit de proefpersonen zou aanzetten tot het zoeken van zo efficiënt mogelijke oplossingen, waardoor op de kritische problemen eerder de eenvoudige oplossingsregel gebruikt zou

worden. Zij gaven de proefpersonen daartoe alle kannenproblemen tegelijkertijd met de opdracht ze in de juiste volgorde zo snel mogelijk te maken. Het effect bleek echter tegengesteld aan de verwachting van deze onderzoekers: De snelheidspressie bewerkte slechts een groter seteffect. 94% van de proefpersonen vertoonde Einstellung tegenover 83% in de basis opzet van de E-test.

Ook Van der Geer (1957) heeft de variabele snelheidspressie onderzocht. Hij vergeleek deze met akkuraatheidsbenadrukking. Onder dit laatste wordt verstaan de instructie aan de proefpersonen rustig en nauwkeurig te werken. Zijn veronderstelling was, na de ervaringen van Luchins en Luchins begrijpelijk, dat snelheidspressie zou leiden tot grotere Einstellung dan akkuraatheidsbenadrukking. Merkwaardig was nu dat dit in zijn onderzoek alleen bevestigd werd voor jongens, niet voor meisjes. Meisjes zijn in dit opzicht kennelijk wat minder beïnvloedbaar dan jongens. Ook in andere opzichten worden er verschillen gevonden tussen jongens en meisjes als het om setvorming gaat (zie Guetzkow, 1951). Het zou echter binnen het bestek van deze artikelenserie te ver voeren daarop dieper in te gaan.

Voor het onderwijs heeft het effect van snelheidspressie een belangrijke implicatie. Wanneer men proefwerken of schoolonderzoeken maakt, zal men naast een bepaalde hoeveelheid 'blinde' kennis in het algemeen toch ook begrip en inzicht van de leerlingen verlangen. Wil men de leerling nu een kans geven dit begrip en inzicht werkelijk te demonstreren dan is het aan te raden de leerling niet te laten werken onder de pressie van de klok. Doet men dit wel dan is het gevaar groot dat de leerling terug valt in setmatig gedrag. In feite toetst men dan slechts blind funktionerende kennis en vaardigheden in plaats van het vermogen van de leerling inzichtelijk problemen op te lossen. De door de leerling geleverde prestaties kunnen onder invloed van snelheidspressie, tijdgebrek en dergelijke wezenlijk van aard veranderen. Een goede test behoort de leraar zekerheid te geven omtrent de aard van het geteste gedrag. Daarom behoort men met name in een op begrip en inzicht gebaseerd vak als wiskunde de leerling voldoende tijd te geven proefwerken en schoolonderzoeken in een rustig tempo af te krijgen.

8 Tenslotte

In dit artikel heb ik enkele factoren behandeld die van invloed zijn op het ontstaan en het funktionieren van sets. De resultaten van het onderzoek op dit gebied hebben mij verleid tot het trekken van enkele konklusies ten aanzien van het onderwijs in het algemeen en het wiskundeonderwijs in het bijzonder. Men moet echter wel bedenken dat deze konklusies niet anders dan voorlopig kunnen zijn. Ondanks de periode van 40 jaar dat er nu al onderzoek gedaan wordt naar Einstellung en rigiditeit is mij geen onderzoek bekend met andere aritmetische problemen dan de kannenproblemen van Luchins (1942)! Dit maakt de hierboven vermelde resultaten van het onderzoek wel erg afhankelijk van dit ene type probleem. Desondanks maken deze resultaten op mij een betrouwbare indruk. Sommige zijn zeer plausibel, zoals de invloed van irrelevante gegevens,

het aantal setproblemen, snelheidspressie, andere zoals de invloed van opgehoopte tegenover gespreide training zijn in overeenstemming met onderzoeksresultaten op ander terrein. Toch blijft er een duidelijke behoefte bestaan aan meer onderzoek op dit gebied en met gebruikmaking van een grotere verscheidenheid aan taken. In het volgende artikel in deze serie zal in die behoefte gedeeltelijk worden voorzien. Daarin zal een onderzoek besproken worden dat ik in het voorjaar van 1978 naar Einstellung en rigiditeit gedaan heb met andere aritmetische problemen dan de kannenproblemen.

Literatuur (zie ook: Van 't Riet, 1979).

- Freudenthal, H., *Modern wiskundeonderwijs? Goed wiskundeonderwijs!*, Intermediair 1978, jrg. 14, no. 17, p. 7-13.
- Gardner, R. A., Runquist, W. N., *Acquisition and extinction of a problem-solving set*, J. exp. Psychol., 1958, 55, p. 274-277.
- Guetzkow, H., *An analysis of set in problem solving behavior*, J. gen. Psychol., 1951, 45, p. 219-244.
- Hilgard, E. R., Atkinson, R. C., *Introduction to psychology*, 4e druk, Harcourt Brace et World Inc., New York, 1967.
- Kendler, H. H., Greenberg, A., Richman, H., *The influence of massed and distributed practice on the development of mental set*, J. exp. Psychol., 1952, 43, p. 21-25.
- Knight, K. E., *Effect of effort on behavioral rigidity on a Luchins water jar task*, J. abn. soc. Psychol., 1963, 66, p. 190-192.
- Parreren, C. F. van, *Leren op school*, 9e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
- Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs I, Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken*, Euclides 1979, 55, p. 39.
- Vredenduin, P. G. J., *Leerplanontwikkeling onderweg I*, Euclides 1978, 54, p. 15-26.

