



**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

55e jaargang

1979/1980

no. 3

november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree -
Dr. P. M. van Hiele - W. Kleine - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens -
W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteyn-
laan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v.
Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden
en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie
zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt.
gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II},
1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine
geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel.
055-25 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van
Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst.

Abonnementsprijs voor niet leden f 35,20. Een collectief abonnement (6 ex. of meer)
kost per abonnement f 20,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949*.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een
acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds
verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van
het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaar-
gang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

* Per abuis zijn op afl. 1 en 2 verkeerde prijzen opgenomen.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d
Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Terminologie in natuurkunde en wiskunde

P. G. J. VREDENDUIN

In het vwo treedt vaak discrepantie op tussen de terminologie en de symbolische schrijfwijzen bij het onderwijs in natuurkunde en in wiskunde, met name op het gebied van de infinitesimaalrekening. Tussen natuurkunde en wiskunde bestaan zulke grote methodische verschillen, dat we ons eigenlijk eerder verbazen moeten dat we er nog redelijk in slagen een gemeenschappelijke taal te spreken dan dat het optreden van discrepanties ons moet verontrusten.

Enkele essentiële verschillen tussen natuurkunde en wiskunde

1 Waarnemingsuitkomsten zijn natuurlijke getallen of rationale getallen. De natuurlijke getallen zijn uitkomsten van een telling, de rationale getallen van een meting. Eigenlijk zijn de rationale meetuitkomsten middels van rationale intervallen waarbinnen de meetuitkomst met een bepaalde graad van waarschijnlijkheid ligt. Irrationale getallen komen als meetresultaat niet voor.

2 Hoewel men op grond hiervan misschien zou verwachten, dat de fysicus als mathematisch apparaat de differentierekening zou gebruiken (zoals de econoom veelal doet), wordt in de fysische theorie algemeen gebruik gemaakt van differentiaalrekening en integraalrekening. Het reële getal is het fundament van deze rekenwijzen. De fysicus hanteert dus bij zijn theoretische verwerking van de waarnemingsresultaten een theorie waarin de variabelen reële getallen voorstellen, dus variabelen over $\mathbb{R}$ zijn.

3 De wiskunde is, in tegenstelling tot de natuurkunde, een zuiver deductieve wetenschap. Kort wil ik dit toelichten.

Uit A is B deduceerbaar (uit A volgt B) wil zeggen: zonder gebruik te maken van de betekenis van de specifiek-wetenschappelijke begrippen en relaties die in A en B voorkomen, kunnen we inzien, dat als de uitspraak A waar is, ook B een ware uitspraak is.

Voorbeeld:

uit alle koeien zijn zoogdieren en
alle zoogdieren zijn gewervelde dieren
volgt alle koeien zijn gewervelde dieren.

Om in te zien, dat de laatstgenoemde uitspraak inderdaad uit de eerste twee volgt, behoeven we niet te weten wat een koe, een zoogdier en een gewerveld dier is. Wel moeten we de betekenis kennen van de termen: alle, zijn, en. Dit

zijn logische termen, d.w.z. termen die in elke wetenschap een rol spelen en dus niet van specifiek-wetenschappelijke aard zijn. Om na te gaan of een conclusie op verantwoorde wijze getrokken is, behoeven we dus alleen te letten op de logische structuur van de uitspraken en moeten we abstraheren van de realiteit waarop de uitspraken betrokken zijn.

Voor de wiskunde heeft dit belangrijke consequenties. Als men bij het deduceren in bijvoorbeeld de meetkunde geen gebruik mag maken van de betekenis van specifiek-meetkundige begrippen als punt, rechte lijn, plat vlak en van relaties als ligt op, ligt tussen, is congruent met, dan heeft het ook geen zin deze fundamentele begrippen en relaties te definiëren of zelfs ook maar hun betekenis op de een of andere manier te omlijnen. Men kan volstaan met het uitgaan van enkele axioma's waarin deze begrippen en relaties voorkomen. Men kan dan in principe deductief een meetkunde opbouwen zonder terug te grijpen op de betekenis van de meetkundige termen, of, zoals we het op school wel zeggen, zonder van de figuur gebruik te maken. Bij het opbouwen van zijn wiskundige systeem sluit de mathemaat elke confrontatie met een of andere realiteit dus bewust uit.

Voor een fysicus is de situatie principieel anders. Zijn theorie is steeds een theorie die dienen moet ter verklaring van de realiteit. Zijn theorieën zijn principieel op realiteit betrokken. Natuurlijk zal hem dit niet verhinderen van tijd tot tijd deductief te werk te gaan. Ook voor hem kan de deductieve methode een bruikbaar apparaat zijn. Met dien verstande echter dat de fysicus zich daarbij slechts tijdelijk van de realiteit afkeert, terwijl dit zich van de realiteit afkeren voor de wiskundige essentieel is.

4 Doordat de wiskundige zich van de realiteit afkeert en de natuurkundige niet, zijn er begrippen die voor de natuurkundige wel en voor de wiskundige niet zinvol zijn. De mathemaat weet wat kleiner en groter betekent. Hij kan deze termen definiëren. Maar wat klein en groot wil zeggen en ook wat relatief klein en relatief groot betekent, valt buiten zijn gezichtsveld. Deze termen komen in zijn vocabulaire niet voor en hij zou ook niet weten, hoe hij ze moet definiëren.

Voor de fysicus hebben (relatief) klein en groot echter wel betekenis, doordat zijn begrippen op de realiteit betrokken zijn.

5 Het wiskundig apparaat waarvan de natuurkundige zich bedient, de infinitesimaalrekening, is dermate verfijnd dat hij al spoedig bemerkt aan een grover apparaat voldoende te hebben bij zijn berekeningen. Hij gaat er daarom toe over termen te verwaarlozen klein te noemen en deze dan te schrappen. Ik geloof dat hier de oorsprong van de discrepantie tussen de terminologie van de natuurkundige en die van de wiskundige ligt. We doen er verstandig aan te accepteren dat deze discrepantie inherent is aan het wezensverschil tussen de beide wetenschappen. Het heeft geen enkele zin elkaar verwijtend aan te kijken en te zeggen dat de ander het niet goed doet.

Na deze algemene inleiding wordt het tijd wat concreter te worden. Daartoe enkele voorbeelden van fysische redeneringen en het commentaar van de wiskundige erop.

Functie en functiewaarde

Voor de valbeweging in het luchtledige geldt $s = ct^2$. Wiskundig correcter geformuleerd: de afgelegde weg s is een functie van de tijd, namelijk de functie

$$s : t \rightarrow ct^2$$

In de natuurkunde komen we twee soorten uitspraken tegen:

$$\text{als } t = 3, \text{ dan is } s = 9c;$$

$$s(3) = 9c.$$

De tweede uitspraak is wiskundig correct geformuleerd. Er staat dat aan het origineel 3 de functiewaarde $9c$ toegevoegd is. In de eerste uitspraak stelt de letter s geen functie meer voor, maar een functiewaarde. Hier hapert iets. Functie en functiewaarde worden door elkaar gehaspeld.

Een ander voorbeeld. De wet van Boyle zegt, dat $pV = c$. Hier hebben we eigenlijk te maken met twee functies van de tijd, namelijk

$$p : t \rightarrow p(t)$$

$$V : t \rightarrow V(t)$$

De wet van Boyle zegt, dat het produkt van deze twee functies een constante functie is, of anders gezegd, dat

$$p(t)V(t) = c \text{ voor elke } t.$$

Soms vraagt men: gegeven is dat $V = 14$ als $p = 5$; hoeveel is V als $p = 10$? In een dergelijke vraag stellen p en V geen functies meer voor, maar functiewaarden.

Ik vermoed, wat de reactie van de fysicus op dit betoog zal zijn. Hij zal zeggen: ik noem de druk p . Is daar bezwaar tegen? Uiteraard niet, als hij er maar bij zegt wat hij met 'de druk' bedoelt. Bij nadere analyse zal dan blijken, dat hij er soms de druk als functie van de tijd mee bedoelt en soms de druk op een bepaald tijdstip. En daar gaat het juist om.

Deze 'slordigheid' in de notatie is in de natuurkunde algemeen gebruik. Ik geloof niet dat iemand er last van heeft. Ook de mathemaat maakt zich er wel aan schuldig, met name in de statistiek. Hij noemt een stochast X . Deze X is dan een functiesymbool. Maar hij vraagt rustig naar de kans dat $10 \leq X \leq 15$. En nu stelt X een functiewaarde voor, namelijk de waarde van de stochast.

In de wiskundeles maakt men, speciaal in de onderbouw, tegenwoordig een zorgvuldig verschil tussen functie en functiewaarde (in tegenstelling tot vroeger).

Vandaar dat ik het de moeite waard vind het probleem te signaleren, zonder er echter te veel belang aan te hechten. Als de fysicus 'correct' zou gaan formuleren, was het middel waarschijnlijk erger dan de kwaal.

Verwaarlozen of limiet nemen

We gaan weer uit van $s = ct^2$ en vragen naar de snelheid ten tijde t_1 . Deze is volgens de fysicus gelijk aan de gemiddelde snelheid over een klein tijdsinterval van t_1 tot $t_1 + \Delta t$. Over dit interval is

$$\Delta s = c(t_1 + \Delta t)^2 - ct_1^2 = 2ct_1\Delta t + c(\Delta t)^2$$

Omdat Δt klein is, is hierin $(\Delta t)^2$ te verwaarlozen. Zodat we vinden

$$\Delta s = 2ct_1\Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2ct_1$$

en dus

$$v(t_1) = 2ct_1$$

Fysisch correct, maar wat zegt de wiskundige hiervan? Twee dingen zijn voor hem niet acceptabel. Allereerst de opmerking dat de snelheid ten tijde t_1 gelijk is aan de gemiddelde snelheid over een klein tijdsinterval dat in t_1 begint (of eindigt). Hij begrijpt niet wat een klein tijdsinterval is. En verder begrijpt hij niet met wat voor recht $(\Delta t)^2$ verwaarloosd mag worden.

Laten we eens zien, hoe hij redeneert. Uit

$$\Delta s = 2ct_1\Delta t + c(\Delta t)^2$$

concludeert hij

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2ct_1 + c\Delta t$$

Nu neemt hij van beide leden de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ en vindt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2ct_1 + c\Delta t)$$

Hieruit volgt

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2ct_1$$

waarmee ook hij gevonden heeft, dat

$$v(t_1) = 2ct_1$$

Op het eerste gezicht lijkt er een ernstige discrepantie te bestaan tussen de gedachtengang van de mathemaat en van de fysicus. Bij nadere analyse valt het echter erg mee.

De fysicus weet wat relatief klein is. Hij weet, dat in

$$\Delta s = 2ct_1\Delta t + c(\Delta t)^2$$

de laatste term relatief klein is t.o.v. de andere twee en dat we deze dus kunnen verwaarlozen.

De wiskundige weet niet wat relatief klein is en moet daarom andere hulpmiddelen te baat nemen. Hij deelt door Δt en neemt daarna de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$.

Om dezelfde reden kan de fysicus zeggen dat de snelheid in t_1 gelijk is aan de gemiddelde snelheid over een relatief klein (erg klein) interval met t_1 als eindpunt, terwijl de mathemaat zegt, dat de snelheid in t_1 de limiet is van de gemiddelde snelheid over een interval dat t_1 als eindpunt heeft, voor lengte interval $\rightarrow 0$.

De natuurkundige verwaarloost (schrap) een term waarin Δt voorkomt, als deze relatief klein is t.o.v. andere termen. De wiskundige neemt de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$.

Ze komen zo langs verschillende wegen tot hetzelfde resultaat.

Tussen beide uitdrukkingsmanieren is geen essentieel verschil. De manier waarop de fysicus zich uitdrukt, is vertaalbaar in wiskundige taal. En omgekeerd. De talen verschillen, omdat ze zijn aangepast aan de objecten waarmee natuurkundigen resp. wiskundigen zich bezighouden.

We doen verstandig onze leerlingen op deze overeenkomst te wijzen. Dat zal een juist begrip van de relatie tussen wis- en natuurkunde bevorderen.

Het Δ -symbool

Een ongelukkig symbool. Ik wil dit vanuit wiskundig gezichtspunt toelichten. Gegeven is een functie

$$f: x \rightarrow f(x)$$

Wat betekent Δf ? De toename van f . Welke toename? We moeten de waarden van x weten waartussen de toename gemeten wordt.

Onderstel deze zijn x_1 en x_2 . Dan zou

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

zijn. Maar deze betekenis kan uit het symbool Δf niet afgelezen worden. We moeten het symbool dus wijzigen en bijv. schrijven $\Delta f(x_1, x_2)$, hetgeen dan gedefinieerd is volgens

$$\Delta f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_2) - f(x_1)$$

De schrijfwijze

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

is verrassend eenvoudig, maar alleen begrijpelijk na mondelinge toelichting. En daarmee is de schrijfwijze vanuit wiskundig oogpunt veroordeeld. Wel toelaatbaar is

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{\Delta f(x_1, x)}{\Delta x(x_1, x)}$$

maar dit is niet meer verrassend eenvoudig. Dan maar liever

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Een bijkomend didactisch voordeel is, dat we het symbool Δ kwijtgeraakt zijn en ons geen aparte moeite hoeven te geven met dit symbool te leren opereren.

Nu de fysicus. Die heeft te maken met functies van t . Bij hem is Δt een toename van t , en wel een kleine toename. Waar deze begint, blijkt wel uit de context. Waar hij eindigt is irrelevant.

