

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

55e jaargang

1979/1980

no. 6

februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 20,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Logische theorie en wiskundige praktijk

J. F. A. K. VAN BENTHEM

1 Wat is een bewijs?

Volgens een zo beroemde filosoof als Immanuel Kant zijn wiskundige bewijzen *gedachtenkonstrukties* die de wiskundige uitvoert in de geest. Dezelfde opvatting vindt men terug bij onze vaderlandse intuïtionisten (vergelijk [3]). Zij is diep geworteld in de klassieke wijsgerige traditie waarin ‘beschouwingen’ door middel van het ‘geestesoog’ een hoofdrol spelen. Een veel oneerbiediger uitleg geeft de Engelse analyticus Gilbert Ryle in [13]: bewijzen zijn niet meer dan didaktische *spreekvormen*, ingeoeft door imitatie van de leraar. Wellicht het meest gangbaar is echter de omschrijving van een bewijs als een *logisch samenhangende tekst*. Overigens slaan de eerste twee visies op activiteiten, de derde op het produkt daarvan, zodat we eerder te maken hebben met keerzijden van eenzelfde medaille. Voor logische doeleinden is de laatste omschrijving van het meeste belang, vanwege haar konkreetheid. Wat zich tijdens het redeneren in ons hoofd afspeelt is immers een vooralsnog spekulatieve psychologische vraag. De proef op de som blijft toch altijd het geschreven betoog.

2 Waartoe dient een bewijs?

Zoals de woorden ‘bewijzen’ en ‘aantonen’ reeds suggereren, dient een bewijs om eigen inzichten ook aan anderen voor ogen te stellen. ‘Een gevoel is niet genoeg’, het gaat erom dit *over* te *dragen*. Daarnaast speelt het *zeker stellen* van inzichten een rol: we bewijzen soms zelfs iets aan onszelf, om eigen twijfels weg te nemen. En tenslotte is er het aspekt van logische organisatie. Bewijzen *verbinden* inzichten met andere inzichten, en structureren aldus onze kennis. (Vandaar ook hun belang als mnemo-techniek.) Het bij leerleingen aankweken van de behoefte aan bewijzen kan bij deze drie functies aanknopen. Dat zoiets toch moeilijk blijkt wordt begrijpelijker wanneer men beseft dat het ontstaan van de wiskunde als bewijzende wetenschap zelfs al niet duidelijk is. En daarmee zijn we aanbeld bij het onvermijdelijke punt in ieder erudiet betoog waarop de Klassieke Oudheid ten tonele wordt gevoerd. Men leze [14] voor diepzinnige vermoedens over de precieze motieven die de Grieken brachten tot streng (‘deduktief’) bewijzen. Zeker is dat alle drie de genoemde functies daarbij een rol speelden.

3 Deduktief redeneren

Deductie is het *dwingend* redeneren van uitgangspunten naar konklusies. Daarbij komt doorgaans een globale opzet naar het schoolvoorbeeld van Euklides' 'Elementen' (zie [5]): uit voorgaande *definities* en *axioma's* worden deductief alle andere inzichten als *stellingen* geproduceerd. Deze vorm van logische organisatie is in de loop van de geschiedenis als ideaal gaan fungeren: 'more geometrico' werd een eretitel. Naast de verhoogde strengheid valt ook het voordeel der vruchtbaarheid te noteren: de theorie gaat 'vanzelf' groeien. (Dit noemt Joseph Needham in [9] als een kenmerkende voorsprong van de Westerse wiskunde op de Chinese.) Dit succes heeft echter tot een historische verharding geleid: zo moet het, en niet anders. Zo werd de term 'axioma', oorspronkelijk een dialektische aanduiding van die beweringen waarvan men aan de gesprekspartner vraagt ze voorlopig te aanvaarden 'for the sake of argument', tot synoniem van onbetwifelbare zekerheid. (En zo kon een recente Utrechtse logika-syllabus als titel dragen 'Van axioma tot dialoog').

4 De logische kijk op deductie

Deductieve redeneringen ontleen hun dwingende kracht aan het feit dat ze zijn te analyseren als kluwens van *geldige* gevolgtrekkingen (= kleinste redeneerstappen). Die geldigheid kan men met Bolzano (zie [7]) omschrijven als het *ontbreken van tegenvoorbeelden*. De grote ontdekking van Aristoteles was nu dat deze geldigheid te lokaliseren valt in de *vorm* der gevolgtrekkingen. En zo ontstond de logika als stelselmatige studie van zulke geldige vormen. Net als in de wiskunde bleek een geschikte symbolische notatie daartoe essentieel. Leibniz hoopte zelfs dat een formele 'characteristica universalis' tot algemene redeneertaal zou worden, waarbinnen geldigheid door middel van een logische 'calculus ratiocinator' zou worden *berekend*. Thans zijn vele formele talen in omloop: de logika heeft haar Babylon gevonden. (Desalniettemin volstaat voor een analyse van wiskundig redeneren doorgaans het verzamelings-theoretisch symbolisme. Maar de wiskunde is dan ook een betrekkelijk eenvoudige discipline, vergeleken bij andere menselijke denkactiviteiten.)

Voor een gegeven formele taal kan men trachten de geldige gevolgtrekkingen *syntactisch* te katalogiseren, een soort grammatika van het redeneren dus. De axiomatische aanpak van Frege, Russell en Hilbert, maar ook de natuurlijke deductie van Gentzen vallen binnen dit genre. Meer aansluiting bij Bolzano's omschrijving vindt de *semantische* aanpak van geldigheid, gebaseerd op Tarski's logische 'waarheidsdefinitie'. Naast de formele taal speelt dan ook de interpretatie van die taal in een 'buitenwereld' een rol. Betreft men ook nog de taalgebruiker in het beeld, dan ontstaat een *pragmatische* aanpak, zoals in Lorenzen's theorie der 'logische dialogen'. De spektakelstukken van de moderne logika, bijvoorbeeld Gödel's Onvolledigheidsstelling, ontstaan overigens pas op een meta-niveau, en wel door reflectie op de voorgaande methoden. Enige literatuur over dit alles vindt men in [6] en [2].

5 Een formeel bewijs.

Ter illustratie van het voorgaande volgt hier een logische analyse van Cantor's stelling dat er geen surjectie bestaat van een verzameling op zijn machtsverzameling (zie [4]).

Stelling: $\forall x \forall f: x \rightarrow P(x) \exists y \in P(x) \forall z \in x f(z) \neq y$

Bewijs: laat 1 $f: x \rightarrow P(x)$

stel 2 $\{u \in x \mid u \notin f(u)\} = f(z)$ voor $z \in x$

3 $z \in \{u \in x \mid u \notin f(u)\} \leftrightarrow z \notin f(z)$ (definitie $\{|\}$)

dus 4 $z \in f(z) \leftrightarrow z \notin f(z)$ (uit 2, 3)

dus 5 $z \in f(z), z \notin f(z)$ (uit 4 + logika)

dus 6 $f(z) \neq \{u \in x \mid u \notin f(u)\}$ (uit 1 t/m 5)

dus 7 $\exists y \in P(x) \forall z \in x f(z) \neq y$ (uit 1 t/m 6)

Q.E.D.

Dit is nog geen totaal uitgeschreven formele versie!

6 Doel van logische bewijsanalyse

De logika pretendeert niet een psychologische beschrijving van redeneren te geven. (Volgens de auteurs van [15] kán ze dat ook niet.) Evenmin is de bedoeling een gefixeerd ideaal van exaktheid te presenteren dat een ieder moet nastreven. Exaktheid is immers geen statisch, maar een dynamisch begrip. Ze bestaat in het vermogen redeneringen waar nodig zover te preciseren dat een bepaald gehoor ze begrijpt. Alleen het domste gehoor (bijvoorbeeld de rekenmachine) eist volmaakte precisie. De pretentie is wel dat logische bewijsanalyse de ook voor zulke preciseringen vereiste exakte denkvermogens bevordert, en een gevoel aankweekt voor 'wat in een bewijs gebruikt wordt'. En daarmee zijn we weer bij het thema van de samenhang tussen het beweerde en andere beweringen. In feite werd de moderne logika door Frege en Russell onder meer ontwikkeld om een beter inzicht te krijgen in de structuur van de wiskunde: hoe wiskundige theorieën eruit zien, en hoe ze zich tot elkaar verhouden. Hoewel de oorspronkelijke hoop die zij daarbij koesterden, dat men zodoende op veilige logische *grondslagen* voor de wiskunde zou stuiten, te loor is gegaan, blijft de studie van wiskundige theorieën een hoofdschotel in de hedendaagse 'wiskundige logika' (zie [1]).

7 Bewijzen en weerleggingen

In 1976 verscheen een geruchtmakend boek van de Engels-Hongaarse wetenschapsfilosoof Imre Lakatos met als titel 'Proofs and Refutations, the logic of mathematical discovery' ([8]). In een case study van Euler's stelling over regelmatige veelvlakken ('aantal hoekpunten + aantal vlakken = aantal rib-

ben + 2') laat Lakatos zien hoe veelbewogen de historische lotgevallen van een wiskundig bewijs kunnen zijn alvorens een enigszins stabiele 'exakte' versie wordt bereikt. Hieraan koppelt hij een felle kritiek op wat hij het 'formalisme' noemt: de stroming die meent dat symbolische weergaven van deductieve bewijzen naar axiomatische trant het wezen van de wiskunde uitmaken. Deze visie geeft volgens Lakatos een bloedarm beeld van de wiskunde (ergens vergelijkt hij logische analyse met lijkschouwing) en bovendien versterkt ze de 'autoritaire' tendenzen in de wiskunde.

Lakatos' titel is ingegeven door een werk van zijn leermeester Karl Popper, 'Conjectures and Refutations' geheten. Volgens Popper vertonen de natuurwetenschappen geen gestage parelmoeren groei, maar een voortdurend opwerpen van vermoedens die zo lang van kracht blijven tot weerlegging optreedt. Dan worden ze bijgesteld, of – wanneer redelijke aanpassing onmogelijk blijkt – aan de kant gezet. De gangbare theorieën zijn in deze optiek geen eeuwige waarheden, maar bijzonder hardnekkige (of, zo men wil, succesvolle) vermoedens (zie [11]). Blijft bij Popper zelf de wiskunde nog buiten schot, bij Lakatos niet meer: volgens hem treedt ook daar dit weerleggingsproces op. Maar dan wordt het van belang om naast de logische structuur van 'gevestigde vermoedens' ook te kijken naar het proces waarin zulke vermoedens ontstaan en veranderen. In de traditionale wetenschapsfilosofie was het gebruikelijk scherp te onderscheiden tussen een *context of discovery*, de ordeloze broedplaats van invallen, een *context of justification*, het logisch presenteren en staven van uitgekristalliseerde ideeën. Alleen de tweede kontekst zou rationeel zijn te beschrijven. Lakatos vecht dit aan. Hierin was hij voorgegaan door Georg Pólya (zie [10]), die uitvoerig de *heuristiek* (dat wil zeggen: de kunst van het vinden) van wiskundige resultaten heeft bestudeerd. Pólya aanvaardde echter nog wel het kontekstenonderscheid als zodanig. Zelfs dat zet Lakatos overboord: de twee konteksten zijn niet te ontwarren.

Wat er 'echt' gebeurt in de wiskunde is een wisselwerking van bewijzen, weerleggingen en begripsvorming; met als stadia (dan wel heuristische spelregels):

- (1) een vermoeden wordt geformuleerd (V)
- (2) een bewijs wordt gegeven, opgesplitst in lemma's $((L_1 \& \dots \& L_n) \rightarrow V)$
- (3) er komen tegenvoorbeelden tegen het vermoeden ('globale') of tegen een specifiek lemma ('lokale')
- (4) reactie op een globaal tegenvoorbeeld: voeg een geschikt nieuw lemma toe $((L_1 \& \dots \& L_n \& L_{n+1}) \rightarrow V)$
- (5) reactie op een lokaal tegenvoorbeeld: neem een geschikt ander lemma dat ook werkt.
- (4) en (5) kunnen leiden tot een ad hoc vervaardigde lapjeskat, dus
- (6) zoek bij voorkeur een 'diepere', nog niet weerlegde versie van het vermoeden.

Onderwijl kunnen ook de gebruikte begrippen nog veranderen (door precisering annex herdefinitie) en er kan een 'uitstralingseffekt' optreden naar verwante vermoedens. Langzamerhand ontstaan aldus meer exakte bewijzen en begrippen, waarbij de 'logische vorm' een soort laatste stadium is.

Gegeven een dergelijke voorgeschiedenis is de gangbare presentatie van wiskundige resultaten wel heel mystificerend. De deductieve opzet doet niets meer

vermoeden van wat achter de schermen is gebeurd alvorens het zover was. De frase 'wat te bewijzen was' is vaak zelfs een leugen! De volgorde van het bewijs hoeft in het geheel niet te lijken op de volgorde der ontdekkingen. Reeds veel Griekse wiskundigen hadden hier een handje van: ze gaven wel de 'synthese', maar niet de 'analyse' die daartoe had geleid. En zo wordt de schrijver voor de lezer tot autoriteit: deze kan immers niet doorgronden hoe iemand dit heeft kunnen presteren. Er komen bijvoorbeeld hoogst-abstrakte noties uit de lucht vallen, zoals uniforme convergentie of omega-konsistentie, die hij maar moet slikken tot verderop hun zin wordt onthuld. Veelal zijn zulke begrippen echter 'bewijs-gegenereerd', zoals Lakatos dat noemt. Dat wil zeggen, de auteur had een bewijs-idee, kwam vast te zitten, kon alleen verder als hij zich beperkte tot dit begrip, en voerde vervolgens dit begrip vooraan op, alsof hij nooit iets anders van plan was geweest. En dat is machtsmisbruik ten opzichte van de lezers. Een levende dichter mag zwijgen over wat hij met zijn poëmen bedoelt, een cabaretier mag zijn verhaal opbouwen ter wille van humoristisch effectbejag, maar een wiskundige dient zijn lezers juist al die informatie te verschaffen die zijn betoog te volgen maakt en de verdiensten ervan te beoordelen.

