

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

55e jaargang

1979/1980

no. 1

augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Drs. F. Goffree -
Dr. P. M. van Hiele - W. Kleine - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens -
W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J.W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteyn-
laan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v.
Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 40,— per verenigingsjaar; studentleden
en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 27,—; contributie
zonder Euclides f 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt.
gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II},
1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine
geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel.
055-25 08 34.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van
Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan
A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst.

Abonnementsprijs voor niet leden f 33,50. Een collectief abonnement (6 ex. of meer)
kost per abonnement f 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een
acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds
verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van
het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaar-
gang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d
Rijn. Tel. 01720-620 78/620 79. Telex 33014.

Plannen voor de komende jaargang

Het is een goede gewoonte dat de redactie van een tijdschrift de lezers af en toe informeert over haar beleid.

Al een paar jaar vermeldt de redactie wat de lezers naast de 'gewone' nummers aan bijzonders kunnen verwachten in de komende jaargang. Ook dit jaar willen we dat doen, maar eerst willen we nog even terugzien op de afgelopen jaargang.

In de afgelopen jaargang zijn twee speciale nummers uitgekomen: het examen-nummer en het nummer dat aan het zakrekenmachientje was gewijd.

Bij het examennummer was een enquête gevoegd of een dergelijk nummer de moeite waard is. Zo'n nummer kost bijvoorbeeld de vereniging veel geld vanwege de extra omvang. Uit de ongeveer 800 binnengekomen reacties blijkt dat men in meerderheid een dergelijk nummer zeer op prijs stelt. Dit komt vooral naar voren bij docenten in het mavo, havo en vwo (ongeveer 70% van de reacties uit die schooltypen is positief) ten aanzien van het afdrukken van zowel de opgaven van het eerste tijdvak als van die van het tweede tijdvak. Ongeveer 85% van de binnengekomen reacties waardeert het afdrukken van de statistische gegevens bij de meerkeuzevragen en de open vragen positief, zij het dat dit percentage bij de meerkeuzevragen wat lager ligt. De redactie heeft dan ook besloten met het uitgeven van een dergelijk examennummer als service aan alle kollega's door te gaan.

In het zakrekenmachinenummer heeft een oproep om vervolgartikelen gestaan, met name om artikelen over ervaringen met het machientje in de hogere klassen van het voortgezet onderwijs of in de opleidingen na het voortgezet onderwijs. Die oproep willen wij graag herhalen.

Over de komende jaargang kunnen we het volgende meedelen.

Bij het samenstellen van de 'gewone' nummers streeft de redactie ernaar een zo gevarieerd mogelijk aanbod te doen: artikelen uit alle sectoren van het wiskundeonderwijs: van lbo tot en met de leraarsopleiding, over alle groepen leerlingen én artikelen over de achtergronden van zowel de wiskunde als het wiskundeonderwijs.

Vanwege de traditie van Euclides komen er relatief veel meer artikelen binnen ter publikatie uit de 'eerste-graads-sektor' dan uit de overige sectoren. Vaak

staat meer de wiskunde dan het wiskundeonderwijs centraal in deze artikelen. De redactie wil zeker niet dat deze artikelen zouden verdwijnen, zij hoopt wel een beter evenwicht tussen beide tot stand te brengen. Maar hiervoor is gewoon nodig dat er meer artikelen over wiskundeonderwijs binnen komen. Dat zou al heel eenvoudig kunnen doordat meer docenten over hun ervaringen in de klas rapporteren.

De komende jaargang zal naast het examennummer geen speciale nummers hebben.

De redactie is bezig een uitgebreid besprekingsnummer aan de methode Van A tot Z te wijden, maar dat zal pas in de volgende jaargang uitkomen.

Bij het opzetten en uitwerken van de enquête over het examennummer heeft de redactie veel steun van de uitgever ondervonden. Het zakrekenmachinenummer is door de uitgever aan alle Nederlandse wiskundeleraren, die geen lid van de NvWL zijn, toegestuurd. Over de goede samenwerking met de uitgever spreekt de redactie haar dank uit.