Schrijven we

$$\Delta s = 2ct_1 \Delta t + c(\Delta t)^2$$

dan wordt met Δs de met Δt corresponderende toename van s bedoeld.

Als we aan de taal de eis stellen, dat hij voor een goed verstaander begrijpelijk is, mag men tegen de gebruikte symboliek geen bezwaar maken. Deze eis wordt normaliter aan taal gesteld. Dat de wiskundige aan zijn symbolische taal strengere eisen stelt, hoeft voor de natuurkundige nog geen reden te zijn zijn houding te wijzigen. Maar hij moet wel weten, waar de verschilpunten liggen, ten bate van zijn leerlingen.

Toch heb ik nog wel een ander bezwaar. Bij de natuurkundige betekent Δt een kleine toename van t . Maar later zullen we zien, dat hij een kleine toename van t ook wel noteert: dt . Vanwaar deze twee verschillende notaties voor hetzelfde? Ik weet wel, wat hierachter steekt. Het is een poging de natuurkundige symboliek in overeenstemming te brengen met de in de wiskundeles gebruikelijke. Nu hebben Δt en dt in de wiskunde verschillende betekenis, echter Δt en dt in de natuurkunde niet. Bovendien geraakt Δt in de wiskunde in onbruik. Zou er iets voor te zeggen zijn in de natuurkunde dan toch het Δ -symbool maar te vermijden?

De bepaalde integraal

Nu het omgekeerde probleem. Gegeven is $v = ct$ en $s(0) = 0$. Gevraagd $s(t_1)$.

Fysische oplossing

Verdeel het interval $(0, t_1)$ in een groot aantal kleine intervallen met lengte Δt . Laat over elk interval de snelheid constant blijven, en wel gelijk aan de snelheid in het beginpunt.

Dan is

$$\begin{aligned}s(t_1) &= 0 \cdot \Delta t + c\Delta t \cdot \Delta t + 2c\Delta t \cdot \Delta t + \dots + c(t_1 - \Delta t) \cdot \Delta t = \\ &= \frac{1}{2}c \frac{t_1}{\Delta t}(t_1 - \Delta t) \cdot \Delta t = \frac{1}{2}ct_1(t_1 - \Delta t)\end{aligned}$$

Omdat Δt te verwaarlozen klein is, mogen we hiervoor schrijven $\frac{1}{2}ct_1^2$.

Wiskundige oplossing I

In plaats van Δt weg te laten, omdat hij te verwaarlozen klein is, nemen we de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$. Ook dan vinden we $s(t_1) = \frac{1}{2}ct_1^2$.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (0 \cdot \Delta t + c\Delta t \cdot \Delta t + \dots + c(t_1 - \Delta t) \cdot \Delta t)$$

noemen we de bepaalde integraal van de functie v tussen de grenzen 0 en t_1 .

Wiskundige oplossing II

We weten, dat $s' = v$. Dus is s een primitieve functie van v . De primitieve functies van v zijn de functies

$$t \rightarrow \frac{1}{2}ct^2 + k$$

Wegens $s(0) = 0$, is hierin $k = 0$. Zodat we vinden

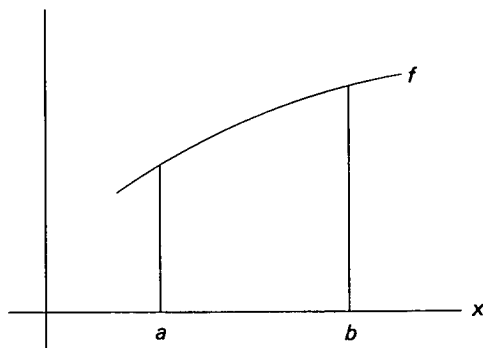
$$s(t) = \frac{1}{2}ct^2$$

Zowel in methode I als in methode II vinden we

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} v(t)dt$$

In methode I is de bepaalde integraal gedefinieerd als limiet van een som. In methode II is de bepaalde integraal van v tussen de grenzen 0 en t_1 gedefinieerd als de toename van een primitieve van v tussen 0 en t_1 .

De fysicus zweert bij de eerstgenoemde definitie van een bepaalde integraal, de wiskundige vindt de tweede definitie veel gemakkelijker. Ik wil dit aan de hand van een voorbeeld duidelijk maken. We willen de oppervlakte vinden van de figuur die begrensd wordt door de grafiek van de functie f , de lijnen $x = a$ en $x = b$ en de x -as.



Volgens de eerste methode is dit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(a)\Delta x + f(a + \Delta x)\Delta x + \dots + f(b - \Delta x)\Delta x)$$

Per definitie is dit gelijk aan $\int_a^b f(x)dx$.
Daarna bewijzen we dat

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dx = f(t)$$

Nu kunnen we de bepaalde integraal uitrekenen. Zoek een primitieve functie F van f . Dan is

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + k$$

Wegens

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

is $k = -F(a)$.

Zodat we vinden

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

Nu de tweede methode. De oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de grafiek van f , de lijnen $x = a$ en $x = t$ en de x -as noemen we $O(t)$.

We bewijzen (net als in de eerste methode), dat

$$O'(t) = f(t)$$

Als F een primitieve van f is, dan is nu

$$O(t) = F(t) + k$$

Wegens $O(a) = 0$, is hierin $k = -F(a)$. Zodat we vinden

$$O(t) = F(t) - F(a)$$

De tweede redeneerwijze, waarin de limiet van een som verdwenen is, is onmiskenbaar eenvoudiger.

De fysicus spreekt echter liever over de limiet van een som. Als hij wil aantonen, dat de energie van een geladen geleider gelijk is aan $\frac{1}{2}qV$, brengt hij op de ongeladen geleider eerst een hoeveelheid lading Δq , enz.

Hij zou ook best als volgt kunnen redeneren. Voor de energie van de geleider geldt

$$\frac{du}{dq} = V \text{ (immers als we er een ladingsdeeltje } \Delta q \text{ opbrengen, is daarvoor een arbeid } \Delta q \cdot V \text{ vereist)}$$

Dus

$$\frac{du}{dq} = \frac{q}{C}$$

$$u = \int_0^{q_1} \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C} = \frac{1}{2} q_1 V_1$$

Hierin is op een geleider met capaciteit C een hoeveelheid lading q_1 gebracht, waardoor de potentiaal V_1 werd.

Hij redeneert zo niet. Hij volgt de eerste methode. En ik vind, dat hij gelijk heeft. Vanuit fysisch oogpunt zie je op de eerste manier veel beter wat er gebeurt, althans wat er in gedachten gebeurt, terwijl de tweede een kant en klaar resultaat geeft, dat minder doorzichtig is.

Differentialen

Wat differentialen zijn, wil ik eerst aan de hand van een voorbeeld uiteenzetten. Onderstel x , y en z zijn functies van een zelfde variabele t . Ze zijn bijv. gedefinieerd door

$$x = 2t \quad (\text{eigenlijk: } x : t \rightarrow 2t)$$

$$y = t^2$$

$$z = t^3$$

Kies twee waarden voor $t : t_1$ en $t_1 + h$, en bepaal de toenames van x , y en z over het interval $(t_1, t_1 + h)$. Deze zijn:

$$\text{toename } x = 2(t_1 + h) - 2t_1 = 2h$$

$$\text{toename } y = (t_1 + h)^2 - t_1^2 = 2t_1h + h^2$$

$$\text{toename } z = (t_1 + h)^3 - t_1^3 = 3t_1^2h + 3t_1h^2 + h^3$$

Nu bepalen we de verhouding van deze toenames:

$$\begin{aligned}\text{toename } x : \text{toename } y : \text{toename } z &= \\ &= 2h : (2t_1h + h^2) : (3t_1^2h + 3t_1h^2 + h^3) = \\ &= 2 : (2t_1 + h) : (3t_1^2 + 3t_1h + h^2)\end{aligned}$$

En ten slotte bepalen we de limiet hiervan voor $h \rightarrow 0$. Deze is

$$2 : 2t_1 : 3t_1^2$$

We noemen dit de differentiaalverhouding van x , y en z in t_1 .

Fysici zeggen het anders, namelijk als volgt. We zijn in t_1 . Nu neemt t een klein beetje toe. Dan nemen ook x , y en z een klein beetje toe. Hoe verhouden zich deze toenames? Deze verhouding heet de differentiaalverhouding van x , y en z in t_1 .

Nu algemeen. Onderstel x , y en z zijn functies van t . Dus

$$\begin{aligned}x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t)\end{aligned}$$

Onder $dx : dy : dz$ verstaan we dan de limiet van de verhouding

$$(f(t+h) - f(t)) : (g(t+h) - g(t)) : (h(t+h) - h(t))$$

voor $h \rightarrow 0$.

Deze limiet heet de differentiaalverhouding van x , y en z in t .

We zien hieruit:

dx , dy en dz hebben geen zelfstandige betekenis. Alleen hun verhouding heeft betekenis. Als we desondanks dx , dy en dz differentiaalën noemen, moeten we er wel aan denken dat alleen hun verhouding gedefinieerd is en dat het dus geen zin heeft te spreken over een differentiaal.

Ik ga nog even terug naar ons voorbeeld en wil er een fysische interpretatie aan geven. Een stoffelijk punt beweegt zich in de driedimensionale ruimte. De coördinaten zijn functies van de tijd t . Deze functies zijn gegeven door

$$\begin{aligned}x &= 2t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3\end{aligned}$$

Gevraagd de richting van de raaklijn aan de baan ten tijde t .

De differentiaalverhouding van x , y en z ten tijde t is

$$dx : dy : dz = 2 : 2t : 3t^2$$

Deze differentiaalverhouding legt de richting van de raaklijn vast. De richtingscosinussen ervan verhouden zich namelijk als $2 : 2t : 3t^2$.

Ik kan hier mijn fysische vrienden ten slotte een hart onder de riem steken door op te merken, dat ook de wiskundige hier functie en functiewaarde nogal eens door elkaar haalt. Blijkens de definitie is $dx : dy : dz$ een functie van t . Maar een wiskundige deinst er niet voor terug te zeggen: als $t = 1$, dan is $dx : dy : dz = 2 : 2 : 3$. En nu is met $dx : dy : dz$ geen functie, maar een functiewaarde bedoeld.

Differentialen en afgeleide functie

Gegeven een functie

$$f : x \rightarrow f(x)$$

We onderstellen dat f differentieerbaar is en willen het verband opsporen tussen enerzijds de afgeleide en anderzijds de differentiaalverhoudingen. Daartoe beschouwen we niet één functie f , maar twee functies, namelijk f en de identieke functie

$$i : x \rightarrow x$$

Dit zijn twee functies van dezelfde variabele x . We kunnen de definitie van de differentialen er dus op toepassen. Deze levert

$$df(x) : dx = \lim_{h \rightarrow 0} [(f(x + h) - f(x)) : (x + h - x)] \quad (1)$$

Vergelijk dit met

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

Dat lijkt erg veel op elkaar. Alleen staat er de ene keer een verhouding en de andere keer een quotiënt.

Uit (1) en (2) volgt:

$$df(x) : dx = f'(x) : 1$$

Nu correspondeert met elke verhouding een quotiënt, behalve met $1 : 0$. En de verhouding $1 : 0$ kan hier niet optreden, omdat f differentieerbaar is. We kunnen dus ook schrijven

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad (3)$$

Het linker lid noemen we een differentiaalquotiënt. Het is het quotiënt van twee differentialen.

Aanbeveling verdient de schrijfwijze $\frac{df(x)}{dx}$ niet vroegtijdig in te voeren, dus niet voordat men met differentialen (of differentiaalvergelijkingen) gaat werken. Dit zou een goed begrip ervan alleen maar in de weg staan. Nu een zeer belangrijke consequentie. We mogen beide leden van (3) met dx vermenigvuldigen. Er staat immers een *quotiënt*. We krijgen dan

$$df(x) = f'(x)dx$$

De fysicus zal met grote vreugde constateren, dat de wiskundige dit correct vindt. Immers als hij bijv. weet dat

$$\frac{ds}{dt} = 2ct$$

zal hij beide leden met dt vermenigvuldigen en zeggen, dat

$$ds = 2cdt$$

Fysicus en mathemaat zijn het dus formeel eens. Wel is de betekenis van hun symbolen een nuance verschillend. Bij de wiskundige zijn ds en dt differentialen, bij de fysicus zijn het kleine bij elkaar horende aangroeiingen van s en t . Maar daar zijn we inmiddels aan gewend geraakt. We weten, dat de fysische taal op een bepaalde wijze vertaald moet worden om mathematische taal te verkrijgen. Lukt deze vertaling, dan moeten we tevreden zijn.

Ik hoop hiermee een brug geslagen te hebben tussen de uitdrukkingswijzen van de wiskundige en van de natuurkundige. Weliswaar spreken ze niet exact dezelfde taal, maar we kunnen wel zeggen, dat hun talen isomorf zijn, d.w.z. in elkaar vertaalbaar.

Verhoudingen (appendix)

Sommigen hebben misschien moeite met de begrippen verhouding en limiet van een verhouding. Ik wil deze kort en niet al te zwaarwichtig toelichten.

We zeggen, dat 3 en 4 dezelfde verhouding hebben als 6 en 8, omdat $6 = 2 \cdot 3$ en $8 = 2 \cdot 4$.

Meer algemeen dat a en b dezelfde verhouding hebben als c en d , als er een x bestaat zo, dat $c = xp$ en $d = xb$ (of $a = xc$ en $b = xd$).