8 Een informeel bewijs

In [12] staat een bewijs van Euler's stelling voor *landkaarten* dat Lakatos' beweringen aardig illustreert. Laat L het aantal landen zijn (een 'omringende zee' meegerekend), G het aantal grenzen en P het aantal grenspunten.

Stelling: $P + L = G + 2$.

Bewijs: Vat de grenzen als dijken op, de landen als polders. Zet de polders één voor één onder water, tot alles is geïnundeerd. Benodigd aantal dijken: $L - 1$. Beschouw nu een willekeurig grenspunt x . Vanuit x is elk ander grenspunt nog op minstens één manier droogvoets bereikbaar. (Subredenering: vroeger was dat ook zo, en – indien nu niet meer – dan moet een reeds aan twee kanten omspoelde dijk verwijderd zijn!) Vanuit x is elk ander grenspunt ook nog op hoogstens één manier droogvoets bereikbaar. (Subredenering: anders lagen er nog polders droog.) Konklusie: het overgebleven aantal dijken is $P - 1$ (1 voor x zelf). Dus G is het totaal aantal dijken $= L - 1 + P - 1 = L + P - 2$. Q.E.D.

Bekijken we nu konkrete voorbeelden van landkaarten, dan blijken de gebruikte begrippen aanscherping te behoeven. Achtereenvolgens blijkt dat 'landen' niet uit losse stukken mogen bestaan, dat in ieder 'grenspunt' minstens drie landen moeten samenkomen en dat op iedere 'grens' minstens één grenspunt moet voorkomen. Verder moeten we een lemma bewijzen dat 'avant le déluge' vanuit elk grenspunt naar elk ander grenspunt over dijken gewandeld kon worden, enzovoorts. Kortom, we zien hier in miniatuur het samenspel van bewijs en begrippen dat met Euler's stelling in het groot plaats vond.

9 Een moraal?

Het is hier niet de plaats voor een apologie voor de logika; al zou die wel zijn te geven. (Naarmate hij er beter in thuis raakte, kwam Lakatos ook positiever tegenover de moderne logika te staan.) Zeker is wel dat Lakatos ten onrechte verwaarloosde aspecten van wiskundig bewijzen met klem naar voren heeft gebracht. Of het door hem gegeven woelige beeld waarheidsgetrouw is hangt echter af van de discipline die men bekijkt. Het is moeilijk in formelere takken van wiskunde als algebra of verzamelingenleer stellingen te vinden met een zo stormachtig verleden als die van Euler. (Veel waren juist vanaf hun ontstaan 'meteen raak', en eerlijkheidshalve had Lakatos dat best mogen vermelden.) Zonder meer van belang blijft evenwel Lakatos' aanbeveling om in publikaties naast het gepolijste deductieve bouwwerk ook iets van de heuristische steigers te laten staan, zodat de lezer het bouwplan beter kan doorzien. In de onderwijspraktijk lijkt dit een evenzeer behartenswaardige aanbeveling: gun de leerlingen een kijkje in de keuken, alvorens ze de kant-en-klaar maaltijden te doen slikken.

En op deze hooggestemde noot zou dit verhaal kunnen eindigen, ware er niet een recalcitrante praktijkervaring, althans van schrijver dezes. En die ervaring leert dat de heuristische onderwijsopzet ook zijn nadelen heeft. Weliswaar stijgt in het algemeen de inzet, maar bij het meten van resultaten (oude stijl) blijken eerder die leerlingen te hebben geprofiteerd die bij welke methode dan ook goed zouden zijn, dan de rest, om wie het nu juist begonnen was. Dat komt waarschijnlijk door de grote vrijheid van een heuristische opzet, en de daarmee gepaard gaande onzekerheid. En zo komt op het allerlaatste moment een vergeten didaktisch voordeel van de deductieve opzet naar voren: die zo fel geattakeerde formele schablonen bieden dan toch maar *houvast*. En om *houvast* is het menige drenkeling in de wiskunde te doen.

10 Literatuur

- 1 J. Barwise (red): *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- 2 E. W. Beth: *The Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1959.
- 3 D. van Dalen: *Filosofische Grondslagen van de Wiskunde*, van Gorcum, Assen, 1978.
- 4 D. van Dalen, H. C. Doets & H. C. M. de Swart: *Verzamelingen: naïef, axiomatisch en toegepast*, Oosthoek, Scheltema en Holkema, Utrecht, 1975.
- 5 Th. L. Heath: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover, New York, 1956, (herdruk van 1908).
- 6 S. C. Kleene: *Mathematical Logic*, John Wiley, New York, 1967.
- 7 W. & M. Kneale: *The Development of Logic*, Oxford University Press, London, 1962.
- 8 I. Lakatos: *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- 9 J. R. Needham: *Science and Civilisation in China*, Cambridge University Press, Cambridge, 1962-1970.
- 10 G. Pólya: *Mathematics and Plausible Reasoning*, Oxford University Press, London, 1954.
- 11 K. R. Popper: *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, London, 1959.
- 12 H. Rademacher & O. Toeplitz: *Von Zahlen und Figuren*, Springer, Berlin, 1968, (herdruk van 1930).
- 13 G. Ryle: *The Concept of Mind*, Penguin Books, Harmondsworth, 1968, (herdruk van 1949).
- 14 A. A. Szábo: *Anfänge der Griechischen Mathematik*, Oldenbourg, München, 1969.
- 15 P. C. Wason & P. N. Johnson-Laird: *Psychology of Reasoning*, Batsford, London, 1972.

Jaarrede 1980

Volgens haar statuten is het doel van onze vereniging aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen die betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde aan scholen genoemd in de Wet op Voortgezet Onderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs. Voor de invoering van de mammoetwet was de vereniging alleen bestemd voor leraren van hogere burgerscholen en lycea, maar bij het in werking treden van de mammoetwet in 1968 werd het werkterrein van de vereniging uitgebreid tot vwo, havo en mavo. In 1976 vond een nieuwe uitbreiding plaats, namelijk het lager beroepsonderwijs. Ondanks deze uitbreidingen ligt nog een groot gedeelte van het wiskundeonderwijs – zoals een groot gedeelte van het beroepsonderwijs – waarmee de vereniging zich volgens de statuten zou moeten bezig houden buiten het werkterrein en soms zelfs buiten het gezichtsveld van de vereniging.

Was voor de inwerkingtreding van de mammoetwet de taak van de vereniging om – met gebruik making van politiek jargon – op de winkel van het vmo te te passen, thans gaat het om een geheel warenhuis.

Graag maak ik op deze dag met u een korte wandeling over de diverse afdelingen.

Op de afdeling vwo zien we allereerst bij het vwo de spanningen waaronder vele collega's leven. Reeds enige jaren geleden bood tijdens een eindexamenbespreking een van de sprekers zijn excuses aan dat hij zo snel sprak, maar hij was hier zo aan gewend geraakt sinds hij in zijn lessen probeerde de totale leerstof voor het eindexamen te behandelen dat hij ook buiten school niet meer van deze snelheid af kon komen. Uit vele brieven bemerken wij dat bij velen de nood tot de lippen komt en, bij gesprekken komt deze nood er zelfs regelmatig overheen.

In het begin van 1979 verscheen een Interimrapport van de Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en Wiskunde II vwo. Misschien werkt dit mee aan een oplossing voor de ontstane nood. De door de vereniging gehouden hearings over dit rapport zijn door velen bezocht en ook veel schriftelijke reacties zijn bij de HEWET-werkgroep binnengekomen. Naast veel bijval was er ook kritiek, met name over de omvang van de voorgestelde programma's. De HEWET-werkgroep zal het

rapport op basis van de binnengekomen kritiek bijstellen. Algemeen waren briefschrijvers en bezoekers het er over eens dat de invoering van een A-programma in de zin van het interimrapport onhaalbaar is als er niet op grote schaal de mogelijkheid tot heroriëntering geboden wordt.

Kijken we vervolgens op de afdeling mavo, waar de aandacht getrokken wordt door het mavo-project. Dit project heeft als doel het ontwikkelen van hulpmiddelen voor docenten, waardoor zij in staat worden gesteld door middel van differentiatie ten aanzien van leerstof en didactiek hun leerlingen aan het eind van een vierjarige cursus te kunnen brengen tot een eindexamen, waarbij zij per vak uit twee niveaus kunnen kiezen.

Het mavo-project is een verspreidingsobject: ervaringen opgedaan bij de experimenteerscholen moeten kunnen worden doorgegeven aan andere scholen. In feite wordt er binnen het mavo-project naar gestreefd meer individualisering in het onderwijs te brengen door:

- bewust rekening te houden met verschillen tussen leerlingen,
- aangepaste vormgeving van de leerstof,
- aangepaste werkvormen.

Hierbij is gekozen voor wat men tegenwoordig noemt het basisstof-extra stof-model. Er zijn vakproductiegroepen in het leven geroepen om de experimenteerscholen, volgscholen en overige scholen te 'voeden' en te begeleiden. Er worden analyses en bewerkingen van de in de leergangen Moderne Wiskunde, Van A tot Z, Getal en Ruimte en Sigma aangeboden leerstof gemaakt om zoveel mogelijk gedifferentieerd onderwijs te kunnen geven.

Aan het einde van dit schooljaar komen de eerste eindexamenkandidaten van de experimenteerscholen. Na het schoolonderzoek wordt in overleg met de kandidaat en eventueel diens ouders beslist op welk niveau de diverse vakken op het centraal schriftelijk eindexamen worden gedaan. Na de eerste zitting is het mogelijk dat de kandidaat een herkansing maakt op het andere niveau. Bij wiskunde is het A-programma identiek met het huidige mavo-3-programma en het B-programma met het huidige mavo-4-programma. Aan de adviescommissie voor het samenstellen van de examenopgaven voor mavo-3 en mavo-4 is met ingang van dit schooljaar een docent van een van de experimenteerscholen toegevoegd.

De docenten die bij het mavoproject betrokken zijn moeten, ook al worden zij zoveel mogelijk gesteund door vakproductiegroepen, toch veel eigen werk verrichten. Er hangt veel af van het bewust didactisch handelen. Hierbij blijkt het differentiëren binnen klasseverband niet altijd even gemakkelijk te zijn. Tot nu toe bestond het Centraal Schriftelijk Examen wiskunde voor het mavo (en ook voor het lbo) uit twee zittingen, één met meerkeuze-vragen en één waar open vragen moeten worden beantwoord. De staatssecretaris heeft besloten dit aantal zittingen binnen enkele jaren tot één terug te brengen. Het is nog niet bekend hoe het examen er dan gaat uitzien, uitsluitend meerkeuze-vragen of een mengvorm. De staatssecretaris zal zich in deze kwestie door verschillende instanties laten adviseren.

Een volgende afdeling die wij bezoeken is het lager beroepsonderwijs.

'Het lager beroepsonderwijs zal zich moeten ontwikkelen tot een onderwijskundig geheel met een groot aantal differentiaties', sprak staatssecretaris K. de Jong bij de installatie van de Inspectorale Projectgroep Examenprogramma's lbo - de IPEP - nu alweer bijna twee jaar geleden.

Examenprogramma's zijn niet los te zien van onderwijs-leerprogramma's. Waar het lbo op de eerste plaats behoefte aan heeft is een goed B-programma wiskunde dat aansluit op datgene dat de leerling in het basisonderwijs geleerd heeft en mogelijkheden biedt om meer en zonodig minder te doen, de zogenaamde C- en A-programma's. Bovendien kan dit B-programma niet los gezien worden van wat er verder met het wiskunde-onderwijs voor 12- tot 16-jarigen gedaan wordt.

Een groot aantal leerlingen in het lbo is gediend met een goed B-programma dat mogelijkheden biedt voor een beroepsopleiding in het bedrijfsleven of doorstroming naar verschillende vormen van middelbaar beroepsonderwijs. Een kleiner aantal leerlingen kan alleen doorstromen naar het middelbaar beroepsonderwijs met een C-examen wiskunde.

In vorige jaren hebben wij kritiek laten horen op het bestaan van twee verschillende en ongelijkwaardige C-examens. Op lange termijn moet er één C-examen komen in nauwe samenwerking met degenen die betrokken zijn bij de ontwikkelingen in het mavo. Het moet zodanig ingericht zijn dat de kandidaat niet alleen kan laten zien wat hij van wiskunde afweet, maar ook hoe hij die wiskunde in praktische situaties kan toepassen.

Nog vele afdelingen van het warenhuis zou ik met u willen bewandelen; afdelingen die nu nog buiten het werkterrein van onze vereniging liggen, doch waar ons bestuur ook graag wil gaan werken. De grote divergentie binnen het middelbaar en hoger beroepsonderwijs maakt het zeer moeilijk om zicht op deze afdeling te krijgen. De samenwerking die er tussen avo en beroepsonderwijs moet bestaan vraagt wel om uitbreiding van het werkterrein van onze vereniging. Ons bestuur zal gaarne suggesties van uw kant ontvangen die kunnen leiden tot deze uitbreiding.

Bij onze rondleiding wil ik gaarne twee facetten van ons bedrijf belichten en wel de inkoop en de verkoop.

Daar u allen als docenten belast bent met de verkoop vermeld ik allereerst de werkzaamheden van de didactiekcommissie. Door de resultaten van de didactiekcommissie, namelijk de meerdaagse A, B en C cursussen, de themadagen tijdens onze jaarvergaderingen en de publikaties, kan men moeilijk zeggen dat de didactiekcommissie niet aan de weg timmert. De werkwijze van deze commissie is echter nog middeleeuws, slechts het resultaat telt en de maker blijft in de anonimiteit verborgen. Vandaag wil ik uw aandacht voor de werkers zelf vragen en hen namens u allen hartelijk danken voor het vele werk dat zij in de afgelopen jaren voor de didactiek van de wiskunde hebben verricht. Speciaal dank ik vandaag Harrie Broekman, die vanaf het eerste moment in deze commissie heeft gewerkt en nu de commissie helaas gaat verlaten.

