

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

55e jaargang

1979/1980

no. 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree -
Dr. P. M. van Hiele - W. Kleine - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens -
W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-15105. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1¹/₂.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-25 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst.

Abonnementsprijs voor niet leden f 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 20,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949*.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

* Per abuis zijn op afl. 1 en 2 verkeerde prijzen opgenomen.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Nivo's in de argumentatie

DR. P. M. VAN HIELE

Er is in de laatste tijd weer veel belangstelling voor nivo's. Er wordt ook over geschreven, maar de artikelen gaan dikwijls over tegenstrijdige zaken. Een vraag is bijvoorbeeld: 'waar bevinden zich de nivo's: in het denken, in de argumentatie, of in het handelen?' Zo'n vraag proberen we natuurlijk te beantwoorden op een manier die past bij de nivoteorie, dat wil zeggen: we beginnen op het nulde nivo.

1 Toen wij in 1955 begonnen met een nivo-teorie op te stellen, was daar natuurlijk al het een en ander aan voorafgegaan. Ik worstelde al jaren met het probleem van de onmacht van de leraar, namelijk de onmacht om de leerlingen iets nieuws te vertellen, om ze werkelijk tot inzicht te brengen. Hierin stond ik natuurlijk niet alleen: sommige teoretici menen, dat een leerling AHA moet zeggen om ons te tonen, dat hij het inzicht heeft verkregen. Dat AHA komt ineens, de docent krijgt het als het ware kado. Goed, de leraar kan een gunstige konditie scheppen voor het ontstaan van het inzicht, maar toch – de leerlingen komen tot inzicht, de leraar praat het ze niet aan. Je krijgt zo de indruk, dat je iets echt nieuws niet kan uitleggen; de leerlingen ontdekken het vanzelf. Eerst vinden ze je taal veel te moeilijk en ná het doorbreken van het inzicht spreken ze ineens de taal zelf. Op de een of andere manier ben je als leraar niet overbodig, want als je geen les geeft, of de leerstof helemaal zonder hulp aanbiedt, dan komen de leerlingen niet verder. Op de een of andere manier heb je de leerlingen – ondanks het aanvankelijke wansukces – toch geholpen, maar wanneer was dat, en hoe?

2 Doordat de leerstof van voor 1968 zo geheel anders was dan die van nu, was het toen gemakkelijker dan nu om de moeilijkheden te lokaliseren. Het begon vroeger bij het benoemen van veelhoeken: een gelijkbenige driehoek werd niet herkend, als zijn basis niet horizontaal was getekend, een vierkant werd wel herkend als ruit, maar niet als vierkant, als een diagonaal horizontaal was getekend. Ofschoon men begonnen was met de definitie, speelde deze bij het herkennen geen rol.

Later kwamen er moeilijkheden bij het bewijzen van stellingen. Een leerling beschouwde het als volkomen korrekt om eerst de cosinusregel te bewijzen met behulp van de stelling van Pythagoras en dan later, als nog eens naar een

bewijs van de stelling van Pythagoras gevraagd werd, met de cosinusregel te komen opdraven. En dat nog wel, nadat stellingen, definities en aksioma's duidelijk bij de uitleg van elkaar waren onderscheiden.

In mijn artikel in *Pedagogische Studiën* van 1955 sprak ik dat zo uit: om een veelhoek op grond van een definitie te kunnen onderscheiden, moet je kunnen denken op het eerste nivo; om te begrijpen wat bewijzen is, moet je kunnen denken op het tweede nivo.

3 In 1955 spraken we van 'denken' op verschillende nivo's en niet van 'handelen' op die nivo's, omdat er toen een duidelijk onderscheid viel waar te nemen tussen denken en handelen. We konden namelijk de leerlingen keurig kongruenties van driehoeken laten bewijzen, zonder dat zij daar veel van snaptten. Zelfs in leerboeken van die tijd kun je het aanleren van zo'n techniek van handelen terugvinden. Je vertelt de leerlingen, dat ze de gelijkheid van drie elementen van de driehoeken onder elkaar moeten noteren, dan komt er een akkolade achter en vervolgens drie letters, zoals HZH. (Opletten jongens, HHH mág niet, de leraar zegt dan ha, ha, ha!). Daarna schrijf je op: dús zijn de driehoeken kongruent. Soms ging er iets scheef: bij de stelling, twee gelijkbenige driehoeken zijn kongruent, als ze een been en een basishoek gelijk hebben, schreven ze: dit gaat volgens ZZZ. Als je dan zei, dat ze toch niets wisten van die basis, dan antwoordden ze: 'maar volgens de kongruentie van de driehoeken zijn de bases toch kongruent!'

Als de leerlingen bij het opschrijven géén fouten maakten, dan handelden zij op het tweede nivo, vielen ze door de mand, dan konden we konkluderen: 'ze denken nog op het nulde nivo'. In die tijd zeiden we: ze handelen mechanisch, ze hebben een kunstje aangeleerd, net als apen.

Ik zou nú liever zeggen: 'de leerlingen handelden zo helemaal niet op het tweede nivo, dat lijkt maar zo, wat ze doen is een maniertje toepassen en dat is handelen op het nulde nivo. Maar we kunnen met zo'n uitspraak beter wachten, tot we de zaak wat verder geanalyseerd hebben.

4 Door de studie voor mijn dissertatie in 1956 en 1957 werd mij duidelijk, dat een groot deel van het menselijke denken en handelen plaats vindt door middel van structuren. Dit principe vond ik in de Gestaltpsychologie en het was bijzonder gelukkig, dat mijn vrouw, die met mij samen promoveerde, juist als onderwerp om met de leerlingen te experimenteren had gekozen: het leggen van tegelvloeren met behulp van kongruente driehoeken of kongruente vierhoeken. Zulke tegelvloeren vertonen structuren, waaruit de leerlingen van alles kunnen aflezen. Bijvoorbeeld de som van de hoeken van een driehoek is 180° en de som van de hoeken van een vierhoek is 360° . Oorspronkelijk denken en handelen de leerlingen op het nulde nivo. Langzamerzamerhand ontwikkelt zich bij de leerlingen het besef, dat de som van de hoeken van *iedere* driehoek 180° en de som van de hoeken van *iedere* vierhoek 360° is. In deze uitspraken maken zij zich los van de getekende structuur en beginnen zij een taal van het eerste nivo te spreken. We kunnen daarna sommetjes opgeven in de trant van: 'van een driehoek zijn twee hoeken gegeven, bereken de derde hoek', 'van een vierhoek zijn drie hoeken gegeven, bereken de vierde hoek'.

Zulke opgaven kunnen met behulp van automatismen worden opgelost en dus met behulp van handelingen op het nulde nivo.

Maar toch: met behulp van de strukturen kunnen leerlingen handelen in nieuwe situaties en het is dus niet vreemd, dat Gestaltpsychologen hebben uitgesproken: inzichtelijk handelen is handelen op grond van een verkregen structuur.

5 De gedachte, dat men in een gegeven structuur moeiteeloos van het ene inzicht naar het andere inzicht komt, hebben wij in de tweede helft van de jaren vijftig niet voldoende uitgewerkt. Toendertijd intrigeerde ons de vraag: 'waarom hebben de leerlingen het zo moeilijk ons te begrijpen?'. De vraag: 'waarom gaat het in vele gevallen zo goed' had onze belangstelling niet. Heel begrijpelijk overigens, want die vraag baart geen zorgen. Maar het is toch goed te weten, dat men de leerlingen tijdenlang moeiteeloos kan laten werken en ontdekken, wanneer men ze maar met steeds dezelfde structuur laat bezig zijn. De structuur van het roosterpapier bijvoorbeeld bevat de begrippen 'koördinaten', 'vektoren', 'afbeeldingen', 'positief en negatief', en nog vele andere. De leerlingen kunnen met van alles kennis maken zonder de structuur te verlaten. Zij blijven in contact met datgene, wat zij met de zintuigen waarnemen, (we zullen voortaan zeggen: wat visueel is) en we zullen dit uitspreken als: zij blijven argumenteren op het nulde nivo.

Zeer jonge kinderen kunnen al vierkanten tot een rooster samenvoegen. Uitleg is daarbij niet nodig, zij kunnen daarmee doorgaan tot de vierkanten op zijn. De eerste eigenschap van structuur is: de structuur laat uitbreiding toe.

De leerlingen kunnen de structuur van de vierkanten ook wijzigen in die van het fietspad. Zij kunnen zes tegels samenvoegen tot er een rechthoek ontstaat. Zij kunnen het rooster gebruiken om er een koördinatenstelsel op aan te brengen. Zij kunnen in het rooster vektoren tekenen. De tweede eigenschap van structuur is: een structuur laat zich verfijnen.

We kunnen nu ook proberen tegelvloeren te leggen van kongruente driehoeken en van kongruente vierhoeken. We kunnen ook onderzoeken, wat er gebeurt, als we een vloer proberen te leggen van kongruente vijfhoeken en we kunnen nagaan, of er vijfhoeken zijn van een zodanige vorm, dat er met die vijfhoeken wél een vloer te leggen is. Hier maken we gebruik van de derde eigenschap van structuur: een structuur zoals die van het rooster kan worden opgevat als een onderdeel van een overkoepelende structuur.

We kunnen de plaats van een punt aanduiden met behulp van koördinaten, we kunnen vektoren aanduiden met kentallen, we kunnen allerlei verbanden weergeven met behulp van getal-operaties. Zo kunnen we de strukturen die in het rooster afleesbaar zijn in verband brengen met strukturen in de getallenwereld. De vierde eigenschap van structuur is, dat men dikwijls kan besluiten over de geheel of gedeeltelijke isomorfie van een structuur met een andere. Doordat strukturen de hierboven genoemde structuur-eigenschappen bezitten, kan men jarenlang bezig zijn met een denken en handelen in deze strukturen. Men blijft daarbij regelrecht in contact met het visuele, dat wil zeggen men blijft steeds denken en handelen op het nulde nivo. Dit is een zeer belangrijke konklusie die wij in de vijftiger jaren nog niet hebben getrokken. Dat is ook niet vreemd, immers, de leerboeken van die tijd waren grotendeels geschreven in

een taal die bij het eerste of tweede nivo van denken behoorde en wij meenden toen, dat het kunnen lezen van die leerboeken tot een van de belangrijkste leerdoelen moest worden gerekend. In een toelichting op het nieuwe leerplan van 1958 kan men lezen, dat het om inzicht te doen is en daarbij dacht men vooral aan inzicht op een hoger nivo dan het nulde.

6 Het wordt nu tijd, dat we eens naar het denken op het eerste nivo gaan kijken. Het kenmerk van zo'n denken op het eerste nivo is: het gaat nu over uitspraken die niet visueel zijn, maar wel handelen over zaken die visueel gemaakt kunnen worden.

Voorbeeld: in een gelijkbenige driehoek komen twee gelijk hoeken voor. We kunnen deze uitspraak niet visueel maken, want het gaat over *iedere* driehoek met twee gelijke zijden, we kunnen niet dubbelvouwen, want je kan niet *iedere* gelijkbenige driehoek dubbelvouwen. We kunnen deze uitspraak toelichten met behulp van een redenering en deze redenering gaat met behulp van niet visuele verbanden. Iedere keer, als we aankomen met een konkrete (visuele) driehoek kan de leerling ons schaakmat zetten door voor te stellen: meet de hoeken maar op, dat is nog veel direkter.

Ander voorbeeld: De driehoek ABC waarvan $A(0, 0)$, $B(5, 0)$ en $C(4, 3)$ is een gelijkbenige driehoek. Beredeneer dat. Een uitspraak van het eerste nivo is: je herkent een gelijkbenige driehoek aan zijn symmetrie-as of aan de gelijkheid van twee zijden.

Op het nulde nivo beweegt zich de handeling: teken de driehoek ABC op roosterpapier en zoek de symmetrie-as. Je probeert op het nulde nivo de rechte door A en het midden $(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ van BC . Deze heeft de richtingsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ welke loodrecht is op de richtingsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ van de rechte BC . Alles aangeleerde oefjes die op het nulde nivo van handelen (en dus van denken) worden uitgevoerd. De gelijkheid van de zijden wordt berekend met behulp van de stelling van Pythagoras. Ook weer een aangeleerd oefje. Een opgaaft als deze, die zich ongeveer op het peil van Mavo-3 bevindt heeft dus een klein stukje denken op nivo 1 nodig. Tenzij we in de examenklas deze opgaaft geheel naar nivo 0 hebben doodgetraind.

7 Voorbeeld van een uitspraak op het tweede nivo van argumentatie: 'Een open bewering gaat over in een ware of niet-ware bewering, als we de erin voorkomende veranderlijke door een konstante vervangen'. Alle begrippen die in deze uitspraak voorkomen zijn niet visueel en hebben ook betrekking op niet-visuele zaken. Als je deze uitspraak moet aanhoren, dan begint het je een beetje te duizelen. Wat is een 'open bewering', wat een 'veranderlijke' wat is een 'ware bewering'. Ze kunnen je er voorbeelden van geven, maar het gaat vooral om de spelregels. Veronderstel, dat er geschreven wordt: ' $ABCD$ is een vierkant'. Is dat nu een open, een ware of een niet-ware bewering? Als naast deze bewering een vierhoek getekend is met de hoekpunten $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ en $D(0, 5)$, dan mag ik wel aannemen, dat er een konstante gesubstitueerd is en dat we met een ware bewering te doen hebben. We zouden niet meer twijfelen, als er geschreven wordt: 'hiernaast is het vierkant $ABCD$ getekend'. De volzin

wordt pas hanteerbaar, als deze vergezeld gaat van een reeks van handelingen die de leerling in staat stelt zélf te gaan handelen bestuurd door een denken op het eerste nivo. Er ontstaat voor de leerling dan pas een structuur op het tweede nivo, als hij voldoende voorbeelden gezien heeft waaruit de structuur voor hem valt af te lezen.

Het is dus met zo'n structuur op het tweede nivo vrij miserabel gesteld. De meest geschikte manier om over zo'n structuur te beschikken is, dat men zélf de structuur schept. Als men de structuur van een ander moet overnemen, dan zijn er vele, zeer vele voorbeelden nodig en men heeft pas zekerheid, dat het benodigde inzicht is verkregen, als men met intentie adekwaat weet te handelen in nieuwe situaties. De schepper van de structuur zegt dan: 'goed zo jongen, je hebt het begrepen', of misschien wel: 'je hebt gelijk, dat heb ik er nog niet in gezien'.