Dezelfde verhouding hebben dus bijv. 3 en 4, 6 en 8, $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$, -20 en $-\frac{80}{3}$, enz. Zo'n verzameling van tweetallen die allemaal dezelfde verhouding hebben, noemen we een verhouding.

We noteren deze verhouding naar believen $3 : 4$ of $6 : 8$ of $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ of $-20 : -\frac{80}{3}$ of enz.

Een andere verhouding bestaat uit de tweetallen 0 en 1, 0 en 2, enz. We noteren deze $0 : 1$ of $0 : 2$ of enz.

Nog een andere verhouding is $1 : 0$.

De verhoudingen lijken veel op quotiënten. Met bijna alle verhoudingen correspondeert een quotiënt: met $3 : 4$ het quotiënt $\frac{3}{4}$, met $0 : 1$ het quotiënt $\frac{0}{1}$. Er is echter één verhouding waarmee geen quotiënt correspondeert en dat is de verhouding $1 : 0$. Daardoor hebben verhoudingen een ruimer toepassingsmogelijkheid dan quotiënten.

Zo heeft de lijn door de oorsprong en het punt $(4, 3)$ het richtingsgetal (richtingscoëfficiënt) $\frac{3}{4}$ en de richtingsverhouding $3 : 4$. Maar de lijn door de oorsprong en het punt $(0, 1)$ heeft geen richtingscoëfficiënt, maar nog wel een richtingsverhouding, namelijk $1 : 0$.

Opgemerkt moet nog worden, dat het tweetal 0 en 0 steeds buiten beschouwing blijft; $0 : 0$ is dus geen verhouding.

Nu de limiet van een verhouding. We beschouwen de verzameling van de verhoudingen. Om binnen deze verzameling van limieten te kunnen spreken, moet er in deze verzameling een omgevingsbegrip gedefinieerd worden. Dat kunnen we doen door een afstand te definiëren. We moeten dus afspreken wat we onder de afstand van twee verhoudingen verstaan.

Nu hebben we zojuist gezien, dat met elke verhouding een rechte lijn door de oorsprong in het platte vlak correspondeert. Het ligt voor de hand onder de afstand van twee verhoudingen de hoek te verstaan die de corresponderende lijnen met elkaar maken. Door deze afspraak is vastgelegd wat onder de limiet van een verhouding verstaan wordt.

Voorbeeld. We beschouwen de verhouding $n : (n + 1)$. Wat is de limiet hiervan voor $n \rightarrow \infty$?

Populair gezegd: we hebben de verhoudingen $1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5, \dots$. Waar komen deze op de duur vlakbij?

Teken de lijnen $x : y = 1 : 2, x : y = 2 : 3, x : y = 3 : 4, \dots$. Waar komen deze op de duur vlakbij? Bij de lijn $x : y = 1 : 1$. De limiet van de verhouding $n : (n + 1)$ voor $n \rightarrow \infty$ is dus $1 : 1$.

Verhoudingen van meer dan twee getallen worden analoog behandeld.

Conclusie (subjectief)

Natuurkundige en wiskundige spreken twee verschillende talen. De talen zijn in zoverre niet principieel verschillend, dat ze in elkaar vertaalbaar zijn.

Ik ben van mening dat noch de wiskundige noch de natuurkundige zich in bochten moet wringen om te trachten dit verschil ongedaan te maken. Misschien kunnen de talen soms iets naar elkaar toegebogen worden zonder daarbij schade te doen aan het specifieke karakter van elk van de twee wetenschappen. Ik waag me er niet aan richtlijnen hiervoor te geven.

Van groot belang is dat de leerlingen het verband tussen beide talen zien. Ze moeten begrijpen dat een term T_2 die ze in de natuurkundeles tegenkomen, overeenkomt met een term T_1 die ze in de wiskundeles reeds ontmoet hebben. Anders is het niet eens duidelijk hoe in de natuurkunde de wiskunde toegepast wordt. Zowel de natuurkunde- als de wiskundeleraar moeten er zorg voor dragen dat deze link tot stand gebracht wordt. Daartoe is een eerste vereiste dat ze op de hoogte zijn van elkaars taal en dat ze weten hoe deze in de lessen van de

collega van het andere vak gebruikt wordt. Eerst dan is het hun mogelijk hun leerlingen de overeenkomst tussen beide terminologieën duidelijk te maken. Daarvoor is onvermijdelijk dat de leraren uit de sectie natuurkunde en die uit de sectie wiskunde een goed contact met elkaar hebben waarin deze problemen uitvoerig worden besproken.

De heer Vredenduin heeft bovenstaand artikel geschreven voor Faraday, een tijdschrift voor onze collega's natuurkunde, en voor Euclides. Hierna volgt een reactie van de heer Biezeveld, redacteur van Faraday.

Vragen en opmerkingen over differentiaal

HUBERT BIEZEVELD

De *Faraday*-redactie is Vredenduin zeer dankbaar voor zijn fraaie artikel. Het vervelende effect ervan is echter dat ik nu beter dan vroeger kan omschrijven waarom ik nogal ongelukkig ben met een deel van de wiskunde, zoals die thans op het voortgezet onderwijs wordt gegeven. Ik weet, dat ik daarmee het odium op mij laad een ondankbaar mens te zijn. Eerst vraag je iemand om een artikel. Nadat hij dat geschreven heeft en jij wat vragen hebt gesteld, komt er een nog leuker artikel en dan begint de kritiek pas goed. Toch wil ik het er op wagen niet alleen tevreden te zijn met de constatering, dat wiskunde en natuurkunde isomorfe talen spreken, maar wil ik ook proberen aan te geven wat ik geleerd heb en welke vragen er over blijven.

Mijn hoofdprobleem is, dat leerlingen in de natuurkundeles vaak zo weinig herkennen van de wiskunde die ze gehad hebben. Zelf ben ik van een van de laatste jaren die op school geen differentiaalrekening had. Je leerde het jezelf zo'n beetje uit b.v. het boek van De Vries. Nu krijgen de leerlingen het wel, maar ze kunnen er zo weinig mee doen. Dat is niet alleen een gevolg van de 'normale' systemscheiding, maar volgens mij ook van de manier waarop de analyse thans behandeld wordt.

Vredenduin schrijft wel, dat de wiskunde een deductief systeem is zonder confrontatie met een of andere realiteit. Maar toch wordt de meetkunde niet meer strak deductief vanuit de axioma's opgebouwd zoals vroeger. Ik hoor het mijn leraar in de eerste klas nog zeggen: 'Je mag zo'n driehoek niet uit het platte vlak halen, want anders is het geen planimetrie meer'. Tegenwoordig wordt er geknipt, gevouwen en geplakt dat het een lieve lust is.

Voor mijn gevoel hebben de wiskundigen echter in de infinitesimaalrekening dubbel en dwars teruggenomen wat ze in de meetkunde hebben weggegeven.

Nu moet ik ervoor oppassen, dat ik niet de indruk wek, dat ik wiskunde uitsluitend wil zien als een hulpwetenschap voor natuurkunde en economie. Aan de andere kant vind ik wiskunde ook weer te belangrijk, dan dat ik haar alleen aan de mathematen wil overlaten. Zoals Vredenduin het beschrijft lijkt het er op alsof contact met een realiteit van wiskunde iets anders maakt. Is dat echt vol te houden? In allerlaatste instantie misschien wel. Toch irriteert het mij nog steeds, dat je op de Universiteit wel allerlei existentiebewijzen leerde van

fourier-transformaties, bessel-functies, en ga maar door, maar dat je niet leerde wat je ermee kon doen. Ook werden op school altijd de ingeklede vergelijkingen overgeslagen, en ik ben bang dat dat nu nog niet veel beter is.

Functie en functiewaarde

Zeker in de kinematica lijkt het mij winst, als ook de fysici wat beter gaan onderscheiden tussen functie en functiewaarde.

$$s(t) = 5t^2 \text{ (m)} \quad \text{en} \quad s(3) = 45 \text{ m}$$

is echt beter dan

$$s = 5t^2 \text{ (m)} \quad \text{en als} \quad t = 3 \text{ s} \quad \text{dan is} \quad s = 45 \text{ cm.}$$

Het Δ -symbool

Het Δ -symbool wil ik toch wel proberen te redden, al kunnen wij fysici er best wat nauwkeuriger mee omgaan. Het probleem is, dat ik niet zie wat $\Delta f(x)$ anders kan betekenen dan

$$f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{of} \quad f(x + h) - f(x).$$

Waar begint deze (kleine) toename? In x en hij eindigt in $x + \Delta x$. Waarom zie je aan h wel waar je eindigt en aan Δx niet? Verder begrijp ik niet waarom dit een 'mondelinge toelichting' heet, waarmee de hele Δ -symboliek veroordeeld moet zijn. Moet je $\mathbb{R}$, $\in$, $\forall$, $\mathbb{N}$, 1 , 2 , 3 , $\int$, ∇ enz. dan niet 'mondeling' toelichten? Voorlopig beschouw ik deze argumenten als milde vormen van demagogie. Het verwijt dat wij Δ en d nogal slordig door elkaar halen en bovendien van het woordje klein gebruik maken is ernstiger. Ik kom daar nog op terug.

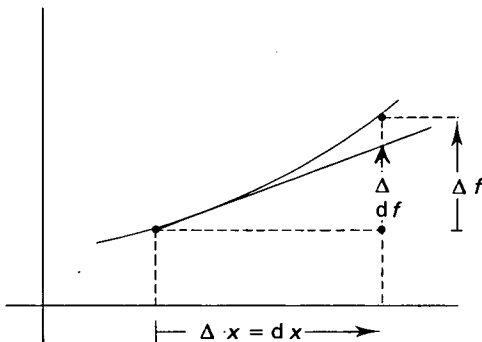
Het grote nadeel van die h is voor mij, dat leerlingen de mogelijkheden voor het gebruik van de differentiaalrekening niet herkennen, als ze de h niet zien. 'O, meneer, die Δt , is dat de h , zeg dat dan.' Het voordeel van de Δ is dat je kan spreken over Δt , Δs , Δp . Je weet dan tenminste waar je over praat. Zo'n h is zo nietszeggend. Leerlingen kunnen toch een vergelijking al niet oplossen als de onbekende geen x heet.

Het probleem met Δx en dx zit hem volgens mij in de grote precisie waarmee men tegenwoordig wiskunde in de bovenbouw wil geven. Dat klinkt natuurlijk wat mal uit de mond van een fysicus, omdat wij nu eenmaal bekend staan als notoire sloddervossen, maar toch wil ik de opmerking laten staan. Leidt alleen het smalle pad van de zuivere deductie naar de hemel en het brede pad langs de realiteit naar de hel? Ik geloof er niets van.

De nogal abstracte behandeling van differentialen maakt op mij de indruk

alsof ik in de mechanica eigenlijk met de lorentztransformatie zou moeten beginnen, omdat die in samenhang met de relativiteitstheorie een betere beschrijving zou geven dan de galileïtransformatie.

Ik kan niet goed overzien welke schade aan later begrip wordt aangericht als differentialen eerst 'concreet' aan de hand van een plaatje worden geïntroduceerd:



In een latere behandeling kan dan alsnog er op gewezen worden dat dit maar één aspect van de differentialen weergeeft.

Vredenduïn vraagt om niet te vroeg met de notatie $\frac{df(x)}{dx}$ te beginnen. Ik vind dat best, als dan maar wel

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

gehandhaafd blijft. Als wij ons mogen redden met

$$\Delta f(x) = \Delta x \cdot f'(x) + \varepsilon \text{ of}$$

$$\Delta f(x) \approx \Delta x \cdot f'(x)$$

ben ik helemaal gelukkig. Die notatie biedt voldoende houvast om in de natuurkundeles duidelijk te maken dat er iets te differentiëren valt en bovendien is dan ook de link naar de integratie goed te leggen. Waarover straks nog één opmerking.

Vredenduïns artikel heeft in ieder geval voor mij het gevolg, dat ik toch wat voorzichtiger met differentialen om zal gaan de komende tijden. Ik blijf het gekke dingen vinden, ze doen me nog het meest denken aan de kantiaanse Dinge an sich. Vroeger wist ik altijd, je mag niet zeggen: dy gedeeld door dx,

maar je moet zeggen dee-y-dee-x. En als je dan van $\frac{dy}{dx} = x$ stiekem via $dy = xdx$ overging naar $y = \int xdx + k$ dan hoopte je altijd maar, dat niet ondertussen een echte mathemaat over je schouder had meegekeken. Dankzij het artikel en de appendix over verhoudingen en quotiënten is mijn gemoed heel wat rustiger. Een differentiaalquotient lijkt toch weer meer op een echt quotiënt. Alleen, de dingen die je deelt zijn weer niet zo echt als gewone getallen.

Aan het slot van mijn pleidooi om de Δ niet overhaast weg te gooien, wil ik nog het argument noemen, dat in de integratiesymboliek nog steeds de gestileerde $\sum$ de $\int$ voorkomt en de d , het familielid van de Δ . Dankzij deze symbolen is in een vroeg stadium duidelijk te maken wat de relatie is tussen differentiëren en integreren.

Ik hoop dat het artikel van Vredenduin, dankzij de gelijktijdige plaatsing in *Euclides* en *Faraday*, aanleiding zal zijn tot overleg tussen de secties wiskunde en natuurkunde op veel scholen.