Blijft tot slot nog de inkoop, dat wil zeggen het ontwerpen van leerprogramma's. In het verleden, dus voor de fusie van 1968, was elke afdeling een eigen bedrijf,

waar de verkopers het gehele bedrijf konden overzien en redelijk in staat waren mee te werken en mee te denken aan de leerprogramma's.

Indien het huidige voortgezet onderwijs wil voldoen aan de doelstelling, namelijk een samenhang tussen de verscheidene vormen van voortgezet onderwijs, zal de samenwerking zeer groot moeten zijn. Doorstroming binnen het avo en doorstroming binnen het beroepsonderwijs vraagt om verticale samenwerking, maar doorstroming van lbo en mavo naar mbo en van mbo en havo naar hbo vraagt tevens om horizontale samenwerking.

Om een oplossing aan de hand te doen voor de noodzakelijke ontwikkeling van het wiskundeonderwijs doen we even aan bedrijfspionage. Hoe lossen echte warenhuizen het probleem op dat de artikelen op de diverse afdelingen aan elkaar zijn aangepast en met elkaar harmoniëren? Ik denk dat u het antwoord wel weet. Luisterend naar de verkopers, die weten wat verkoopbaar is, is er een afdeling inkoop die voor een samenhangend beleid zorgt.

Terugvertaald naar ons eigen wiskundewarenhuis doet onze bedrijfsleider, de minister van Onderwijs, er goed aan ook voor een afdeling inkoop te zorgen. Het lijkt dus niet meer dan logisch dat er in Nederland een instituut is dat zich speciaal bezig houdt met de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs. Wij zouden dus de minister moeten vragen zo'n instituut op te richten, maar gelukkig is dit niet nodig want Nederland kent dit instituut in het IOWO. Ons verzoek aan de minister kan dus kort zijn: *'Wij hebben het IOWO nodig, dus handhaaf het'*.

Dames en Heren; Ofschoon voor elke voorstander van het behouden van het IOWO hiermee alles gezegd is, wil ik toch op dit punt nog even doorgaan.

Onze vereniging heeft gedurende het bestaan van het IOWO veel directe steun van dit instituut ondervonden,

- de didactiekcursussen van onze vereniging worden steeds georganiseerd in samenwerking met het IOWO,
- publikaties ten behoeve van themadagen en voorbereiding van deze dagen wordt mede verzorgd door het IOWO,
- het IOWO werkte mee aan het rapport herverkaveling wiskunde I en II.

Naast het wegvallen van steun aan onze vereniging, waardoor diverse activiteiten op de tocht komen te staan, komen ook vele andere activiteiten waardoor het IOWO bekend en beroemd is – in het buitenland identificeert men vaak wiskunde in Nederland met het IOWO – te vervallen. Wij denken hierbij aan: Wiskobas, de Wiskrant, het werk ten behoeve van de achterstandsituatie bij het lbo en speciaal ook de voorhoedefunctie bij vernieuwingen in het wiskundeonderwijs.

Uw bestuur meent dat de SLO door haar taakstelling – namelijk de schematische leerplanontwikkeling – niet in staat is het werk van het IOWO over te nemen omdat dit zowel leerplanontwikkeling alsook heroriëntering en onderzoek omvat. Het IOWO heeft niet alleen zorg voor ons vakgebied, maar ook visie op dit gebied.

In antwoord op een brief over dit onderwerp van de Algemene Vereniging van Schoolleiders schrijft staatssecretaris Hermes onder andere: 'Er is geen sprake van beëindiging van activiteiten, doch slechts van het elders onderbrengen

ervan. Dat geldt niet alleen voor activiteiten op het gebied van de leerplan-ontwikkeling, maar ook voor die op het terrein van de (na)scholing van het onderzoek en van de dienstverlening aan scholen. Consequentie hiervan is wel dat het Instituut in zijn huidige vorm geleidelijk, en niet per 1 augustus a.s. zal ophouden te bestaan. Het is zelfs niet uitgesloten, dat het IOWO als onderzoeksinstituut zal kunnen blijven bestaan. Dat wordt nog nader onderzocht. Alle soorten activiteiten zullen echter, voor zover dat nodig en mogelijk is, worden voortgezet'.

Hierdoor gaat echter de coördinatie tussen de diverse werkzaamheden die tot nu toe door het IOWO worden uitgevoerd volledig ontbreken.

Als leerstofontwikkeling bij de SLO terecht komt, her- en bijscholing voor tweede en derdegraads docenten bij de NLO's en voor de eerste graads docenten bij de universiteiten – een splitsing die de didactiekcommissie altijd heeft trachten te voorkomen – en misschien het IOWO als onderzoeksinstituut zal kunnen blijven, wordt het werk dat tot nu toe door het IOWO gedaan werd naar wij vrezen zo verschaald dat men weinig verwachtingen mag hebben over de resultaten.

In tegenstelling tot de oude Cato wil ik dan ook eindigen met de woorden 'OVERIGENS BEN IK VAN MENING DAT HET IOWO BEHOUDEN MOET BLIJVEN'.

Th. J. Korthagen, voorzitter

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 27 oktober 1979 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht

Om 10.08 uur opent de voorzitter, Th. J. Korthagen de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden E. H. Schmidt en P. G. J. Vredenduin, de inspecteurs W. E. de Jong en N. J. Zimmerman, de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars F. Laforce en mevr. G. Simons, de vertegenwoordigers van Euclides, B. Zwaneveld en S. A. Muller en de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff D. Soeteman.

De voorzitter spreekt een woord van dank tot de heer A. J. E. M. Smeur voor het vele werk dat hij gedurende vele jaren voor de leesportefeuille heeft verricht; een taak die hij enige maanden geleden heeft overgedragen. Hierna spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit.

Na de jaarrede worden de notulen van de algemene vergadering van 28 oktober 1978 en het jaarverslag goedgekeurd. Bij de behandeling van het financieel verslag informeert mevr. A. Aukema-Schepel naar de post niet-inbare contributies. Zij vindt deze post vrij hoog en vraagt wat hieraan te doen is. De penningmeester J. van Dormolen vertelt dat ieder jaar in mei aanmaningen worden verzonden en in juni nog tweede aanmaningen, maar dat van een groep leden de aanmaningen wegens verhuizingen als onbestelbaar terug komen. Van de 82 leden die vorig verenigingsjaar niet betaald hebben zijn er circa 75 door verhuizing onvindbaar. De penningmeester ziet geen mogelijkheden de post niet-inbare contributies te verlagen. De heer J. Vedder heeft in de jaarrekening van de vereniging viermaal een post subsidie Fonds aange troffen en hij heeft bij de jaarrekening van het Fonds eigen publikaties slechts driemaal een uitgave voor deze subsidie gezien. Hij komt hierdoor tot een verschil van f 800,—. De penningmeester kan hierop tijdens de vergadering geen antwoord geven, doch zal de zaak nagaan en zo snel mogelijk in Euclides antwoord geven. Ook de kascommissie had het verschil niet ontdekt. (Zie ook de mededeling op blz. 159).

In de nieuwe kascommissie worden gekozen de dames A. Verweij en D. A. Buth uit Leiden.

Hierna dankt de voorzitter de penningmeester voor het vele goede werk dat door hem gedaan is.

De heren L. Bozuwa, J. van Dormolen, F. F. J. Gaillard en M. Kindt worden als bestuursleden herkozen. De contributie voor het verenigingsjaar 1980/81 wordt vastgesteld op f 40,—.

Vervolgens vraagt de voorzitter om mensen die bereid zijn om opgaven te maken voor de eindexamens wiskunde 1981 en vraagt de secretaris om scholen die bereid zijn om in de week voor Pasen een groep Deense wiskundeleraren te ontvangen die dan naar ons land willen komen om kennis te maken met het Nederlandse wiskundeonderwijs.

De vergadering gaat dan over tot het thema van de dag *'Het zijn de kleine (dagelijkse) dingen die het 'm doen'*. Na een inleiding op dit thema door de heer H. Broekman zijn er vijf werkgroepen, n.l. *'Blikwisseling'*, *'Proefwerk teruggeven'*, *'Geodriehoek'*, *'Merkwaardige produkten'* en *'Redeneren'*.

Na de lunchpauze is er een inleiding door J. Hogendijk, getiteld *'Twee vertellingen over π '*, waarna weer in de vijf werkgroepen gewerkt wordt.

Na de theepauze volgt de rondvraag.

Als eerste vraagt het woord de heer J. Sloff. Hij vond de themadag zeer geslaagd en vraagt vervolgens of de vereniging niet kan proberen meer lessen voor wiskunde beschikbaar te krijgen, eventueel ten koste van vakken die met een minder overladen programma zitten. De voorzitter acht de kans op succes nul. Refererend aan de jaarrede zegt de heer Sloff dat als Cato niet volgehouden had er ook nooit iets gebeurd was. De heer W. E. de Jong zegt dat de lessenverdeling een zaak van het bevoegd gezeg is.

De heer H. A. J. van Asseldonk vraagt of de caesuur bij de eerste ronde van de wiskundeolympiade voortaan eerder bekend gemaakt kan worden. Volgens heer Van Dormolen is het een fout van het Weekblad van het N.G.L., dat een mededeling over deze caesuur niet heeft opgenomen. Daarentegen heeft het Weekblad de resultaten van de tweede ronde weer te vroeg opgenomen.

De heer T. G. H. Roes vraagt om uitleg over het begrip *'bereken'* op het eindexamen nu bij het examen rekenapparaten gebruikt mogen worden. Inspecteur De Jong deelt mede dat hierover een circulaire op komst is.

De heer S. Min vraagt om de lezing van de heer Hogendijk in Euclides te publiceren. De heer H. Broekman zegt dat er gepoogd wordt om inleidingen en verslagen van werkgroepen tot een lezenswaardig geheel te maken en dit in Euclides te publiceren. Of dit één publicatie wordt is nog niet besloten. Toch aan het woord zijnde zegt hij dat hij op de vorige jaarvergadering gevraagd heeft om actie tot voortzetting van de A-, B- en C-cursussen. Juist daags voor deze vergadering hebben de NLO's, middels een werkverband, besloten een bedrag uit te trekken voor A-, B- en C-cursussen tussen januari en de zomer. Het probleem is nu een brief van de inspectie dat leerlingen recht hebben op 40 weken onafgebroken school. Dit levert problemen op voor meerdaagse cursussen, die tot nu toe half in schooltijd, half in vrije tijd gehouden worden. Hij spreekt nogmaals een woord van lof tot de NLO's, die de gelden beschikbaar stellen.

De heer F. Laforce feliciteert de vereniging met deze dag, zowel opkomst als inhoud waren zeer goed. Hij wijst op de goede samenwerking tussen de Vlaamse en de Nederlandse Verenigingen van Wiskundeleraren en wijst tevens op de gemeenschappelijke studiedag op 22 maart a.s. in het Kon. Atheneum te Berchem bij Antwerpen. Hij nodigt alle aanwezigen uit deze dag aanwezig te zijn. Ook op de overige studiedagen van de VVWL is men steeds welkom.

Nadat de secretaris nogmaals om opstellers van eindexamenwerk voor 1981 heeft gevraagd sluit de voorzitter de vergadering.

Van alles en nog wat over gebonden variabelen in wiskundige taal

PROF. DR. N. G. DE BRUIJN

1 We nemen aan dat de lezer wel weet wat gebonden variabelen zijn. Een letter (bijv. x) die in een formule optreedt kan *gebonden* worden door een *binder*. Een binder is een speciaal symbool dat de naam van de door de binder gebonden variabele bij zich draagt. Voorbeeld: in ' $2^n > n^{1000}$ ', is n een variabele, en door het symbool ' $\exists_{n \in \mathbb{N}}$ ' wordt de variabele gebonden. In het resultaat ' $\exists_{n \in \mathbb{N}} 2^n > n^{1000}$ ' is n geen variabele meer, want een variabele in een formule is een letter waarvoor uitdrukkingen (van een zeker soort) kunnen worden ingevuld zonder de formule onleesbaar te maken. In ' $2^n > n^{1000}$ ' kan men n door 3 vervangen (dan komt er iets dat wel fout maar toch leesbaar is). Maar iets als $\exists_{3 \in \mathbb{N}} 2^3 > 3^{1000}$ kunnen we niet lezen! De gebonden variabele (ook wel *dummy* genoemd) mag wel door een andere *letter* worden vervangen, mits overal tegelijk: ' $\exists_{k \in \mathbb{N}} 2^k > k^{1000}$ ', betekent precies hetzelfde als ' $\exists_{n \in \mathbb{N}} 2^n > n^{1000}$ '. We maken natuurlijk de beperking dat de gekozen letter niet al eerder een duidelijke betekenis had.

2 Even iets over de keus van de dummy. Men kan liberaal zijn tegenover herhaald gebruik van eenzelfde letter, zolang bij elke letter uit de formule maar duidelijk is of het al dan niet een gebonden variabele is, en zo ja, wat de bindingsplaats is. We kunnen ons ook best een duidelijk beeld vormen zonder namen voor dummies te kiezen: vervang alle dummies door sterretjes en teken een pijl van elk sterretje naar het bijbehorende bindingssterretje. Voorbeeld:

The diagram shows the formula $\exists_{*} \in \mathbb{R} \left(\sum_{* \equiv 1}^m * \left(\sum_{* \equiv 1}^* \frac{*}{*!} \right) > m \right)$ with handwritten annotations. Arrows indicate the binding of dummy variables: an arrow from the first asterisk to the first summation index, and another from the second asterisk to the second summation index. The formula is labeled (1).