Over de auteur:

Drs. S. P. van't Riet werd geboren in 1948. In 1966 deed hij eindexamen H.B.S. aan het Christelijk Lyceum te Alkmaar. Van 1966 tot 1975 studeerde hij wiskunde en van 1970 tot heden psychologie aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. Van 1973 tot 1978 was hij als leraar wiskunde verbonden aan het Comenius College te Hilversum. Momenteel is hij wetenschappelijk medewerker voor de didaktiek van de wiskunde aan de Technische Hogeschool te Delft.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1979



Tweede ronde: donderdag 30 augustus 1979

- 1 Een cent, een stuiver, een dubbeltje, een kwartje, een gulden en een rijksdaalder worden zo onder vier kinderen verdeeld, dat elk van hen teminste één van de zes munten ontvangt.
Hoeveel van zulke verdelingen zijn er?

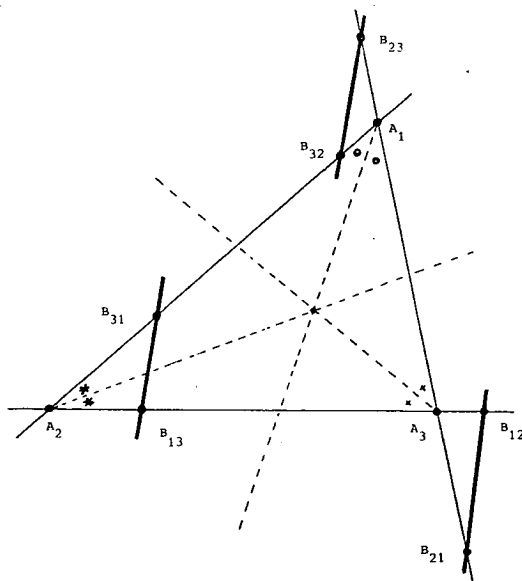
- 2 Bepaal alle positieve gehele getallen a , b en c die voldoen aan het stelsel vergelijkingen:

$$a^3 = b^3 + c^3 + 12a$$

$$a^2 = 5(b + c)$$

- 3 Definieer $a_1 = 1979$ en $a_{n+1} = 9^{a_n}$ voor $n = 1, 2, \dots$. Bepaal de laatste twee cijfers van a_{1979} .

- 4 Gegeven is een niet-gelijkzijdige driehoek $A_1A_2A_3$. Onder B_{ij} verstaat men het spiegelbeeld van A_i in de (binnen-)bissectrice van hoek A_j ($i, j \in \{1, 2, 3\}$).
Bewijs dat de drie lijnen $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$ en $B_{23}B_{32}$ parallel zijn.



Oplossingen

- 1 Er zijn twee mogelijkheden: (1) twee kinderen krijgen twee munten en de andere twee krijgen er één, of (2) één kind krijgt drie munten en de andere drie krijgen er één. Bij (1) nemen we eerst 4 van de 6 munten apart. Dit kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren. Er zijn drie manieren om deze 4 munten, noem ze even A , B , C en D , in twee paren te verdelen: (AB, CD) , (AC, BD) en (AD, BC) . Er zijn dus $3 \cdot 15 = 45$ manieren om uit de zes munten twee paren van twee munten te kiezen. Nu moeten de twee paren en de overgebleven twee losse munten nog onder de vier kinderen verdeeld worden. Dit kan op $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ manieren. Er zijn in geval (1) dus $24 \cdot 45 = 1080$ mogelijke verdelingen. Bij (2) nemen we 3 van de 6 munten apart. Dit kan op $\binom{6}{3} = 20$ manieren. Er zijn ook weer 24 manieren om zo'n drietal en de drie overblijvende munten onder de 4 kinderen te verdelen. In geval (2) zijn er dus $24 \cdot 20 = 480$ mogelijkheden. Het antwoord op de vraag is dus dat er $1080 + 480 = 1560$ mogelijke verdelingen zijn.

- 2 Uit de eerste vergelijking volgt $b < a$ en $c < a$. Volgens de tweede vergelijking is dan $a^2 = 5(b + c) < 5(a + a) = 10a$, dus $a < 10$. Bovendien is volgens de tweede vergelijking a een vijfvoud, dus $a = 5$. Dit geeft als stelsel

$$\begin{aligned} b^3 + c^3 &= 65 \\ b + c &= 5. \end{aligned}$$

Je controleert onmiddellijk dat alleen $\{b, c\} = \{1, 4\}$ hieraan voldoet. De oplossingen zijn dus $(a, b, c) = (5, 1, 4)$ en $(a, b, c) = (5, 4, 1)$.

- 3 Als je de laatste twee cijfers van de eerste tien machten van 9 opschrijft, zie je dat 9^9 eindigt op 89, en 9^{10} eindigt op 01. Elke macht van 9^{10} eindigt dus ook op 01. Hieruit blijkt dat

$$a_2 = 9^{1979} = 9^{1970} \cdot 9^9 = (9^{10})^{197} \cdot 9^9$$

ook eindigt op 89. Evenzo eindigt

$$a_3 = 9^{a_2} = 9^{\dots 89} = 9^{\dots 80} \cdot 9^9 = (9^{10})^{\dots 8} \cdot 9^9$$

op 89, en hetzelfde geldt dus voor *ieder* getal a_k met $k > 1$. De laatste twee cijfers van a_{1979} zijn daarom 89.