In het voortgezet onderwijs komt er van het argumenteren op het tweede nivo niet veel terecht. Meestal worden er niet genoeg voorbeelden gegeven en men is noodgedwongen tevreden, als de leerling zijn meester weet na te praten. In het allerbeste geval argumenteert de leerling dan op het eerste nivo.

8 *Selz* heeft zich voornamelijk bezig gehouden met uitspraken op het eerste en tweede nivo en hij heeft ontdekt, dat deze uitspraken onderworpen zijn aan een structuur die aan dezelfde wetten voldoet als de structuren van het nulde nivo, dus de visuele structuren. Waarschijnlijk hierdoor is het mogelijk vele structuren van hogere nivo's door middel van symbolen visueel te maken, dat wil zeggen te reduceren tot structuren van het nulde nivo. Een voorbeeld van zo'n reductie is de symbolische logika. Iemand die daarin getraind is rekent met behulp van de logische symbolen, door middel van handelingen op het nulde nivo. Hij moet pas argumenteren op een hoger nivo, wanneer een tegenstrijdig stel uitkomsten hem waarschuwt, dat er een einde gekomen is aan de door hem veronderstelde isomorfie.

Het is dit gebruik van symbolen, dat het ons mogelijk maakt gemakkelijker redeneringen op het eerste en tweede nivo te houden. Er is echter ook een gevaar aan verbonden. Om werkelijk te mogen zeggen, dat men zélf op het hogere nivo gedacht heeft, moet men de symbolen ook kunnen vertalen, men moet kunnen laten zien waarmee men bezig is. Anders is er geen inzicht, men kan niet handelen in nieuwe situaties. Ik geef hiervan een voorbeeld:

Gevraagd wordt op te lossen in $\mathbb{R}$ de ongelijkheid: $x^2 + x > 6$. Als iemand mij vraagt, wat hier nu eigenlijk staat, dan moet ik gaan vertellen, wat $\mathbb{R}$ is, wat men verstaat onder 'oplossen' in deze kontekst en dat zijn allemaal uitleggingen op het tweede nivo. Een leerling die de opgave gaat maken, zegt bij zichzelf: 'ik teken een grafiek van de functie: $x \rightarrow x^2 + x - 6$, bereken de snijpunten met de x -as, enz.' Het denken op het tweede nivo hoeft niet, die is in het uit het hoofd geleerde recept geïntegreerd. De leerling heeft nooit op het tweede nivo voor dit doel hoeven te denken, want dat heeft de docent of de leermethode voor hem gedaan. Daarna begint het handelen, voor het grootste deel op het nulde nivo. De leerling kan ook als volgt redeneren: 'ik herleid op: $x^2 + x - 6 > 0$, dat herleid ik op $(x + 3)(x - 2) > 0$ en dan pas ik de regel toe: een produkt is positief, als de twee factoren hetzelfde toestandsteken

hebben, enz'. De herleidingen geschieden op het nulde nivo, de daarop volgende redenering is van het tweede nivo, maar daarop heeft de leerling zelf niet gedacht, zie boven.

Maar nu wordt gevraagd de ongelijkheid in de verzameling $\mathbb{C}$ van de complexe getallen op te lossen. Als ik voor deze ongelijkheid geplaatst werd, zou ik zeggen: 'Om zo'n ongelijkheid zinvol te doen zijn in $\mathbb{C}$, moet je over een ordening van de complexe getallen beschikken. Ik zelf ken zo'n ordening niet, dus ik moet maar eens gaan kijken in het boekje waarin dit probleem gesteld wordt, hoe daar een ordening in de complexe getallen is aangebracht.' Ik kan dus een begin maken met een handeling in deze nieuwe situatie, er is dus een begin van inzicht. Dat komt, omdat ik het probleem bestuur door een denken op het tweede nivo. De leerling die braaf oefjes toepast komt er niet uit, tenzij hij ook oefjes voor het complexe vlak heeft leren toepassen.

9 Het is volkomen normaal, dat we redeneringen van het tweede nivo door middel van symbolen en verbalismen terugbrengen tot handelingen van het nulde nivo. Het zou niet anders kunnen, denken op het tweede nivo is veel te vermoeiend en velen moeten het telkens af laten weten. We hebben bij die handelingen ook een taaltje van het nulde nivo aangeleerd. We schrappen links en rechts hetzelfde getal, we brengen naar de andere kant, we gaan kruiselings vermenigvuldigen. Maar we moeten ons dan wel bewust zijn, dat deze handelingen van het nulde nivo ons bij problemen van het tweede nivo niet verder brengen. Men mag dan geen zogenaamde inzichtvragen stellen.

Wie uitgelegd heeft, wat sin en cos is, de grafieken van sin en cos heeft laten tekenen, de sinus- en cosinusregel praktisch heeft laten toepassen, die mag niet als inzichtvraag stellen: 'wat weet je op het segment $[0, 2\pi]$ van de functie $f: x \rightarrow \sin^2 x + 2\cos^2 x$?' Het is een prachtvraag om in een klasgesprek, met steun van de docent, te laten analyseren. In het v.w.o. mag men verwachten, dat na enige tijd opgemerkt wordt, dat de beeldwaarden niet negatief zijn. Na nog langere tijd, dat ze niet groter zijn dan 3. Heel lang zal het duren voor de leerlingen de grenzen 1 en 2 gevonden hebben en zien dat die grenzen ook bereikt worden. Dat de beeldwaarde $f(a)$ gelijk is aan $f(\pi - a)$, $f(\pi + a)$ en $f(2\pi - a)$ zal heel moeilijk gevonden worden. En toch zouden al deze zaken met inzicht op het tweede nivo kunnen worden gevonden. Ze worden niet gevonden, omdat de leerlingen op dat nivo niet zelfstandig hebben leren denken. Als men van plan is zulke zaken op een proefwerk te vragen, dan zal men hierop moeten prepareren door voorbeelden die het denken terugbrengen naar een lager nivo.

10 De denknivo's zijn niet uitgedacht om daarmee een zware theorie op te zetten. We hebben ze ter sprake gebracht om er iets mee te gaan doen. Je kunt ze bij het opzetten van leermetode gebruiken door

1° zo lang mogelijk in eenzelfde structuur van het nulde nivo te laten opereren.
2° de veralgemeningen die uit deze structuren voortvloeien zeer geleidelijk te uiten. Volgens het schema: structuur nulde nivo – veralgemening – structuur nulde nivo – iets uitgebreider veralgemening – structuur nulde nivo. Dit is de telescoped reteaching.

3° bij het gebruik van symbolen telkens weer terug te gaan naar de visuele

structuren waar ze op slaan. Hierdoor wordt het mogelijk een structuur van het eerste nivo op te bouwen waarin de symbolen een plaats hebben. 4° bij testvragen niet naar inzicht te vragen voor men met enige redelijkheid mag verwachten dat er bij een voldoende aantal leerlingen inzicht ontstaan is.

5° terminologieën die bij een hoger nivo behoren volledig buiten spel te laten, zo lang dit nivo nog niet bereikt is.

Docenten kunnen iets hebben aan de theorie van de argumentatienivo's doordat ze met die theorie kunnen begrijpen, wat ze redelijkerwijs van een leerling mogen verwachten. Door middel van de argumentatienivo's komt men tot een herwaardering van moeilijk en niet moeilijk. Moeilijk is een redenering op het eerste nivo, zeer moeilijk is een redenering op het tweede nivo. Niet moeilijk is meestal een handeling op het nulde nivo. Is deze echter een oefje, d.w.z. een recept behorende bij een argumentatie van het eerste nivo, dan moet men niet verbaasd zijn, als de leerlingen zich vergissen, zodra de situatie even anders is als die waarin het recept werd gedemonstreerd.

Door middel van de kennis van de argumentatienivo's kan men verschillende teleurstellingen in zijn onderwijs begrijpen en in de toekomst vermijden.

Het 1ste-lustrumcongres van de VVWL

De Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars bestaat 5 jaar. Dit is gevierd met een congres. Een viering, die de jonge vereniging in alle opzichten waardig was en waarop de deelnemers met veel genoegen terugzien. De plaats van het congres, het Provinciaal Domein te Oostmalle, bleek een goede keus te zijn om de deelnemers, naast het aanbieden van een goed samengesteld, driedaags programma, ruimschoots gelegenheid te geven voor onderlinge ontmoetingen in gesprek, spel en dans.

De thema's waren: onderwijs in de meetkunde en knelpunten in het wiskunde-onderwijs. Het programma staat vermeld in het juni/juli-nummer van Euclides 1978/1979. De lezingen bleken zonder afbreuk te doen aan het nivo begrijpelijk voor de toehoorders. Dat bleek bij de discussies en de gesprekken in de wandelingen. Hierbij moet wel gezegd worden, dat het mij voorkomt, dat de Vlaamse 1e- of 2e-graads leraar zo vertrouwd is met de verschillende soorten meetkunde dat hij er zelfs in de klas wat mee kan doen. Toch worden door dit programma de verschillen tussen het Belgische en Nederlandse wiskundeonderwijs duidelijk. In België staan de structuren centraal; dus de vraag: hoe zit het in elkaar? Hoe liggen de onderlinge relaties? Hoe is de opbouw? In Nederland zal men zich eerder afvragen: wat kan je er mee doen? Wat nut mij dit? Hoe is de relatie met de praktijk of met toepassen in andere gebieden??

Zijn er hoogtepunten te noemen? Voor mij persoonlijk waren dit de voordracht van de Utrechtse hoogleraar Dirk van Dalen: 'Delen door nul. Noodzaak misverstand?' en de voordracht van prof. dr. Freddy Dumortier: 'Elementaire catastrofes'. Daarnaast mag niet onvermeld blijven de voordracht van inspecteur René Laumens over 'Constructies in het meetkundeonderricht': een serie voorbeelden van probleemgericht onderwijs voor leerlingen van verschillend nivo. Met het noemen van deze namen loopt men het gevaar andere sprekers en spreeksters te kort te doen, want het programma vermeldde veel gelijktijdig gehouden voordrachten. Alle voordrachten verschijnen in het kwartaalblad 'Wiskunde en Onderwijs' van de VVW.

Toch heb ik op dit congres iets gemist, n.l. de leerling. Er is veel en met verve gesproken over wiskunde en hoe wiskunde in de klas gebracht kan worden. Vragen betreffende presentatie van leerstof met het oog op het ontwikkelingsnivo van de leerling of met het oog op begrips- of inzichtsvorming, vragen betreffende leerprocessen bij wiskunde-onderwijs, vragen betreffende het gebruik van de resultaten van de leerpsychologie bij het wiskunde-onderwijs zijn niet expliciet aan de orde gesteld. Als verontschuldiging mag aangevoerd worden, dat op een studiedag van de VVWL in mei 1979 de leerling zeer centraal stond. Een andere zaak, die niet onopgemerkt mag blijven, is het grote aantal dames op dit kongres. En niet alleen als deelneemsters, maar ook als sprekers of in de organisatie. Ik heb me laten vertellen, dat in België één op de drie studenten wiskunde een vrouw is. Vanwaar dit verschil met Nederland?

Het Belgische wiskundeonderwijs kent ook zijn problemen. Ook daar wordt gewerkt aan nieuwe onderwijsprogramma's en ontstaan de discussies tussen behoudender en vooruitstrevenden, tussen de rekkelijken en de preciezen. Maar desondanks kan de VVWL, gezien de bruisende levenskracht die uit dit lustrum sprak, met vertrouwen de komende vijf jaar in gaan.

J. J. Sloff

Kongruentie en gelijkvormigheid

WIM PIJLS

1 Inleiding

Met betrekking tot de begrippen kongruentie en gelijkvormigheid treffen we in de schoolboeken o.a. de volgende definities aan:

Twee figuren zijn kongruent als het mogelijk is door spiegeling, translatie, rotatie of enkele van deze afbeeldingen na elkaar de ene figuur over te laten gaan in de andere. (Sigma, deel 2 mh. blz. 59)

Twee figuren zijn gelijkvormig als het mogelijk is door spiegeling, translatie, rotatie, vermenigvuldiging of enkele van deze afbeeldingen na elkaar de ene figuur over te laten gaan in de andere. (Sigma, deel 3 m, blz. 123)

Een gelijkvormigheidsafbeelding is een samenstelling van een vermenigvuldiging (met faktor $\neq 0$) en een kongruentieafbeelding. (Getal en Ruimte, deel 3 MIV-2, blz. 60)

Twee veelhoeken noemt men gelijkvormig als er een derde veelhoek bestaat die kongruent is met de eerste en een homotetische ligging heeft met de tweede veelhoek. (van A tot Z, deel M4, 3a blz. 31; de definitie die van 'homotetische ligging' gegeven wordt is nauw verwant met die van puntvermenigvuldiging)

De definitie van kongruentie van figuren roept de volgende vraag op: hoe kan men de transformaties beschrijven die ontstaan bij samenstelling van rotaties, translaties en/of spiegelingen?; ofwel: hoe ziet de groep er uit die voortgebracht wordt door alle lijnspiegelingen, translaties en rotaties (= groep van kongruentieafbeeldingen)?

De definities van gelijkvormigheid van figuren doen de volgende vraag rijzen: hoe kan men de transformaties beschrijven die ontstaan bij samenstelling van kongruentieafbeeldingen en puntvermenigvuldigingen?; ofwel hoe ziet de groep eruit die voortgebracht wordt door alle kongruentieafbeeldingen en puntvermenigvuldigingen (= groep van gelijkvormigheidsafbeeldingen)?

We zullen in dit artikel op deze vragen ingaan.

Allereerst enkele notatieafspraken:

S_l geeft de lijnspiegeling om de lijn l aan.

$T_{\vec{v}}$ geeft de translatie over vektor $\vec{v}$ aan.

$R_{A,\alpha}$ geeft de rotatie om punt A over een hoek ter grootte α ($\alpha \in \mathbb{R}$) aan.

$V_{A,k}$ geeft de puntvermenigvuldiging met centrum A en faktor k ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$) aan.