Noemen we de dummies x, n, k dan ontstaat de meer vertrouwde vorm

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^m x^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right) > m \right)$$

De enige vrije variabele is hier m .

3 Wie de situaties met de binders en de gebondenen eenmaal kent, ontdekt er steeds meer. Er is bijvoorbeeld geen reden om de zaak te beperken tot formules, want in gewone zinnen komt het even goed voor. Voorbeeld: 'Voor elk negatief reëel getal x geldt $2x < x^2$ '. De binder is hier zoiets als 'Voor elk negatief reëel getal x '.

In het bijzonder noemen we de binding bij introductie van een variabele. (Zie het artikel 'Wees contextbewust in WOT', Euclides, 1979/1980, blz. 7). De binder is dan zoiets als 'laat x een reëel getal voorstellen'. Zulke binders kan men door contextvlaggen aangeven. De in de binder ten tonele gevoerde letter kan overal binnen de context gebruikt worden. Met deze opvatting kan men zeggen dat er in de wiskunde helemaal geen vrije variabelen voorkomen: alle als vrije variabelen beschouwde letters zijn eigenlijk nog door contextvlaggen gebonden.

4 Kijken we nu naar de grammatica dan hebben we twee dingen te beoordelen. Ten eerste: tot welke grammaticale categorie behoort de uitdrukking die door de binder gebonden wordt? Ten tweede: tot welke grammaticale categorie behoort de uitdrukking nadat de binder erbij gezet is? In het stukje 'Grammatica van WOT' (Euclides, 1979/1980, blz. 66) hadden we als grammaticale categorieën *namen*, *substantieven*, *kernzinnen* en *adjectieven*. Het gaat ons hierbij niet alleen om uitdrukkingen die geheel met formules zijn opgebouwd maar ook om constructies van taalkundige aard.

Een paar binders zullen we buiten beschouwing laten omdat het bindingsresultaat niet tot één van de vier grammaticale categorieën hoort. De contextvlag bijvoorbeeld zet een kernzin of een groep kernzinnen om in iets dat voorlopig buiten onze grammaticale indeling valt. Ook de vraagbinder ('Welke $x \in \mathbb{R}$ voldoet aan ...?') en de opdrachtbinder ('Zoek een $x \in \mathbb{R}$ met ...') moeten om die reden buiten beschouwing blijven.

5 Sommige binders zetten *namen* in *namen* om. Zo zet bijvoorbeeld de binder

$\sum_{n=1}^m$ de naam $n^2 + 1$ om in de naam $\sum_{n=1}^m (n^2 + 1)$. Het betreft hier namen voor gehele getallen.

Ook de *functiebinder*, die we in navolging van Freudenthal met Υ aangeven, zet namen in namen om. Zo stelt $\Upsilon_{x \in \mathbb{R}} (x^2 + 1)$ de functie met domein $\mathbb{R}$ voor die, voor elke x uit het domein, aan x toevoegt $x^2 + 1$. Er is alles voor te zeggen deze notatie in het schoolonderwijs te brengen. Dat is belangrijker dan het gebruik van de symbolen $\forall$ en $\exists$, want die kan men nog heel goed met woorden omschrijven. Zo'n omschrijving in woorden is voor Υ (en ook voor de daarmee samenhangende $\sum$ en $\lim$) omslachtig en onbeholpen.

6 De *verzamelingsvormende binder* zet een kernzin in een naam om. Als notatie beveelt Freudenthal aan $\uparrow$. In woorden is de binder bijvoorbeeld 'de verzameling van de reële getallen x met', en dat wordt genoteerd door $\uparrow_{x \in \mathbb{R}}$.

In plaats van bijvoorbeeld $\uparrow_{x \in \mathbb{R}} (x^2 + x < 5)$ is gebruikelijk $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x < 5\}$. Laatstgenoemde is een akelige notatie omdat die zo van de andere

bindingsnotaties afwijkt, en ook omdat die zo lijkt op die andere akelige notatie $\{x^2 + x \mid -8 < x < 6\}$.

Een binder die heel gemakkelijk met behulp van de verzamelingsvormer te schrijven zou zijn is 'het aantal gehele getallen k met'. Deze wordt wel eens met $\#_{k \in \mathbb{Z}}$ aangegeven.

7 De bekende binders $\forall_{x \in \mathbb{R}}, \exists_{x \in \mathbb{R}}$ zetten *kernzinnen* in *kernzinnen* om. In woorden luiden ze bijvoorbeeld 'voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt' en 'er is een $x \in \mathbb{R}$ met'. Er zijn er nog meer in gebruik, meestal alleen met taalconstructies aangegeven. We noemen 'voor precies één $x \in \mathbb{R}$ geldt', 'voor geen enkele $x \in \mathbb{R}$ geldt', 'met ten hoogste eindig vele uitzonderingen geldt voor elke $x \in \mathbb{R}$ '.

8 In WOT bestaan ook bindingsconstructies die aan een kernzin een substantief toevoegen. Men hanteert bijvoorbeeld 'geheel getal k met $k^2 < 1000$ ' met evenveel gemak als andere samengestelde substantieven (zoals 'op m gelegen punt').

Laat ons deze binder in formule brengen met een symbool S met subscript. We krijgen zo

$$S_{k \in \mathbb{Z}}(k^2 < 1000), \quad (2)$$

waarmee we hetzelfde substantief aanduiden als 'geheel getal k met $k^2 < 1000$ ' of 'geheel getal waarvan het kwadraat < 1000 is'.

Men gebruikt langademige substantieven als (2) liefst zo weinig mogelijk. Meestal wordt er met behulp van een definitie een nieuw kort substantief voor geschapen. Zo kan men, als n een geheel getal aanduidt, het korte substantief 'deler van n ' invoeren ter vervanging van

$$S_{k \in \mathbb{Z}}(\exists_{m \in \mathbb{Z}} km = n). \quad (3)$$

In gangbare substantiefdefinities wordt zoiets in woorden gezegd. Dat is op vele manieren mogelijk, maar (3) geeft een soort standaardnotatie, die ons doet inzien dat het voor de betekenis van het substantief onbelangrijk is welke literaire vorm men aan (3) geeft.

De substantiefbinder S is nauw verwant aan de verzamelingsbinder. Als we het symbool K^+ gebruiken om het substantief aan te geven dat bij de klasse K hoort (zie het artikel Grammatica van WOT) dan is

$$S_{x \in \mathbb{R}}(x^2 + x < 5) = (\uparrow_{x \in \mathbb{R}}(x^2 + x < 5))^+.$$

9 Tussendoor even iets over de notatie van het domein van de binder. Bij (3) wordt $k \in \mathbb{Z}$ het *subscript* genoemd, $\mathbb{Z}$ het *domein* en k de *dummy*. Vele binders hebben deze vorm. Alleen de zeer oude zien er anders uit. De sigma-notatie heeft dat ongelukkige gelijktteken in het subscript, de limietnotatie geeft met het subscript $n \rightarrow \infty$ heel wat anders aan dan het domein. Ook de integraalnotatie $\int_a^b \dots dx$ past slecht in het moderne notatiesysteem.

We zullen als nieuwigheid invoeren dat we subscripts toelaten waarbij de dummy getypeerd wordt door een substantief. Dit kan handig zijn doordat het ons dichterbij de omgangstaal brengt. In overeenstemming met het artikel 'Grammatica van WOT' beschouwen we ' $k \in \mathbb{Z}$ ' en ' k : geheel getal' als volkomen gelijkwaardig. We laten het gebruik zien in een voorbeeld waarin ook de contextindicatie ten tonele verschijnt. We hebben ter beschikking (als l en m lijnen zijn) de kernzin ' l staat loodrecht op m ' en willen nu de volgende substantiefdefinitie geven: 'Als m een lijn is, dan heet elke lijn die loodrecht op m staat een loodlijn op m '. Dit is nu te schrijven als

$$\vdash_{m: \text{lijn}} \text{Definitie: loodlijn op } m: = S_l: \text{lijn} (l \text{ staat loodrecht op } m).$$

(Het symbool $: =$ betekent 'is gedefiniëerd als').

10 Van de binder S zijn in het gangbare WOT allerlei taalkundige omschrijvingen in gebruik die duidelijk genoeg zijn en niet moeilijk. Lastiger is het taalgebruik bij de binding die we *despecificatie* zullen noemen. We gaan daarbij uit van een substantief dat een letter als parameter bevat. Nemen we als voorbeeld het langademige substantief 'functie die in het punt x de waarde nul aanneemt'. Hierin stelt x een reëel getal voor. We kunnen specificeren door een naam voor x in te vullen en er bijv. van te maken 'functie die in het punt 5 de waarde 0 aanneemt'. Daarentegen *despecificeren* we door over te gaan op het substantief 'functie die ergens de waarde nul aanneemt' of 'functie die in het een of andere punt x de waarde nul aanneemt'. Zulke uitdrukkingen zijn onbeholpen en onduidelijk. We missen een goed taalmiddel. Laat ons een standaardnotatie voorstellen door het effect van de despecificatie aan te geven met

$$\text{desp}_x: \text{reëel getal} (\text{functie die in het punt } x \text{ de waarde nul aanneemt}).$$

Een tweede voorbeeld. Laat in de context ' n : natuurlijk getal' het substantief ' n -dimensionale vectorruimte' zijn ingevoerd. Dan definiëren we daarna het substantief

$$\text{desp}_{n: \text{nat. get.}} (n\text{-dimensionale vectorruimte}) \quad (4)$$

en dat kan men bijv. 'eindig-dimensionale vectorruimte' noemen. De despecificatie komt ook buiten de wiskunde voor. Kijk maar:

$$\text{desp}_f: \text{fiets} (\text{wiel van } f). \quad (5)$$

Men zou dat 'fietswiel' willen noemen, maar dat kan ook 'wiel vóór een fiets' betekenen. Duidelijker is 'wiel van een fiets'.

11 Er is een tweede soort despecificatie, die van *namen* naar *substantieven* gaat. We zullen die met *despo* aangeven (de slotletter herinnert aan 'gedespecificeerd object'). Het gangbare WOT kan dit niet altijd bevredigend uitdrukken. Laat ons proberen te zeggen dat 'priemkwadraat' hetzelfde betekent

als ‘het kwadraat van het een of andere priemgetal’. De priemkwadraten zijn dus 2^2 , 3^2 , 5^2 , 7^2 , Is ‘het kwadraat van een priemgetal’ nu een substantief? Eigenlijk wel, maar het gedraagt zich vervelend als men er bijvoorbeeld ‘een’ of ‘elk’ voor wil zetten. We kunnen het beter meteen in formule brengen, en zeggen dat ‘priemkwadraat’ gedefiniëerd is door

$$\text{despo}_p: \text{priemgetal } q^2. \tag{6}$$

Liever wat meer in woorden? Dat kan ook:

$$\text{despo}_p: \text{priemgetal (het kwadraat van } p\text{)}. \tag{7}$$

Erg belangrijk is die despo niet, althans niet in de schoolwiskunde. Maar het kan handig zijn om definities bondig uit te spreken. Overigens liggen desp en despo verwarrend dicht bij elkaar. In niet-wiskundige taal ligt vaak niet vast of iets desp dan wel despo is. Kijk maar. Het is duidelijk bij

$$\text{desp}_p: \text{pauw (veer van } p\text{)}$$

$$\text{despo}_p: \text{speurder (de neus van } p\text{)}$$

maar in gewone woorden verdwijnt het verschil: pauweveer, speurdersneus. Eigenlijk zijn de notaties (5) en (7) zo gek nog niet, althans voor schriftelijk gebruik.

12 Er is een zekere behoefte aan een binder die *kernzinnen* in *adjectieven* omzet, maar die staat nòch in formule nòch in taalconstructie ter beschikking. We kunnen er wel een maken en die ‘Adj’ noemen. Het adjectief dat over het reële getal x de uitspraak $x \leq 0$ doet kunnen we daarmee voorstellen door

$$\text{Adj}_{x \in \mathbb{R}} (x \leq 0)$$

Deze notatie is goed bruikbaar in adjectiefdefinities.

Er is ook zoiets als despecificatie van een adjectief naar een adjectief, maar dat zou ons hier te ver voeren.

13 Vaak wordt bij een binding de dummy door een nevenvoorwaarde beperkt. Zonder beperking is het bijvoorbeeld ‘voor elk natuurlijk getal n geldt ...’ en de dummy wordt in zijn werkingsgebied beperkt door ‘voor elk natuurlijk getal n met $3 < n < 20\pi$ geldt ...’. Het ligt voor de hand om dit te beschrijven door $\forall_{n: \alpha} \dots$ waarin het substantief α is gedefiniëerd als $\text{desp}_{n: \text{nat. get.}} (3 < n < 20\pi)$, maar het kan véél korter met de notatie

$$\forall_{n: \text{nat. get.}} | 3 < n < 20\pi \cdots \text{ of } \forall_{n \in \mathbb{N}} | 3 < n < 20\pi \cdots$$

Als voor elk natuurlijk getal de symbolen $P(n)$ en $Q(n)$ kernzinnen zijn die de letter n mogen bevatten dan is

$$\forall n \in \mathbb{N} | P(n) Q(n) \quad (9)$$

te lezen als: 'voor elk getal n dat aan $P(n)$ voldoet geldt $Q(n)$ '. Heel vaak probeert men het zonder (9) te doen, nl. door

$$\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \Rightarrow Q(n)) \quad (10)$$

Dit zou dan moeten worden gelezen als: 'voor elk natuurlijk getal n geldt dat als $P(n)$ waar is, ook $Q(n)$ waar is'. Dit is nogal gewrongen. Het is ook niet altijd juist: soms is $Q(n)$ pas leesbaar als $P(n)$ waar is. (Zie bijv. §5 in het eerder genoemde artikel 'Wees contextbewust in WOT'). Als bijv. $P(3)$ niet waar is, dan is $Q(3)$ onleesbaar, en dus is $P(3) \Rightarrow Q(3)$ ook onleesbaar. De uitdrukking $P(n) \Rightarrow Q(n)$ in (10) is dan geen gewone implicatie maar een gegeneraliseerde implicatie. Laten we de gegeneraliseerde implicatie buiten de schoolwiskunde houden, en $A \Rightarrow B$ alleen gebruiken als A en B onafhankelijk van elkaar leesbaar zijn!