Naschrift. Ik begrijp de worsteling van Biezeveld met de differentialen. Ik heb er zelf ook veel mee moeten worstelen. Ik heb ze toch vermeld, omdat de verwantschap tussen wiskundige en natuurkundige taal er zo duidelijk mee gedemonstreerd kan worden. Persoonlijk vind ik ze voor het onderwijs minder geschikt. Ik heb dan ook een poging gedaan de huidige doelen van het onderwijs in de analyse te bereiken zonder van differentialen gebruik te maken. Zie mijn artikel: Differentiaalvergelijkingen maar geen differentialen in *Euclides* 53, nr. 6, blz. 262-266. In het kort komt het daarop neer, dat wel de notatie $dy : dx$ ingevoerd wordt, maar dat deze de richtingsverhouding van een lijn aanduidt. Gehandhaafd blijft dan $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ en daarmee de vertaalbaarheid van fysische in mathematische taal.

P. G. J. V.

Logaritmen en het rekendoosje

H. N. POT

Misschien kan – op een zeker maar nog onbepaald niveau – de volgende aanpak verhelderend werken. De (althans voor mij) niet zo gemakkelijk inzichtelijk te verwerken machten met irrationale exponenten worden hierbij vermeden.

De *logaritme van een getal a* (bij een zeker grondtal g) geeft aan hoeveel factoren g er ‘in het getal a zitten’.

Bijvoorbeeld: de logaritme van 64 bij grondtal 2 is 6, want er gaan 6 factoren 2 in 64 ($2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$). We zeggen ook: de 2-logaritme van 64 is 6, en we schrijven dit kort als:

$${}^2\log 64 = 6.$$

Evenzo: de 10-logaritme van 1000 is 3 (${}^{10}\log 1000 = 3$), want $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Alleen, meestal gaat dit niet zo mooi!

We zien wel dat ${}^2\log 64 = 6$ en ${}^2\log 128 = 7$, maar voor alles tussen 64 en 128 in krijgen we niet een *heel* aantal factoren 2. We voelen wel aan dat de 2-logaritme van 65 net iets boven de 6 zal liggen, en de 2-logaritme van 127 iets onder de 7, maar waar nou precies?

Laten we kijken naar: ${}^{10}\log 10 = 1$ (want in 10 zit maar één faktor 10) en naar ${}^{10}\log 100 = 2$. Waar tussen 1 en 2 ligt nu ${}^{10}\log 20$?

Een betere benadering – zelfs zo nauwkeurig als we willen – kunnen we vinden via een hulpgrondtal h , dat we net iets groter dan 1 kiezen (zeg: $h = 1,001$). We kijken dan hoeveel van deze factoren h er in 10 zitten, en ook hoeveel in 20.

Een benadering van ${}^{10}\log 20$ wordt nu gegeven door de verhouding van de aantallen factoren h in 20 en in 10. *) Weliswaar komen deze ‘aantallen’ meestal

*) Hier wordt stilzwijgend aangenomen dat de genoemde verhouding als functie van h inderdaad naar een limiet gaat voor $h \downarrow 1$.

Is dit nog op een doorzichtige manier aan te tonen?

weer niet op helen uit, maar . . . als h dicht bij 1 ligt zijn het grote getallen met een afrondfout kleiner dan één eenheid, waardoor de fout in het quotiënt ervan klein is!

Ditzelfde nog wat nauwkeuriger gezegd :

Met $n(h, 20)$ als het grootste gehele aantal factoren h in 20,
 en $n(h, 10)$ als het grootste gehele aantal factoren h in 10, kunnen we stellen :

$$\frac{n(h, 20)}{n(h, 10) + 1} < {}^{10}\log 20 < \frac{n(h, 20) + 1}{n(h, 10)}$$

(Een te lage teller en een te hoge noemer geeft een te kleine breuk, en andersom. Bij grote n komen de breuken steeds dichter bij elkaar, en bepalen ${}^{10}\log 20$ dus steeds preciezer.)

Mooi, alleen is het vinden van het aantal factoren 1,001 in 20 nog een zeer onplezierig strafwerk. Maar gelukkig hebben we tegenwoordig allemaal een reken-doojsje dat in ieder geval kan vermenigvuldigen. Met een ‘constante faktor’ gaat het nog een stuk makkelijker, en met ook nog één geheugenplaats kan nog weer vlugger een grotere precisie bereikt worden. Bijvoorbeeld door eerst het aantal factoren h^{1000} in 20 te zoeken, dan kijken hoe vaak h^{100} er nog ‘bij’ kan, enz., en pas op het laatst met losse h ’s aanvullen (‘aanmalen’).

Ik vond op deze manier :

h	$n(h, 10)$	$n(h, 20)$	$n(h, 20)/(n(h, 10) + 1)$	$(n(h, 20) + 1)/n(h, 10)$
1,1	24	31	1,24	1,3333333
1,01	231	301	1,2974138	1,3073593
1,001	2303	2997	1,3007813	1,3017803
1,0001	23027	29958	1,3009380	1,3010379
1,00001	230259	299574	1,3010249	${}^{10}\log 20$
				1,3010349

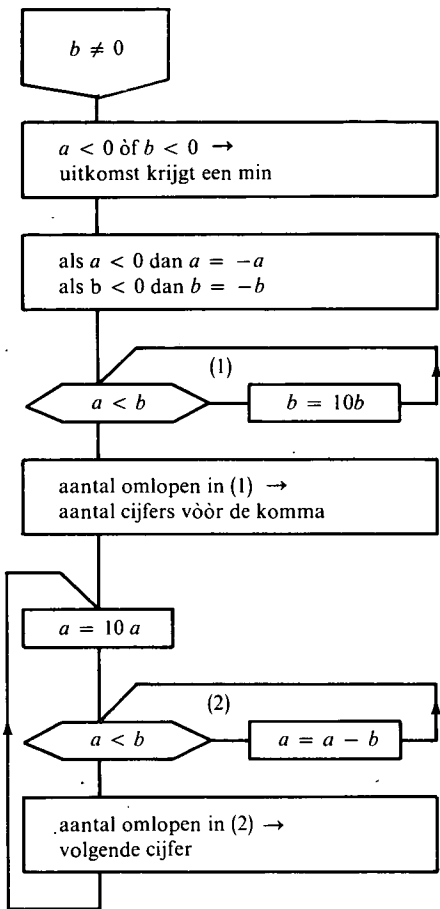
Hetgeen klopt met wat in de boeken te vinden is :

$${}^{10}\log 20 = 1,3010299956639811952137389 \dots$$

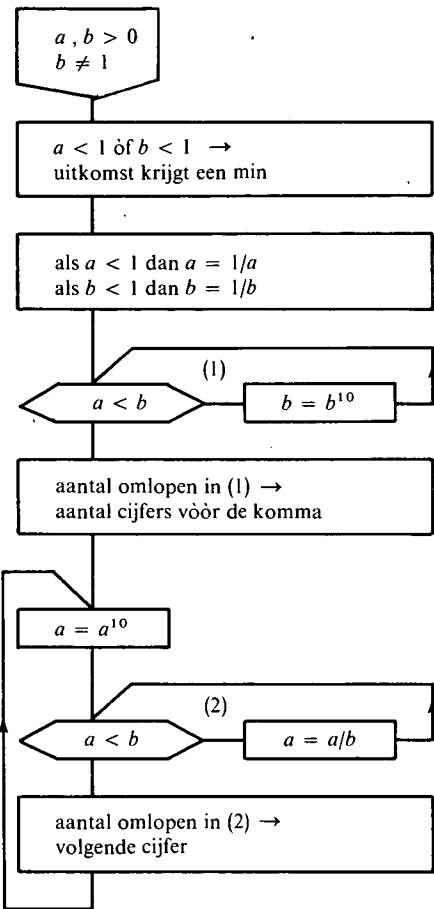
Een stuk specialistischer is de navolgende methode om een benadering te vinden. De verwantschap met de staartdeling is weliswaar voor de wiskundige tri-viaal, maar in een onderwijs-situatie wellicht toch het opmerken waard.

Algoritmen voor de decimale benadering van:

$a : b$
(de staartdeling):



${}^b\log a$
(de staartfaktoring?):



Het log-algoritme is op een rekendoosje (zonder log-toets) gemakkelijk uit te voeren indien een constante faktor (voor de machten) en een geheugen (voor b) aanwezig is.

Uitproberen leverde ruim één correcte decimaal méér dan met de log-toets. Het deel-algoritme geeft zelfs onbeperkt veel decimalen als a en b in niet al te veel cijfers gegeven zijn.

Als het rekendoosje de 'wetenschappelijke notatie' kan geven, kunnen de eerste twee significante decimalen van ${}^{10}\log a$ nog eenvoudiger worden verkregen. Namelijk als de rechts in het venster af te lezen 10-exponent van a , eventueel na een aantal malen $a = a^{10}$ en dan met de komma evenzoveel plaatsen naar links verschoven. Bijvoorbeeld:

$$(2^{10})^{10} = \boxed{1.2677\ 30} \text{ dus } {}^{10}\log 2 \approx 0,30$$

ook voor a tussen 0 en 1:

$$((0,9)^{10})^{10} = \boxed{1.7479 - 46} \text{ dus } {}^{10}\log 0,9 \approx -0,046.$$

Ik heb het gevoel (maar wat dat zegt moet U maar zeggen) dat wanneer we proberen (en de leerlingen laten proberen) om de hier in taai proza weergegeven uiteenzettingen ook daadwerkelijk op een rekendoosje – met hoofd en vingers – na te spelen, dit sterk bijdraagt tot het gaan begrijpen van de tekst, hier dus van het fenomeen logaritme.

Over de auteur:

Hessel Pot studeerde af ('69) in het hoofdvak experimentele natuurkunde. Hij was onder meer een vijftal jaren leraar wiskunde en enige tijd medewerker bij het IOWO.

Gelooft dat het rekendoosje door het overbruggen van cijferbarrières, bij meer onderwerpen in de schoolstof een inzichtelijke benadering mogelijk maakt.

wiskunde I en II: herverkaveling en ontevredenheid

I. W. MOLENAAR en W. E. DE JONG

De in mei 1978 ingestelde werkgroep HEWET bracht kort na de jaarwisseling een interimrapport uit. Op initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren werd dit in april 1979 besproken tijdens drie bijeenkomsten: in Rotterdam, Eindhoven en Zwolle. Daarnaast ontving de HEWET-groep een zeventigtal schriftelijke reacties. Naast instemming was er ook vrij forse kritiek. Waar mogelijk zal die verwerkt worden in de vorm van een bijstelling van de voorstellen; de HEWET-groep komt daartoe tussen augustus en december nog minstens vijf maal bijeen.

Vooruitlopend op de definitieve standpuntbepaling hebben enige leden van de werkgroep de behoefte, op een paar veel gehoorde bezwaren tegen het interimrapport in te gaan door middel van dit artikel. De overige leden zijn het met dit initiatief eens, onder meer omdat daarmee onnodige misverstanden uit de weg kunnen worden geruimd en omdat een verdere discussie voorafgaand aan het eindadvies aan de staatssecretaris alleen maar kan worden toegejuicht. Een uitputtende behandeling van alle reacties zou een boekwerk opleveren, zodat hieronder alleen enkele belangrijke thema's aan de orde komen.

Het 'eisende' wetenschappelijk onderwijs

De tekst van de instellingsbeschikking (interimrapport pag. 34) heeft bij sommigen helaas de suggestie gewekt alsof de eisen van de faculteiten bepalend zouden moeten zijn voor het VWO-programma. Wij zouden dat onjuist vinden, en mede daarom heeft de HEWET-groep haar eerste taak ook niet zo letterlijk opgevat dat aan alle faculteiten gevraagd is om wensenlijstjes voor de VWO-wiskunde. Reacties van VWO-leraren krijgen zeker niet minder gewicht dan die van secties van de Academische Raad of andere universitaire organen.

Het is niet juist de werkgroep af te schilderen als boodschappenjongens van economie en sociologie. Naast één medewerker uit de economische en één hoogleraar uit de sociale faculteit (die een doctoraat in de wiskunde heeft) kent de HEWET een hoogleraar en een lector in de wiskunde, betrokken bij onderwijs aan niet-wiskundigen op een universiteit, resp. een technische hogeschool, een

medewerker aan de lerarenopleiding, drie inspecteurs en twee wiskundeleraren. 'U staat zelf niet voor de klas' mag dan voor de meeste leden formeel juist zijn, wij menen dat de werkgroep als geheel, aangevuld met drie adviseurs werkzaam bij het IOWO, niet het verwijt verdient vanuit academische hoogte het schoolgebeuren niet meer te zien.

Wiskunde, economie en sociale wetenschappen

Sommige briefschrijvers willen de ontwikkeling ontkennen of tegenhouden waarbij het gebruik van wiskundige modellen bijgedragen heeft tot kennisgroei en verbeterde meetmethoden in de economische en sociale wetenschappen. Wij achten het niet juist dat in 1990 doctorandi afgeleverd worden die een vaag verhaal produceren waar een empirisch verifieerbare uitspraak ook mogelijk was, alleen maar omdat de economie van 1925 en de sociologie van 1955 het toch ook zonder wiskunde konden stellen. Het systeem van zeven eind-examenvakken dwingt deze faculteiten te kiezen tussen eerstejaars die na de vierde klas geen wiskunde hebben gehad en eerstejaars met Wiskunde I. Als noodoplossing voor deficiënten zijn er bijspijker-cursussen, en rondom Amsterdam een Wiskunde III opleiding, die door de betrokkenen nu al een tijdelijke oplossing tot aan de herverkaveling is genoemd. Veel subfaculteiten hanteren dit 'minimum wat noodzakelijk is om het – bestaande – onderwijs aan de faculteit met vrucht te kunnen volgen', veel andere subfaculteiten examineren niets en laten de studenten zelf ontdekken dat de studie statistiek, meettheorie en modellenbouw bevat: hij/zij mag dan zelf ervaren of de sinds 4-VWO vergeten wiskundekennis voldoende is. Wel raadt de Economische Faculteit van de R.U. Groningen op de voorlichtingsdag aan alle aspirant-studenten af Economie te gaan studeren met een onvoldoende voor Wiskunde I op het eind-examen, omdat de gegevens uitwijzen dat dit tot een zeer hoog zakpercentage in de propedeuse leidt. Het bestaan van noodmaatregelen was ons bekend, maar wij meenden niet dat de bestaande toestand herverkaveling overbodig maakte.