In plaats van lijnspiegelingen spreekt men ook kortweg over spiegeling.

Rotatie over een hoek β met $\beta = 180^\circ \bmod 360^\circ$ heet ook puntspiegeling.

De transformatie die ontstaat door een translatie gevolgd door een spiegeling om een as evenwijdig aan de drager van de translatievector heet een schuifspiegeling of glijspiegeling.

2 De groep der kongruentieafbeeldingen

De stellingen die handelen over de samenstelling van spiegelingen, rotaties en translaties worden in diverse boeken over transformatie-meetkunde uitvoerig behandeld. Zie [1], [2], [3], [4], [5]. We geven dan ook slechts een beknopt overzicht van een aantal stellingen. Voor de bewijzen verwijzen we naar de literatuur.

- 1a. Iedere rotatie $R_{A,\alpha}$ is te schrijven als de samenstelling van twee lijnspiegelingen, waarbij de spiegellijnen elkaar snijden in A .
- 1b. Iedere translatie $T_{\vec{v}}$ is te schrijven als de samenstelling van twee lijnspiegelingen waarbij de spiegellijnen beide loodrecht op de drager van $\vec{v}$ staan.
- 2a. De samenstelling van twee lijnspiegelingen $S_m \circ S_l$ met $l \nparallel m$ is gelijkwaardig met een rotatie om het snijpunt van l en m .
- 2b. De samenstelling van twee lijnspiegelingen $S_m \circ S_l$ met $l \parallel m$ is gelijkwaardig met een translatie in de richting loodrecht op l .
- 3a. De samenstelling van twee translaties $T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{v}}$ levert weer een translatie op.
- 3b. De samenstelling van twee rotaties $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta}$ levert weer een rotatie op mits $\alpha + \beta \neq k \cdot 360^\circ$; de samenstelling $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta}$ levert een translatie op als $\alpha + \beta = 360^\circ \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- 3c. De samenstelling van translatie en rotatie (in willekeurige volgorde) $R_{A,\alpha} \circ T_{\vec{v}}$ of $T_{\vec{v}} \circ R_{A,\alpha}$ levert een rotatie op (mits $\alpha \neq k \cdot 360^\circ$).

Uit de punten 1, 2 en 3 volgt onmiddellijk:

- 4a. De samenstelling van een even aantal lijnspiegelingen levert een rotatie of een translatie op.
Ofwel: de samenstelling van een even aantal lijnspiegelingen is te schrijven als een samenstelling van twee lijnspiegelingen.
Hieruit volgt onmiddellijk:
- 4b. De samenstelling van een oneven aantal lijnspiegelingen is ook te schrijven

als de samenstelling van drie lijnspiegelingen.

5. De samenstelling van drie lijnspiegelingen waarbij de assen konkurrent zijn, is ook te schrijven als één spiegeling.
De samenstelling van drie lijnspiegelingen waarvan de assen niet konkurrent zijn, is te schrijven als een schuifspiegeling.
Men kan deze laatste uitspraak als volgt een fraaie verscherping geven.
Gegeven driehoek ABC . De rechten door A en C , die door A en B en die door B en C heten resp. l , m en n . De voetpunten van de hoogtelijnen uit A en B heten resp. D en E . $S_n \circ S_m \circ S_l$ is dan gelijkwaardig met een schuifspiegeling met de rechte door D en E als as. Voor details zie [5], blz 97.
6. De transformatie die bestaat uit het na elkaar uitvoeren van translaties, rotaties en/of spiegelingen (in willekeurige volgorde) is gelijkwaardig met of een lijnspiegeling, of een translatie, of een rotatie of een schuifspiegeling. Ofwel: twee kongruente figuren zijn in elkaar over te voeren door óf een lijnspiegeling, óf een translatie, óf een rotatie, óf een schuifspiegeling.

3 Enkele stellingen

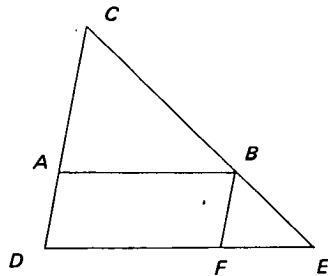
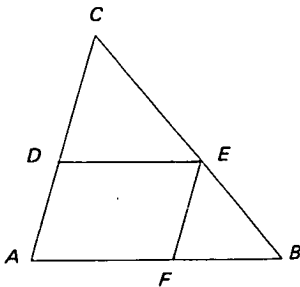
We behandelen nu twee stellingen die we in punt 4 nodig zullen hebben.

Stelling 1

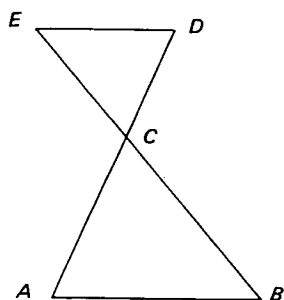
Gegeven driehoek ABC ; op de rechte door A en C resp. op die door B en C ligt punt D resp. punt E ; dan geldt $AD : CD = BE : CE \leftrightarrow AB \parallel DE$.*)
Euclides bewijst in 'De Elementen' deze stelling (boek VI, propositie 2) door oppervlaktes met elkaar te vergelijken. Tegenwoordig bewijst men $\rightarrow$ gewoonlijk door de stelling van de middenparallel te generaliseren waarna $\leftarrow$ uit het ongerijmde bewezen kan worden.

Stelling 2

Gegeven driehoek ABC ; op de rechte door A en C resp. op die door B en C ligt een punt D resp. punt E ; stel er geldt: $AD : CD = BE : CE$; dan geldt ook $AC : DC = BC : EC = AB : DE$.*)



*) Verondersteld wordt tevens dat de 'tussen'-relatie van C t.o.v. A en D op dezelfde wijze vervuld wordt als t.o.v. B en E .



Het bewijs van deze stelling wordt simpel als men een hulplijn EF resp. BF (zie figuren) tekent. In geval C tussen A en D resp. B en E ligt past men eerst een puntspiegeling op D en E toe.

4 Puntvermenigvuldigingen en kongruentieafbeeldingen

Om een inzicht in de groep van gelijkvormigheidsafbeeldingen te krijgen gaan we onderzoeken welke transformaties ontstaan als men puntvermenigvuldigingen en kongruentieafbeeldingen met elkaar samenstelt.

Stelling 3

Gegeven de puntvermenigvuldiging V_{A,k_1} en V_{B,k_2} waarbij $k_1 \times k_2 = 1$.

Dan geldt: $V_{B,k_2} \circ V_{A,k_1} = T_{\vec{v}}$, waarbij $\vec{v}$ gedefinieerd is als $(1 - k_2)\vec{AB}$.

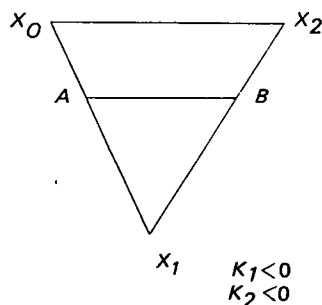
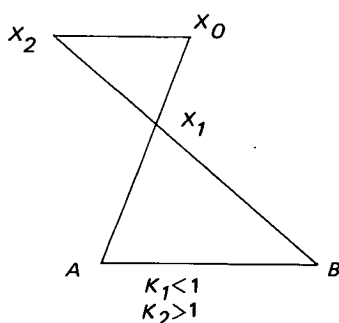
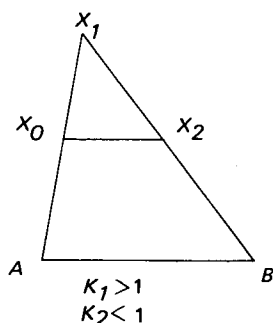
Bewijs.

Neem een willekeurige X_0 .

X_1 is gedefinieerd als $X_1 = V_{A,k_1}(X_0)$

X_2 is gedefinieerd als $X_2 = V_{B,k_2}(X_1)$

Een van de volgende figuren is van toepassing.



Met behulp van de stellingen 1 en 2 bewijst men gemakkelijk in elke figuur:

7 $X_0X_2 \parallel AB$ en $\vec{X_0X_2} = (1 - k_2)\vec{AB}$ ofwel $\vec{X_0X_2} = \vec{v}$.

Dus $X_2 = T_v(X_0)$ voor willekeurige X_0
 ofwel

$$V_{B,k_2} \circ V_{A,k_1} = T_v$$

Stelling 4

Gegeven het punt D , de vektor $\vec{v}$ en het getal k ($k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$)

E is gedefinieerd door de eigenschap $\vec{DE} = \frac{1}{1-k} \vec{v}$

F is gedefinieerd door de eigenschap $\vec{DF} = \frac{k}{1-k} \vec{v}$

Dan geldt:

$$T_v \circ V_{D,k} = V_{E,k} \quad (1)$$

$$V_{D,k} \circ T_v = V_{F,k} \quad (2)$$

Bewijs.

Uit de gegevens volgt: $\vec{v} = (1-k)\vec{DE}$.

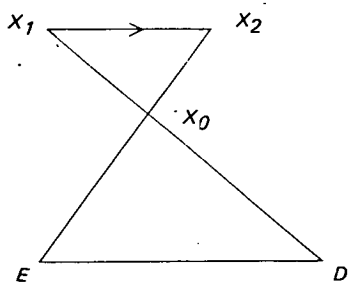
Volgens stelling 3 geldt dan: $T_v = V_{E,k} \circ V_{D,\frac{1}{k}}$

Ofwel:

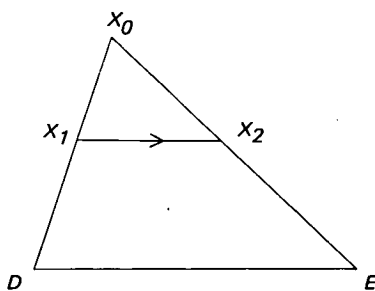
$$T_v \circ V_{D,k} = V_E \circ V_{D,\frac{1}{k}} \circ V_{D,k} = V_{E,k}$$

Het bewijs van (2) verloopt analoog.

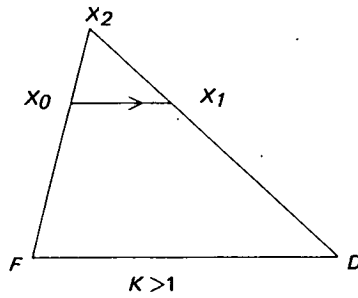
Enkele gevallen worden in beeld gebracht door de volgende tekeningen:



$K > 1$



$0 < K < 1$



X_0 is een willekeurig gekozen punt.

X_1 is het beeld na toepassing van één transformatie op X_0 .

X_2 is het beeld na toepassing van twee transformaties op X_0 .

Men kan eenvoudig nagaan dat de volgende regel geldt voor een snelle constructie van E resp. F :

trek een rechte $\parallel \vec{v}$ door D , trek de rechte door X_0 en X_2 , het snijpunt van deze rechten is E resp. F .

Stelling 5

Gegeven de punten A en B en de getallen k_1 en k_2 met $k_1 k_2 \neq 1$ en $k_1, k_2 \neq 0$.

Dan is er een punt C zodat $V_{B,k_2} \circ V_{A,k_1} = V_{C,k_2 k_1}$

Bewijs.

Definieer $\vec{v}$ als volgt: $\vec{v} = (1 - \frac{1}{k_1})\vec{AB}$

Dan geldt:

$$V_{B,k_2} \circ V_{A,k_1} =$$

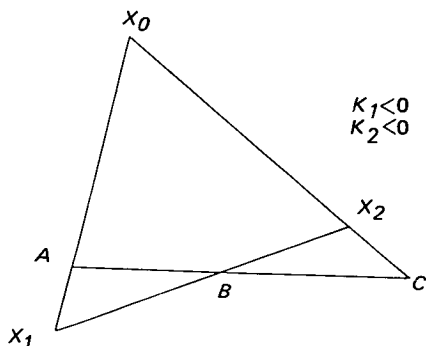
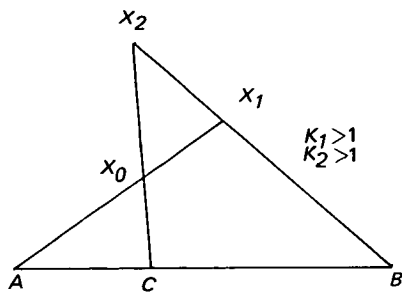
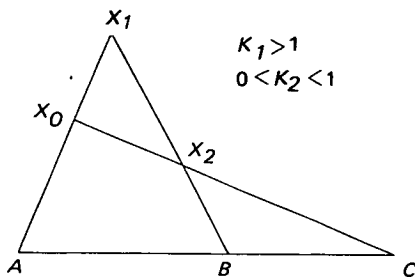
$$V_{B,k_2} \circ V_{B,k_1} \circ V_{B,\frac{1}{k_1}} \circ V_{A,k_1} = \text{(zie stelling 3)}$$

$$V_{B,k_2 k_1} \circ T_{\vec{v}}$$

C is gedefinieerd door de eigenschap $\vec{BC} = \frac{k_1 k_2}{1 - k_1 k_2} \vec{v}$

Dan geldt (zie stelling 4) $V_{B,k_2 k_1} \circ T_{\vec{v}} = V_{C,k_2 k_1}$

De volgende figuren brengen enkele gevallen in beeld.



X_0, X_1, X_2 zijn op dezelfde wijze als in de voorgaande voorbeelden gedefinieerd. Men kan eenvoudig nagaan dat C het snijpunt van de rechte door A en B met die door X_0 en X_2 is.*)

Definitie

Gegeven een rechte lijn l , een punt C en een getal $k (\neq 0)$. C ligt op l . De spiegelstrekking $U_{C,l,k}$ is gedefinieerd als de transformatie $V_{C,k} \circ S_l$ (of $S_l \circ V_{C,k}$).

Stelling 6

Gegeven een rechte l , een punt A en een factor k . Dan zijn er punten C_1 en C_2 en rechten m_1 en m_2 zodat:

$$V_{A,k} \circ S_l = U_{C_1, m_1, k} \quad (3)$$

$$S_l \circ V_{A,k} = U_{C_2, m_2, k} \quad (4)$$

Bewijs:

n is de loodlijn van A op l .

B is het snijpunt van l en n .