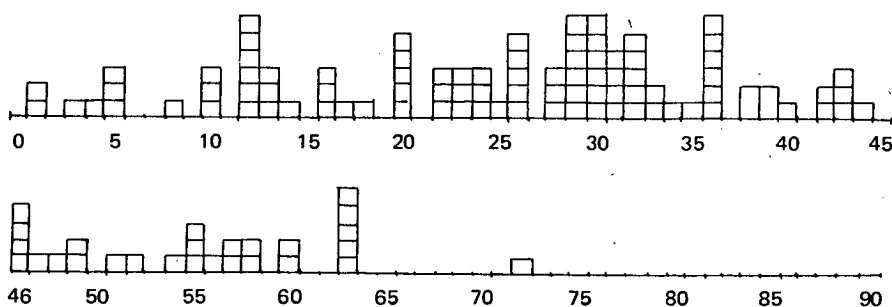
- 4 Noem $a_1 = |\overrightarrow{A_2 A_3}|$, $a_2 = |\overrightarrow{A_3 A_1}|$ en $a_3 = |\overrightarrow{A_1 A_2}|$. Er geldt dan $\overrightarrow{B_{32} B_{23}} = \overrightarrow{B_{32} A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_3 B_{23}} = \frac{a_1}{a_2} \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \frac{a_1}{a_2} \overrightarrow{A_3 A_1} = a_1 \left(\frac{1}{a_3} \overrightarrow{A_1 A_2} + \frac{1}{a_1} \overrightarrow{A_2 A_3} + \frac{1}{a_2} \overrightarrow{A_3 A_1} \right)$.

De vector tussen haakjes noemen we $\vec{p}$. Merk op dat de uitdrukking voor $\vec{p}$ *symmetrisch* is in de drie indices! Op dezelfde wijze kunnen we dus afleiden dat $\overrightarrow{B_{13}B_{31}} = a_2 \vec{p}$ en $\overrightarrow{B_{21}B_{12}} = a_3 \vec{p}$. Dit betekent dat de drie vectoren $\overrightarrow{B_{32}B_{23}}$, $\overrightarrow{B_{13}B_{31}}$ en $\overrightarrow{B_{21}B_{12}}$ evenwijdige dragers hebben, terwijl bovendien hun lengten zich verhouden als $a_1 : a_2 : a_3$, dus als de zijden van de driehoek $A_1A_2A_3$!

Verslag over de tweede ronde

Deelnemers aan de eerste ronde met 22 punten of meer kwamen in de tweede ronde. Er deden 118 scholieren mee aan de tweede ronde van de 18e Nederlandse Wiskunde Olympiade op 30 augustus 1979 te Utrecht. Voor de vier opgaven was drie uur beschikbaar. Opgave 1 werd door velen goed opgelost, maar een groot aantal deelnemers kwam door dubbeltellingen op een te grote uitkomst uit. Bij opgave 2 was het niet zo'n kunst de oplossingen te vinden, maar het bewijs dat ook *alle* oplossingen gevonden waren liet vaak veel te wensen over. Een regelmaat in de eindcijfers van de machten van 9 merkten de meesten bij opgave 3 wel op. Veel deelnemers lieten het echter bij het constateren van die regelmaat bij de eerste paar machten, en gaven geen enkel argument voor hun bewering dat deze regelmaat onbeperkt voor alle hogere machten behouden blijft. In deze gevallen werd een kleine puntenaftrek toegepast. Een veel ernstiger fout maakten degenen die zich niet realiseerden dat (bv.) $9^{(9^9)}$ niet hetzelfde is als $(9^9)^9 = 9^{81}$! De vierde opgave werd slechts door vier deelnemers opgelost. Tijdgebrek kan hierbij een rol gespeeld hebben. De onhandige wijze waarop velen dit vraagstuk aanpakten en het veelvuldig voorkomen van logische fouten en cirkelredeneringen maken het echter aannemelijk dat de oorzaak eerder gezocht moet worden in het totaal ontbreken van enige vaardigheid in de meetkunde.

Voor de *puntenwaardering* werd bij de vraagstukken 1, 2 en 3 elk maximaal 20 punten, en bij vraagstuk 4 maximaal 30 punten toegekend. Het hoogst mogelijke aantal punten was dus 90. De hoogste score was echter 72 punten, en de mediaan lag bij 30 punten. Het staafdiagram geeft een overzicht van de resultaten.



Opm.: de prijswinnaars staan op blz. 120.

Opgaven

415. Van B. Kootstra ontving ik de volgende wonderlijke serie quotiënten:

$$\frac{162435}{1785} = \frac{534261}{5871} = 91$$

$$\frac{624351}{6861} = \frac{153426}{1686} = 91$$

$$\frac{243516}{2676} = \frac{615342}{6762} = 91$$

$$\frac{435162}{4782} = \frac{261534}{2874} = 91$$

$$\frac{351624}{3864} = \frac{426153}{4683} = 91$$

$$\frac{516243}{5673} = \frac{342615}{3765} = 91$$

Men ontdekt cyclische permutaties in de tellers en symmetrieën in teller en noemer bij vergelijking van de linker en rechter quotiënten. Verklaar dit wonderlijke gedrag.