Wiskunde III

Verschillende briefschrijvers vinden het streven naar een 'Wiskunde III' te verkiezen boven de door de werkgroep beschreven herverkaveling. Ze menen dat de werkgroep deze mogelijkheid te gemakkelijk terzijde geschoven heeft. In het rapport ontbreken inderdaad de argumenten. Hier volgen er enkele. Het vak wiskunde III wordt gezien als een wiskunde op lager niveau, niet méér bevattend dan de meest noodzakelijke en meest elementaire stukken uit wiskunde I en wiskunde II. De werkgroep zag geen heil in het voorstellen van zo'n wiskunde III omdat daarmee het systeem van de mammoetwet (zeven gelijkwaardige examenvakken) principiële doorbroken zou worden. Het was duidelijk niet de bedoeling van de staatssecretaris op dit moment voor één van de vakken een geheel ander systeem in te voeren. Het idee van examens in de diverse vakken op verschillend niveau is hier en daar al in discussie evenals het

idee van 'halve vakken'. Het zou mogelijk op langere termijn een goede oplossing kunnen leveren voor de gerezen moeilijkheden, maar het kan niet op korte termijn incidenteel voor één vak gerealiseerd worden.

Voorts zou het instellen van wiskunde III een vervroeging van de studiekeuze veroorzaken die veel ernstiger van aard zou zijn dan de vervroeging die diverse briefschrijvers als nadeel noteerden van de voorgestelde herverkaveling.

Tenslotte zouden drie verschillende vakken wiskunde, vanwege de door de leraarlessenformule gestelde begrenzingen, praktisch niet gerealiseerd kunnen worden in kleine en middelgrote scholen.

Samenhang van wiskunde A

In veel reacties werd verklaard dat wiskunde A uit te veel en daardoor te kleine delen bestond. Hierdoor zou de eenheid verloren gaan. Bij wiskunde A staat meer het toepasbaar maken van elementaire wiskunde voorop dan die wiskunde zelf. Eenheid moet daarom in eerste instantie niet gezocht worden in de wiskundige begrippen, maar in de toepasbaarheid. Zo bezien is het wiskunde A pakket wel consistent: met wat analyse en matrixrekening worden beschrijvingsmogelijkheden geboden; met het onderdeel automatische gegevensverwerking kan op bescheiden schaal voor numerieke uitwerking gezorgd worden.

Zwaarte

Nagenoeg alle briefschrijvers hebben ons herverkavelingsvoorstel 'gewogen en te zwaar bevonden'. Anderzijds is het A-programma ook een 'lachertje' genoemd. Is het nu even zwaar, en moet het even zwaar zijn?

Geen twee leerlingen zijn gelijk, en er zijn ook geen twee VWO-vakken waarvoor de opleiding of het examen per leerling precies even veel inspanning vereist. De opmerkingen op pag. 11 van het interimrapport zijn aanleiding tot misverstand geworden omdat de relatie tussen 'zwaarte' en 'aanleg van de leerling' niet was uitgewerkt.

Onder degenen die nu Wiskunde I doen en daar moeite mee hebben, menen wij globaal twee soorten leerlingen te kunnen onderscheiden. De eersten schrikken vooral terug voor het abstracte karakter, maar hebben genoeg capaciteiten om binnen Wiskunde A het zinvol bezig zijn met wiskunde in toepassingen tot een goed einde te kunnen brengen. De leerlingen van de tweede groep missen eenvoudig de aanleg voor het vak, ook in toegepaste versie, en doen er beter aan geen wiskunde in het eindexamenpakket te kiezen. (Binnen de universiteit staan dan o.a. theologie, rechten en letteren nog open, en als studenten met deficiënte opleiding kunnen ze het in andere richtingen nog proberen.)

Kernpunt in veel verhitte discussies is het al dan niet bestaan van de eerstgenoemde groep, en met name de vraag of creatief mathematiseren en oplossingen

zoeken niet pas begint bij wie de formele aspecten geheel doorzien heeft. De werkgroep meent van niet, en wordt daarin gesterkt door universitaire ervaringen en door de reacties van leerlingen VWO en HAVO op enige (door het IOWO ontwikkelde) aan toepassingen gekoppelde leerstofpakketjes.

Een beperking in het aantal en in de omvang van de onderdelen zal, gelet op de reacties, nauwgezet worden overwogen. Wij maken echter bezwaar tegen de de angst voor het eindexamen als reden om een korte algemene vorming in bijvoorbeeld automatische gegevensverwerking maar liever te schrappen. Het gaat daar inderdaad om een kennismaking met de basisbegrippen, voorlopig moeilijkste vraagstukken die een nationale commissie heeft kunnen verzinnen. De verleiding per onderwerp te diep te graven vinden wij gevaarlijker dan de neiging op veel terreinen binnen de wiskunde een 'contact-deskundigheid' op te bouwen die in een toekomstige werkkring of vervolgopleiding van groot nut kan zijn.

Bescheidenheid

Op welke punten is het interimrapport bescheiden? Het probeert binnen het bestaande kader tot vermindering van pijn te komen. Vergaande voorstellen zoals een apart vak Informatica in de onderbouw of een naar het VWO verplaatst propedeutisch jaar van HBO/WO vielen zo ver buiten onze opdracht dat ze ook niet worden beschouwd of aanbevolen. Door de kleine overlap in het analyse-programma is getracht de repercussies voor het VWO-onderwijs in natuurkunde en economie te minimaliseren.

De HEWET pretendeert ook in het geheel niet dat er voortaan geen deficiënties meer zullen zijn, maar deelt ook niet de bezorgdheid dat daarvoor na de invoering van Wiskunde A en B geen oplossingen meer zullen worden geboden. Door de vroege keuze zal bijvoorbeeld een Economiestudie met een Wiskunde B vooropleiding regelmatig worden gekozen; als Economie Wiskunde A bekend veronderstelt, is dit een deficiëntie waarin vrij gemakkelijk te voorzien zou moeten zijn.

Het is ook bescheiden dat wat sommigen de 'leuke dingen' van A noemen (bedoeld wordt de toepassingsmogelijkheden van de wiskunde) niet tevens in B zitten. Daarmee is niet gezegd dat deze kennis voor B-leerlingen niet erg aardig zou zijn, wel dat zij deze zich later eigen zullen moeten maken tijdens hun – wat meer wiskundig gerichte – vervolgstudie.

Zeker is het bescheiden dat de commissie van 230 lesuren in de vijfde en zesde klas uitgaat. Wij weten dat de urentabellen, ook in de lagere klassen, nogal uiteenlopen. Het leek ons onzinnig een herverkaveling voor te stellen die alleen in tien uur in de vijfde en zesde klas te doceren valt. Wie dat op grond van het interimrapport nodig acht, is of bang of perfectionistisch.

Tenslotte is het bescheiden dat het voorstel nog zo weinig in detail is uitgewerkt. Reacties uit het veld, experimenten binnen het veld en ervaringen van het veld zullen bepalend zijn voor de vraag wat precies de uiteindelijke leerstof zal zijn. Zo lang dat niet is vastgelegd, heeft iedereen recht op geleidelijke invoering, voorlopige afspraken en voorzichtige examens in de proefjaren.

Uit het Wiskobas-Bulletin

W. KLEIJNE

De laatste tijd mag het rekenonderwijs zich in toenemende mate in de belangstelling verheugen, ook in het algemeen voortgezet onderwijs, hetgeen moge blijken uit de verschijning van een aantal rekenboeken voor deze tak van onderwijs. Van oudsher prijkt het vak rekenen op het leerplan van de lagere scholen/basisscholen. Sedert enige tijd verricht het Wiskobas-team grote aandacht aan de rekenboekjes, die daar de laatste jaren in gebruik zijn. Regelmatig verschijnen er als neerslag van de gedane onderzoeken artikelen in het zg. spullenkatern van het Wiskobas-Bulletin. Het leek ons goed de lezers van Euclides op deze belangrijke artikelen te wijzen. De wijze waarop de schrijvers de diverse rekenmethodes bespreken kan een handreiking zijn naar de beoordeling van wiskundemethodes in het algemeen. Bovendien geven deze besprekingen zicht op een aantal didaktische uitgangspunten, die het overdenken waard zijn.

Begonnen werd in jaargang 6 nr. 1 met een overzicht van de diverse methoden, die in het basisonderwijs in gebruik zijn: 11 courante rekenmethodes en 8 courante wiskundig georiënteerde methoden. Criteria, volgens welke men kan kiezen worden besproken. Het spreekt vanzelf, dat een beoordeling (in de zin van 'afweging ... tegen de achtergrond van talloze argumenten', w.o. onderwijsvisie) en een vergelijking met andere methoden hierin van groot belang zijn.

Dat de reeds vermelde onderwijsvisie van de beoordelaar tot uiteenlopende beoordelingen aanleiding kan geven en in feite geeft, ligt voor de hand. Om diverse redenen hebben de schrijvers dan ook principieel gekozen voor zg. subjectieve methodenverhalen: 'Verhalen, die ontstaan zijn na intensieve studie van de methode, na gesprekken met onderwijsteams. Verhalen met een persoonlijke kleur'.

De concept-teksten zijn van tevoren beschikbaar gesteld aan de auteurs der methoden, die uitgenodigd werden in hetzelfde katern te reageren.

In de ruim twee jaar, dat men nu bezig is, zijn er een aantal van deze beschrijvingen gepubliceerd. Alle het bestuderen, ook en zeker door collega's van het voortgezet onderwijs ten volle waard. We kunnen daardoor een goed zicht krijgen op de visies, die in het basisonderwijs bestaan t.a.v. het rekenonderwijs en de lijn waarlangs men dit onderwijs wil ontwikkelen in de toekomst. Het is toch van bijzonder veel belang, dat we ook in het a.v.o. daarvan op de hoogte zijn.

Het bewijs op school*

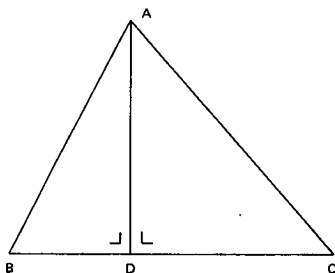
F. VAN DER BLIJ

Op een dag die als titel draagt: 'wat te bewijzen was' moet ik vanuit het secundaire onderwijs praten. De titel is de laatste zin van de ouderwetse schoolopgave. Maar deed je dat bij gonio-opgaven niet vaak zo? Op een klad blaadje rommelde je wat aan met formules, maar om het netjes op te schrijven moest je dan onderaan beginnen. Vandaag beginnen we dus met 'wat te bewijzen was'. En we hopen in de loop van de dag te ontdekken wat gegeven en wat gevraagd was.

We beginnen met een voorbeeld:

Meester zegt:

Als de zijden van een driehoek 13, 14 en 15 zijn, dan is de hoogtelijn op de zijde van 14 gelijk aan 12.



De leerling schreef:

Gegeven: $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$, $\angle D = 90^\circ$.

te bew.: $AD = 12$.

Bewijs:

$$I \quad \text{Opp} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Dus } 7 \cdot AD = 84, \text{ dus } AD = 12.$$

*) Naar een voordracht op 6 januari 1979 op de dag 'Wat te bewijzen was' door het Wiskundig Genootschap georganiseerd.

$$\begin{aligned} \text{II } AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \beta \\ 225 &= 169 + 196 - 364 \cos \beta \\ \text{dus } \cos \beta &= \frac{5}{13}, \sin \beta = \frac{12}{13} \\ \text{dus } AD &= 12. \end{aligned}$$

Maar niet alle leerlingen komen op zulke fraaie ideeën. Ik ga nu maar wat verzinnen.

III Stel $AD = 12$, dan $BD = 5$ volgens Pythagoras in $\triangle ABD$. Dus $DC = 14 - 5 = 9$. In $\triangle ADC$ voert Pythagoras tot $AC = 15$. En dat is zo, dus klopt het, dus $AD = 12$.

Alle leraren boos. Dit is geen bewijs, streep er door. Geef ons maar I of II. Of zou iemand het idee van III willen repareren? Er zit toch wel wat in?

IV Stel $AD < 12$, dan $BD > 5$ (in $\triangle ABD$). Dan ook $DC > 9$ (in $\triangle ACD$). Dus $BC = BD + DC > 14$. En dit is onjuist.
 Stel $AD > 12$, dan $BD < 5$ en ook $DC < 9$. Dus $BC = BD + DC < 14$. En ook dit is onjuist.
 Bijgevolg geldt $AD = 12$. Wat te bewijzen was!