De redactie

Wat beoogt wiskobas?

JOH. H. WANSINK

Naar aanleiding van: Adri Treffers, *Wiskobas doelgericht*, 272 blz. 1978; Instituut voor Ontwikkeling van het wiskunde onderwijs. Utrecht.

1. Ondertitel van dit werk, dat tevens verscheen als onderwijskundige dissertatie ter verkrijging van de graad van doctor in de sociale wetenschappen aan de rijksuniversiteit te Utrecht, luidt: 'een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens wiskobas'. Het is een rijk gedocumenteerde uitgave geworden, van betekenis voor allen die bij de innovatie van het wiskunde-onderwijs op de basisschool betrokken zijn of nog betrokken zullen kunnen worden, alsmede voor alle docenten bij het voortgezet onderwijs met daadwerkelijke

belangstelling voor longitudinale planning van het onderwijs aan 6-18 jarigen, een planning die de intenties van een *leerplanplanning* verre te boven gaat. In het geding is een didactische bezinning over de plaats en de vorm van een geïnnoveerd wiskunde-onderwijs. En Treffers laat ons zien, hoe die ontwikkeling ervan aan de werkers van Wiskobas voor ogen staat.

2. In een summiere historische beschouwing komt tot uitdrukking welke houding sinds 1968 in de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde onder leiding van Freudenthal is aangenomen tegenover de internationale leerplanexplosie die zich vanaf 1958 op zo imposante wijze internationaal heeft gemanifesteerd. De vrees bestond en de overtuiging groeide, dat leerplanherzieningen alleen, met daarop gebaseerde nieuwe schoolboeken, geen uitweg zouden kunnen bieden uit de impasse, waarin het traditionele rekenonderwijs op de lagere school en het wiskunde-onderwijs op de middelbare school geacht werden te zijn terechtgekomen. Het blijkt, dat dank zij het IOWO, Nederland bij de standpuntbepaling tegenover de 'New Mathematics' erin is geslaagd een geheel eigen standpunt te gaan innemen.

Treffers wijst in zijn inleidende beschouwingen op een aantal stromingen die op het rekenonderwijs hier te lande min of meer hun invloed hebben uitgeoefend:

- a. de *empirische richting*, waarbij de leerstof vrijwel uitsluitend ontleend werd aan de biologische, fysische of sociale werkelijkheid; Treffers wijst enige gebieden aan waar de mate van gelijkgerichtheid van Wiskobas en die empirische richting apert is;
- b. de *structurele richting*, waarin een aantal hervormingen worden bepleit die eerst vanuit hoger wiskundig standpunt duidelijk kunnen worden;
- c. de *aritmatische richting*, die weliswaar tot een leerstofvernieuwing voerde, maar het onderwijsproces zelf in de banen van weleer liet voortgaan; in schoolwerkplannen in wiskobasgeest kan men een aantal ideeën van de aritmatische richting weerspiegeld vinden.

Daarnaast wijst Treffers nog op enige pogingen hier te lande om ons rekenonderwijs te reorganiseren zonder dat daarbij het overheersende mechanische element wezenlijk werd teruggedrongen.

Tegenover al deze richtingen heeft het IOWO met Wiskobas zijn zelfstandigheid weten te bewaren met als gevolg dat de New Mathematics hier te lande in veel mindere mate dan elders vaste grond onder de voeten heeft gekregen. Men krijgt de indruk, dat Freudenthal met zijn medewerkers met alle wiskundemethoden 'oude stijl' het liefst tabula rasa wilde maken!

Sinds zijn totstandkoming zocht Wiskobas het heil dan ook niet in programmaherzieningen met nieuwe schoolboeken gebaseerd op programmawijzigingen, maar in een fundamentele herziening van het gehele onderwijs en het onderwijsleerproces.

De leemte die er in het leermiddelenbestand van de scholen dreigde te ontstaan door de verwerping van de tot dusver beschikbare leerboeken, werd opgevuld door de 'spullen' (de term is van Treffers) die door de activiteiten van Wisko-

bas voor de geïnteresseerde scholen ter beschikking kwamen.