416. En nu zelf zoeken of er nog meer mogelijkheden zijn.

Oplossingen

413. De gemiddelde bezetting van de bussen op een bepaalde buslijn is gebleken 13 te zijn. De heer Daniels is van mening dat als hij meegaat, er een passagier extra in de bus zit en dat de gemiddelde bezetting van die ritten dus 14 zal zijn. De man is blijkbaar nogal egocentrisch. Laten we eens aannemen, dat hij desondanks gelijk heeft. Wat voor hem geldt, zou dan met hetzelfde recht voor alle andere passagiers gelden. Als we ritten zonder passagiers uitsluiten, zou dan de gemiddelde bezetting van alle ritten 14 zijn. Waarmee bewezen zou zijn de absurde stelling: als de gemiddelde bezetting van de ritten 13 is, dan is die gemiddelde bezetting 14.

Maar het probleem heeft nog meer voetangels. Laten we eens aannemen dat er per dag 25 ritten uitgevoerd worden en dat de bezetting van deze ritten is 1, 2, 3, ..., 25. We vragen elke passagier hoe groot de bezetting van zijn rit was. Als antwoorden krijgen we dan:

van 1 passagier bezetting 1

van 2 passagiers bezetting 2

...

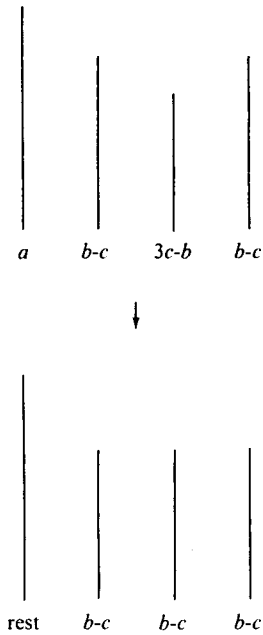
van 25 passagiers bezetting 25.

Dus gemiddeld

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + 25^2}{1 + 2 + \dots + 25} = \frac{5533}{325} = 17$$

Voor een doorsnee-passagier zou de gemiddelde bezetting van zijn ritten 17 zijn en helemaal niet 13 of 14. Bij ongelijkmatige bezetting van de ritten in elk geval meer dan 13.

We kunnen nu de vraag beantwoorden, waarom de kwestie Daniels draait. Is de gemiddelde bezetting van zijn ritten groter dan die van de ritten waarin hij niet aanwezig is? Dat hangt van zijn rijgewoonten af. Is hij spitsuurpassagier, dan is het antwoord bevestigend. Maar prefereert hij de rustige ritten, dan is de gemiddelde bezetting van zijn ritten geringer dan die van de overige.



In geval I hebben we een situatie gekregen die hetzelfde is als de aanvangssituatie. Uitgaande van I doorlopen we weer hetzelfde schema. Omdat $c > 0$, zullen we op de duur in elk geval het gewenste resultaat bereiken.

Blijft over de vraag of eis d noodzakelijk was. Onderstel de uitgangssituatie is twee glazen geheel gevuld en twee leeg. Dan zal men met behulp van alleen a, b en c nooit een andere verdeling van het water kunnen verkrijgen.

¹⁾ Omdat $c < b - c$, is $2c < b$ en dus $2c < 1$.

Boekbesprekingen

Hans Freudenthal, *Weeding and Sewing, Preface to a Science of Mathematical Education*; D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Boston, 1978, IX + 314 blz., f 90,-.

Bestaat er een wetenschap betreffende wiskundige instructie?

Om deze vraag te beantwoorden stelt Freudenthal een viertal vragen, die in de vier hoofdstukken van het boek behandeld worden:

- 1 wat is kenmerkend voor wetenschap?
- 2 wat wil instructie (education) zeggen en door welke invloeden wordt de inhoud ervan bepaald?
- 3 welke theorieën betreffende wiskundige instructie bestaan er en hoe zijn die te waarderen?
- 4 wat is het resultaat van de onderzoeken die door hemzelf verricht zijn?

1 Kenmerkend voor wetenschap zijn relevantie, consistentie en openbaarheid. Relevantie heeft betrekking op probleemstellingen. De vraagstelling moet een leidraad geven om tot oplossing van een probleem te geraken. Consistentie houdt niet alleen vrijheid van tegenspraak in, maar is tevens een karakteristiek voor denkhandelingen en hun patronen. Openbaarheid wil zeggen: voor ieder toegankelijk.

Echte wetenschap wordt zo afgegrensd tegen pseudo-wetenschap (charletannerie), esoterische wetenschap en technologie.

2 Politieke invloeden zijn soms in hoge mate bepalend voor de inrichting die men aan het onderwijs wil geven. Zo leidt de eis van het bieden van gelijke kansen aan ieder tot een schoolorganisatie waarbinnen differentiatie binnen klasverband en het werken in groepsverband wenselijk is. De auteur vermeldt hier dat hij een groot voorstander is van het werken met heterogene groepen. De door minder begaafde leerlingen uitgevoerde denkprocessen worden geobserveerd en bijgestuurd door de meer begaafde, hetgeen voor beide vruchten afwerpt.