We stoppen met het voorbeeld. Maar bent U het wel met mij eens dat we beter niet hadden kunnen vragen: bewijs $AD = 12$; maar liever: bereken AD . Wat we bewijs I en II noemden kunnen we handhaven. Op idee III waren we wel niet gekomen en dan was IV niet nodig geweest.

Hoe zou meester op het idee gekomen zijn dat $AD = 12$? Door precies meten, of door raden of via overlevering? Of wist de meester het bewijs en moest de leerling het kunststukje nadoen!

Kunnen we uit de school klappend nog geheel andere voorbeelden van bewijzen vinden? Een bewijs van

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

of van

$${}_b \log a = \frac{{}_9 \log a}{{}_9 \log b}$$

Vroeger gaven we als leraar heus wel bewijzen voor zulke uitspraken. Maar we overhoorden ze lang niet altijd, we vroegen van de leerlingen geen vaardigheden op dit gebied.

Er is ook een moeilijkheid bij deze bewijzen, namelijk wat is het gegeven? Was het meekundige bewijs niet meer een som dan een stelling? In de 'echte' wiskunde vinden we ook geen gegeven, gevraagd, bewijs maar definitie, stelling, bewijs. Het q.e.d. is versimpeld (of is er meer aan de hand?) tot een $\square$. Hoe sterk onze behoefte tot bewijzen eigenlijk een behoefte tot het oplossen van problemen, tot het vinden van algorithmen is, blijkt ook uit het feit dat

ieder wel iets zegt over het feit dat het produkt van twee differentieerbare functies f en g weer differentieerbaar is, maar niemand over de vraag of het product van twee integreerbare functies weer integreerbaar is. Het eerste is nuttig, want $(fg)' = f'g + fg'$, het laatste heb je nooit nodig, want uit de primitieven van f en van g is die van fg niet via een algorithm te vinden.

Het nieuwe programma in het voortgezet onderwijs heeft een ander accent aan de meetkunde gegeven. Helaas heeft dit geleid tot een veel te veel op de achtergrond dringen van meetkundig inzicht. Daarbij, en dat is een geheel andere zaak, zijn ook de klassieke meetkundige bewijzen gesneuveld. En dat geeft de vervolgopleidingen (speciaal de vervolgopleiding voor wiskundigen) zorgen. 'Ze kunnen niet meer bewijzen!'

En daarom zijn we vandaag hier: Wat te bewijzen was.

Vanuit het voortgezet onderwijs beginnen we de dag, straks zal prof. De Bruijn meer formeel de deductie als direct apparaat voor het bewijzen aan de orde stellen. Dan zullen we duidelijk zien dat er naast gegevens ook nog regels moeten zijn waarmee we uit het gegeven naar het te bewijzen gaan. Vanmiddag zal dr. Van Benthem ingaan op het bewijzen als een proces, een discussie en vallen en opstaan in een discussie, onder andere vanuit dat mooie didactisch-historische boekje van I. Lakatos.

Enkele weken geleden mocht ik op een conferentie met docenten aan de nieuwe leraarsopleiding over hetzelfde onderwerp praten. Ik citeer enkele gebeurtenissen van die dag. Ik vroeg te bewijzen $\frac{2}{3}(a + b) = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$. Maar gaf geen toelichting. Iedereen weet toch wat $\frac{2}{3}$ is en wat $+$ en $=$ betekenen. En a en b ? Sommigen gaven een bewijs met een plaatje:

		1/3
		1/3
		1/3
a	b	

Vindt U dat een bewijs?

Anderen zeiden: de distributieve wet, die geldt immers.

Weer anderen: Stel

$$\begin{aligned}
 a &= \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} \text{ en } b = \bar{b} + \bar{b} + \bar{b}, \text{ dan } \frac{2}{3}(a + b) = \\
 &= \frac{2}{3}(\bar{a} + \bar{a} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{b} + \bar{b}) = \frac{2}{3}[(\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b})] = \\
 &= (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{b} = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b.
 \end{aligned}$$

Maar is dat een bewijs?
En hoe doe je

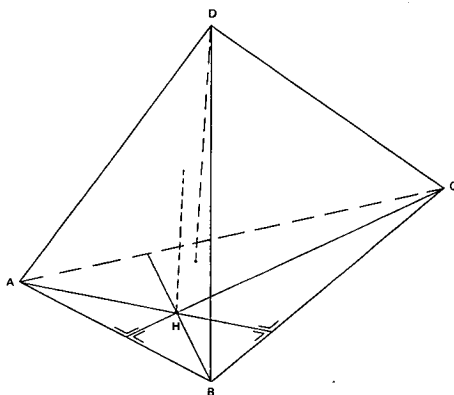
$$\frac{1978}{2012}(a + b) = \frac{1978}{2012}a + \frac{1978}{2012}b?$$

De zaal roept dan in koor, de klas trouwens ook: Dat doe je net zo.

En dat is dan een bewijs! Of gaat U voor alle $t, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, bewijzen dat

$\frac{t}{n}(a + b) = \frac{t}{n}a + \frac{t}{n}b$. Nog één keer: wat is het gegeven? Mochten er onder U zijn die zeggen: dit is geen echt probleem, als je een echt probleem stelt zie je vanzelf wat gegeven is en wat je mag gebruiken. O, ja? Dan maar weer een voorbeeld.

Vier kruisende lijnen in de ruimte hebben in het algemeen twee transversalen, lijnen die alle vier snijden. Alleen in bijzondere ligging kunnen ze er oneindig veel hebben, deze lijnen vormen dan een kwadratisch oppervlak, een parabolöide of eenbladige hyperboloïde, weet U wel, zo'n koeltoren of bloemvaas.



Stelling: Als de vier hoogtelijnen van een viervlak niet door één punt gaan, hebben ze oneindig veel transversalen.

Bewijs: Laat H het hoogtepunt zijn van $\triangle ABC$. Richt in H de loodlijn op het vlak ABC op. Deze snijdt de lichaamshoogtelijnen uit A, B en C respectievelijk. Hij is evenwijdig met de lichaamshoogtelijn uit D , en snijdt deze dus in het oneindige. We vinden dus al één transversaal van de vier lichaamshoogtelijnen. Maar we kunnen de rol van de hoekpunten verwisselen en vinden zo dus vier transversalen, dus meer dan twee, dus oneindig veel.

Is dit nu een bewijs-schets of een bewijs? Wat was het gegeven, wat heb ik al zo gebruikt? Iemand die veel ervaring in dit soort meetkunde heeft is best tevreden met dit bewijs. Een ander zal vallen over 'evenwijdig dus snijden in het oneindige'. Weer een ander zal verder gaan en zeggen: o, maar dan kan je een stelling formuleren die ook nog geldt als de vier hoogtelijnen door één punt gaan.

Wellicht vond U het bewijs van $\frac{2}{3}(a + b)$ flauw en had U eigenlijk die zaak van de vier hoogtelijnen in een viervlak liever zelf uitgezocht, jammer dat ik zo direct met een bewijs aan kwam. We willen het wiskunde onderwijs meer ontdekkend geven. Het is zo leuk, dat het kan. Bij veel andere vakken is dat zoveel moeilijker. Rijtjes derde-vierde naamval voorzetsels of onregelmatige meervouds vormen in het Duits laten ontdekken door onvermoeide lectuur van van de Frankfurter Allgemeine, Bildzeitung, Goethe en Böll kan misschien, maar is wel veel werk. Woord betekenissen ontdekken uit context kan misschien gedeeltelijk, maar nooit integraal. En hoe geef je zelf ontdekkend geschiedenis onderwijs? De wiskunde is een bevoorrecht vak en wiskunde leraren zijn bevoorrechte docenten! Soms hadden we de gewoonte in de meetkunde de stellingen zo maar te poneren en de leerlingen in het beste geval met de vraag naar een bewijs op te schepen. Vaak ook lieten we ze alleen maar een bewijs nadoen of zelfs uit het hoofd leren. Maar the proof of the pudding is in the eating! We willen de leerlingen meer laten ontdekken. Als je iets ontdekt hebt, weet je het, is het je eigendom. Maar dan geloof je er ook in. Waarom dan nog een bewijs? Wat kan dat nog extra opleveren? O, als een ander je tegensprekt, er niet in gelooft, dan moet je gaan redeneren, dan moet je proberen hem te overtuigen, dan ga je een bewijs geven. Het kan ook gebeuren, dat je van je ontdekking nog niet zeker bent. En dat je jezelf aan het twijfelen brengt.

Voorbeeld:

$$\text{Als } a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ \text{dan } a \cdot b \cdot c \cdot d \equiv 0 \pmod{12}$$

je gaat zoeken naar voorbeelden:

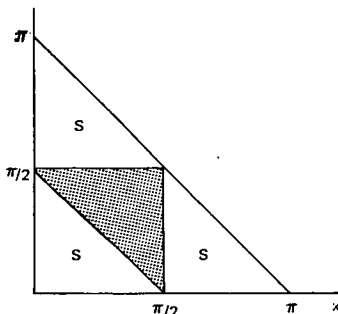
$$\begin{array}{ll} 1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2, & 1^2 + 8^2 + 32^2 = 33^2, \\ 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2, & 1^2 + 6^2 + 18^2 = 19^2, \\ 1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2, & 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2, \end{array}$$

maar je voelt je nog niet zeker. Dus maar een bewijs. Omdat een oneven kwadraat altijd een 8-voud + 1 is, moeten tenminste twee van de vier getallen a , b , c en d even zijn. Omdat een kwadraat altijd of een 3-voud of een 3-voud + 1 is, moet of d een drievoud zijn of tenminste 2 van de getallen a , b en c een drievoud zijn. Nu is het vermoeden bewezen. En ieder was van de noodzaak van een bewijs overtuigd.

Even een klein grapje: Een derde macht is altijd een 7-voud of een 7-voud + 1 of een 7-voud - 1. Hieruit volgt dat als $a^3 + b^3 = c^3$ met $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan $a \cdot b \cdot c \equiv 0 \pmod{7}$. Maar door voorbeelden waren we nooit op dit idee gekomen. Met meer moeite kan men immers bewijzen dat zelfs $a \cdot b \cdot c = 0$, zodat er alleen triviale voorbeelden bestaan.

Wilt U een voorbeeld van een discussie? Hoeveel % van alle driehoeken is scherphoekig? Natuurlijk 0%. Want kies A en B maar vast en zie bij welke plaats van C in het vlak er een scherphoekige, resp. stomphoekige driehoek ontstaat. Nee, natuurlijk 25%, want kies maar twee hoeken α en β met $\alpha + \beta < \pi$. Alleen in de gearceerde driehoek hebben we de hoeken α , β (en γ)

van een scherphoekige driehoek. In de gebieden S is één hoek stomp. De discussie kan beginnen*.



Hebben we op school ook zulke situaties? Is de som van de hoeken van een driehoek altijd 180° , gaan de drie hoogtelijnen van een driehoek altijd door één punt?

Waarom is $\frac{a+c}{b+c}$ in het algemeen ongelijk aan $\frac{a}{b}$ en $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ wel gelijk aan $\frac{a}{b}$?

Waarom is $\sqrt{a^2 b^2}$ wel ab , maar $\sqrt{a^2 + b^2}$ niet $a + b$?

Er is een x met $x^3 + x = 1$, of niet soms?

Er is een functie f met $f'(x) = \sqrt{1 + x^4}$, of niet soms?

Moelijker wordt de situatie met $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ is een wortel van

$ax^2 + bx + c = 0$. Geloof je het niet? Vul dan maar in!

De inhoud van een bol is $\frac{4}{3}\pi R^3$. Dat kan niemand raden, dat kan niemand verifiëren. Dat kan alleen een wiskundige bewijzen! Wel kan je meetkundig inzien dat de inhoud evenredig is met R^3 . Ook dat $I < 8R^3$ en dat $I > \frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$. Vergelijken van een halve bol met een cylinder en een kegel geeft $\frac{2}{3}\pi R^3 < I < 2\pi R^3$. Nu heb ik toch al bijna de gok $I = \frac{4}{3}\pi R^3$ gekregen, maar geen enkele aanwijzing voor een bewijs!

Het uur is om, wat begon met 'wat te bewijzen was' moet eindigen met de stelling, die we in het afgelopen uur bewezen hebben. Ik ben nog niet aan een formulering toe. Bij het wiskunde onderwijs aan 12-18 jarigen moet de nadruk liggen op het wiskunde ontwikkelen. Het proces van mathematiseren, modelbouwen, ontdekken, controleren, onderzoeken voert tot *uitspraken*. Veelal geeft het proces zelf de overtuiging en het inzicht dat de uitspraak juist is. Dan is er bij de leerling geen natuurlijke behoefte voor een bewijs. Het lijkt onderwijskundig dan niet nodig, deze behoefte te kweken. Maar als een eenvoudig raadproces tot een vermoeden voerde, dan is het oproepen van een discussie van welles-nietes en het beslechten van deze strijd met een redenering, een bewijs, een goede zaak. Moelijk is het geval waarin de klas de redenering aanvaardt en U zelf als docent bezwaren heeft. Dan moet U analogie redeneringen ontzenuwen met tegenvoorbeelden. En dat is lang niet altijd eenvoudig. Heeft U

* Zie b.v. een recent artikel van Dan Shine Acute vs Obtuse-Revisited. J. Recreat. Math. 11 (1978-79) p. 22-24.

wel eens 'bewijzen' van de grote stelling van Fermat of van de oplossing van het vierkleuren probleem moeten weerleggen? Zouden we in zo'n geval grijpen naar een formeel bewijs schema, zoals de natuurlijke deductie waar prof. De Bruijn op deze dag over bericht? (Zie Euclides blz. 7 en 66)

Is er plaats en noodzaak voor bewijzen op school? Ze kunnen het niet meer, verzuchten de wiskundige vervolgopleidingen. Maar op school geven we wiskunde onderwijs niet voor de a.s. wiskundigen, maar voor de velen die in andere disciplines de wiskunde zullen moeten toepassen, röntgenartsen, geologen, binnenhuisarchitekten. Roepen zij om bewijs of om meetkundig inzicht? Wij zullen het eens zijn dat in het wiskunde onderwijs zowel aan 'afhakkers' als aan 'toepassers', als aan 'beoefenaars' analyseren, ontdekken, redeneren de centrale rol moeten spelen en niet het memoriseren noch van definities, noch van stellingen, noch van bewijzen.