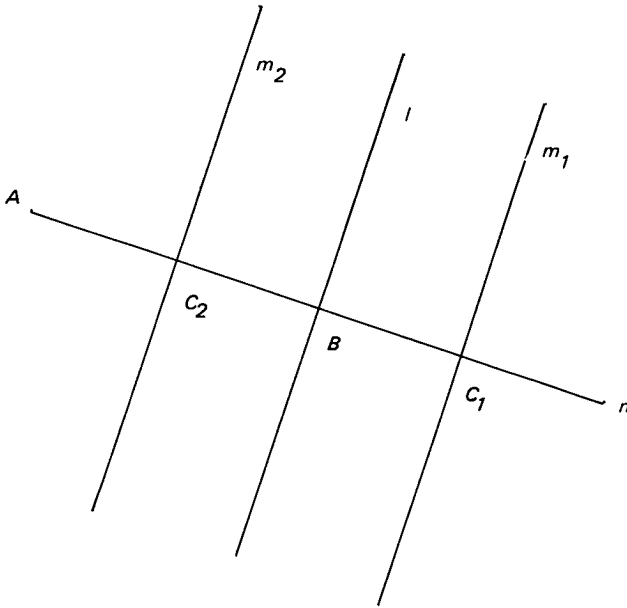
C_1 is gedefinieerd door de eigenschap

*) Het bewijs van de stelling van Menelaos ligt nu binnen handbereik.

$$\vec{BC}_1 = \frac{k-1}{k+1} \vec{AB}.$$

m_1 is de rechte door $C_1 \perp n$

(De figuur heeft betrekking op het geval $k > 1$).



Dan geldt:

$$\vec{AC}_1 = \vec{AB} + \vec{BC}_1 = \frac{k}{1-k} 2 \cdot \vec{C_1B}$$

Hieruit volgt:

$$V_{A,k} \circ S_l \circ S_{m_1} = V_{A,k} \circ T_{2\vec{C_1B}} = (\text{zie stelling 4}) = V_{C_1,k}$$

Ofwel:

$$V_{A,k} \circ S_l = V_{C_1,k} \circ S_{m_1} = U_{C_1,m_1,k}$$

Het bewijs van (4) verloopt analoog. Men moet dan punt C_2 definiëren d.m.v.

$$\text{de eigenschap } \vec{BC}_2 = -\frac{k-1}{k+1} \vec{AB}.$$

Definitie

Gegeven een punt C , een getal α en een getal k ($k \neq 0$).

De draaistrekkings $W_{C,u,k}$ is gedefinieerd als de transformatie $V_{C,k} \circ R_{C,u}$ (of $R_{C,u} \circ V_{C,k}$).

Stelling 7

Gegeven twee punten A en B , een getal α en een getal k . Dan zijn er punten C en D zodat

$$V_{B,k} \circ R_{A,i} = W_{C,i,k} \quad (5)$$

$$R_{A,a} \circ V_{B,k} = W_{D,a,k} \quad (6)$$

Bewijs:

De eerste stap voor het bewijs van (5) is de constructie van punten C en D zodanig dat:

$$\begin{cases} \vec{BC} = k\vec{BD} \\ \angle CAD = \alpha^\circ \text{ (waarbij ook de oriëntatie van de hoek in acht genomen} \\ AC = AD \end{cases} \text{ moet worden)}$$

Deze konstruktie gaat als volgt in zijn werk.

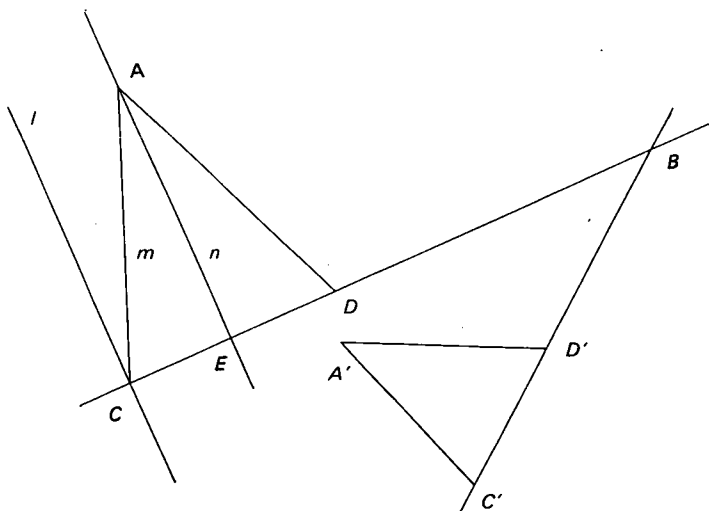
Kies een willekeurig punt C' ; punt D' wordt dan gedefinieerd door de eigenschap $\overrightarrow{BC'} = k\overrightarrow{BD'}$;

konstrueer vervolgens de cirkelboog die alle punten P bevat zodanig dat $\angle C'PD' = \alpha^\circ$ (met inachtneming van de oriëntatie);

het snijpunt van deze cirkelboog met de middelloodlijn heet A' ;

door een draaistrekking kunnen we A' overvoeren in het gegeven punt A ;

de beelden van C' en D' bij deze draaistrekking zijn de gezochte punten C en D .



m is de rechte door A en C .

n is gedefinieerd door de eigenschap $S_n \circ S_m = R_{A,\alpha}$

l is gedefinieerd door de eigenschap $S_m \circ S_l = R_{C,-\alpha}$

Er geldt dan $l \parallel n$.

$$\text{Uit } \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BD} \text{ volgt } \overrightarrow{BC} = \frac{k}{1-k} \overrightarrow{CD} \quad (7)$$

$$\text{Nu geldt: } V_{B,k} \circ R_{A,\alpha} \circ R_{C,-\alpha} = V_{B,k} \circ S_n \circ S_m \circ S_m \circ S_l =$$

$$V_{B,k} \circ S_n \circ S_l = V_{B,k} \circ T_{2CE} = V_{B,k} \circ T_{CD} = (\text{vanwege (7) en stelling 4}) V_{C,k}$$

$$\text{Ofwel: } V_{B,k} \circ R_{A,\alpha} = V_{C,k} \circ R_{C,\alpha} = W_{C,\alpha,k} \text{ waarmee (5) bewezen is.}$$

Op grond van de definitie van C en D volgt meteen:

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{k} \overrightarrow{BC}$$

$$\angle DAC = -\alpha^\circ$$

$$AC = AD$$

Hier ziet men dat, als men (5) wil bewijzen met $\frac{1}{k}$ i.p.v. k en $-\alpha$ i.p.v. α , de C en D van rol wisselen.

Hieruit volgt

$$V_{B,\frac{1}{k}} \circ R_{A,-\alpha} = W_{D,-\alpha,\frac{1}{k}}$$

Als men links en rechts de inverse neemt, krijgt men

$$R_{A,\alpha} \circ V_{B,k} = W_{D,\alpha,k} \text{ waarmee (6) bewezen is.}$$

Stelling 8

Gegeven een eindig aantal transformaties $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Ieder element van deze verzameling is of een kongruentieafbeelding of een puntvermenigvuldiging.

F is gedefinieerd als $F = F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_n$.

Dan geldt: F is of een kongruentieafbeelding
 of een puntvermenigvuldiging
 of een spiegelstrekking
 of een draaistrekking.

Bewijs:

We weten dat bij gegeven punten A, B, C en D en bij een gegeven rechte l en een vektor $\vec{v}$ punten X, Y, Z en een rechte m te vinden zijn zodat:

$$R_{A,x} \circ V_{B,k} = W_{X,x,k} = V_{X,x} \circ R_{X,k}$$

$$S_l \circ V_{C,k} = U_{Y,m,k} = V_{Y,k} \circ S_m$$

$$T_v^- \circ V_{D,k} = V_{Z,k} \text{ (als } k \neq 1)$$

Op grond hiervan kan men bij een eindige samenstelling van kongruentieafbeeldingen en puntvermenigvuldigingen de puntvermenigvuldigingen naar links brengen en de kongruentieafbeeldingen naar rechts, waarna de stelling meteen volgt.

Voorbeeld ter toelichting:

$$\begin{array}{l} R_{A,x} \circ V_{B,k_1} \circ S_l \circ V_{C,k_2} \circ R_{D,\beta} = \\ V_{X,k_1} \circ R_{E,x} \circ V_{Y,k_2} \circ S_m \circ R_{D,\beta} = \\ \underbrace{V_{X,k_1} \circ V_{Z,k_2}}_G \circ \underbrace{R_{Z,x} \circ S_m \circ R_{D,\beta}}_H = \end{array}$$

met G een puntvermenigvuldiging of een translatie en H een kongruentieafbeelding; op grond van de stellingen 3 t/m 7 volgt dan meteen de uitspraak in stelling 8.

Stelling 8 laat zich ook als volgt formuleren:

Als twee figuren gelijkvormig zijn, dan zijn ze in elkaar over te voeren door een kongruentieafbeelding, of door een puntvermenigvuldiging, of door een spiegelstrekking, of door een draaistrekking.

literatuur

- 1 E. Wijdeveld, *Nieuwe wiskunde*, deel 2, hoofdstuk 7, Wolters-Noordhoff.
- 2 M. Jeger, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*, Raeber.
- 3 F. Eccles, *An Introduction to Transformational Geometry*, Addison Wesley.
- 4 I. M. Yaglom, *Geometric Transformations*, deel I en II, Random House/Singer.
- 5 E. A. Maxwell, *Geometry by Transformations*, Cambridge University Press, 1975.
- 6 Th. L. Heath, *The Thirteen books of Euclid's Elements*, vol II, Dover.

Praktikum in de wiskundeles

HEIN KRAMMER
ELS HUURNINK-HODDENBACH

1 Inleiding

Wiskunde is een belangrijk en moeilijk vak voor onze leerlingen. Wiskundeleraars moeten daarom voortdurend op zoek zijn naar middelen om hun vak begrijpelijk en interessant te maken. Alles moet worden aangegrepen dat bij kan dragen de complexiteit van begrippen, de samenhang tussen werkelijkheid en abstraktie, de zin van definities, het nut van procedures e.d. te laten doorzien. Een zo'n middel is het praktikum. Het wordt allang toegepast op universiteiten en hogescholen, en iets minder lang in de natuurwetenschappelijke vakken in het voortgezet onderwijs. De leerling of student doet proeven die eenvoudige versies zijn van experimenten die in de wetenschap verricht zijn. De doelen zijn doorgaans het leren kennen van konkrete objecten en verschijnselen, het leren van bepaalde motorische vaardigheden en het ervaren hoe wetenschappelijk werk verloopt. Gebleken is echter dat praktika ook helpen bij het leren van abstrakte, intellektuele vaardigheden. Daardoor zijn ze ook van belang voor de wiskundendidaktiek.

In dit artikel wordt, na een algemene bespreking van praktika (Wat is een praktikum? Wat kan het nut van praktika zijn? Wat voor soorten praktika zijn er zoal?), dieper ingegaan op twee soorten praktikum. Beide soorten kunnen speciaal van nut zijn voor wiskunde-onderwijs, en worden ondersteund door veelvuldige toepassing en uitgebreid onderwijskundig onderzoek. Het gaat om de 'materiële handelingsfase' in het optimale leerproces zoals de Russische leerpsychologen (o.a. Gal'perin) dat zien, en om 'discovery learning' zoals dat door Angelsaksische onderwijskundigen (o.a. Bruner) wordt gepropageerd. Van elk soort wordt een voorbeeld besproken en beide soorten worden onderling vergeleken. Besloten wordt met enkele praktische werken voor het opzetten en leiden van praktika in het wiskunde-onderwijs.

Aanleiding tot het verschijnen van dit artikel is de ervaring geweest met een cursus die gegeven is aan studenten aan de Technische Hogeschool Twente in het kader van de opleiding voor de lesbevoegdheid. Tijdens deze cursus moesten de studenten onder meer een praktikum ontwerpen. Argument hiervoor: praktika vinden we nuttig, maar ze worden in het Nederlandse wiskunde-onderwijs nog maar zo weinig toegepast; daarom dienen we de toekomstige le-

raren vaardigheid bij te brengen praktika zelf te ontwerpen. De ideeën van de studenten, en onze eigen ervaringen bij het voorbereiding en geven van de kolleges, waren dermate interessant, dat we er – middels dit artikel – over willen rapporteren.

2 Wat is een praktikum?

Schrijvers over wiskundepraktika ('the mathematics laboratory', materiële handelingen, of hoe men het ook noemt) verschillen nogal in wat ze eronder verstaan. Daarom willen we eerst het begrip enigszins afbakenen.

Waar iedereen het wel over eens is, is dat een praktikum een of andere *opdracht* is die door *de leerlingen* moet worden vervuld. Wanneer dus de leraar iets vóór doet (bijvoorbeeld: demonstreert hoe men met een rekenliniaal een bepaalde berekening uitvoert), hebben we nog niet met een praktikum te maken.

Een tweede kenmerk van praktika is, dat de leerlingen *individueel* of *in kleine groepjes* (twee tot vier leerlingen) aan de opdracht werken. Het klassikaal, in de vorm van een onderwijsleergesprek behandelen van een opgave is dus geen praktikum.

Totdusver hebben we twee kenmerken besproken waar alle schrijvers het over eens zijn. Verder verschilt men nog in opvatting. Wij willen echter het begrip praktikum nog wat nader beperken. Wij zouden nl. de gewone berekenings- of bewijsopdrachten willen uitsluiten. Op een of andere manier moet er gewerkt worden met ander *materiaal* dan het gebruikelijke schrijfmateriaal (pen, papier, e.d.), of moet er met dit materiaal op een niet zuiver wiskundige manier worden omgesprongen, b.v.: het meten van de lengte van het potlood, het vouwen van papier. Materiaal waar we wel aan denken: zakrekenmachientje, dobbelsteen, schaar, e.d.

Tenslotte vinden we dat een projekt of een open vraag, die verder aan alle vorige eisen voldoet, nog geen praktikum is. Wij noemen een opdracht alleen dan een praktikum, als hij is voorgestructureerd d.m.v. een *handleiding*, waarin stapsgewijs is aangegeven wat de leerling achtereenvolgens moet doen.

Samenvattend kunnen we dus zeggen dat een praktikum een opdracht is die de leerlingen individueel of in kleine groepen vervullen, aan de hand van een handleiding, en waarbij materialen op een 'onwiskundige' manier gebruikt worden.