3. Welke zijn de doelstellingen die de pioniers op didactisch terrein voor ogen hebben gestaan, en langs welke weg zouden die doelstellingen kunnen worden bereikt? Hoe kunnen ze vervolgens duidelijk gemaakt worden aan hen die niet of onvoldoende vertrouwd zijn met het vernieuwde onderwijs in het kader van de door Wiskobas nagestreefde innovatie?

Dit zijn de vragen die Treffers in zijn dissertatie beantwoordt. Tot besluit geeft hij dan een wetenschappelijke verantwoording van de door hem opgestelde theorie.

De vraag wie de doelstellingen maakt of zou dienen te maken, komt niet aan de orde, evenmin als de vraag, hoe men tot meer concrete doelstellingen zou kunnen komen. Wel de fundamentele vraag hoe de geformuleerde doelstellingen bereikbaar gemaakt kunnen worden aan de hand van stukken concrete leerstof. Ze verschaffen de lezer een concrete oriënteringsbasis om de ontwikkelde doelbeschrijving naar vorm en inhoud te kunnen beoordelen. Ze verleggen de doelbeschrijvingsproblematiek voor een belangrijk deel van de theoretische bespiegeling in de studeerkamer naar de onderwijsleersfeer die de activiteiten in school- en werklokaal beheerst.

4. De voorbeelden in het boek betreffen:

- a. in het inleidend hoofdstuk het thema '*gulliver*', dat voor tal van lezers van *Euclides* onder andere bekend zal zijn uit de bundel 'Five years IOWO', tot stand gekomen bij het afscheid van Freudenthal als directeur van het IOWO in 1976;
- b. een elftal '*telproblemen*', bestemd voor het eerste tot en met het zesde leerjaar van de basisschool, problemen die dienen om de kernproblemen 'mathematiseren' en 'didactiseren' toe te lichten en daardoor de uitgangspunten van wiskunde-onderwijs in de geest van Wiskobas te illustreren;
- c. het thema '*graankorrels op het schaakbord*', een boeiend onderwerp voor het zesde leerjaar, dat de auteur o.a. gelegenheid geeft zijn ééndimensionale doelstellingen te illustreren;
- d. het voor het vijfde leerjaar bestemde '*land van acht*', waarin de leerlingen geconfronteerd worden met de problematiek van diverse positionele getalstelsels;
- e. het slotthema '*sproeteldam*' dat het basismateriaal oplevert voor de driedimensionale doelbeschrijving waarop de theorie van de auteur uitmondt.

Treffers wijst er uitdrukkelijk op, dat het uiterst gewenst is, dat de lezer alle schoolopgaven die bij de inleidende voorbeelden worden gegeven, zelf maakt, als hij van de erop gebaseerde doelbeschrijvingen althans maximaal wenst te profiteren.

5. Met de bespreking van de genoemde stukken leerstof als basis komt de auteur nu tot de formulering van uitgangspunten en doelstellingen van wiskunde-onderwijs in wiskobasgeest.

Als uitgangspunten somt Treffers *een achttal vormkenmerken* op van dit onder-

wijs, die opvolgend betrekking hebben op de activiteit van de leerlingen, op de differentiatie van het leerproces, op de verticale planning van de leerstof die voor leerplanontwikkelaars van zo fundamentele betekenis kan worden, op het structuurkarakter van de wiskunde, op het taalaspect, op de toepasbaarheid van de leerstof, op de dynamiek die in de ontwikkelingsgang van de wiskunde tot uitdrukking komt en tenslotte op de specifieke methode van het wiskunde-onderwijs.

Treffers onderscheidt ten aanzien van de doelstellingen van wiskobas-onderwijs drie categorieën: ééndimensionale, tweedimensionale en driedimensionale doelen.