Een bewijs past op school bij een discussie welles-nietes, bij een door raden ontstaan vermoeden (analogie of heuristiek). Slechts in een grote uitzondering ontmoeten we op school de formele axiomatische opbouw met axioma-stelsels en deductie-regels. En een goed inzicht in een formeel bewijs lijkt mij niet in zijn volle uitvoerigheid mogelijk of wenselijk.

Opgaven

409. We weten allemaal dat een dambord bedekt kan worden door 50 dominostenen die elk twee vakken bedekken. Ook dat het niet lukt met 49 dominostenen het bord minus twee overstaande hoekvelden te bedekken, omdat deze dezelfde kleur hebben. Maar als we van het bord een wit en een zwart veld weglaten, kunnen we het resterende deel dan steeds door 49 dominostenen bedekken?

410. Men maakt stapeltjes guldens. Men wil deze zo samenstellen dat elk bedrag van 2, 3, 4, ..., 101 gulden betaald kan worden door precies twee stapeltjes te geven. Hoeveel stapeltjes heeft men minimaal nodig? (B. Kootstra)

Oplossingen

407. Bewijs dat $AD = BE \Rightarrow AC = BC$ (fig. 1) zonder berekening.

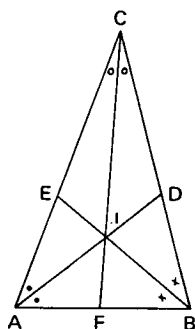


Fig. 1

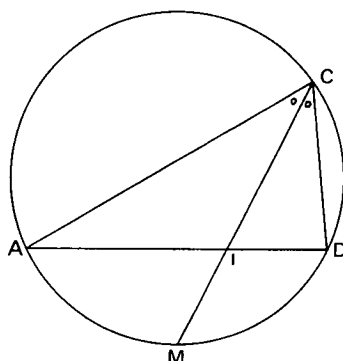


Fig. 2

Het bewijs is geleverd, als we aangetoond hebben dat door I slechts twee lijnstukken getrokken kunnen worden met gegeven lengte waarvan de uiteinden op de benen van hoek C liggen. Omdat AD^1 en $\angle C$ vastliggen, ligt ook de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ADC vast. Deze cirkel is getekend in figuur 2. Beweegt in deze figuur het punt I zich langs lijnstuk AD naar rechts, dan wordt $AI \cdot ID$ kleiner, $MI \cdot IC$ dus ook kleiner, MI groter en dus IC kleiner. Omdat ook IC in figuur 1 vastligt, ligt in figuur 2 het punt I vast en dus ook IA en ID . Dus is $IB = IA$ en $IE = ID$. Hiermee is het bewijs voltooid.

408. Jan en Marie zijn getrouwd en gaan naar een feestje. Daar komen nog vier andere echtparen. Bij de begroeting geven sommigen elkaar de hand, anderen niet. Geen enkel echtpaar geeft elkaar de hand. Jan vraagt ieder hoeveel handen hij gedrukt heeft en krijgt negen verschillende antwoorden. Hoeveel handen heeft Jan gedrukt, hoeveel Marie?

¹⁾ Om misverstand te voorkomen: met AD is de lengte van lijnstuk AD bedoeld. Het lijnstuk AD ligt dus nog niet vast.

De negen antwoorden zijn 0, 1, ..., 8. Noem de persoon die i handen gedrukt heeft, A_i . A_0 heeft niemand de hand gedrukt, A_8 dus $A_1, A_2, \dots, A_7$ en Jan A_8 heeft alleen A_0 niet de hand gedrukt en is dus getrouwd met A_0 .

Laat nu A_0 en A_8 weg. Het probleem is dan gereduceerd tot vier echtparen. We vinden op dezelfde manier: A_7 heeft $A_2, A_3, \dots, A_6$ en Jan de hand gedrukt. A_7 is getrouwd met A_1 . Verder hebben A_6 en A_5 Jan de hand gedrukt en zijn getrouwd met A_2 en A_3 . Jan heeft dus vier personen de hand gedrukt en is getrouwd met A_4 . Marie is dus A_4 . En A_4 is de hand geschud door A_8, A_7, A_6 en A_5 . Dus ook Marie heeft vier personen de hand gedrukt.

Boekbesprekingen

Heinrich Bauersfeld, *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht*, Auswahl B, 95; 179 pag., DM 17,80, Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1978.

Deze bundel verschijnt als '*Festschrift für Walter Breidenbach zum 85 Geburtstag*, zugleich ein Beitrag zur didaktischen Unterrichtsforschung'.

Bauersfeld schetst in een uitvoerige opdracht de betekenis die Breidenbach in de periode na de tweede wereldoorlog gehad heeft voor de ontwikkeling van de didactiek van de wiskunde. Breidenbach's activiteiten hebben zich uitgestrekt over drie terreinen; de leraarsopleiding, het schrijven van leerboeken voor Grund-, Haupt- en Realschulen, en de nascholing van docenten. Uit zijn oeuvre noemen we zijn '*Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen*', voor een bespreking waarvan we verwijzen naar Euclides 47, p. 115. De betekenis van een werk als dit moge blijken uit het feit, dat er ongeveer 100 000 exemplaren van op de markt konden worden gebracht.

Ook voor de Nederlandse wiskundedocent van vandaag blijft Breidenbach's werk van betekenis door zijn pogingen om het rekenonderwijs op de lagere school te incorporeren in een wiskunde-onderwijs dat ook het voortgezet onderwijs omvat. Het accent wordt daarbij verlegd van de systematiek van de leerstof naar de in de klas te volgen werkvormen. Wat het meetkunde-onderwijs betreft is het van belang, dat Breidenbach de euclidische opbouw van de leerstof principieel prijs geeft ten gunste van de transformatiegedachte.

Ruim een dozijn kleine opstellen van diverse auteurs verdienen onze aandacht. Uitvoerige lesprotocollen demonstreren, welke moeite jonge leerlingen kunnen hebben bij het totstandkomen van schijnbaar eenvoudige wiskundige begrippen en wat de taak van de docent bij het leerproces kan zijn. Steeds weer wordt zorgvuldig getracht te voorkomen, dat leerlingen pasklare oplossingen voorgeschiedt krijgen, steeds blijkt het doel dat de werkvorm zo wordt gekozen, dat de eigen inventiviteit van de leerling maximaal tot zijn recht kan komen.

Het is een bundel opstellen die we gaarne ter lezing aanbevelen.

Joh. H. Wansink.

Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, Wolfgang Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1978, IX + 288 blz., DM 27.-.

Op beknopte en heldere wijze is de predikatenlogica van de eerste orde behandeld. Dat is het deel van de logica waarin uitsluitend objectvariabelen en geen predikatenvariabelen voorkomen. Deze blijkt axiomatiseerbaar te zijn.

Hierna volgen interessante problemen, zoals de stelling van Löwenheim-Skolem, die zegt dat elke theorie die in de eerste orde logica geformuleerd is, een aftelbaar model heeft. Er is dus bijv. een aftelbaar model van de theorie van het reële getal. Dit klinkt wonderlijk. De oorzaak is dat binnen de geformaliseerde theorie geen bijectie tussen natuurlijke en reële getallen mogelijk is. In de niet geformaliseerde metataal, waarin men over ruimere uitdrukkingsmogelijkheden beschikt, is een dergelijke correspondentie wel mogelijk als men een geschikt model kiest.

Bij de theorie van het natuurlijk getal treden analoge merkwaardigheden op. Het axioma van de volledige inductie, dat gaat over alle eigenschappen (deelverzamelingen) van de natuurlijke getal-

len, is in de eerste orde logica niet formaliseerbaar. Wel als axioma-schema, dat op elke eigenschap afzonderlijk toepasbaar is (hetgeen de auteurs helaas hier niet expliciet vermelden). Gevolg is, dat niet alle modellen van de theorie isomorf zijn. Men kan non-standard modellen opstellen, die leiden tot een non-standard analyse. Men kan zelfs modellen van $\mathbb{N}$ opstellen die overaftelbaar zijn.

Zouden we overgaan tot de predikatenlogica van de tweede orde, dan is het axioma van de volledige inductie wel formaliseerbaar en zijn alle modellen van $\mathbb{N}$ isomorf. Deze logica heeft echter het bezwaar niet axiomatiseerbaar te zijn.

De eerste orde logica lijkt erg beperkt. Dit is echter niet het geval. Men kan de verzamelingen leer erin axiomatiseren, zoals door Fraenkel en Zermelo gedaan is. Hierin zijn de verzamelingen tot objecten geworden. In deze verzamelingentheorie kan men met behulp van eerste orde logica alle wiskundige theorieën ontwikkelen, zodat men dus toch genoeg heeft aan de logica van de eerste orde.

Een ander belangrijk probleem is dat van de beslisbaarheid. Is er een mechanisch procédé mogelijk om te beslissen welke stellingen in een bepaalde theorie afleidbaar zijn en welke niet? Een dergelijk procédé is t.a.v. de uitspraken mogelijk; denk maar aan de waarheidswaardentabellen. Echter niet t.a.v. de predikatenlogica van de eerste orde. Verband is gelegd tussen beslisbaarheid en het uitvoeren van het beslissingsproces door middel van een rekenmachine, de registermachine (die hetzelfde presteert als de iets gecompliceerdere Turing machine).

Wel, er staat meer in dit boek. Ik heb getracht in kort bestek uw nieuwsgierigheid te prikkelen. Het is de moeite waard zich in dit interessante boek te verdiepen.

P. G. J. Vredenduin

Garret Birkhoff and Gian-Carlo Rota, *Ordinary differential equations*, 3th edition, John Wiley and Sons, 1978, XI + 342 p.

Het verwondert niet dat van dit voortreffelijke werk binnen twintig jaar de derde druk verschijnt. Het is niet alleen een zeer deskundig en systematisch overzicht van het onderwerp, maar heeft ook uitnemende didactische kwaliteiten. De auteurs moeten voortdurend lezers voor ogen hebben gehad, die zij in nieuwe gebieden wilden inleiden en voor wier moeilijkheden zij besef en begrip hadden. Zij schromen daarbij niet om meer dan eens eerst een enigmatische heuristisch betoog te houden dat de essentie der redenering bevat om dan later door een rigoreus bewijs de gedachten-gang te preciseren. Nieuwe begrippen worden veelal geïntroduceerd door leerzame voorbeelden en de tekst wordt voortdurend onderbroken door reeksen van in moeilijkheid toenemende opgaven. Het is ondoenlijk een enigszins volledig overzicht van het werk te geven en wij moeten ons bepalen tot enkele grepen uit de rijke inhoud. Het eerste hoofdstuk is een voorbeeldige behandeling van één dv. van de eerste orde. De meetkundige illustratie wordt niet verwaarloosd en daarnaast komt op natuurlijke wijze de Lipschitz conditie in de aandacht benevens een eerste kennismaking met differentiaal-ongelijkheden. De voor toepassingen zo belangrijke lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde is het onderwerp van Ch. 2 (met stabiliteit, het fasevlak van Poincaré, functies van Green).

Daarna volgen de lineaire dv. van de n de orde met constante coëfficiënten, uitvoerig en precies, tot en met de overdrachtsfunctie van een *output-input* relatie en het Nyquist-diagram. In Ch. 4 worden wij vertrouwd gemaakt met de gedachte speciale functies (Bessel, Legendre) te definiëren als oplossingen van een dv. en daaruit hun eigenschappen af te leiden. Daarbij treft het leerzame voorbeeld (p. 97) waarbij de eigenschappen van de ons zo vertrouwde $\tan x$ worden verkregen uit een

dv. waaraan zij voldoet. Ch. 5 beschouwt stelsels van n dv. van de eerste orde of wel $\frac{dx}{dt} = X(x,t)$

waarbij x en X vectoren zijn; *autonome* systemen (waarbij t in het rechterlid niet voorkomt) worden voor $n = 2$ uitvoerig behandeld met o.m. (niet-lineaire) trillingen, kritische punten, Liapunov, van der Pol.

Daarna volgt in Ch. 6 een meer theoretisch onderwerp: existentie theorema's voor (niet-autonome) systemen bij willekeurige waarde van n .

De twee volgende hoofdstukken hebben een actueel karakter: zij bespreken helder en zorgvuldig

de numerieke oplossingsmethoden voor dv. (in een Appendix toegespitst op de computertaal BASIC).

De slothoofdstukken zijn resp. gewijd aan de Sturm-Liouville theorie en aan het ontwikkelen van oplossingen van dv. naar stelsels van eigenfuncties.

Wij beëindigen deze lovende bespreking met de opmerking dat niet alleen de inhoud van het werk maar ook de typografische vormgeving uitmuntend is.