3 Waarom praktika?

Allereerst dient opgemerkt te worden, dat een praktikum geen doel op zichzelf is. Het is steeds een middel, een onderdeel van het onderwijsleerproces dat gericht is op een of andere leerdoelstelling.

Zo'n leerdoelstelling kan b.v. zijn:

- het kunnen oplossen van tweedegraads vergelijkingen met ontbinding in factoren,
- het kunnen berekenen van een hoek van een driehoek als de andere twee gegeven zijn,

- het kunnen berekenen van de afgeleide van een functie m.b.v. de formule

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Behalve voor dergelijke leerdoelen, wordt een praktikum ook gezien als middel om meer algemeen onderwijsdoelen te bereiken. Een praktikum dat in kleine groepjes wordt uitgevoerd, ontwikkelt b.v. bepaalde sociale vaardigheden van de leerlingen: het kunnen samenwerken, het leiden van of het zich passen in een team, e.d.

Als redenen waarom praktikum een geschikt middel kan zijn om bepaalde leerdoelen te bevorderen, noemen we de volgende. (Zie Johnson e.a., 1972; Travers e.a., 1977).

1. Doordat de leerlingen individueel of in kleine groepjes werken aan de opdracht, is het mogelijk hun aandacht goed te richten op de essentiële zaken. Bij klassikale lessen en veel andere werkvormen kan vaak de leerling door onoplettendheid, klakkeloze overname van anderen o.a. ontsnappen aan de noodzaak zelf bepaalde begrippen op te nemen of procedures uit te voeren. Een individueel praktikum bevordert een maximale leerling-bijdrage; als de leerlingen in kleine groepjes werken zal de aandacht ook beter zijn dan bij klassikaal onderwijs.
2. Een praktikum helpt mede de voor de leerlingen zo abstrakte wiskunde meer concreet te maken. Doordat de nieuwe leerstof aan de hand van concrete objecten wordt geleerd, wordt de kans vergroot dat de leerlingen de stof later in praktische situaties zullen kunnen toepassen; m.a.w. het praktikum helpt de 'wendbaarheid' van het geleerde, de kans op 'transfer' naar andere situaties te vergroten.
3. Bij een praktikum is het relatief eenvoudig differentiatie binnen de klas in te bouwen, de leerlingen werken immers individueel of in kleine groepen. Men kan de zwakkere, tragere leerlingen andere opdrachten geven dan de meer begaafde of de snellere. De zwakke, trage leerling verwerkt de essentiële dingen, de knappere of vluggere doet behalve dat nog iets waar hij wat extra werk mee heeft of (liefst) dat hem intellectueel extra uitdaagt.
4. Praktikum biedt optimale gelegenheid voor afwisseling. Een leraar die eens een keertje praktikum toepast doorbreekt daarmee de sleur van de traditionele lessen. Maar ook iemand die zeer vaak met praktika werkt hoeft niet bang te zijn dat de praktikum-lessen gemakkelijk tot sleur worden! Dat komt doordat de leerlingen met concrete objecten werken, die bij verschillende praktika meestal weer anders zullen zijn.
5. Elke leerling ziet tijdens het praktikum de evidentie van elke volgende stap, hij ziet vaak meteen wanneer er iets mis is. Als dat niet van nature uit het praktikum zelf blijkt, kan de handleiding gemakkelijk zo opgezet worden dat de leerling snel informatie krijgt of hij op de goede weg is. Voor beginnende leraren komt daar als voordeel bij, dat het voor geen enkele leerling te vlug gaat, omdat ze pas met de volgende stap beginnen als de vorige gelukt is, althans zeker bij individuele praktika.

Deze voordelen kunnen deels ook bij sommige andere methoden genoemd worden, bijvoorbeeld bij projectwerk of bij geprogrammeerde instructie; nooit echter alle voordelen bij elkaar.

Er kleven ook een paar bezwaren aan praktika. Ten eerste vergen ze van de leraar veel voorbereidingstijd, vooral de eerste keer. Ten tweede kosten ze in de les ook veel tijd. Daarom zijn praktika alleen dan effectief en efficiënt, als ze worden gebruikt bij de moeilijker, abstrakter leerstof, zodat de geïnvesteerde tijd later teruggewonnen wordt.

4 Soorten praktika

Praktika zijn er in vele soorten. Een belangrijk onderscheid lijkt ons te bestaan tussen 'praktika-vóóraf' en 'praktika-achteraf'. Om dit onderscheid duidelijk te maken, beschouwen we het onderwijsleerproces wat nader. Ergens halverwege dit proces zal een leerling het nieuwe begrip of de nieuwe regel in essentie verwerven, hoewel daarna nog wel oefening ermee nodig is. Aan die verwerving gaan enkele fasen vooraf: inzicht krijgen in het doel van de nieuwe leerstof, voorkennis ophalen, zoeken naar een systeem, e.d. Na die verwerving komen nog fasen als het onder woorden brengen van het geleerde, het in verband brengen met andere begrippen, het oefenen om routine op te doen, e.d. In het model van Van Dormolen (1974) (Oriënteren-Sorteren-Abstraktie-Expliciteren-Verwerken) kan men Oriënteren en Sorteren zien als fasen vóóraf, en Expliciteren en Verwerken als fasen achteraf.

Praktika kan men op een dergelijke manier ook indelen. Praktika-vóóraf worden vooral ingezet tijdens de voorafgaande fasen van het onderwijsleerproces. Ze dienen om de leerling tot de essentiële verwerving te helpen komen. Praktika-achteraf passen in de latere fasen van het onderwijsleerproces. Een voorbeeld van zo'n praktikum-achteraf is het volgende. De leraar bespreekt eerst klassikaal de sinusregel, b.v. met een min of meer formeel bewijs; daarna volgt een praktikum waarin de leerlingen deze regel gaan *verifiëren*: ze meten van een aantal driehoeken de hoeken en zijden op en controleren of de regel klopt. Een ander voorbeeld: nadat de leraar de stelling van Pythagoras theoretisch behandeld heeft, krijgen de leerlingen elk een houten blok, waarvan ze de diagonaal-lengte moeten bepalen, door meting van de ribben en *toepassing* van de stelling.

Praktika-achteraf zijn naar onze mening niet zo erg interessant. Ze zijn vrij gemakkelijk te ontwerpen en hun nut is beperkt tot de in de vorige paragraaf genoemde aspecten. Praktika-vóóraf zijn onderwijspsychologisch veel interessanter. Ze vereisen veel meer inventiviteit van de ontwerper en hun nut gaat verder dan de reeds genoemde punten.

In het vervolg van dit artikel zullen we twee typen praktika-vóóraf uitvoerig bespreken. Het eerste is wat Russische leerpsychologen noemen de 'materiële handeling' in het ideale onderwijsleerproces. Het tweede is een 'discovery learning'-praktikum, zoals dat vooral door Angelsaksische onderwijskundigen ge-

propageerd wordt. Beide typen zijn gebaseerd op onderwijs-psychologische theorieën en zijn uitgebreid toegepast en geëvalueerd in de onderwijspraktijk.

5 Praktikum als materiële handelingsfase

In de Russische leerpsychologie (Van Parreren & Carpay, 1972) gaat men van de volgende gedachte uit. Een nieuwe handeling kan men niet leren op grond van informatie over de handeling alleen, men moet hem leren door hem uit te voeren.

Achter deze gedachte schuilt de volgende theorie. Elke handeling is het omgaan met objecten. Als deze objecten 'dingen' uit de konkrete, waarneembare werkelijkheid zijn en het ermee omgaan een uitwendig waarneembaar ingrijpen in die dingen is, spreekt men van een materiële handeling. Het object van een handeling kan echter ook door één of meer voorstellingen gevormd worden, bijvoorbeeld als men door te denken het verschil tussen twee begrippen vaststelt. In dat geval voltrekt ook de handeling zich innerlijk en spreken zij van een mentale handeling. De plaats van de voorstellingen is derhalve, dat zij figureren als object in mentale handelingen.

Uit deze theoretische stelling trekken de Russische leerpsychologen de praktische konklusie, dat het voor de vorming van voorstellingen dus ook van begrippen, nodig is de mentale handeling te leren, waarin met de voorstelling of het begrip omgegaan wordt. Anders gezegd: kennis moet op basis van handelingen worden verworven.

In plaats van de materiële handeling mag ook gebruik gemaakt worden van een gematerialiseerde handeling; i.p.v. te werken met 'dingen' werkt de leerling met voorstellingen (grafieken, plattegronden, enz.) van deze 'dingen'. De leerling moet wel precies weten waar de voorstelling voorstelling van is. Deze beide handelingen worden dan als gelijkwaardig beschouwd.

Waarom is de materiële handeling nu zo belangrijk:

- 1e. Omdat de mentale handeling een weerspiegeling is van de materiële handeling.
- 2e. Omdat de materiële handeling concreet is en meer houvast biedt.
- 3e. Omdat de materiële handeling gemakkelijker in alle uitvoerigheid verricht kan worden en juist uitvoerigheid volgens hen één van de essentiële voorwaarden is voor het tot stand komen van een 'volwaardige' mentale handeling.

Wat betreft het uitvoeren van de materiële handeling dient nog het volgende opgemerkt te worden. Elke handeling, met name ook elke materiële handeling bevat drie aspecten, nl. het oriënterende, het uitvoerende en het controlerende aspect.

Wat betreft het oriënterende aspect; de oriënteringsbasis voor de handeling (geheel van handelingsvoorwaarden) moet zodanig uitgebreid behandeld zijn, dat de uitvoering van de materiële handeling geen moeilijkheden meer oplevert.

Het kontrolerende aspect is van belang om fouten, veroorzaakt door aandachtsschommelingen, te kunnen corrigeren.

In de gevallen waarin een materiële handeling in volle uitvoerigheid verricht wordt, zijn de drie aspecten duidelijk te onderscheiden en zijn het ook echte achtereenvolgens voltrokken deelhandelingen.

Noodzakelijk bij het leren van een nieuwe 'volwaardige' mentale handeling zijn de volgende vijf fasen.

- 1e. Oriënteringsfase: vorming van een voorstelling van de handeling met behulp waarvan de leerling zich kan oriënteren op de uitvoering van de materiële handeling.
- 2e. De uitvoering van de materiële handeling.
- 3e. De verbale handeling: de handeling wordt uitgevoerd door hardop te zeggen wat men moet doen, doch zonder voorwerpen te gebruiken.
- 4e. Uitvoering van de verbale handeling door in zichzelf, d.w.z. niet meer hardop, te spreken.
- 5e. Verkorting van het voor zichzelf spreken tot mentale handeling.

Tijdens dit leerproces vindt vanaf de 2e tot de 5e fase geleidelijk aan een overgang plaats

- van materieel naar mentaal handelen (de zgn. *interiorisatiegraad* neemt toe),
- van een uitvoerig naar een verkort handelen (de *uitvoerigheid* neemt af),
- van specifieke naar algemene toepassing (de *generalisatiegraad* neemt toe), en
- van aarzelend en langzaam naar feilloos en automatisch handelen (de *beheersingsgraad* neemt toe).

6 Een voorbeeld van een praktikum als materiële handelingsfase

Het leerdoel waarvoor het volgende praktikum kan worden ingezet is het *kwadraat-afsplitsen*. Aan de hand van een voorbeeld nemen we nog even de verschillende stappen door.

$$3x^2 + 4x + 15 = \quad (I)$$

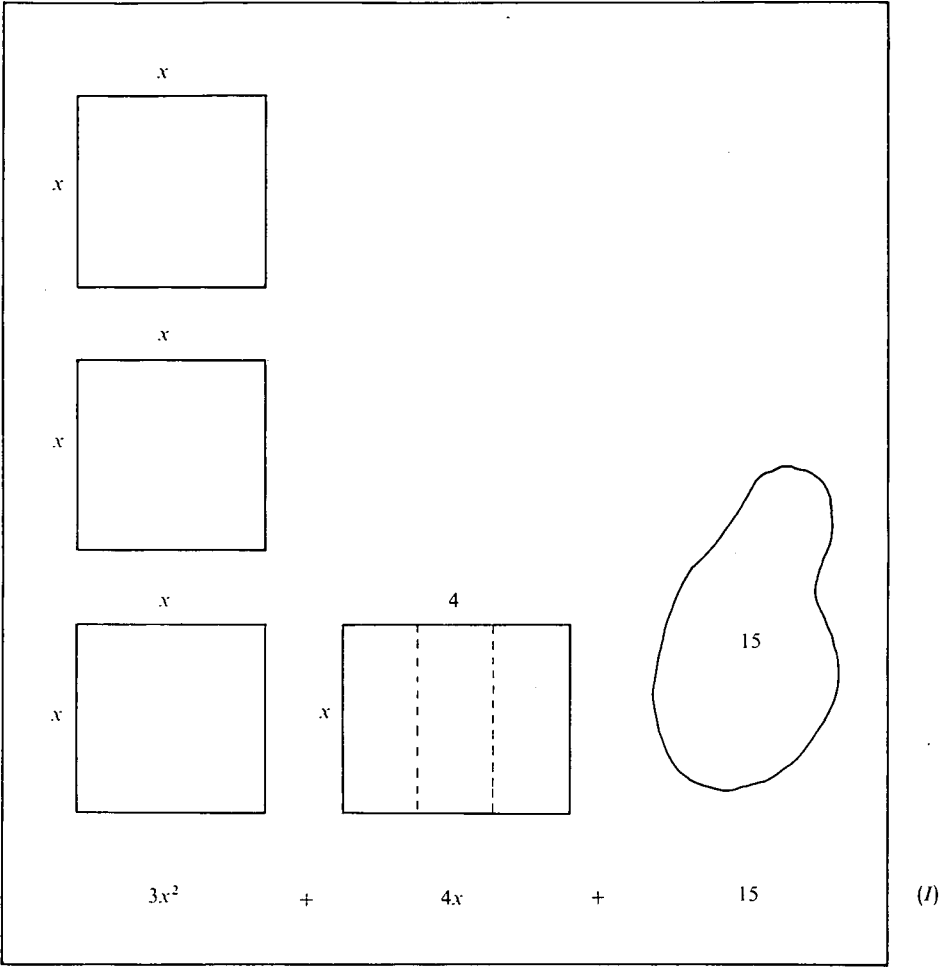
$$3(x^2 + \frac{4}{3}x) + 15 = \quad (II)$$