Voor de conjunctie geldt net zo iets. Als B pas leesbaar is wanneer A waar is, mag men rustig ' A , en B ' zeggen, desnoods ' A en B ' maar niet ' B en A ', niet ' $A \wedge B$ ' en niet ' $B \wedge A$ '. Mocht blijken dat die onafhankelijkheid van A en B didactisch niet verkoopbaar is dan ligt de conclusie voor de hand: stuur alle implicaties en conjuncties van school weg!

Het voordeel van de in (8) en (9) aangegeven binding met restrictie hebben ook bij de existentiekwantor. De notatie

$$\exists n \in \mathbb{N} | P(n) Q(n) \quad (11)$$

klopt met wat men zegt: 'er is een $n \in \mathbb{N}$ met $P(n)$ waarvoor $Q(n)$ '. De notatie

$$\exists n \in \mathbb{N} (P(n) \wedge Q(n)) \quad (12)$$

is minder natuurlijk, en heeft het nadeel soms een gegeneraliseerde conjunctie te bevatten. Verder zijn (9) en (11) analoog gebouwd, maar (10) en (12) verwarrend verschillend.

Nog een paar voorbeelden:

$$\Upsilon_{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2} \log \log x \quad (13)$$

is de functie die, voor elke x met $1 < x < 2$, aan x de waarde $\log \log x$ toevoegt. En met Freudenthal's notatie $\downarrow_x$ ('de éne x met') is

$$\downarrow_{x \in \mathbb{R} | x > 0} (x^2 + x = 5) \quad (14)$$

het positieve getal x dat aan $x^2 + x = 5$ voldoet.

14 De Nederlandse taal kent verschillende bindingsconstructies waarbij de dummy ongenoemd blijft. 'Elk punt P van k heeft de eigenschap dat P op h ligt' kan worden bekort tot 'Elk punt van k ligt op h '. Het is leerzaam om

allerlei zinnen met dummy in zinnen zonder dummy om te zetten en omgekeerd. We geven nog wat voorbeelden van bindingszinnen zonder dummy: 'Er is geen priemgetal dat een zesvoud is'. 'Geen priemgetal is een zesvoud'. 'Van elk oneven getal is het kwadraat oneven'. 'Van elk oneven getal zijn alle delers oneven'. 'Elke loodlijn op m wordt door l gesneden'. 'Als een getal groter is dan 10 dan is het kwadraat van dat getal groter dan 100'. 'De cirkel c snijdt elke zijde van deze veelhoek'.

Soortgelijke voorbeelden kan men geven voor de substantiefconstructie S : 'lijnstuk waarvan het midden op m ligt', 'getal zonder echte delers', 'vierhoek met onderling loodrechte diagonalen'.

Constructies met ongenoemde dummy zijn meestal soepel en elegant, maar ook erg kwetsbaar. Als ze te hoog op elkaar worden gestapeld valt de zaak in elkaar. Een simpel voorbeeld is de man waarvan de beste vriend er met zijn vrouw vandoor ging. Ook taalkundig kunnen we dan niet meer uitmaken van wie die vrouw eigenlijk was.

Kluwerprijs 1979

Op 12 december 1979 is aan ons redaktielid Fred Goffree de Kluwerprijs 1979 uitgereikt.

De Kluwerprijs is een bekroning van een publikatie, bij voorkeur verschenen in de vijf laatstverlopen kalenderjaren, op het gebied van professionele, educatieve of algemene uitgaven. Voor het jaar 1979 had de prijs betrekking op het gebied van het onderwijs, met name de vernieuwing van het onderwijs aan vier- tot twaalfjarigen.

Het is voor de redactie van Euclides een groot genoegen voor de tweede keer in korte tijd Fred Goffree geluk te wensen.

De leesportefeuille

Tien jaar lang heeft Dr. A. J. E. M. Smeur de verzorging op zich genomen van de circulatie van wiskundige en pedagogische tijdschriften, kort genoemd 'De leesportefeuille'.

Vele deelnemers, niet alleen uit het onderwijs, maar ook uit het bedrijfsleven, hebben in die periode gebruik kunnen maken van een stroom van informatie die hen bereikte met een vanzelfsprekendheid, die niet in de minste mate te danken was aan de interesse en accuratesse waarmee Dr. Smeur zijn taak had opgevat.

Daarom, nu hij dit werk uit handen geeft, ongetwijfeld namens alle deelnemers een welgemeend:

'Hartelijk dank, Dr. Smeur, voor alle tijd en moeite'!

Vanaf mei 1979 is de verzorging van de leesportefeuille overgenomen door ondergetekende (ditmaal iemand uit het bedrijfsleven!).

Gaarne wil ik eventuele nieuwe belangstellenden, nu zij inmiddels afweten van het bestaan, verder op de hoogte brengen van de gang van zaken rond deze dienstverlening:

* Deelname aan de leesportefeuille staat open voor leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en voor abonnees van Euclides.

* de in circulatie gebrachte tijdschriften zijn:

- a Elemente der Mathematik, Basel (6×24)
- b The Mathematical Gazette, Leicester (4×80)
- c The Mathematics Teacher, Reston, Virginia (9×80)
- d Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn (8×64)
- e Pedagogische Studiën, Groningen (12×40)
- f Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Göttingen (2×160)
- g Schoolscience and Mathematics, Indiana, Pennsylvania (9×90)
- h Wiskunde en Onderwijs, Wilrijk (4×130)
- i Mededelingen van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam (9×40)
- j Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam (3×160)
- k Bulletin de L'Association des Professeurs de Mathematiques, Paris (5×160)

l Praxis der Mathematik, Köln (12×32)

m Educational Studies in Mathematics, Dordrecht (4×125)

n Didaktik der Mathematik, München (4×85)

(tussen haakjes is aangegeven het aantal nummers per jaar $\times$ het gemiddelde aantal bladzijden per nummer).

- * Anders dan de benaming 'leesportefeuille' doet vermoeden, bevat een zending meestal niet meer dan één exemplaar:

Elk tijdschriftnummer gaat direct na binnenkomst afzonderlijk in circulatie. Het aantal lezers en de leesvolgorde kunnen verschillen per tijdschrift. Bij elk volgend nummer wordt de vorige eerste lezer laatste en schuiven de overigen een plaats naar voren (de nummers worden dus niet altijd op volgorde ontvangen).

Iedere lezer verplicht zich tot tijdige doorzending naar zijn opvolger, waarbij hij zorgt voor voldoende frankering.

- * Het leesgeld bedraagt voor één tijdschrift f 2,50 per jaar, voor twee of meer tijdschriften f 2,— per jaar per tijdschrift ('i' en 'j' zijn gratis).

Men dient wel te bedenken dat men naast deze uiterst geringe bijdrage nog een, niet altijd gering, bedrag aan portokosten voor eigen rekening heeft (voor een maandblad, bijvoorbeeld, kan dat ca. f 20,— per jaar bedragen).

- * De leestijd in de normale circulatie is maximaal één week. In het belang van zijn medelezers dient ieder zich strikt te houden aan deze termijn! Wie echter een bepaald tijdschriftnummer toch voor langere tijd wenst te lezen, omcirkelt op het inlegveld het nummer dat in de lijst van deelnemers voor zijn naam staat. Na afloop van de normale circulatie ontvangt hij dan het tijdschriftnummer opnieuw, nu met een leestijd van twee weken.

- * Nieuwe leesabbonnementen kunnen worden opgegeven door op de girorekening van de verzorger het verschuldigde leesgeld over te maken, met vermelding 'leesportefeuille' en opgave van de lettercoderingen van de gewenste tijdschriften (girorekening: 1039886).

Bij aanmelding voor 1 oktober ontvangt men nog alle nummers van de lopende jaargang. Reeds eerder verschenen nummers worden toegestuurd in een nazending (in dit geval wel, zo mogelijk, met meerdere exemplaren tegelijk).

Bij aanmelding na 1 oktober wordt het gestorte leesgeld beschouwd als te zijn bedoeld voor het nieuwe jaar. Men ontvangt echter wel de alsnog te verschijnen nummers van de lopende jaargang.

A. Hanegraaf

De nivo-theorie van Van Hiele

'De beste leraar is niet hij die de leerling op zijn nivo weet te brengen, maar die tot het nivo van de leerling weet af te dalen'. Kierkegaard

BRAM LAGERWERF

In de nivo-theorie van Van Hiele gaat het bijvoorbeeld over de leraar die de 'onbenullige' argumentatie van een leerling niet kan accepteren en over de leerling die zich niet begrepen voelt en die weerstand ophoopt tegen het 'over-technische' gepraat van de leraar, die knapperd die alles zo goed weet maar die het niet kan uitleggen. Ook over het wanhopige gevoel dat je als leraar hebt als je merkt dat ze je zitten na te praten. Er is niets aan te merken op wat ze zeggen, maar als je zegt: 'Zeg het nu eens in je eigen woorden', dan mislukt het, en als je maar even buiten het veelbelopen paadje stapt ben je ze kwijt. Daarnaast gaat het ook over de goeie leerling, die aan een half woord genoeg heeft, die het jargon meteen van je overneemt, niet als napraterij maar omdat hij het zich eigen gemaakt heeft. En over de leraar die jou, leerling, wel degelijk begrijpt, die je niet het gevoel geeft dat hij huizenhoog boven je uitsteekt, die je aanspreekt in je eigen taal.

Dit artikel gaat over de nivo-theorie.

Ik beperk mij daarbij tot het basisnivo en het eerste nivo.

Dit is een drempel. Wat mij betreft komt U hier pas overheen als u de eerste alinea herkent vanuit Uw werk als leraar en hem ook kunt aanvullen met eigen ervaringen.

De in de eerste alinea geschetste spraakverwarring is de oorzaak van veel moeilijkheden in het onderwijs. De leerling heeft nog niet door wat een functie is, en toch begint de leraar al te praten over variabelen, voorschrift, domein, bereik, grafiek, enz. Logisch! Wat is een functie zonder al die dingen, en wat heeft het voor zin over functies te praten als je niet meteen man en paard kunt noemen?! Bij vergelijkingen is het net zo. Een vergelijking bestaat bij de gratie van zijn oplossingsverzameling, je hebt er niets aan als je niet weet over welke verzameling de onbekende een variabele is, je moet het linker en het rechterlid weten te vinden, je moet het is-gelijk-teken kennen en je moet weten wat ekwivalent betekent.

Kunt U aan iemand die niet wiskundig geschoold is uitleggen wat een functie is? Zonder de bekende vaktermen te gebruiken?

Durft U het aan om in zo'n gesprek maar niet te praten over startverzameling

en waardenverzameling e.d.? Het bijvoorbeeld alleen te hebben over de notie van samenhang; hoe harder je loopt hoe eerder je er bent, hoe warmer het is hoe harder de planten groeien behalve als het te heet wordt dan gaat het weer langzamer, hoe ouder je bent hoe meer kinderen je op je verjaardag mag vragen (als het maar niet te gek wordt, en op een gegeven moment zijn de kinderfeestjes verleden tijd), elke dag heeft zijn eigen hoeveelheid neerslag, enz.

Kunt U het over Uw hart verkrijgen om in de klas over vergelijkingen te spreken als 'stippeltjes-sommen' ($5 - \dots = 2$)?

Krijgt U het voor elkaar om met de leerlingen eerst veel van die sommen te maken en het te hebben over 'juist' ($5 - 3 = 2$) en 'onjuist' ($5 - 6 = 2$), als mogelijkheden bij het invullen? Kunt U dan nog even het woord variabele inslikken als U de puntjes door een letter vervangt, en aan verzamelingen (met name oplossingsverzamelingen) alleen maar denken?

Ik hoop van harte dat dat allemaal lukt, want ik ben er, met Van Hiele van overtuigd dat mensen zo leren: eerst maar 'ns de grote lijnen, zoals het verschijnsel zich aan de leerling voordoet: zonder de details, zonder het vakjargon. Het gaat in het algemeen zoals U in een nieuwe klas de gezichten bij de namen leert kennen: daarbij let U meestal niet op allerlei bijzondere kenmerken, dat gaat in een oogopslag.

Weer een drempel. Bedenk een kernbegrip uit de wiskunde en zoek iemand die naar U wil luisteren. Leg hem of haar in 5, hooguit 10 minuten uit wat U met dat kernbegrip bedoelt. Doe dat erg algemeen, gebruik geen vaktermen.

Als iemand begrijpt dat vergelijkingen stippeltjes-sommen zijn; en hij doorheeft dat je op de stippeltjes van alles kunt invullen (als het maar een getal is) maar dat het er in feite om begonnen is de waarde te vinden die tot een ware bewering leidt. Als hij weet en kan accepteren dat er vergelijkingen zijn waarbij niet zo'n waarde te vinden is en dat er daartegenover ook vergelijkingen zijn die altijd waar zijn, wat je ook invult. Als die leerling er een beetje handigheid in heeft ontwikkeld de oplossing te vinden van niet te ingewikkelde vergelijkingen (door proberen vooral). En als hij begrijpt dat het de gewoonte is in een som als $8 - \dots = \dots - 2$ twee keer het zelfde getal in te vullen. Dan heeft hij genoeg geleerd om de volgende stap te maken. Dan is hij rijp voor het volgende nivo, dan is hij in staat zich zinvol in details en wiskundige complicaties en verfijningen te verdiepen.