3 Verschillende theorieën betreffende wiskundeonderricht of meer algemeen betreffende de intellectuele ontwikkeling van het kind komen ter sprake. Onder meer: de taxonomie van Bloom, de theorie van Piaget, de opsomming van begrippen die stuk voor stuk bijgebracht moeten worden (atomisering), de opsomming van doelstellingen. De kritiek erop is steeds zeer fel; er blijft weinig heel.

Wel waardering ondervinden het Nuffield project, het werk van Emma Castelnuovo en de verrichtingen van het IOWO.

Algemene conclusie: aan wetenschap van het onderricht zijn we nog niet toe.

4 Het laatste hoofdstuk (135 blz.) is de hoofdmoot van het boek. Freudenthal beschrijft hier zijn eigen ervaringen bij de bestudering van het wiskundig leerproces. Deze zijn gebaseerd op het observeren van zijn kleinkinderen en van groepen leerlingen die les kregen volgens op het IOWO ontwikkelde methoden. Hij is een fijnbesnaard observator, weet uit zijn ervaringen het essentiële naar voren te halen en laat zich niet verleiden tot haastige conclusies. Wie weinig tijd heeft, moet in elk geval dit hoofdstuk van het boek lezen.

Ik volsta met enkele momenten eruit weer te geven.

Is het voor mij makkelijker een zes te gooien dan voor jullie? Antwoord van de klas (eerste klas basisschool): voor u (want u kunt veel meer dan wij). Daarna wordt er gegooid. Na enige tijd experimenteren wordt de vraag herhaald. Nu is het antwoord: even gemakkelijk. We constateren hier de discontinuïteit van het doorbrekend inzicht. De vreugde van het ontdekken werkt motiveerend.

De inductieve methode volgens welke een algemene wet gefundeerd zou worden op herhaald optreden van een bepaald resultaat, berust op een fabeltje. Eén experiment is beslissend; de herhaling is nodig om anderen te overtuigen. Het didactisch ekwivalent hiervan is het paradigma. Eén voorbeeld dient om duidelijk te maken hoe men in het algemeen te werk dient te gaan. Bijv.: een muis moet door twee wanden heen om bij de kaas te komen; in de wanden zitten resp. twee en drie gaten. Op hoeveel manieren kan hij bij de kaas komen?

Een bijzondere fraaie analyse geeft de auteur van het ontstaan van het begrip aantal, echter zonder de pretentie te hebben hiermee het verlossende woord gezegd te hebben.

Taalproblemen zijn van veel belang. Deze spelen ook een rol bij het overgaan van premathematische op mathematische begrippen. Premathematische begrippen zijn vaak kwalitatief (groot-klein, veel-weinig). De mathematische opvoeding heeft tot taak deze kwalitatieve onderscheiden om te vormen tot kwantitatieve. In dit verband wordt een diepgaande analyse gegeven van het begrip verhouding.

Ook andere taalproblemen komen aan de orde. Typisch is het overgaan van de wijsvingertaal op de aanduiding door middel van symbolen. Bijv. de getallen van de driehoek van Pascal kan men aanduiden door ze aan te wijzen, maar ook door ze te bepalen door middel van symbolen van de

vorm $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Een ander probleem is de verandering van de blikrichting. 'Hoeveel moet men optellen bij 7 om 11 te krijgen?' is gemakkelijker dan: 'Waarbij moet ik 7 optellen om 11 te krijgen?'. En 'Wat moet men aftrekken van 11 om 7 te krijgen?' is gemakkelijker dan: 'Waarvan moet men 4 aftrekken om 7 te krijgen?'. Het laatste suggereert een aftrekking, terwijl men een optelling moet uitvoeren.

Ten slotte nog het verschil tussen globale en locale blikrichting. De eigenschap dat $\mathbb{Q}$ archimedisches, kan men uitdrukken in globale blikrichting: er is geen a die kleiner is dan elke $\mathbb{Q} \cdot e$ en geen b die groter is dan elke $\mathbb{Q} \cdot e$. De volgende redactie geeft een locale blikrichting weer: bij elke a en b is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig, dat $na > b$.

Een uitvoerige beschouwing wijdt de schrijver aan het bijbrengen van algebraïsche formules, zoals $-a - b = -(a + b)$. De juistheid hiervan wordt veelal gedemonstreerd aan de hand van gelijkheden als $-3 - 5 = -(3 + 5)$. Deze hebben echter geenszins het karakter van een paradigma. Immers a en b kunnen ook negatief zijn en dan verliest het voorbeeld zijn kracht. Een betere methode is de geometrische. Aftrekken van 3 wordt daarbij opgevat als het resultaat van de afbeelding $x \rightarrow 3 - x$. Dit is een spiegeling van de getallenlijn waarbij 0 en 3 verwisseld worden. Meer algemeen vormen spiegeling, translatie en dilatatie de grondslag voor de rekenoperaties. Deze geometrische methode wordt dan nog axiomatisch gefundeerd. Deze fundering is de enige beschouwing over wetenschappelijke achtergronden van de schoolwiskunde die men in het boek tegenkomt.