$$3(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x) + 15 = \quad (III)$$

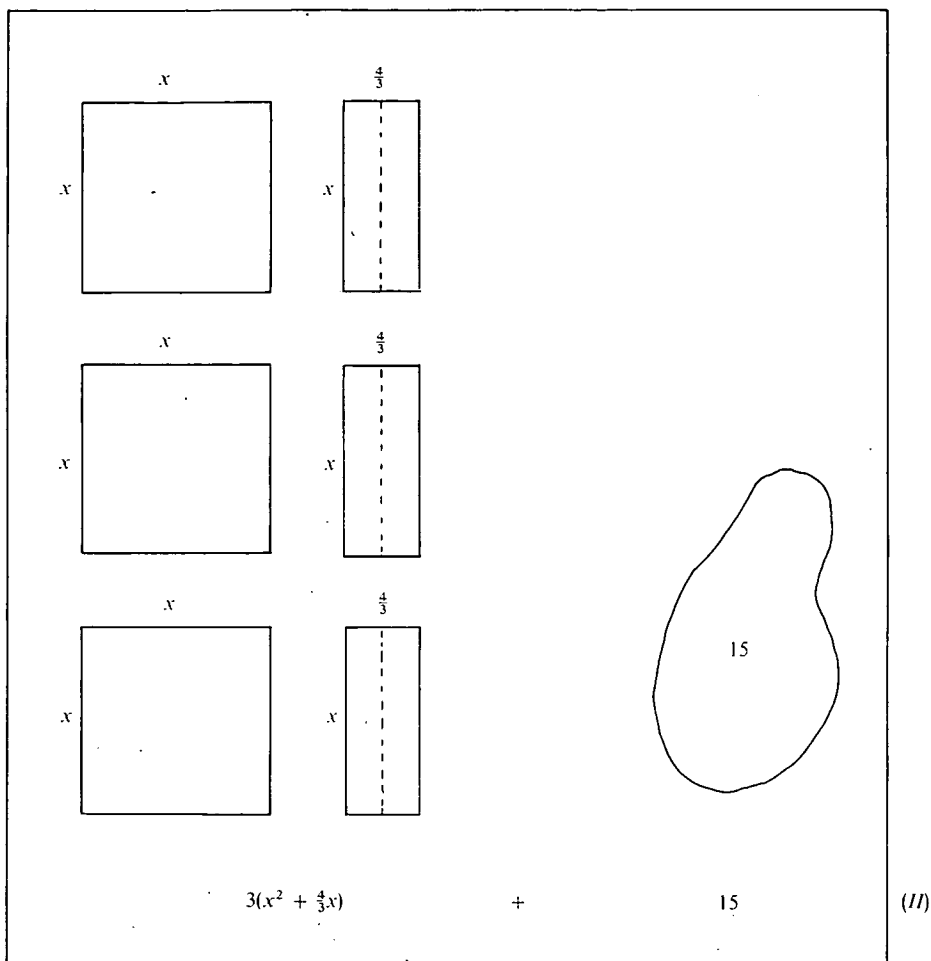
$$3(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x + (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^2) + 15 = \quad (IV)$$

$$3(x + \frac{2}{3})^2 + (-3 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 15) = \quad (V)$$

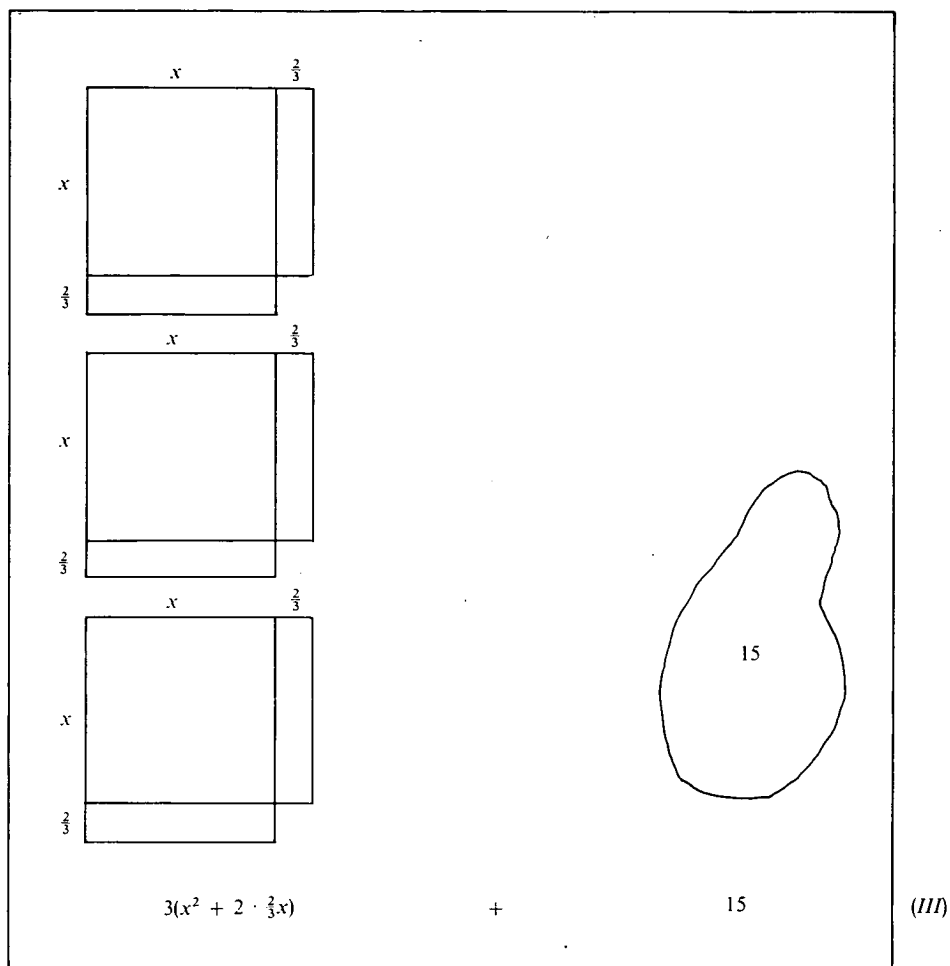
De materiële handeling bestaat nu uit het knippen van en schuiven met stukken karton, zó dat dit analoog is aan het kwadraatafsplitsen. De figuren 1 t/m 5 illustreren wat ongeveer de bedoeling is. Stippellijnen geven aan wat er geknipt moet worden. Uiteraard moet dit nog precieser uitgewerkt worden, en voorzien worden van een duidelijke praktikum-handleiding.



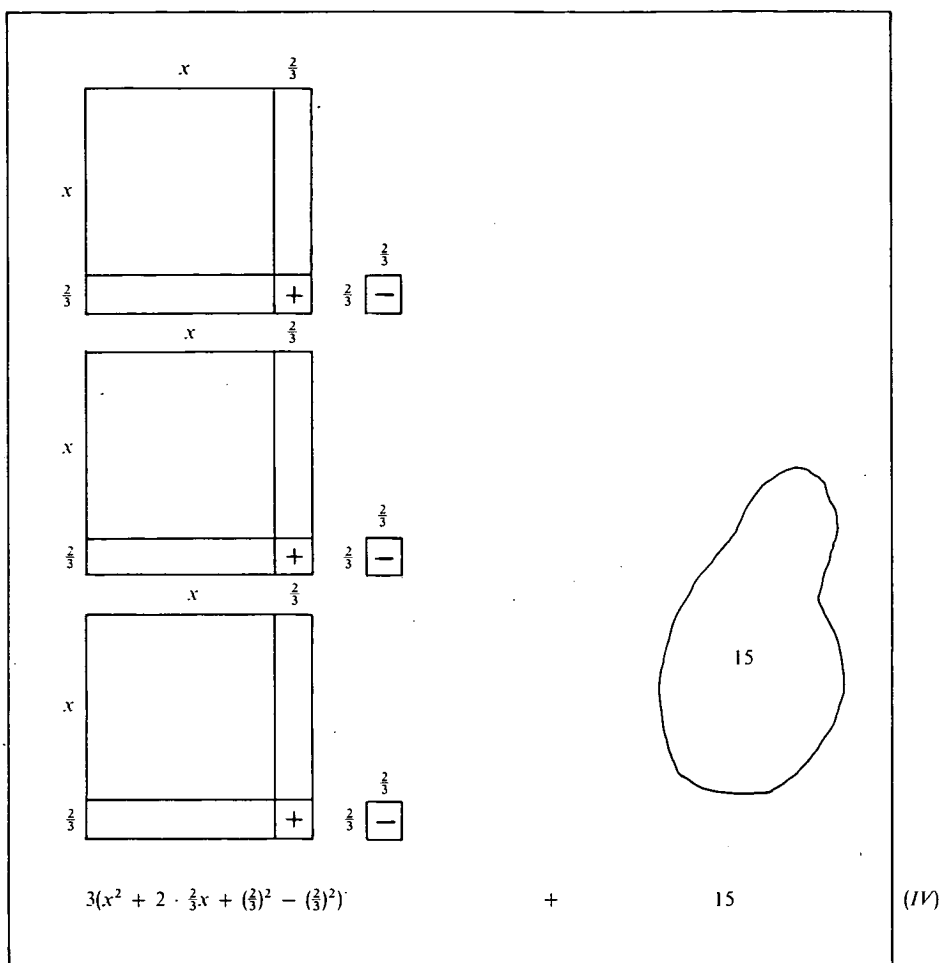
Figuur 1



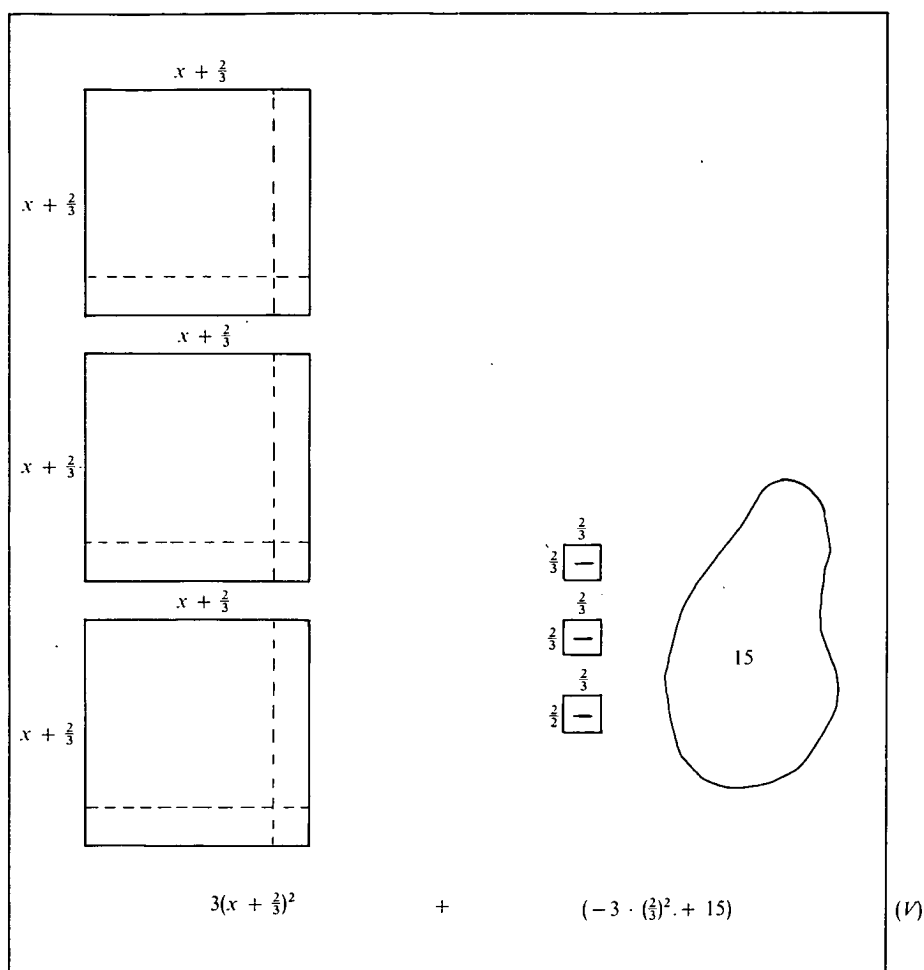
Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4



Figuur 5

Wil men een dergelijk praktikum toepassen op de manier waarop de Russische leerpsychologen het bedoelen, dan hoort een oriëntatiefase vooraf te gaan, en horen de latere fasen erop te volgen. In die oriëntatiefase krijgt de leerling enig idee van de bedoeling van de uiteindelijke handeling en het nut ervan (oplossen van bepaalde typen kwadratische vergelijkingen e.d.). In de latere fasen kan de interiorisatie o.a. plaatsvinden door ná met karton-knippen gewerkt te hebben, over te gaan op tekenen-op-ruitjespapier; geleidelijk aan gaat men over op de formuleschrijfwijze. De verkorting die men toelaat zou achtereenvolgens kunnen bestaan uit het in één stap uitvoeren van (II) en (III), en daarna het in één stap uitvoeren van (IV) en (V). Allerlei details moeten nog worden uitgewerkt, b.v. hoe het leren omgaan met negatieve eerstegraadskoëfficiënt in het leerproces moet worden ingepast.