Bij functies net zo. Eerst het verschijnsel van het-één-hangt-met-het-andersamen, veel voorbeelden van samenhangen die wél, en andere die niet in eenvoudige wiskundige formuleringen te vangen zijn, functiewaarden berekenen, plaatjes maken, en dergelijke. Pas daarna de zaak gaan formaliseren, namen geven, details, definities alleen als de behoefte zich voordoet.

Neem weer een kernbegrip uit de wiskunde. Maak een lijst met woorden die U wel zou willen, maar niet mag gebruiken als U dat kernbegrip aan een onwetende gaat uitleggen.

Je kunt begrippen hanteren op verschillende nivo's. Hiervoor heb ik aangege-

ven wat ik op het nulde nivo van een leerling verlang als het gaat over functies en vergelijkingen.

Ik wil hier even iets zeggen over het belang van dit nulde nivo. Dit hangt nauw samen met de bedoeling van het onderwijs. Het gaat om de toepassingsmogelijkheden van wat geleerd is.

Voor de leerling die onvoldoende met het begrip functie op het basisnivo heeft gewerkt, is er geen directe verbinding tussen het begrip 'functie' in hoofdstuk 12 van het wiskundeboek enerzijds, en anderzijds de direct waarneembare wereld waarin hij leeft. Komt hij ergens een of andere samenhang tegen, dan komt het niet in hem op na te gaan of hij hier wellicht vruchtbaar gebruik kan maken van wat hij over functies geleerd heeft. De leerling die wel ruimschoots met functies op het basisnivo is bezig geweest, kan situaties waarin het functiebegrip hulp kan bieden beter herkennen. Werken op basisnivo is het begin van het zich eigen maken van wat geleerd wordt.

Op het nulde nivo gaat het om direct waarneembare dingen. Niet zoals de leraar erover praat, maar zoals de werkelijkheid zich aan de leerling voordoet, en zoals de leerling er over praat.

De leerling die het begrip functie op het eerste nivo kan hanteren heeft structuur gekregen in het begrip samenhang. Hij weet waar je bij functies op moet letten, variabelen, voorschrift, domein, bereik, grafiek, enz. Hij heeft ook een beeld van hoe die dingen samenhangen. Hij heeft een overzicht van de functies die voor hem hanteerbaar zijn.

Evenzo voor bijvoorbeeld het begrip kans:

0^e nivo: Kans is groot of klein (dat het morgen regent bijvoorbeeld); 'Ik moet altijd voor de spoorbomen wachten'; bij een kansspel is de kans niet afhankelijk van dingen als leeftijd, stand van de maan, manier waarop je met de dobbelstenen schudt; met twee dobbelstenen gooi je gemakkelijker acht dan twaalf, want dat kan op meer manieren; kans heeft iets te maken met op de lange duur, met grote aantallen; en met eerlijk en oneerlijk in allerlei situaties waarin geloot wordt.

1^e nivo: Kans is een getal tussen 0 en 1; soms kun je een kans berekenen, soms kun je een kans meten, soms kun je er alleen maar een slag naar slaan; uitkomstenverzameling; gebeurtenis; met of zonder teruglegging; gunstige uitkomsten; en dergelijke.

Maar ook de verbanden tussen deze elementen van de structuur: Een gebeurtenis is een deelverzameling van de uitkomstenverzameling; als het aantal experimenten groot is, is de gemeten kans ongeveer gelijk aan de berekende kans; kans is een functie op de uitkomstenverzameling; enzovoort.

Van Hiele zegt het ongeveer zo: Mensen die een begrip op het eerste nivo hanteren beschikken over een 'relatienet'. Ze redeneren niet meer over het begrip als geheel, maar ze gebruiken de onderdelen waaruit het begrip is opgebouwd en de samenhang tussen die onderdelen.

Weer even tijd voor eigen actie. Probeer terugdenkend aan de klassen waarin U lesgeeft of gaf een voorbeeld te vinden van een leerling die een begrip aan het leren is, en die dat begrip eerst op het nulde nivo hanteert en later blijkt geeft over een relatienet te beschikken.

Nu een aantal opmerkingen ter verduidelijking en verdere informatie.

– De theorie gaat verder dan het nulde nivo en het eerste nivo. Er zijn ook een tweede en een derde nivo te onderscheiden. Op dat stuk van de theorie ga ik in dit artikel niet in.

– Tussen 0^e en 1^e nivo is er niet alleen een verschil in woordgebruik, nee, veel sterker, het gaat over verschillende dingen. De een praat over een ruit en heeft daarbij vooral het beeld voor ogen; de ander praat over een ruit en dat is voor hem een geordende verzameling eigenschappen. De spraakverwarring is dus compleet.

– Die verwarring wordt nog vergroot door het volgend verschijnsel. Het is eigenlijk onbegonnen werk om op het 1^e nivo te onderwijzen als de leerlingen zich nog op het 0^e nivo bewegen. Maar de leerlingen hebben daar wat op gevonden: ze praten de leraar na om niet als dom of onvoldoende gebrandmerkt te worden. Als je als leraar niet oppast ben je in die valkuil terechtgekomen voor je het weet. Dit verschijnsel heet vanouds 'verbalisme'; de leerling gebruikt wel de bekende woorden, maar zonder dat hij het begrip op dit nivo beheerst.

– Hoe maken de leerlingen de overgang van basisnivo naar eerste nivo? Als de didaktische hulp van de leraar gericht is op een geleidelijke overgang dan verwerft hij stap voor stap inzicht in het te leren begrip. De leraar behoeft dus niet bij de pakken neer te gaan zitten, niet af te wachten.

Is er niet een dergelijke hulp van de leraar, dan is de overgang afhankelijk van allerlei toevalligheden, en kan dan soms vrij abrupt gaan.

Over de hulp die de leraar kan bieden nu meer.

– Afdalen naar het lagere nivo van de leerling is voor de leraar geen kleinigheid. Dat nivo is voor hem onwerkelijk, te anders dan zijn eigen werkelijkheid; afdalen vraagt nogal wat van het vermogen van de leraar zich in te leven in de leerling.

– Het heeft ook met onderwijsdoelen te maken. De repetities die ik onder ogen krijg worden met een voldoende beloond als de leerling de opgaven kan maken, onverschillig of hij begrijpt wat hij doet of niet. Wat zal de leerling die het toch al zo moeilijk vindt dan nog moeite doen te begrijpen wat hij doet, structuur te vinden in waar hij mee bezig is?

Een bijles-leerling uit 3-havo die ik heb, demonstreert deze houding in een uiterste vorm. Hij is geneigd op mijn vragen allerlei antwoorden te blijven formuleren tot dat ik zeg: 'dat is goed'. Als ik hem vraag zelf het goede antwoord uit zijn rij aan te wijzen lacht hij maar een beetje. Bij een moeilijke som vraagt hij zich niet af: hoe zit dat ook al weer in elkaar?, maar hij denkt: hoe deed die man dat ook al weer? De leraren die hij gehad heeft zijn kennelijk gewend alleen op het goede antwoord in te gaan, en het is voor deze leerling blijkbaar een lange tijd voordeliger geweest de leraar naar de mond te praten dan moeite te doen de zaak door te krijgen.

Ik zou willen dat in het algemeen leraren vaker zouden vragen: Waarom? Leg dat eens uit. Hoe bedoel je dat? en dergelijke. Bij dat soort vragen komt het accent van het onderwijs minder te liggen op de gemakkelijker te bereiken korte termijn doelen en meer op de moeilijker te bereiken maar ook meer waardevolle lange termijn doelen.

Kunt U uit Uw eigen leerlingen voorbeelden geven van napraters en van leerlingen die zich niet alleen de taal maar ook het begrip op het hogere nivo hebben eigen gemaakt?

Neemt U in Uw onderwijs genoeg met het goede antwoord of vraagt U meer? En in repetities en proefwerken?

Hoe help je een leerling naar een hoger nivo?

Een veel gebruikte methode is, zelf op het hogere nivo te gaan zitten en hopen dat de leerling dan vanzelf wel volgt.

Uit het voorgaande mag nu duidelijk zijn dat de leerling daar in het algemeen niet mee geholpen is. Als het op deze manier lukt heeft de leraar *geluk* gehad en heeft de leerling het karwei alleen op moeten knappen.

Van Hiele geeft zelf een schets voor een onderwijs-strategie: (Begrip en Inzicht, blz. 102*):

‘Dit leerproces verloopt volgens een aantal fasen, die min of meer van elkaar onderscheiden kunnen worden.

In de eerste fase, die der *informatie*, maakt de leerling kennis met het werkterrein.

In de tweede fase, die der *gebonden oriëntatie*, wordt hij door opdrachten (die hij krijgt, of die hij zichzelf stelt) met verschillende verbindingen van het te vormen relatienet in kennis gebracht.

In de derde fase, die der *explicitering*, worden hem deze verbindingen beter bewust, hij tracht ze in woorden uit te drukken, hij leert de bijbehorende vaktaal kennen.

In de vierde fase, die der *vrije oriëntatie*, leert hij door meer algemeen gestelde opdrachten zich een weg door het relatienet te vinden.

In de vijfde fase tenslotte, die der *integratie*, zal hij moeten komen tot een samenvatting van het geleerde. Hij krijgt dan een overzicht van het nieuw ter beschikking staande relatienet.’

Liever dan hier nu verder op in te gaan geef ik nog een paar andersoortige aanwijzingen

1 De overgang naar een hoger nivo gaat vaak gepaard met een probleem, met behoefte naar meer; twee voorbeelden.

. In de discussie of een vierkant een ruit is of niet komen de kenmerken van een ruit nauwkeurig aan de orde. Een vierkant blijkt al die kenmerken te hebben.

. Als er vergelijkingen aan de orde komen die te moeilijk zijn om zo maar even door proberen op te lossen, komt er behoefte aan structuur in het oplossingsproces.

2 Afstand nemen

Vaak blijkt een leerling gemakkelijker op het hogere nivo te komen als het betreffende stuk leerstof een poosje niet aan de orde geweest is. Het lijkt alsof

*) Dr. P. M. van Hiele, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend, 1973.

het onderbewuste in die tijd verder gewerkt heeft aan dit onderwerp; het lijkt op zoiets als slapend leren. Hoe dat precies zit is niet duidelijk. Het is waar dat in de tussentijd meestal andere wiskundige onderwerpen aan de orde zijn en het bewuste onderdeel kan daardoor toch zijdelings even ter sprake geweest zijn, doordat het metterdaad genoemd is of doordat het vergelijkbare trekjes vertoont. Het kan ook zijn dat even afstand nemen maakt dat de leerling minder gemakkelijk het gebruikelijke denkpatroon volgt en gemakkelijker nieuwe wegen inslaat.

3 Vragen en opdrachten die op verschillende nivo's uitgewerkt kunnen worden. Bijvoorbeeld: Knip een cirkelvormig stuk papier, en knip uit die cirkel een sector weg; maak er dan een kegel van. Wat is het verband tussen de grootte van de sector die je weggeknipt hebt en de hoogte van de kegel?

Uitwerking op basisnivo: De leerling experimenteert wat met het papier en concludeert: De kegel wordt hoger als je een grotere sector wegknip. Klaar.

Uitwerking op het 1^e nivo: De leerling ziet de onderdelen van de figuur; de hoogtelijn die als een tentstok in de kegel staat, de straal van de grondcirkel en de straal van de oorspronkelijke cirkel met daarnaast Pythagoras die het verband aangeeft tussen die drie; hij ziet in de weggeknipte sector de graden als het ware zitten en het verband tussen middelpuntshoek, straal en boogmaat; kortom, hij ziet structuur in het probleem. Deze leerling is pas klaar als hij een formule gevonden heeft die het gevraagde verband beschrijft.

Het werken met dit soort problemen in de klas, ieder voor zich en samen, het vergelijken van de verschillende oplossingen, het afzien van de waardering 'dit is goed' en 'dat is fout', kan leerlingen helpen op een hoger nivo te komen.

Ik kom aan het eind.

Ik vraag me af wat dat eind zal moeten zijn. Een laatste drempel, een soort eindtoets? Een samenvatting? Ik laat het maar hierbij. Ik hoop dat U wat verder komt door dit artikel en ik zou graag wat van Uw reacties vernemen.

Parabolen

M. VAN DE VEN

1. Wanneer we de grafiek van een tweedegraadsfunctie moeten schetsen is een gebruikelijke manier:
 - we beredeneren of het om een berg- of dalparabool gaat
 - we bepalen de coördinaten van de top
 - we bepalen de coördinaten van de snijpunten van de parabool met de x -as (als deze snijpunten er zijn)
 - we bepalen de coördinaten van het snijpunt met de y -as en spiegelen dit punt in de symmetrieas van de parabool
 - we bepalen eventueel nog de coördinaten van andere punten door verschillende getallen voor x te substitueren en door deze punten in de symmetrieas te spiegelen.
2. Een andere, minder bekende manier om een parabool te schetsen is door eerst de top te bepalen en vanuit dat punt meer punten. Deze punten zijn eindpunten van vectoren met de top als beginpunt.

Als stelling geformuleerd:

Gegeven de tweedegraadsfunctie $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c (a \neq 0), x \in \mathbb{R}$.
Veronderstel dat de coördinaten van de top T van de grafiek van f zijn (r, s)

Veronderstel dat $\overrightarrow{TA}$ de vector $\begin{pmatrix} p \\ ap^2 \end{pmatrix} (p \in \mathbb{R})$ is.

Dan ligt het punt A op de grafiek van f .

3. Een eenvoudig voorbeeld van deze stelling is het volgende.

We nemen de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Elk punt van de grafiek van f is van de vorm $(p, \frac{1}{2}p^2) (p \in \mathbb{R})$. $O(0, 0)$ is de top. Andere punten van de grafiek van f worden gevonden door op O de translatie

$\begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{2}p^2 \end{pmatrix}$ toe te passen.