Conclusie. Hoewel men van het laatste hoofdstuk stellig kan zeggen, dat het voldoet aan de eisen van relevantie, consistentie en openbaarheid, is het toch geen volgroeide wetenschap. Het is bijzonder fraai materiaal, dat echter nog geordend en geclassificeerd moet worden om tot een samenhangend systeem uit te groeien. Vandaar dat Freudenthal zijn boek noemt: inleiding tot een wetenschap betreffende mathematical education. Een wetenschap die totnogtoe niet tot ontwikkeling gekomen is.

P. G. J. Vredenduin

P. Embrechts, J. Teugels, N. Veraverbeke. *Kanstheorie en inleiding tot de statistiek*. Acco. Leuven 1978, 195 BF, IX + 157 blz.

Het boek heeft betrekking op de inhoud van de Vliebergh-Sencie-leergangen 1977-1978, die georganiseerd worden door de Katholieke Universiteit Leuven en bestemd zijn voor wiskundeleraars. De cursisten kwamen acht middagen drie uur samen. Ze hadden de keus tussen twee cursussen, de ene inleidend en de ander op hoger niveau.

De inleidende cursus werd gegeven door N. Veraverbeke. Hij behandelt eerst de twee intuïtieve

kansdefinities: de definitie van Laplace en de definitie $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$ (frequentiedefinitie).

De eerste is beperkt toepasbaar, de tweede onuitvoerbaar. Men heeft daarom behoefte aan een axiomatische fundering van het kansbegrip. Probleem blijft welke fysische kansdefinitie toepasbaarheid van de axiomatische kansleer mogelijk maakt. Dit probleem wordt niet aangesneden. Hij ontwikkelt nu eerst de kansrekening voor een aftelbaar oneindig universum, waarbij de somregel echter alleen op een vereniging van eindig veel verzamelingen toegepast wordt. Daarna volgt het niet-aftelbare universum. Nu wordt de somregel opgesteld voor verenigingen van aftelbaar oneindig veel verzamelingen. De traditionele problemen komen ter sprake, tot en met binomiale en

normale verdeling en de theorie van de steekproeven. Het daarin gestelde probleem wijkt af van het in onze schoolwiskunde gebruikelijke. De populatie waarop de steekproef genomen wordt, is voorzien van een gemiddelde en een spreiding. De steekproef dient nu om dit gemiddelde en deze spreiding te schatten.

Een iets gecompliceerder probleem is het volgende. De populatie bestaat uit sigaretten van merk *A* of van merk *B*, van welk is onbekend. Merk *A* heeft een gemiddeld nicotinegehalte van 21 met spreiding 3, merk *B* van 23 met spreiding 3. Een steekproef moet uitsluitel geven van welk merk de sigaretten zijn. De proef levert gemiddeld 22. Als nulhypothese wordt 21 gekozen, de omvang van de steekproef is 10, $\alpha = 0.05$. Volgens de theorie moeten we nu 21 verwerpen ten gunste van 23. Het klopt prachtig, maar een normaal mens moet een statisticus toch wel een rare vent vinden.

P. Embrechts en J. Teugels beginnen op hoger niveau. Een inleidend voorbeeld is het volgende. Een naald met lengte a wordt geworpen op een papier waarop evenwijdige lijnen getekend zijn met afstand d ($a < d$). Wat is de kans dat de naald een der lijnen zal snijden? Onder bepaalde aan-

namen vinden we $\frac{2a}{\pi d}$. (Men kan met behulp van deze formule een experimentele benadering voor π vinden.)

Dit voorbeeld, samen met enkele andere, dient om een axiomatisering van het kansbegrip voor te bereiden. De axioma's gaan uit van een willekeurig universum, dat dus al of niet aftelbaar oneindig mag zijn, en van de aftelbare additiviteit van kansen (somregel voor aftelbaar veel verzamelingen). Kansen worden alleen gedefinieerd voor een verzameling van deelverzamelingen van het universum. Deze voldoet aan de eis dat met elke deelverzameling die ertoe behoort ook het complement ertoe behoort en dat verenigingen van aftelbaar veel ertoe behorende deelverzamelingen er weer toe behoren. Op grond van dit wetenschappelijk verantwoorde uitgangspunt wordt de kansrekening ontwikkeld. De behandeling heeft uiteraard meer diepgang dan de eerstgenoemde.

Het is m.i. een zeer vruchtbare gedachte geweest de twee cursussen naast elkaar te geven en de cursisten te laten kiezen welke ze willen volgen.

Lezing van dit goed geschreven boekje zal voor velen zonder twijfel een verbreding en verdieping van hun kennis als gevolg hebben.

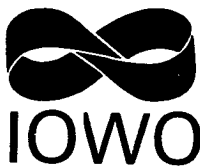
P. G. J. Vredenduin

Ontvangen boeken

Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, *Rapportboekje 3*.

Naar aanleiding van het stukje 'Uit het Wiskobas-Bulletin' in aflevering no 3 nov. 1979 jrg. 55 zij hier gewezen op het feit dat de bedoelde spullenkaternen gebundeld zijn in 'Rapportboekje 3' door Wiskobas. ('Overzicht rekenmethoden anno 1979') De prijs is f 17,50.