7 Praktikum volgens discovery learning

Vanuit een totaal andere onderwijsfilosofie als die van de Russische leerpsychologen wordt *discovery learning* aanbevolen als principe voor het opbouwen van onderwijsleerprocessen. De bekendste voorvechter van een dergelijke aanpak is de Amerikaanse Bruner (o.a. 1966). Hij stelt dat door de leerlingen praktika moeten worden uitgevoerd die zódanig zijn opgezet dat ze daarmee zelf de regels van de wiskunde gaan ontdekken. Op die manier gaan de leerlingen iets proeven van wat het echt met wiskunde bezig zijn inhoudt: tastend en uitproberend tot nieuwe begrippen, stellingen en rekenmethoden komen. Hoewel het veelvuldig maken van fouten door de leerlingen natuurlijk wordt afgewezen, vindt hij een sporadisch voorkomende mislukte poging van de leerling niet zo erg: dat maakt de echte wiskundige immers ook mee. Dit tekent meteen al het grote verschil in opvatting tussen Bruner en Gal'perin: de laatste vindt dat mislukking door de leerling tijdens de materiële handelingsfase uit de boze is. Niettemin vindt Bruner dat het praktikum zódanig geleid moet worden (door de leraar, of door in de praktikumhandleiding staande aanwijzingen), dat het maken van foute stappen en het inslaan van uitzichtsloze wegen door de leerling zoveel mogelijk beperkt wordt. Velen spreken dan ook niet over 'discovery', maar van 'guided discovery', als ze de ideeën van Bruner willen aanduiden. Kenmerkend voor *discovery learning* is dat de leerling eerst *inductief* te werk gaat, en pas later eventueel een *deduktieve* verantwoording krijgt aangeboden. Zo wordt de stelling dat de som der hoeken van een driehoek 180° is door de leerlingen in eerste instantie ontdekt, door middel van meting aan een groot aantal hoeken. Daarna kan eventueel een verantwoording volgen in de vorm van een formeel bewijs.

Een voorbeeld van een praktikum volgens discovery learning

In onderstaand voorbeeld worden de leerlingen ertoe gebracht zelf te ontdekken dat de rekenregel

$$\log a + \log b = \log ab$$

geldt. We geven alleen een ruwe schets van het praktikum; uiteraard krijgen de leerlingen een uitgewerkte praktikumhandleiding.

Met behulp van een pocket calculator rekenen de leerlingen de logaritmen uit onderstaande rijen I en II uit, afgerond op 5 cijfers achter de komma.

Rij I

$\log 2 =$ -----
 $\log 3 =$ -----
 $\log 4 =$ -----
 $\log 5 =$ -----
 $\log 6 =$ -----

Rij II

$\log 8 =$ -----
 $\log 10 =$ -----
 $\log 12 =$ -----
 $\log 15 =$ -----
 $\log 18 =$ -----
 $\log 20 =$ -----
 $\log 24 =$ -----
 $\log 30 =$ -----

Daarna berekenen ze m.b.v. de pocket calculator alle tweetallen logaritmen uit rij I uit: $\log 2 + \log 3$, $\log 2 + \log 4$, ..., $\log 4 + \log 5$, ...
Ze moeten de uitkomsten vergelijken met die uit rij II, de 'opvallende' gevallen systematisch onder elkaar zetten, en raden wat de regel is (nl. $\log a + \log b = \log ab$). Dan toetsen ze de hypothese met enkele nieuwe gevallen (bijv. $\log 3 + \log 3$, $\log 5 + \log 7$).

Enkele praktische wenken

Tenslotte willen we enkele praktische wenken geven aan wie voor het eerst met praktika in zijn lessen wil gaan werken.

Het is beslist noodzakelijk dat de leraar tevoren het hele praktikum op materieel niveau uitvoert. Hij ervaart dan alle details en moeilijkheidjes waar de leerling op kan stoten. Een kleinigheid die tijdens het praktikum misgaat kan de hele les in de war sturen. Doordat de leraar het praktikum zeer uitvoerig heeft voorbereid kan hij beter hulp bieden aan leerlingen. Hij heeft ook een beter idee hoeveel tijd het in beslag gaat nemen.

Verder moet de leraar ervoor zorgen dat de nodige voorzieningen in het lokaal getroffen worden. De tafels moeten zó geplaatst worden dat de leerlingen in groepjes van de gewenste grootte kunnen werken. De geluidsisolatie van het lokaal moet voldoende zijn, want praktika brengen meer rumoer met zich mee dan traditionele wiskundelessen.

Tijdens de les moet de leraar voortdurend bij de groepjes leerlingen kijken of het goed gaat en ze zo nodig helpen. Dat is natuurlijk veel vermoeiender dan klassikaal lesgeven, maar hij krijgt er dan ook wat voor terug: echt geïnteresseerde leerlingen!*)

Over de auteurs:

Hein Krammer is docent wiskunde-didaktiek aan de T.H. Twente.

Els Huurnink was destijds lerares wiskunde aan het Pius X-college te Almelo en studentassistentie aan de THT; vertoeft nu in het buitenland.

literatuur

- Bruner, J. S., *Toward a theory of instruction*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1966.
Dormolen, J. van, *Didaktiek van de wiskunde*. Oosthoek, Utrecht, 1974
Johnson, D. A. & Rising, G. R., *Guidelines for Teaching Mathematics, Second Edition*. Wadsworth Publishing Company, Inc., Belmont, California, 1972.
Parreren, C. F. van & Curpay, J. A. M. (red.), *Sovjetpsychologen aan het woord*. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
Travers, K. J., Pikaart, L., Suydam, M. N., Runion, G. E., *Mathematics Teaching*. Harper & Row Publishers Inc., New York, 1977.

*) Praktika die door studenten ontworpen zijn, kunnen bij de auteurs aangevraagd worden.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1978 – 31 juli 1979

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. Bozuwa, F. F. J. Gaillard, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. J. Mahieu en mw. drs. N. C. Verhoef (sinds oktober).

Op 23 september vond te Brugge een gemeenschappelijke vergadering plaats van de besturen van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en op 24 maart was er een gemeenschappelijke studiedag voor de leden van beide verenigingen te Rotterdam waarbij G. Schoemaker een voordracht hield, getiteld 'Wat moet iedere Nederlander van wiskunde weten' en prof. dr. A. Vermandel een voordracht hield met als titel 'Wiskundig denken in de klas'. Vlaamse bestuursleden waren aanwezig op de jaarvergadering van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

De jaarvergadering is gehouden op zaterdag 27 oktober in het gebouw van de SOL te Utrecht. Het centrale thema op deze dag was 'Instappen en Toepassen'. Regionale bijeenkomsten ter bespreking van wiskunde werden op 11 mei in 6 plaatsen gehouden voor Ito-c en mavo-3; op 10 mei in 18 plaatsen voor mavo-4 en op 11 mei in 6 plaatsen voor havo en wiskunde I-vwo. Op 14 mei is er een centrale bijeenkomst te Utrecht gehouden ter bespreking van het examen wiskunde II-vwo.

Na het verschijnen van het Interimrapport van de Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en Wiskunde II vwo (HEWET-rapport) zijn er op 18, 19 en 20 april bijeenkomsten gehouden in respectievelijk Rotterdam, Eindhoven en Zwolle waarop docenten hun oordeel over de voorlopige voorstellen van de werkgroep HEWET konden geven. De didactiekcommissie heeft weer verscheidene meerdaagse cursussen voor docenten georganiseerd. Daar deze cursussen werden georganiseerd met behulp van het IOWO is met het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen en de Nieuwe Leraren Opleidingen overleg geweest over het voortbestaan van deze didactiekcursussen. Ook is aan de leden van de Vaste Commissie voor Onderwijs van de 2e Kamer van de Staten Generaal verzocht hun invloed aan te wenden om deze cursussen te kunnen behouden. Dit alles heeft nog niet tot resultaten geleid.

In april heeft het bestuur zich tot alle wiskundeleraren en de diverse onderwijsorganisaties gewend met het verzoek zich in te zetten voor behoud van het IOWO.

Op 16 november schreef het bestuur aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen met het verzoek niet over te gaan tot het houden van één examenzitting wiskunde met meerkeuzevragen bij het MAVO in plaats van de tot nu toe bestaande twee zittingen.

Het bestuur vergaderde dit jaar 10 maal, waarvan éénmaal met de inspecteurs drs W. de Jong, P. Lafeber, A. Segaar en N. J. Zimmerman.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Het rekenmachientje of de rekenliniaal

H. SISSING

In dit artikel wil ik reageren op het kader van blz. 351 van Euclides van mei j.l.

De keuze tussen de rekenliniaal en de rekenmachine vind ik onjuist omdat dit niet realistisch is. Rekenmachinetjes hebben ook in het buitenland de rekenlinialen verdreven. Als je moet kiezen tussen een auto en een fiets om naar Spanje te gaan is de keuze toch ook niet moeilijk?

Natuurlijk hebben de liniaalmensen gelijk wanneer zij stellen dat bij de bewerkingen uitgevoerd op een rekenliniaal de daaraan ten grondslag liggende principes zijn af te lezen.

Het grootste nadeel van het rekenmachientje is ook dat de werking ervan niet zichtbaar en begrijpelijk is voor de gebruiker. En dat heeft zeker nadelen voor de pedagogische en instructieve situaties.

Iedere vergelijking heeft zijn eigen manco's, maar de fiets en de auto lijken in zekere zin toch op de liniaal en het rekenmachientje.

Immers, de fiets laat duidelijk zien dat d.m.v. spierkracht tandwielen, ketting en wielen het voertuig in beweging wordt gebracht. Zichtbaar en begrijpelijk is de functie van ieder mechanisch onderdeel. Hoe anders is dit niet bij de auto. Niets van het mechanisme is te zien, alleen een paar pedalen die je moet indrukken en een stuur om het ding richting te geven. De werking van de motor is de meesten slechts vaag bekend. Toch schijnen wij daar geen nadeel van te ondervinden wanneer wij autorijden.

Hoe anders was dit niet toen de eerste auto's op de weg verschenen. Hel en verdoemenis klonk alom. De geschiedenis heeft inmiddels al aangetoond dat de auto een normaal vervoermiddel is geworden. De motor heeft n.l. toepassing gekregen op veel meer dingen en is een geaccepteerd verschijnsel geworden. Wij staan nu ook voor grote massale veranderingen ontwikkelingen in de elektronica. De chips worden steeds kleiner, het inzicht en de begrijpelijkheid ook. Maar moeten wij daarom hel en verdoemenis schreeuwen, het op allerlei wijzen tegengaan? De liniaal-mensen staan in hun acties tegen deze vernieuwing beslist niet alleen. Sommige politieke partijen en vakbonden doen mee, al betreffen hun acties een veel breder terrein.

Doen we er niet verstandiger aan te kijken hoe we op een zo democratisch mogelijke wijze van de vernieuwing gebruik kunnen maken, ondanks alle

pedagogische, psychologische en maatschappelijke nadelen van dit moment? De elektronica heeft zich al over veel levensterreinen uitgespreid en zal daarmee verder gaan. Zullen wij er daardoor niet steeds meer mee vertrouwd raken? Zijn we sinds de auto blijven steken in Chaplin's visie op motoren? Ik dacht van niet. Door het massaal gebruik ervan, de opleiding van monteurs, eenvoudige A.N.W.B. cursussen, verklarende boekjes voor volwassenen en kinderen, heeft iedereen steeds meer greep gekregen op dit fenomeen.

Moeten wij niet op dezelfde wijze greep kunnen krijgen op de elektronica? Massaal gebruikt wordt het al, opleidingen starten en er verschijnen eenvoudige verklarende boekjes. Het onderwijs draagt zijn steentje al bij en zal zelfs een steen bij kunnen dragen wanneer er lesseries ontworpen en gegeven gaan worden over eenvoudige elektronica, blokschema's, lineaire stelsels, e.d.

Dat moet toch te doen zijn als we er samen aan werken.

Gaspard Bosteels 70 jaar

Op 3 november 1979 is Gaspard Bosteels, erevoorzitter van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars 70 jaar geworden.

Bij de oprichting van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars werd de Franstalige Willy Servais (onlangs overleden) voorzitter en Gaspard ondervoorzitter. Jarenlang heeft hij in die functie op de bres gestaan voor de Vlaamse inbreng in de vereniging.

Toen samenwerking niet goed meer mogelijk bleek, is de Belgische vereniging uiteengevallen in twee verenigingen. Zo ontstond de VVWL. Gaspard werd erevoorzitter.

Zijn onderwijsfunctie was studieprefect (d.i. rector) van het Koninklijk Atheneum Berchem. Behalve op verenigingsgebied heeft hij op publicistisch gebied veel bijgedragen. Het tijdschrift Wiskundepost, de tegenhanger van ons Pythagoras, dreef voor een groot gedeelte op zijn bijdragen.

Op 19 november werd hem in het gebouw van de Banque de Paris et des Pays Bas op de Meir in Antwerpen ten overstaan van een talrijk publiek een Liber Amicorum aangeboden, een fraai boekwerk van ongeveer 500 bladzijden waaraan 24 auteurs hebben meegewerkt. Verschillende sprekers voerden het woord waaronder ook één uit Nederland.

Gaarne wenst de redactie van Euclides vanaf deze plaats de jubilaris van harte geluk.

De redactie van Euclides

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en
correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg
148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

411. Vul de ontbrekende cijfers in.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \times \\ \begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \\ \begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \end{array} +$$

Een goede jaarwisseling gewenst door H. Molster, Amstelveen.

412. Gevraagd te berekenen

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

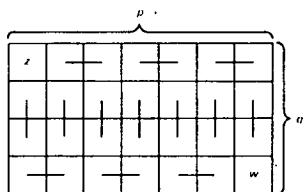
waarin a_i het natuurlijke getal is dat het dichtst ligt bij $\frac{1}{\sqrt{i}}$.

Soms is deze som gelijk aan een natuurlijk getal, bijv. voor $n = 1892$. Wat is de eerstvolgende waarde van n waarvoor de som natuurlijk is? (R. Troelstra)

Oplossingen

409. Aan een dambord ontnemen we een wit en een zwart veld. Is het nu steeds mogelijk het resterende deel te bedekken met 49 dominostenen die elk twee velden kunnen bedekken?

Hieronder is een deel van het bord getekend. De weggenomen velden zijn het zwarte veld links boven van dit deel en het witte veld rechts onder. De afmetingen van het deel zijn p en q velden.



Omdat de velden om en om wit en zwart zijn, is $p + q$ oneven. Neem aan dat p oneven is en q even. Men ziet dan in de figuur hoe de dominostenen gelegd worden. Links en rechts van het getekende deel leggen we de dominostenen verticaal, boven en onder ervan horizontaal. Zo wordt het resterende deel van het bord geheel bedekt.

410. Men heeft stapeltjes guldens gemaakt zo, dat de bedragen 2, 3, 4, ..., 101 gulden betaald kunnen worden door precies twee stapeltjes te geven. Hoeveel stapeltjes zijn minimaal nodig?