4. Nu volgt een wat ingewikkelder voorbeeld.

We nemen de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$, dus $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = -3$.

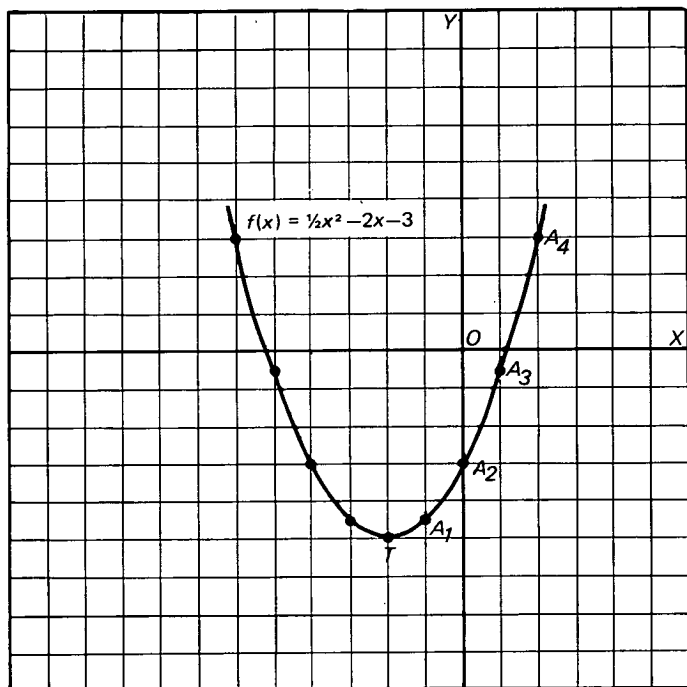
De symmetrieas heeft als vergelijking $x = -\frac{b}{2a} = -2$.

$f(-2) = -5$ (door substitutie). De coördinaten van de top T zijn dus $(-2, -5)$.

Pas op T een aantal translaties $\begin{pmatrix} p \\ \frac{1}{2}p^2 \end{pmatrix}$ toe, neem p bijvoorbeeld achtereenvolgens 1, 2, 3 en 4.

$$\overrightarrow{TA_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{TA_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{TA_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{TA_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Spiegel deze punten in de symmetrieas.



5. Er zijn allerlei manieren om met deze stelling te werken.

- Teken eerst in plaats van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$ de grafiek van $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Bepaal de coördinaten van de top T van de grafiek van f .

$T(-2, -5)$. Pas op de grafiek van g de translatie $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ toe.

De stelling wordt hier alleen gebruikt voor het tekenen van de grafiek van g . In dit geval is een eenvoudiger vorm van de stelling voldoende. Deze eenvoudigere versie is meteen duidelijk.

- Men kan de stelling door de leerlingen laten ontdekken en als vaste procedure voor het tekenen van parabolen laten gebruiken.

- Men kan, na veel voorbeelden, de leerlingen een bewijs laten vinden in de trant van:

als $T(r, s)$ de top is, dan kunnen we op de grafiek van f de translatie $\begin{pmatrix} -r \\ -s \end{pmatrix}$

toepassen. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie $g(x) = ax^2$. De punten van de grafiek van g zijn alle van de vorm (p, ap^2) . De punten van de grafiek van f ontstaan uit de punten van de grafiek van g door 'terugschuiven'. Pas op (p, ap^2) de translatie $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ toe.

De eenvoudigere versie van de stelling wordt weer alleen gebruikt.

- Men kan een formeel algebraïsch bewijs geven, bijvoorbeeld zoals hieronder.

6. Een formeel algebraïsch bewijs van de stelling.

Elke tweedegraadsfunctie kan men voorstellen door

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0), x \in \mathbb{R}$$

of door

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad (a \neq 0), x \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt:

- de vergelijking van de symmetrieas van de grafiek van f is

$$x = -\frac{b}{2a},$$

- de coördinaten van de top T zijn $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$.

Een willekeurig punt A van de grafiek van f heeft coördinaten $(q, aq^2 + bq + c)$.

Voor de vector $\overrightarrow{TA}$ geldt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TA} &= \begin{pmatrix} q + \frac{b}{2a} \\ aq^2 + bq + c - \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2aq + b}{2a} \\ \frac{4a^2q^2 + 4abq + 4ac + b^2 - 4ac}{4a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\frac{2aq + b}{2a}}{a \left(\frac{4a^2q^2 + 4abq + b^2}{4a^2} \right)} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{2aq + b}{2a}}{a \left(\frac{2aq + b}{2a} \right)^2} \right).$$

Stel $\frac{2aq + b}{2a}$ gelijk aan p . Dan volgt het gestelde: $\overrightarrow{TA} = \begin{pmatrix} p \\ ap^2 \end{pmatrix}$.

Daar q een variabele over $\mathbb{R}$ is, is $p = \frac{2aq + b}{2a} = q + \frac{b}{2a} = q + \text{een constante}$, ook een variabele over $\mathbb{R}$.

Over de auteur:

Martin van de Ven begon in 1970 zijn loopbaan als wiskundeleraar aan de Reeburg-mavo te Vught, verhuisde in 1971 naar Curaçao en gaf daar les aan het Triniteit College. Sinds 1974 is hij verbonden aan het Milton Peters College te St. Maarten (N.A.), waar hij naast wiskunde nu ook natuurkunde geeft aan de afdelingen havo en mavo van deze scholengemeenschap.

Nogmaals een limiet

Het bewijs van $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^{-x}) = \infty$ is op twee manieren geleverd: door

Van der Hak (*Euclides* 54, 1979, blz., 421) op basis van een redenering met een somregel en door Van Uden (*Euclides* 55, 1979, blz. 30) via de reciproke. Bij het laatstgenoemde bewijs wordt het verband tussen $\lim f(x)$ en $\lim (1 : f(x))$ bekend verondersteld.

Beide oplossingen vind ik de moeite van het behandelen in de klas waard. Mijn leservaring is van dien aard dat ik denk dat de oplossing van Van der Hak door de leerlingen als moeilijker ervaren zal worden dan die van Van Uden. Toch lijkt het me waardevol de gedachtengang in het bewijs van Van der Hak te behandelen (maar niet voor een schoolonderzoek). De suggestie van Van Uden om uitdrukkingen als $k + \infty = \infty$ te definiëren neem ik niet over. (overbodige uitbreiding die me te veel doet denken aan 'min maal min is plus') Ik stel echter nog een andere oplossing voor. Men hoeft nl. niet terug te gaan tot 1926 of 1943 want in het schoolboek van Vredenduin, *Analyse 2* (1972) komt op blz. 6 een oplossing voor die beter past bij mijn opvatting over de inhoud van het wiskunde I onderwijs: zo diepgaand mogelijk betekenis en gebruik van de afgeleide functie bestuderen.

De voorgestelde oplossing luidt: Neem $f(x) = x + e^{-x}$ en laat zien dat zowel $f'(x)$ als $f''(x)$ op den duur positief is.

E. M. Koerts, leraar wiskunde te Waalwijk. (einde discussie, red.)

Uit de tijdschriften

WISKUNDE EN ONDERWIJS

Driemaandelijks tijdschrift van de
Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars
5e jaargang (1979) Nr. 18

Op 28 oktober 1978 hield de VVWL in het RISO Sint Andries Brugge voor de vierde maal een studiedag in West Vlaanderen. Het thema van deze studiedag was *het onderwijs in de meetkunde aan leerlingen van 12 tot 16 jaar*.

Van deze studiedag wordt in het bovengenoemde nummer van WISKUNDE en ONDERWIJS een uitvoerig verslag gegeven. Uit dit verslag vermelden we enkele bijzondere punten.

Er waren drie spreekbeurten:

1. Willy DEWILDE (K.A. Oostende), *Inventaris van en samenhang tussen de voornaamste begrippen uit de vlakke meetkunde*;
2. Gabriël FEYS (Bisschoppelijke Normaalschool Torhout), *Onderwijs in de meetkunde in het L.S.O.: mogelijkheden, moeilijkheden, wenselijkheden? axiomatisch, systematisch, exemplarisch?*
3. Fernand GOETHALS (K.A. Gent St. Pieters), *Intuïtie en inzicht in de moderne meetkunde*.

1.

Het betoog van W. DEWILDE is opgebouwd rondom twee stellingen:
Na jaren van experimenteren blijft de meetkunde uit de lagere cyclus dat deel van de leerstof waar de leerkrachten het minst houvast aan hebben.

en

Voor de leerkrachten van de hogere cyclus valt het niet steeds gemakkelijk vertrouwd te geraken met de precieze beginsituatie van de leerlingen die aan hen worden toevertrouwd.

In het programma van de lagere cyclus speelt de meetkunde ternauwernood een zelfstandige rol van betekenis, aldus DEWILDE, ofwel duikt ze her en der op als een toepassing van basisbegrippen uit de verzamelingenleer (evenwijdigheid als toepassing van het begrip doorsnede), ofwel dient ze uitsluitend als knecht van de getallenleer (bijv. worden verschuivingen ingevoerd om de optelling in $\mathbb{R}$ een steuntje te geven).

DEWILDE probeert een inventaris te maken van het belangrijkste meetkunde-materiaal dat een leerling moet meetorsen, als hij de beslissende stap zet van lagere naar hogere cyclus.

Gabriël FEYS begint zijn betoog met de vraag: vernieuwing van het wiskunde-leerplan, een processie van Echternach?

Naar aanleiding van een voorbeeld van een in eerste instantie mislukte, maar in tweede instantie 'gelukke' overhoring van een stelling met zijn bewijs stelt FEYS vast dat bij het onderwijs in de wiskunde, en in het bijzonder in de meetkunde, twee problemen de aandacht verdienen:

1. Het ontbreken van duidelijke *algemene wiskundedoelstellingen* die voldoende *continuïteit* en *progressie* laten zien over de zes jaar secundair onderwijs.
2. het gebrek aan *aangepaste werkwijzen* om deze doelstellingen te realiseren, in het bijzonder om een aantal 'moeilijke hindernissen' in de meetkunde te nemen.

FEYS herinnert aan een uitspraak van G. POLYA:

eerst experimenteren, dan een vermoeden onder woorden of in formulevorm brengen en tenslotte het bewijs leveren zijn drie fasen in het wiskundig leerproces die elk even belangrijk zijn.

Daartegenover staat dikwijls het standpunt van de leerkracht: alleen 'geven' wat de leerlingen moeten 'kennen'. De rest is 'ballast' en dan geeft men een mooie 'samenvatting' of 'synthese' die de leerlingen moeten 'leren', omdat men daaruit zal 'ondervragen'.

Veel aandacht geeft FEYS aan het 'invoeren' van begrippen als 'axioma', 'definitie' en 'bewijsvoering'. Het is interessant zijn gedachten te vergelijken met datgene wat op dit gebied in de Nederlandse schoolboeken wordt aangetroffen.

FEYS onderzoekt vervolgens welke steun de didaktiek van de wiskunde kan krijgen van enkele klassifikatiesystemen, zoals de taxonomieën van BLOOM, het intelligentiemodel van GUILFORD of de zg. kubus van DE BLOCK.

Hoever de doelstellingen voor het meetkunde-onderwijs in Nederland verschillen van die in België. blijkt bijvoorbeeld uit een vraag van FEYS:

De studie van het isomorfisme van groepen wordt in het type I-leerplan van het katholiek onderwijs, tweede leerjaar, niet tot de minimumdoelstellingen gerekend. Kan het werkelijk niet? Of schieten we didactisch tekort om dit begrip op een inzichtelijke manier te laten verwerken?

FEYS eindigt zijn betoog met een mooi 'verhaaltje' over een Zweedse inspecteur van het lager onderwijs en zijn ontmoeting met een leerplichtig jongetje.

De derde spreker (Fernand GOETHALS) begon als volgt:

‘Toen men mij vroeg een spreekbeurt te houden over het meetkunde-onderwijs in de eerste vier jaren van het secundair onderwijs, heb ik wel even geaarzeld om daarop in te gaan. (...) Maar toen ik bij een herhalingsondervraging in de SWI, als voorbeeld van een isometrie een homothetie hoorde noemen en als definitie van *draaiing* kreeg: ‘een spiegeling om 2 niet gescheiden assen’, dan besloot ik dat er toch iets verkeerd loopt met ons meetkunde-onderricht’.

Het is niet eenvoudig van de samenvatting, die GOETHALS van zijn betoog geeft, nogmaals een samenvatting te geven, in het bijzonder ook omdat dit betoog steunt op een groot aantal figuren en schema's. Hoofdonderwerpen van deze spreekbeurt waren de groepen in het meetkunde-onderwijs en de isomorfismen (niet alleen bij groepen, maar vooral van vectorruimten.)

G. Krooshof

Ontvangen boeken

VAN A TOT Z wiskunde werkschrift voor het lbo 2a, met bouwplaat, ISBN 90 231 3251 3, Muusses, Purmerend.

VAN A TOT Z wiskunde werkschrift voor het lbo 2b, met bouwplaat en tabellen ISBN 90 231 3251 1

VAN A TOT Z wiskunde werkschrift voor het lbo 2c, ISBN 90 231 3253x

TOELICHTING bij de wiskunde werkschriften voor het lbo, tweede leerjaar door P. M. van Hiele met medewerking van J. Coppens, H. L. de Groot, J. A. Hartman, H. Langbroek, A. J. Leenaars, R. Overvelde, R. Sam-Sin, Zr. H. Scheltinga en W. IJsseldijk.

Denken, doen en begrijpen, deel 1CD, f 26,00.

Denken, doen en begrijpen, deel 2CD, f 29,50.

Handleiding bij deel 1CD, f 21,00

Handleiding bij deel 2CD, f 16,00

Uitg. Spruyt, Van Mantgem & De Does, Leiden.