Mededelingen



Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs

Blijkens zijn brief aan het College van Bestuur van de Rijksuniversiteit te Utrecht heeft de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen, de heer A. J. Hermes, besloten het *Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs* per 1 januari 1981 op te heffen.

Gezien het feit dat dit besluit, het bestaande overleg voor continuering van de werkzaamheden van het IOWO, eenzijdig doorbreekt, hebben de medewerkers van dit instituut de Staatssecretaris het navolgende telegram gestuurd:

Verontwaardigd protesteren wij, medewerkers van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs, tegen Uw besluit het IOWO per 1 januari 1981 op te heffen.

Dit besluit is in flagrante strijd met eerdere uitspraken in pers en parlement over waardering voor ons werk en de noodzaak van continuering daarvan.

Gesprekken over gedeeltelijke reallocatie van werkzaamheden, verzoeken om voortgangsnota's e.d., blijken van nul of generlei waarde te zijn geweest.

Ten onrechte heeft U duizenden briefschrijvers uit binnen- en buitenland gesuggereerd dat de voortgang van de werkzaamheden van het IOWO verzekerd was, terwijl nu fundamentele ontwikkelingen definitief worden afgebroken.

Met alle daartoe geschikte middelen zullen wij ons blijven verzetten tegen dit destructieve beleid, dat het belang van het Nederlandse wiskundeonderwijs volkomen negeert.

De medewerkers van het IOWO

De vijfde gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL

Zoals in het decembernummer reeds vermeld is, heeft deze plaats op *zaterdag 22 maart a.s.*

Thema: *Hoeken, een hoeksteen van de meetkunde.*

Plaats van samenkomst: Koninklijk Atheneum Berchem, (Antwerpen), adres: Uitbreidingstraat 246.

Programma

10.30 ontvangst van de gasten

11.00 opening door de voorzitters

Rik Verhulst spreekt over: Brengen we de hoeken soms niet om het hoekje

12.30 warme lunch

14.30 Joop van Dormolen spreekt over: Hoeken, een steen des aanstoots

16.30 sluiting

Wie aan de gemeenschappelijke lunch in het restaurant van het Koninklijk Atheneum Berchem wil deelnemen, wordt verzocht dit te melden door vóór 10 maart f 15. — te storten op giro 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Voor dit bedrag ontvangt men behalve de lunch ook aperitief, drank, koffie en bediening.

Men bereikt het Atheneum door komende vanuit Breda de afslag Berchem te nemen en daarna de tweede straat rechts. Per trein komt men aan om 10.11 in Berchem. Dan nog een kwartier lopen. Wie een kaartje stuurt aan P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth, ontvangt een routebeschrijving.

We hopen op een goede opkomst uit Nederland. Op een stevig contact met onze zustervereniging stellen we veel prijs. De leden kunnen dit bevorderen door hieraan deel te nemen. Ze kunnen van een goed programma en een plezierige samenzijn verzekerd zijn.

Het bestuur

Tentoonstelling computer en beroep

Bij de V.U. worden op 1 en 2 april 1980, in het kader van haar eerste eeuwfeest, een aantal activiteiten georganiseerd voor iedereen die geïnteresseerd is in *computers*, *chips* en hoe deze de *werksituatie van de mens* veranderen.

De activiteiten zijn:

- Een *fototentoonstelling* over het onderwerp *computer en beroep*, waarin zal worden getoond, aan de hand van een dertigtal traditionele beroepen, hoe door de computer deze beroepen veranderen. Daarnaast zal een overzicht van een twaalfstal nieuwe (computer)beroepen worden gegeven, waaronder operateur, programmeur en systeemanalist. Speciale aandacht wordt besteed aan: de snelle geschiedenis van de computer onder het motto 'van tien vingers tot chip', werkgelegenheidsaspecten, het ontwerpen van chips, de grafische industrie en de bankwereld.
- De tentoonstelling (circa 150 meter lang) zal worden geopend door *prof. dr. Max Euwe* op 1 april om 10.00 uur in de aula. Tevens zal dan de prijs, een hobbycomputer van Texas Instruments TI 99/4, aan de school worden uitgereikt die de wedstrijd* 'Hoe kraak ik een databank?' heeft gewonnen.
- Een expositie van de *hobbycomputers* die nu in Nederlandse winkels te koop zijn. Alle merken zijn vertegenwoordigd. Ook de hobbycomputerclubs in Nederland zullen met stands aanwezig zijn.
- Demonstratie van computer-bestuurde apparatuur in het *ziekenhuis*, de *grafische industrie* en het *onderwijs*.
- Demonstratie van Viewdata van de PTT.
- Vertoning van ca. 10 films, zoals de bekende BBC-film 'The chips are down' en een PTT-film: 'De PCGD 25 jaar geleden en nu'.
- Spelen met de computer d.m.v. een aantal terminals. Diverse spelletjes zijn mogelijk, w.o. *schaken* en een nieuw spel: 'Hoe kraak ik een databank?', waarmee de oplossing van de wedstrijd nagespeeld kan worden.

Al deze activiteiten vinden plaats in en rond de aula in het hoofdgebouw van de V.U., De Boelelaan 1105, Buitenveldert (bus 23, 26, 66, 67).