O. Bottema

International Mathematical Olympiads 1959-1977, compiled and with solutions, Samuel L. Greitzer, The Mathematical Association of America New Mathematical Library 27.

In verscheidene landen bestaan er al heel lang wiskundige wedstrijden. De Hongaarse Eötvös Competitie (ontstaan in 1894) is een bekend voorbeeld. In 1959 nodigde Roemenië zes oostblok-landen uit deel te nemen aan de Eerste Internationale Wiskunde Olympiade. Na een moeizame start begon de belangstelling te groeien. Ook uit het westen kwamen er deelnemers, en in 1977 was het aantal landen toegenomen tot 21. Nederland deed in 1969 voor het eerst mee, en de Verenigde Staten kwamen in 1974.

Elk land kan een team van 8 vwo leerlingen en 2 juryleden zenden. De juryleden wordt gevraagd vooraf enige voorstellen voor vraagstukken in te zenden naar het organiserende land. Daar maakt men een eerste selectie van ongeveer 20 opgaven. De jury kiest er 6 uit, bepaalt de puntenwaardering en stelt de definitieve formulering vast in de 4 officiële talen (Duits, Engels, Frans en Russisch). Daarna worden de opgaven vertaald in de verschillende landstalen van de deelnemers.

Na een ceremoniële opening op de eerste dag krijgen de deelnemers 4 uur de tijd om aan de eerste 3 opgaven te werken. De volgende dag komen de 3 overgebleven opgaven aan de beurt, terwijl de jury begint met de correctie. Het organiserende land zorgt voor een team van coördinatoren dat er op toe ziet dat de waardering van het werk op een eerlijke en rechtvaardige wijze geschiedt. Nadat enige dagen later de punten verdeeld en de prijzen vastgesteld zijn, wordt de Olympiade besloten met een plechtige prijsuitreiking en een slotfestiviteit.

Samuel L. Greitzer, de leider van de Amerikaanse delegatie in de afgelopen jaren, heeft de opgaven van de I.W.O. van 1959 tot en met 1977 verzameld en van uitwerkingen voorzien. Het resultaat is een indrukwekkende 'kaleidoscoop van de elementaire wiskunde'. En met elementair wordt hier natuurlijk niet 'eenvoudig' bedoeld, integendeel! Ieder die wel eens geprobeerd heeft zelf enige I.W.O.-opgaven te maken, weet hoe lastig de vraagstukken meestal zijn, en hoe uitzonderlijk veel talent de scholier moet hebben die er 5 of 6 binnen twee maal vier uur oplost. De vraagstukken zijn elementair omdat voor de oplossing ervan geen of vrijwel geen voorkennis nodig is buiten de stof die een goede vwo-leerling uit de hoogste klassen bezit. Voor ongeveer één op de vijf opgaven is iets meer nodig, bv. enige kennis van eenvoudige ongelijkheden, polynomen, combinatoriek en getallentheorie. Veel belangrijker dan wiskundige kennis is echter wiskundige vaardigheid: het vermogen om op een creatieve, systematische en logische wijze problemen te analyseren. Daarnaast is routine een belangrijke factor, niet in de laatste plaats omdat de opgaven binnen een beperkte tijdsduur gemaakt moeten worden. Men is dus al een heel eind op weg wanneer men uit ervaring weet in welke richting de oplossing van een vraagstuk gezocht moet worden.

Oefening is onmisbaar bij de kunst van het oplossen van vraagstukken, en hiervoor biedt dit boekje een overvloed aan materiaal. Voor een beginner is de inhoud natuurlijk zware kost. Misschien zou hij eerst eens de beide 'Hungarian Problem Books' (delen 11 en 12 uit dezelfde serie) ter hand kunnen nemen. Opgavenverzamelingen zijn geen romans of leerboeken. Men werkt ze niet in korte tijd door. Het oplossen van een interessant vraagstuk is geen kwestie van minuten, maar van uren of zelfs dagen. Het zelf vinden van een oplossing is natuurlijk het meest bevredigend, maar ook het bestuderen van oplossingen nadat men zelf tevergeefs gezocht heeft, is nuttig en leerzaam. Greitzer geeft van veel problemen meer dan één oplossing. Er zijn veel duidelijke figuren bij de tekst opgenomen, en alles is goed en helder geschreven. Wanneer er hulpresultaten worden gebruikt, staat er meestal een bewijs bij. Een enkele keer is er een verwijzing naar andere deeltjes uit de New Mathematical Library. Herhaaldelijk legt hij verbanden met dieper liggende resultaten. Hier uit blijkt eens te meer dat de opgaven van de I.W.O. niet voortspruiten uit een vreemd soort

hobbyïsme van enkelingen, maar in contact zijn met veel belangrijke onderzoeksgebieden van de klassieke en de moderne wiskunde.

Van wiskundige competities en olympiades gaat een stimulerende invloed uit, in de eerste plaats op de deelnemers, maar ook op het gehele onderwijs in de wiskunde. Op deze wijze wordt steeds weer aangetoond dat wiskunde onderwijs veel meer kan zijn dan alleen het volgen van de gebaande wegen van het vastgestelde lesprogramma. Ook dit boek kan ertoe bijdragen de blik van de leraar en zijn getalenteerde leerlingen te verruimen.

J. van de Craats

G. Nöbeling, *Integralsätze der Analysis*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1979, 117 bl.

In vele leerboeken over analyse komen, door de veelheid van onderwerpen, de stellingen van Gauss en Stokes niet volledig tot hun recht. In deze stellingen worden zekere gebiedsintegralen, resp. oppervlakteintegralen, uitgedrukt als integralen over de rand van dat gebied, resp. de rand van dat oppervlak. De formules waarin dit tot uitdrukking gebracht wordt kunnen gezien worden als een uitbreiding tot hogere dimensie van de bekende formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

waarbij F een functie is die de Riemann-integreerbare afgeleide f heeft. Met behulp van de theorie der alternerende differentiaalvormen kan men al deze feiten opvatten als bijzondere gevallen van een algemene stelling over integratie op een n -dimensionale variëteit in een m -dimensionale euclidische ruimte.

Het boek bestaat uit vier hoofdstukken (I Variëteiten, II Alternerende differentiaalvormen, III Integraal van Riemann op een variëteit, IV Integraalstellingen), gevolgd door een aanhangsel (integraal van Lebesgue, niet-gladde en niet-oriënteerbare variëteiten). Aan voorkennis wordt slechts ondersteld dat de lezer bekend is met de 'gewone' reële analyse en met de eerste beginselen van de lineaire algebra. Toch vergt een serieuze bestudering wel inspanning.

A. C. Zaanen

O. Barndorff-Nielsen, *Information and Exponential Families in Statistical Theory*, John Wiley and Sons, New York 1978, IX + 238 pp.

De statisticus houdt zich bezig met het onttrekken van informatie aan waarnemingsmateriaal. Voor het beantwoorden van een bepaalde vraag zal echter vaak een bepaald deel van de in de waarnemingen aanwezige informatie niet relevant zijn en het is de kunst om relevante en irrelevante informatie te scheiden en conclusies alleen op het eerste gedeelte te baseren. Tot zover zijn statistici het onderling wel eens, maar dit wordt anders als het erom gaat wat relevant is en wat niet en hoe men een scheiding aanbrengt en zijn conclusies trekt. Hierover is de laatste vijftig jaren heel wat geschreven en ook de nodige onzin verkondigd.

Het boek van Barndorff-Nielsen slaat temidden van dit alles een bijzonder goed figuur. Het geeft eerst een algemene bespreking van het onderwerp en van de voornaamste in omloop zijnde begrippen. Daarna wordt voor vrij algemeen voorkomende en prettig hanteerbare families van kansverdelingen – de zogenaamde exponentiële families – systematisch nagegaan wat de eigenschappen van deze begrippen zijn. Een groot aantal onmisbare voorbeelden begeleidt de tekst.

Met nadruk zij gezegd dat dit geen eerste inleiding in de statistische gedachtengang is. Het is een boek voor de wiskundige met een grondige kennis van de statistiek en belangstelling voor de grondslagen van dit vak.

W. R. van Zwet

Mededelingen

Prijswinnaars van de 18e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1979

1 Karel Jan Schoutens. Bergen op Zoom. Moller Lyceum, Bergen op Zoom (wiskundeleraar: C. A. J. Jansen)	72 punten (eerste ronde 31 uit max. 35)
2 Barteld Braaksma. Stadskanaal. Ubbo Emmiuslyceum, Stadskanaal (J. C. v.d. Burg)	63 punten (29)
3 Herman Verlinde. De Meern. De Bruyne Lyceum, Utrecht (N. P. Dekker)	63 punten (27)
4 Erik Verlinde. De Meern. De Bruyne Lyceum, Utrecht (N. P. Dekker)	63 punten (26)
5 M. de Jeu. Pernis. Openbare S. G. Albert Einstein, Hoogvliet (P. J. Moolenaar)	63 punten (25)
6 Jan Adriaan Leegwater, De Bilt. Herman Jordan Lyceum, Zeist (Speelpenning)	63 punten (22)
7 Willem Jan van Andel, Son. Eindhovens Protestants Lyceum, Eindhoven (L. Torn & J. Goethals)	60 punten (30)
8 Peter Steenhagen, Santpoort. Gem. Gym. Feliseum, Velsen (P. Levasier & G. Tromp)	60 punten (24)
9 Hugo Cramer, Nuenen. Augustinianum, Eindhoven (Van Uden)	58 punten (32)
10 Hans Schotte, Eindhoven. Gem. S. G. Woensel, Eindhoven (Delis)	58 punten (24)

Hugo Cramer was verleden jaar 7de. Hij deed mee aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1979 te Londen en behaalde daar 18 uit 40 punten.

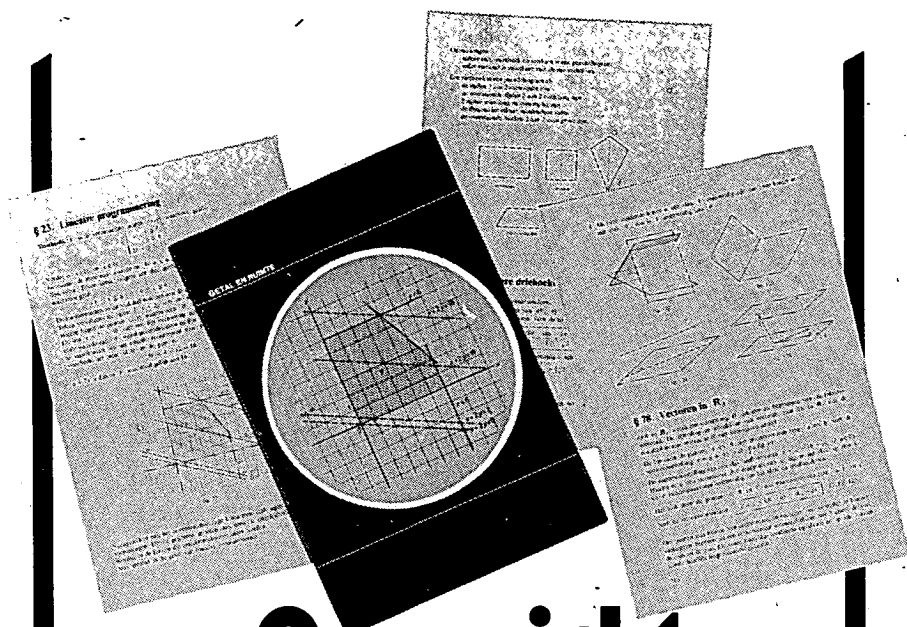
Leren onderwijzen met wiskobas

*Onderwijsontwikkelingsonderzoek
'wiskunde en didaktiek' op de
pedagogische akademie*

Van dit proefschrift van Fred Goffree
is onlangs een handelseditie
verschenen in de reeks
wetenschappelijke publikaties van
het IOWO.

U kunt *leren onderwijzen met
wiskobas* (XII, 450 pag.) bestellen
door overmaking van f 40,- op
postgirorekening 3105662 ten name
van RU-IOWO Utrecht, onder
vermelding van 'proefschrift
Goffree'.





Overzicht van de wiskunde voor h.a.v.o.

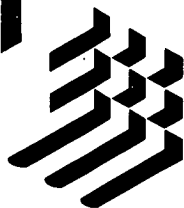
Samenstellers:

A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz

H. Steur, A. H. Syswerda, R. A. J. Vuyk

Een systematisch overzicht van de
leerstof voor de klassen 1 tot en
met 5 van het h.a.v.o., voorzien
van uitgewerkte voorbeelden.

ISBN 90 11 81115 1 / 156 blz. / f 14,90



Educaboek

Postbus 48, 4100 AA Culemborg, Tel. 03450-3143

INHOUD:

P. G. J. Vredenduin: Terminologie in natuurkunde en wiskunde	81
H. Biezeveld: Vragen en opmerkingen over differentialen	95
H. N. Pot: Logarithmen en het rekendoosje	99
I. W. Molenaar en W. E. de Jong: Wiskunde I en II: herverkaveling en ontevredenheid	103
W. Kleijne: Uit het Wiskobas-Bulletin	107
F. van der Blij: Het bewijs op school	108
Recreatie	115
Boekbesprekingen	116
Mededelingen	120

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

- H. Biezeveld, Zuiderstraat 19, 1689 HA Zwaag.
F. van der Blij, Ruysdaellaan 6, 3723 CC Bilthoven.
W. E. de Jong, Uthôf 44, 9202 HM Drachten.
W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
H. N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.