Opgaven

413. Op grond van telresultaten over een lange periode is gebleken dat de gemiddelde bezetting op een bepaalde buslijn 13 is.

Reactie van de heer Daniels, een van de busklanten. Als ik nooit met de bus ging zou dat in het gemiddelde niet merkbaar zijn. Men had ook dan 13 gevonden. Als ik meega, zit er dus een passagier extra in de bus. In die ritten zal de gemiddelde bezetting 14 zijn.

Hoe reageert u op de heer Daniels?

414. Gegeven zijn vier congruente glazen. In de glazen bevinden zich willekeurige hoeveelheden water. Men mag de volgende handelingen verrichten:

a een glas leeggieten in een ander glas

b de inhoud van een glas overschenken in een ander glas totdat dit vol is

c uit glas x water overschenken in glas y totdat in glas y evenveel water is als in glas z (x , y en z verschillend)

d een echt deel van het water uit een glas overgieten in een ander glas.

Gevraagd het water zo te verdelen over de glazen, dat in drie glazen zich evenveel water bevindt.

Oplossingen

411. Vul voor de letters cijfers in.

$$\begin{array}{r} 1\ a\ b\ c\ d \\ 1\ e\ f\ g\ h \\ \hline i\ j\ k\ l\ 0 \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} m\ n\ o\ p\ q \\ r\ 8\ s\ 0\ t \\ u\ 8\ v\ 0\ w \\ \hline 1\ a\ b\ c\ d \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 7\ 9\ .\ 1\ 9\ 8\ 0 \end{array}$$

Drie cijfers 1 zijn hierin reeds ingevuld.

Hieronder een schets van de gedachtengang.

Eerst een schets van de mogelijkheden voor a en e en de daaruit resulterende waarden voor u . Let op $u\ 8$.

$e\ a\ u$	$e\ a\ u$	$e\ a\ u$
2 4 2	5 3 6	6 6 9
3 2 3		
3 6 4	5 5 7	7 1 7
4 2 4	5 7 8	7 2 8
4 4 5	6 1 6	7 4 9
4 7 6	6 3 7	8 1 8
5 1 5	6 4 8	8 2 9

Wegens $a + u = 8$ of $a + u = 7$ blijven alleen over:

$e = 6$, $a = 1$, $u = 6$ hetgeen spoedig vastloopt;

$e = 7$, $a = 1$, $u = 7$ waarmee deze drie cijfers vastliggen.

Hieruit volgt, dat b alleen maar 1 of 2 kan zijn. We vinden nu als mogelijkheden voor b , r en f :

$b r f$
 1 8 8
 1 7 7
 2 7 7

De eerste mogelijkheid geeft $\overline{cd} \geq 43$, wegens de 8 in het vierde produkt. Dit levert strijdigheid met het derde produkt.

De derde mogelijkheid leidt eveneens tot een strijdigheid. Men ziet dit door de consequenties ervan uit te werken. Nu zijn ook b , r en f bekend.

Wegens $\overline{cd} \geq 43$ en de 0 in het derde en vierde produkt, is voor $\overline{cd}$ alleen mogelijk 43, 44, 58, 72, 86, 87. Wegens de 0 van 1980 vervallen 43 en 87. Uitwerking van de diverse mogelijkheden doet alleen 72 overblijven. De vermenigvuldiging wordt dan :

$$\begin{array}{r} 11172 \\ 17715 \\ \hline 55860 \end{array} \times \begin{array}{r} 11172 \\ 78204 \\ 78204 \\ 11172 \\ \hline 197911980 \end{array} +$$

412. Gevraagd te berekenen

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

waarin a_i het natuurlijke getal is dat het dichtst ligt bij $\sqrt{i}$.

Deze som is een natuurlijk getal voor $n = 1892$. Wat is de eerstvolgende waarde van n waarvoor deze som weer een natuurlijk getal is?

Hoeveel termen van de som zijn bijv. gelijk aan $\frac{1}{78}$?

Dat zijn de termen waarvoor

$$17,5 < \sqrt{i} < 18,5 \\ 17,5^2 < i < 18,5^2$$

Hun aantal is $18,5^2 - 17,5^2 = 36$.

In het algemeen zijn er $2i$ termen gelijk aan $\frac{1}{i}$.

De som is dus een natuurlijk getal als

$$n = 2 \text{ of } n = 2 + 4 = 2 \cdot 3 \text{ of } n = 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4 \dots$$

Dus als $n = i(i + 1) \quad (i \in \mathbb{N})$.

Voor $i = 43$ is dit gelijk aan 1892. Voor $i = 44$ is het daarna gelijk aan 1980.

Waarmee de heer Troelstra onze lezers een goed jaar toewenst.

Boekbesprekingen

Watson Fulks, *Advanced Calculus, an introduction to analysis*, 3e druk, John Wiley & Sons, Chichester, 731 bl., £ 13,50.

Zoals de titel aangeeft dient dit boek als leidraad bij het universitair aanvangsonderwijs in de analyse. Om aan de bekende problemen in dit onderwijs het hoofd te bieden, maakt de schrijver veelvuldig gebruik van meetkundige overwegingen, doet hij meermalen een beroep op meetkundige intuïtie.

Door dit beroep op de heuristiek hoopt de schrijver een beter begrip te kunnen wekken voor de nogal abstracte theorie. Hij weet op natuurlijke wijze tot dat abstracte niveau te geraken. Naar mijn mening is de schrijver hiermee uitstekend in zijn opzet geslaagd. Het geheel is daardoor een uiterst aantrekkelijk leerboek geworden.

Een overzicht van de inhoud:

Part I

Calculus of one variable: The number system; Functions, sequences, and limits; Continuity and more limits; Differentiation; Integration; The elementary transcendental functions.

Part II

Vector calculus: Vectors and curves; Functions of several variables, limits and continuity; Differentiable functions; The inversion theorem; Multiple integrals; Line and surface integrals.

Part III

Theory of convergence: Infinite series, Sequence and series of functions, uniform convergence; The Taylor series; Improper integrals; Integral representations of functions; Gamma and Beta functions, Laplace's method and Stirling's formula; Fourier series.

Door het boek heen zijn vele vraagstukken opgenomen verdeeld naar opklimmende moeilijkheid in 3 klassen A, B, C.: van rechtstreekse toepassingen van de theorie tot vraagstukken die beroep doen op eigen inzicht en om een eigen, creatieve, oplossing vragen. Van vele vraagstukken zijn achterin het boek de oplossingen en/of aanwijzingen tot de oplossing vermeld.

Het boek wordt besloten met een uitvoerige index.

Het gehele werk is keurig uitgevoerd.

Na het bovenstaande zal mijn conclusie duidelijk zijn: een uitstekend leerboek voor de analyse en wat betreft de presentatie van de leerstof en wat betreft de gebruikswaarde voor de student.

W. Kleijne

J. C. Abbott (editor), *The Chauvenet Papers, A Collection of prize-winning expository papers in mathematics, deel 1 en 2*, The Mathematical Association of America, John Wiley & Sons Ltd, elk deel \$ 18,- (£ 9.95).

Van deze boekbespreking zijn op blz. 158 de volgende regels weggevallen:

Carl Douglas Olds: The simple continued fraction expansion of e .

Peter D. Lax: The formation and decay of shock waves.

Martin D. Davis, Reuben Hersh: Hilbert's tenth problem.

Lawrence Zalcman: Real proofs of complex theorems (and vice versa).

Een uitvoerige index besluit beide boeken (in beide dezelfde index).

Het geheel is keurig verzorgd.

W. Kleijne

Mededelingen

Wiskunde A B C - cursussen in 1980

Sinds 1973 heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren samen met het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (I.O.W.O.) jaarlijks een aantal didactiek-cursussen, de zogenaamde A B C-cursussen, georganiseerd. Enige maanden geleden leek het erop dat deze cursussen na 1979 niet meer gehouden zouden kunnen worden omdat de subsidiëring ervan beëindigd zou worden. Inmiddels is er een 'Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde' geformeerd, dat zich onder andere tot doel stelt de zo succesvolle A B C-cursussen te continueren. In dit werkverband wordt deelgenomen door:

- De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren;
- Het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (I.O.W.O.);
- De wiskunde-afdelingen van de Nieuwe Leraren Opleidingen;
- De wiskunde-afdelingen van de Universitaire Leraren Opleidingen.

Het werkverband organiseert een B- en een C-cursus in het voorjaar van 1980. De B-cursus gaat over 'Samenwerken' en wordt gehouden op 6, 7 en 8 maart. De C-cursus heeft als thema: 'Oog krijgen voor en rekening houden met verschillen tussen leerlingen' en is op 27, 28 en 29 maart 1980.

De cursussen zijn bestemd voor 1e-, 2e- en 3e-graads leraren, die reeds een A- respectievelijk een A- en een B-cursus gevolgd hebben. De reis- en verblijfkosten van de cursus worden gesubsidieerd. Een nadere toelichting is in de eerste week van januari 1980 aan de scholen voor voortgezet onderwijs gezonden. We verzoeken geïnteresseerden gebruik te maken van de inschrijfformulieren, die daarbij gevoegd zijn.

Het correspondentieadres van het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde is:

F. H. Dolmans
Meyhorst 61-22
6537 LJ Nijmegen.

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij, die zich in 1980 wensen te onderwerpen aan het examen *wiskunde m.o.-A of B*, af te nemen door de *Algemene Commissie*, hetzij volgens het oude programma, hetzij volgens het nieuwe programma, zich uitsluitend kunnen aanmelden door het examengeld à f 60, — vóór 1 mei 1980 over te maken op postrekening 172007 ten name van de voorzitter commissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 's-Gravenhage, met vermelding van *volledige* naam en adres van de kandidaat en de mededeling of men zich opgeeft voor *m.o.-A* dan wel voor *m.o.-B*.

Na 1 mei 1980 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie. Zij ontvangen dan tevens een formulier waarop zij kunnen aangeven of zij het examen volgens het oude programma dan wel volgens het nieuwe programma wensen af te leggen.

De nieuwe programma's zijn omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', Jrg. 63 aflevering 2, november 1975, bldz. 86 t/m 93.

Men kan deze programma's verkrijgen door storting van f 2, — op postrekening 172007 ten name van de voorzitter commissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 's-Gravenhage, met vermelding 'examenprogramma'.

Na 1 januari 1981 is aanmelding voor het examen volgens het oude programma niet meer mogelijk. Men kan de overgangsregeling aanvragen bij de voorzitter van de algemene examencommissie wiskunde m.o.

Het schriftelijk gedeelte van het A-examen wordt afgenomen op 19 en 20 augustus 1980; het schriftelijk gedeelte van het B-examen wordt afgenomen op 21 en 22 augustus 1980. De schriftelijke zittingen zijn toegankelijk voor iedereen die zich heeft aangemeld.

De minister, namens deze, A. Th. Eijssenring

D'WITTE LELI

Instituut voor de opleiding van leraren vanwege de Stichting Nutsseminarium aan de Universiteit van Amsterdam.

Het bestuur van de Stichting vraagt per 1 augustus 1980 t.b.v. de sectie wiskunde van D'Witte Leli een

hoofddocent(e) wiskunde

voor een volledige weektaak.

Van sollicitanten wordt verwacht:

- een eerstegraads onderwijsbevoegdheid in wiskunde en relevante ervaring in onderwijssituaties;
- dat zij wiskundig en didakties voldoende onderlegd zijn om de leerplanontwikkeling van de sectie te kunnen helpen voortzetten;
- dat zij studenten willen begeleiden tijdens stages op school;
- dat zij bereid en in staat zijn in een team te werken;
- dat zij beschikken over organisatorische en leidinggevende kwaliteiten;
- belangstelling voor de bestuurlijke en administratieve kant van het sectiewerk;
- dat zij bereid zijn om maximaal 1/5 van de volledige weektaak te besteden in de avonden en op zaterdag, in het bijzonder ten behoeve van de nascholing.

Salariëring volgens het rangenstelsel van wetenschappelijke ambtenaren tot maximaal f 7.196,— per maand bij een volledige weektaak.

Nadere inlichtingen kunt u inwinnen bij: drs. L.J.G.M. Wiegerink (docent wiskunde), tel. 020 - 24 06 49 (instituut) of 25 28 83 (privé).

Schriftelijke sollicitaties binnen tien dagen na het verschijnen van dit blad te richten aan het bestuur van de Stichting Nutsseminarium, t.a.v. de personeelsadministratie, Nieuwe Spiegelstraat 17, 1017 DB Amsterdam, onder vermelding van "sollicitatie" linksboven op de enveloppe.

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32^I - Amsterdam (c) - Tel. 020-2628 10

INHOUD:

J. F. A. K. van Benthem: Logische theorie en wiskundige praktijk 249

Th. J. Kortenhagen: Jaarrede 1980 255

Notulen van de algemene vergadering van de N.V.v.W 260

Prof. Dr. N. G. de Bruijn: Van alles en nog wat over gebonden variabelen in wiskundige taal 262

Kluwerprijs 1979 268

A. Hanegraaf: De leesportefeuille 269

B. Lagerwerf: De nivo-theorie van Van Hiele 271

M. van de Ven: Parabolen 277

E. M. Koerts: Korrel 281

G. Krooshof: Uit de tijdschriften 282

Ontvangen boeken 284

Recreatie 285

Boekbesprekingen 287

Mededelingen 288

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

J. F. A. K. van Benthem, Filosofisch Instituut, Westersingel 19, 9718 CA Groningen.

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Technische Hogeschool, postbus 513, 5600 MB Eindhoven.

A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst.

E. M. Koerts, Rembrandtlaan 16, 5161 ES Sprang-Capelle.

Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld.

G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, 9742 AH Groningen.

B. Lagerwerf, Laan van Cattenbroeck 29, 3703 BH Zeist.

M. van de Ven, Flamboyantroad 3, St. Maarten (Ned. Antillen).