Zijn twaalf ééndimensionale doelen vallen uiteen in een viertal integrale schooldoelen, georiënteerd op de vormende en op de sociale waarden, op de voorbereidende waarde ten opzichte van later te volgen onderwijs en op de maatschappelijke relevantie die de wiskunde heeft voor leef- en beroepswereld van de leerlingen, en voorts een achttal mathematische doelen achtereenvolgens betrekking hebbend op het rekenaspect, het taalaspect, de toepasbaarheid, het praktische nut, het structuurkarakter, het methodische element, de dynamiek en het attitude-aspect, zulks in overeenstemming met de door de auteur opgesomde uitgangspunten van zijn onderwijsvisie.

Bij zijn tweedimensionale doelen onderscheidt Treffers een gedragscomponent en een leerstofcomponent. Hij introduceert twee soorten tweedimensionale doelbeschrijvingen, namelijk die van de productdoelen en die van de procesdoelen. De eerste worden gedefinieerd in termen van gedrag, de tweede in termen van activiteit, karakteristiek voor de onderhavige onderwijsleersituaties. Treffers somt een zestal leerstofinhoudelijke draagvlakken op voor zijn tweedimensionale doelbeschrijvingen, namelijk: het rekensysteem, het meten, de meetkunde, de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, relaties en functies, taal en logica.

In zijn betoog onderstreept de auteur, dat de onderwijsgevende zelf de enige deskundige beoordelaar is van de vraag in hoeverre de productdoelen de facto zijn bereikt!

De opvatting, dat de procesdoelen automatisch bereikt zouden kunnen worden bij het nastreven van de productdoelen stuit bij Treffers op verzet. Voor vruchtbaar onderwijs in wiskobasgeest dienen ook aan de procesdoelen nader reliëf te worden gegeven.

De auteur gaat nu nog een stap verder: hij voegt een nieuwe dimensie toe aan zijn doelbeschrijving. En wel door de reeds geformuleerde doelen tot hun recht te laten komen in een didactische context, waardoor duidelijk wordt wat met de optredende termen 'gelegenheid krijgen tot . . .' en 'in staat zijn tot . . .' in concreto wordt bedoeld.

Het doelbeschrijvingstableau wordt daarna nog verder ontrold. De auteur wijst op een aantal mogelijke driedimensionale doelbeschrijvingen, maar preferert tenslotte toch uitdrukkelijk die, waarbij de totale beschrijving van het gevolgde onderwijsleerproces reliëf krijgt. Hij karakteriseert in dit verband zijn doelbeschrijving als 'holistisch'.

Het thema '*sproeteldam*' vormt het basismateriaal voor deze holistische, driedimensionale doelbeschrijving. De lange lijst van doelen door de auteur in de

voorgaande hoofdstukken opgesteld komt erin tot zijn recht. Duidelijk wordt hier wat de betekenis is van de termen *mathematiseren* en *didactiseren*, twee belangrijke begrippen die het wiskundeonderwijs in wiskobasgeest kenmerken.

Treffers wijst er vervolgens op, dat een derde dimensie ook reliëf zal kunnen krijgen bij de analyse van talrijke doelbeschrijvingen van het wiskundeonderwijs van alle tijden.

6. De voltooide doelbeschrijving brengt Treffers er tenslotte toe de acht uitgangspunten van zijn beschouwingen af te beelden op de acht hoekpunten van een kubus, de twaalf permanent na te streven ééndimensionale doelen op de ribben van die kubus, de zes leerstofgebieden voor de beschrijving van de tweedimensionale product- en procesdoelen op de zijvlakken en de holistische driedimensionale doelstelling tenslotte op de kubus in zijn geheel.

Zou men er echter daadwerkelijk toe willen overgaan de 8 plus 12 plus 6 namen te plaatsen bij de 8 plus 12 plus 6 hoekpunten, ribben en zijvlakken van een beschikbare, concrete, driedimensionale kubus, dan raakt men in verwarring. De gesuggereerde relatie die aan de afbeelding ten grondslag zou moeten liggen, is er niet. De auteur volstaat dan ook in zijn tekst welbewust met een tweedimensionale afbeelding van zijn doelstellingenkubus zonder de 8 plus 12 plus 6 namen. Het blijft een 'kale kubus'.