De fototentoonstelling zal van 8-12 april ook in de tuinzaal van het Natuurkunde-gebouw, De Boelelaan 1081, staan opgesteld en daarna tot eind juni bij het Nederlands Instituut voor Nijverheid en Techniek (NINT), Rozengracht 224, Amsterdam.

Openingsdagen op 1 en 2 april van 10.00-22.00 uur en op 8-12 april van 10.00-18.00 uur. Toegang is gratis.

Inlichtingen bij drs. W. van Keulen, subfaculteit Wiskunde, De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam, tel. 020-548 53 39 of 548 24 10 en bij prof. dr. R. P. van de Riet, tel. 020-548 41 77 of 548 24 10.

* Voor de middelbare scholen is een wedstrijd uitgeschreven om een V.U. databank te kraken voor wat betreft de politieke kleur van diverse personen.

Het Zestiende Nederlandse Mathematisch Congres

Datum en plaats

Het congres wordt gehouden op *woensdag 9 en donderdag 10 april 1980* in het gebouwencomplex van de faculteit der wiskunde en natuurwetenschappen van de Katholieke Universiteit, Toernooiveld, Nijmegen.

Voorlopig programma

Woensdag 9 april

- 9.45 – 10.30 Aankomst deelnemers, koffie.
10.30 – 10.45 Opening door de voorzitter van het wiskundig Genootschap en welkomstwoord door de dekaan van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen Prof. dr. A. G. M. Janner.
10.45 – 11.45 Openingsvoordracht door Prof. dr. R. Tijdeman over 'Vergelijken van Vergelijkingen'.
11.45 – 12.45 Sectievoordrachten.
12.45 – 14.00 Lunchpauze.
14.00 – 15.00
en
15.30 – 16.30 Werkgemeenschappen, sectievoordrachten.
16.30 – 17.30 202de Algemene Vergadering van het Wiskundig Genootschap.
17.30 Receptie, aangeboden door de faculteit der wiskunde en natuurwetenschappen.

Donderdag 10 april

- 9.15 – 10.45
en
11.15 – 12.45 Werkgemeenschappen, sectievoordrachten.
12.45 – 14.00 Lunchpauze.
14.00 – 15.30 Werkgemeenschappen, sectievoordrachten.
16.30 – 17.00 Slotvoordracht door Prof. dr. E. J. N. Looijenga over:
'Ontaarding van rationale oppervlakken'.
17.00 Sluiting.

Inschrijving

De inschrijvingskosten bedragen f 10,— voor leden, f 20,— voor niet-leden van het Wiskundig Genootschap, nihil voor studenten. Tijdens beide congresdagen is er gelegenheid een warme lunch ad f 10,— te gebruiken in het restaurant van de faculteit. Inschrijving en reservering van warme lunches dient te geschieden vóór 15 maart 1980 door middel van het inschrijvingsformulier alsmede door overmaking van de kosten op girorekening nummer 1667577 ten name van de Penningmeester van het Nederlands Mathematisch Congres te Nijmegen.

De secretaris van de congrescommissie dr. S. H. Tijs
Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit
Toernooiveld
6525 ED Nijmegen tel. 080 – 55 88 33 tst. 2985/2986

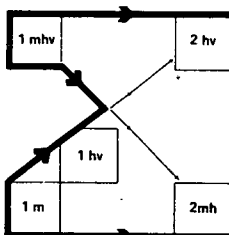


SIGMA (herzien) geeft u aangepast of aanpasbaar brugklasmateriaal

De herziening van de wiskundemethode Sigma is volledig geënt op de behoefte van docenten aan een gemakkelijk hanteerbare methode met voldoende flexibiliteit voor een soepele aanpassing aan de individuele stijl van lesgeven.

Pluspunten van Sigma

- + een speciaal deel (1-m) voor *homogene* mavo- klassen
- + keuze voor heterogene mavo- en/of havo- en/of vwo-klassen (deel 1-mhv òf deel 1-m, waar nodig aangevuld met de extra stof van deel 1-hv)
- + consequente samenhang van theorie en opgaven
- + duidelijk aangegeven extra stof in de delen 1-mhv en 2-mh
- + vooral in de brugklasdelen beperking tot het strikt noodzakelijke



U kunt het zelf verifiëren

Zelfs als de methode die u nu gebruikt aan uw eisen voldoet, loont het de moeite na te gaan wat Sigma u aan extra's te bieden heeft.

Vraag beoordelingsexemplaren van de nieuwe brugklasdelen aan bij Wolters-Noordhoff bv, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Tel. (050) 16 23 14 (mw. K. Linde)

244-26



Wolters-Noordhoff

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32^I - Amsterdam (c) - Tel. 020-2628 10

INHOUD:

S. Kemme: Functionele en formele taal	289
H. Broekman: Problemen met een reële context, standaardprocedures	297
P. G. J. Vredenduin: Logica en schoolwiskunde	300
S. P. van 't Riet: Setvorming en wiskundeonderwijs	308
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1979	317
Recreatie	320
Boekbesprekingen	323
Ontvangen boeken	325
Mededelingen	326

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

- H. Broekman, Frans Halsstraat 27, 3583 BL Utrecht.
S. Kemme, Leeghwaterstraat 2, 1541 LT Koog aan de Zaan
S. P. van 't Riet, Schouw 18, 1261 LG Blaricum.
P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.