Met 15 verschillende stapeltjes kan men hoogstens $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 = 105$ verschillende bedragen betalen. Om 2 gulden te kunnen betalen heeft men twee gelijke stapeltjes van 1 gulden nodig. Zodat men minstens 16 stapeltjes nodig heeft.

De realisatie met het kleinste aantal stapeltjes die we (Kootstra en ik) hebben gevonden, is

1 1 2 3 4 5 6 11 17 23 29 35 41 46 47 48 49 50 51

Dus 19 stapeltjes.

Ook is mogelijk bijv.

1 1 2 3 4 5 9 14 19 24 29 34 39 44 48 49 50 51 52

in welk geval we zelfs ook nog de bedragen 102 en 103 gulden kunnen vormen.

Blijft over de vraag: is een oplossing met 18 stapeltjes uitgesloten? Als iemand ons aan een antwoord helpt, dan graag.

Ad 403. Van P. W. Collard, arts te Amstelveen, en van Dr. P. W. H. Lemmens, Amsterdam, ontving ik de mededeling dat in mijn oplossing een omissie zit. A heeft benzine verbruikt bij het oprijden en nu is niet meer voldaan aan de hypothese van de inductie.

Onderstel A heeft a liter benzine verbruikt. Noem verder de auto die op het circuit aan A direct vooraf gaat, U . Geef aan U deze a liter benzine. Nu is aan de hypothese van de inductie voldaan. De rest van de redenering blijft ongewijzigd.

Boekbespreking

Jack Hale (Ed), *Studies in ordinary differential equations. Studies in Mathematics*, vol. 14; The Mathematical Association of America. IX + 278 p. (1977).

Dit aantrekkelijke boek bevat acht opstellen, door verschillende auteurs, over moderne ontwikkelingen in de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen. Hoewel zij enigermate op elkaar zijn afgestemd bevat elke bijdrage een autonome uiteenzetting. Ieder artikel geeft voorts een uitvoerige bibliografie over het behandelde onderwerp.

$J. P. La Salle$ (p. 1-31) beschouwt niet differentiaal-, maar differentievergelijkingen en daarvan in het bijzonder de analogie met de ideeën van Birkhoff en het onderzoek naar de stabiliteit van een oplossing met de 'directe methode' van Liapunov. Hij is zo geestdriftig over zijn resultaten dat hij eindigt met een pleidooi om het onderwijs in differentiaalvergelijkingen door dat van de differentievergelijkingen te laten voorafgaan.

Wij zien het nog niet gebeuren: de overgang van het continue naar het discrete geeft niet louter vereenvoudiging.

Het artikel van $G. R. Sell$ (p. 32-51) bespreekt de van Poincaré afkomstige denkrichting waarbij het streven naar de exacte oplossing van een dv. vervangen wordt door een kwalitatief en topologisch onderzoek van de integraalkrommen. Dit wordt toegelicht met twee gelukkig gekozen voorbeelden: de vergelijking van v.d. Pol en de mathematische behandeling van een voedselketen in de bacteriologie. Met de bijdrage van $M. M. Peixoto$ (p. 52-92) blijven wij in dezelfde gedachtenwereld; het is een verhelderende inleiding tot moderne begrippen zoals de topologische equivalentie van twee dv. en de zogenaamde 'structurele stabiliteit'. Het artikel van $L. K. Jackson$ (p. 93-127) onderzoekt uiterst zorgvuldig noodzakelijke en voldoende voorwaarden waaronder een (unieke) functie $y(x)$ bestaat, die aan een gegeven dv. van de n de orde voldoet, als bovendien wordt voorgeschreven dat in elk van k gegeven punten een of meer afgeleiden van y gegeven waarden hebben (waarbij het totale aantal condities n is). Randvoorwaarden van gecompliceerder karakter (een eenvoudig voorbeeld is $y(a) = y(b)$), zoals voorkomen bij problemen in de chemie of de economie zijn het onderwerp van het opstel $J. Mawhin$ (p. 128-168), waar verband wordt gelegd met de begrippen en methoden der functionaalanalyse. Dit is ook het geval in de bijdrage van $H. A. Antosiewicz$ (p. 169-200), waar de nadruk valt op de *fixed point* theorema's, zoals dat van Brouwer.

Wij blijven nog in dezelfde sfeer met $L. Cesari$ (p. 201-235) die de nieuwste berichten geeft over de voortgang bij niet-lineaire trillingen. Bijzonder helder en met instructieve voorbeelden is het laatste artikel, van $Y. Sibuya$ (p. 236-276) over asymptotische ontwikkelingen in verband met differentiaalvergelijkingen.

De veelzijdige collectie lijkt ons een goed inzicht te geven in de stand van zaken het thema betreffende.

O. Bottema

Heinrich Behnke, *Semesterberichte: Ein Leben an deutschen Universitäten im Wandel der Zeit*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 302 blz., Dm 34,-

Deze autobiografie van prof. Behnke geeft een overzicht van een groot aantal gebeurtenissen uit de wiskundige wereld van deze eeuw. Aan de hand van vele persoonlijke ervaringen wordt de lezer binnengevoerd in het leven aan Duitse universiteiten vanaf ongeveer de eerste wereldoorlog. Vele groten uit ons vakgebied worden aan het woord gelaten, vele anekdotes over deze worden verteld. Het leven aan de universiteiten schildert de schrijver bijzonder levendig in al zijn ups en downs. Door al deze persoonlijke herinneringen heen poogt de schrijver de draad van de ontwikkeling van het academisch wiskundeonderwijs vast te houden. Naar mijn mening is hij hierin uitstekend geslaagd. Daardoor hebben we met dit boek een waardevol document gekregen voor de geschiedenis van het universitaire (wiskunde) onderwijs aan de Duitse universiteiten. Een buitengewoon prettig leesbaar boek, dat ik ieder van harte kan aanbevelen.

W. Kleijne

J. C. Abbott (editor), *The Chauvenet Papers, A Collection of prize-winning expository papers in mathematics, deel 1 en 2*, The Mathematical Association of America, John Wiley & Sons Ltd, elk deel \$ 18,- (£ 9.95).

Op voorstel van de president van de Mathematical Association of America prof. Julian Lowell Coolidge stelde het genootschap in 1925 de zg. Chauvenet prijs in voor 'special merit in mathematical exposition'. De gekozen naam eert prof. William Chauvenet (1820-1870). 'The price shall be conferred for the best article of an expository character, dealing with some mathematical topic, written by a member of the Association and published in English in a journal during the five calendar years preceding the year of the award'.

Het lijkt me een goede gedachte de bekroonde artikelen te bundelen en uit te geven. Het resultaat, de beide voor ons liggende boeken, is het (her)lezen alleszins waard.

Ieder artikel wordt voorafgegaan door enige biografische notities en veelal afgesloten met een appendix, literatuuropgave e.d. Om een indruk van het geheel te geven volgt hier een opgaven van de opgenomen artikelen:

deel I:

Gilbert Ames Bliss: Algebraic functions and their divisors.

Theophil Henry Hildebrandt: The Borel Theorem and its generalizations.

Godfrey Harold Hardy: An introduction to the theory of numbers.

Dunham Jackson: Series of orthogonal polynomials; Orthogonal trigonometric sums: The Convergence of Fourier series.

Gordon Thomas Whyburn: On the structure of continua.

Saunders Mac Lane: Some recent advances in algebra; Modular fields.

Robert H. Cameron: Some introductory exercises in the manipulation of Fourier transforms.

Paul Richard Halmos: The foundations of probability.

Mark Kac: Random walk and the theory of Brownian motion.

Edward James McShane: Partial orderings and Moore-Smith limits.

Richard Hubert Bruck: Recent advances in the foundations of Euclidean plane geometry.

deel II:

Cornelius Lanczos: Linear systems in self-adjoint form.

Philip J. Davis: Leonhard Euler's integral: a historical profile of the gamma function.

Leon A. Henkin: Are logic and mathematics identical?

Jack K. Hale and Joseph P. Lasalle: Differential equations: linearity vs. non-linearity.

Guido L. Weiss: Harmonic analysis.

Mark Kac: Can one hear the shape of a drum?

Shing-Shen Chern: Curves and surfaces in Euclidean space.

Norman Levinson: A motivated account of an elementary proof of the prime number theorem.

Jean François Trèves: On local solvability of linear partial differential equations.

Mededelingen

Mededeling van de NVvW

Tijdens de jaarvergadering van 27 oktober j.l. werd bij de bespreking van het financieel verslag over 1978-1979 opgemerkt dat een subsidie van het Fonds Eigen Publicaties van f 800,- aan de didactiekcommissie niet terug te vinden was bij de uitgaven van dat fonds.

De oorzaak blijkt niet van financieel-technische aard te zijn, maar een fout bij het overtikken van het conceptverslag, dat door de kascommissie en het bestuur goedgekeurd was. In dat concept stond namelijk, naar waarheid, dat het hier ging om een subsidie van de Rijksuniversiteit Utrecht. De kascommissie treft dus geen blaam; wel ondergetekende, die het conceptverslag overtikte.

De penningmeester

Wiskunde en Onderwijs

Abonnees op Wiskunde en Onderwijs wordt verzocht hun abonnement 1980 te voldoen door storting van f 20,- op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth, gaarne *vóór 15 december*. Nieuwe abonnees kunnen zich op deze wijze opgeven onder vermelding van 'nieuw abonnee'. Zij zijn dan automatisch ook lid van de VVWL.

P. G. J. Vredenduin

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Doorn, 5 januari 1980

Onderwerp: *DAT ZIE JE TOCH ZO!*
'De aanschouwelijkheid in de wiskunde'

Sprekers: Prof. dr. J. van TIEL, Koninklijke Militaire Academie, Breda,
Aanschouwelijkheid in het onderwijs: bedrog of noodzaak.

Prof. dr. W. T. van EST, Universiteit van Amsterdam,
Statica, een vergeten hoofdstuk meetkunde.

Statica als leer van de krachtenstelsels is een onderwerp dat we sinds Archimedes kennen. In de negentiende eeuw is het onder de aandacht van de meetkundigen gekomen (o.a. Möbius, Chasles), en sindsdien weer praktisch vergeten. Aan de hand van de sferische en hyperbolische meetkunde zal worden duidelijk gemaakt dat 'iedere meetkunde' zijn eigen statica heeft.

Prof. dr. F. TAKENS, Rijksuniversiteit Groningen,
Aanschouwelijkheid en beweging: topologie van attractoren.

Getracht zal worden een meetkundige beschrijving te geven van bewegingen, zoals die beschreven worden door differentiaalvergelijkingen.

Plaats: Revis Lyceum, Dribergsestraatweg 6a, Doorn
(bereikbaar: per trein halte Dribergen/Zeist, bus 50 of 56 uitstappen halte Woestduinlaan, 100 m. teruglopen; per auto via autoweg Arnhem-Utrecht, afrit Dribergen/Zeist richting Dribergen/Doorn.)

Aanmelding: Schriftelijke aanmelding bij
Drs. G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, 3956 EN Leersum.

Lunch: Zij, die wensen deel te nemen aan de gezamenlijke lunch op 5 januari 1980 dienen daartoe de somma van tien gulden (f 10,-) over te maken op de postgirorekening 468081 van drs. G. W. de VRIES, Burg. Martenslaan 46, Leersum, onder vermelding van 'Lunch Wintersymposium WG' en dit te doen *vóór 15 december 1979*.

N.B.: Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap is *GRATIS* toegankelijk voor alle belangstellenden.

Inlichtingen: zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, 1091 AL Amsterdam, tel. 020-947272, tst. 39, alsmede bij drs. G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, Leersum, tel. 03434-3059.

De vijfde interland-bijeenkomst van NVvW en VVWL

Op *zaterdag 22 maart 1980* zal de vijfde gemeenschappelijke studiedag plaats hebben voor leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en die van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars. Viermaal heeft de bijeenkomst op Nederlands grondgebied plaats gehad waarbij we ons konden verheugen in een grote opkomst van onze Vlaamse vrienden. Ditmaal zal de bijeenkomst plaats hebben op Belgisch grondgebied. De plaats van samenkomst is het Koninklijk Atheneum Berchem.

Het Atheneum is gelegen vlak bij de afrit Berchem in de autosnelweg Breda-Antwerpen en eveneens dichtbij het spoorstation Berchem.

Thema:

Hoeken—een hoeksteen van de meetkunde

's-Morgens zal Rik Verhulst spreken over

Helpen we de hoeken soms niet om het hoekje?

en 's-middags Joop van Dormolen over

Hoeken, een steen des aanstoots.

Reserveer alvast de datum. Laten we ervoor zorgen, dat er ook van onze zijde een goede opkomst is, waardoor een goed contact kan ontstaan tussen Vlaamse en Nederlandse collega's.

Voor wie nog meer wil genieten: Antwerpen is een gezellige stad.

Het bestuur

Zestiende Nederlands Mathematisch Congres

zal gehouden worden op woensdag 9 en donderdag 10 april 1980 (in de week na Pasen) in de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Katholieke Universiteit te Nijmegen.

De congrescommissie bestaat uit dr. W. Vervaat (voorzitter), dr. F. J. B. J. Clauwens, dr. W. H. Schikhof en dr. S. H. Tijs.

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32^I - Amsterdam (c) - Tel. 020-26 28 10

INHOUD:

Dr. P. M. van Hiele: Nivo's in de argumentatie	121
J. J. Sloff: Het 1ste-lustrumcongres van de VVWL	127
W. Pijs: Kongruentie en gelijkvormigheid	129
H. Krammer, E. Huurnink-Hoddenbach: Praktikum in de wiskundeles	140
Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1978 – 31 juli 1979	153
H. Sissing: Het rekenmachientje of de rekenliniaal	154
Gaspard Bosteels 70 jaar	155
Recreatie	156
Boekbesprekingen	157
Mededelingen	158

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

Dr. P. M. van Hiele, Dr. Beguinlaan 64, 2272 AL Voorburg.

H. Krammer, E. Huurnink-Hoddenbach, THT, vakgroep onderwijskunde, postbus 217, 7500 AE Enschede.

W. Pijs, Willem Alexanderlaan 46, 3273 AW Westmaas.

H. Sissing, Vijverlaan 429, 2923 TN Krimpen a/d IJssel.

J. J. Sloff, Kostvliet 10, 9462 TR Gasselte.