Ik acht in dit verband de introductie van de doelstellingenkubus ter ondersteuning van een ongetwijfeld belangrijk didactisch betoog van twijfelachtige waarde. Blijkbaar in tegenstelling tot de auteur die tal van malen zijn betoog besluit met een bespreking van de doelstellingenkubus, afgesloten door een plaatje van die kubus.

Dat Treffers de betreffende waarde van zijn kubus zelf duidelijk heeft gevoeld, blijkt reeds op p. 34, waar hij zijn doelstellingenkubus als mathematisch model afwijst!

Voorts uit de volgende zinsnede uit de slotalinea van zijn summary (p. 225):

'The image of the cube of goals is, of course, nothing but a didactical device, which might even cause misunderstanding, since it does not mirror adequately the relation between principles, one-, two- and three-dimensional goals'.

Inderdaad, een mathematisch model wordt ons niet geboden! Maar ook als 'didactical device' verwerp ik deze introductie van de kale kubus. De zogenaamde 'afbeelding' waartoe het betoog de lezer zou kunnen verleiden, is niet mogelijk. En zijn tenslotte de aantallen 8, 12 en 6 van Treffers betoog niet te arbitrair om daarvoor die kubus ten tonele te voeren? Door weglating van de doelstellingenkubus zullen de wezenlijke kwaliteiten van Treffers' doorwrochte onderwijskundige beschouwingen hun waarde niet verliezen.

Wees contextbewust in WOT

PROF. DR. N. G. DE BRUIJN

1 Wat is WOT? WOT is de Wiskundige Omgangstaal die we schrijven en spreken, dat mengsel van woorden en formules dat voor de buitenstaander abracadabra is. WOT is niet gemakkelijk te ontrafelen, want flarden keiharde wiskundige taal zijn erin dooreengeklutst met losse beschouwingen over die taal, en met suggestieve afkortende spreekwijzen van verschillende aard. WOT kent vele dialecten, is modegevoelig, en is steeds na één of twee generaties duidelijk veranderd. Kortom: WOT is een levende taal.

De wiskundige formules zijn vrij goed gereglementeerd en worden door velen als ideale wiskundige taal beschouwd. Er is de neiging om steeds meer met formules te zeggen wat ook in gewone woorden gezegd kan worden. Dat heeft voordelen van manipuleerbaarheid en overzichtelijkheid, maar het maakt ook veel stuk.

Wanneer wiskunde ontaardt in formule-manipulatie tast men de wiskundige smaak en de toepasbaarheid aan. Het leidt tot isolationisme. De stukken die zich niet gemakkelijk in formules laten persen worden hinderlijk en lelijk gevonden en liefst gauw afgeschaft. Na enige tijd krijgt men gelijk: er zijn alleen nog maar formules. (Een ander voorbeeld van een 'self-fulfilling prophecy' is de opvatting dat alle meetkunde met vectoren gedaan kan en moet worden: wat niet in dit beeld past wordt als oude rommel opzij gezet).

De neiging tot verhoogd formulegebruik is misschien toe te schrijven aan het feit dat er in WOT buiten de formules nog zo weinig gereglementeerd is. Men heeft geen helder beeld over de overgang van wat in woorden wordt gezegd naar de vertaling in formules. Bijgevolg voelt men zich alleen bij formules veilig.

Een akelige bijkomstigheid is dat de manier waarop men zich van formules bedient nog steeds onvolledig is ('gelukkig maar', zegt ieder die wel eens een werkelijk volledige presentatie van wiskunde in formules heeft gezien). In het bijzonder geldt dit voor wat we in dit artikelje bespreken: de beschrijving van context. Op dit gebied is WOT aan een opknappebeurt toe.

Vóórdát we beginnen een waarschuwing. Om de context te beschrijven worden hier symbolen gebruikt. Die zijn niet bedoeld als pleidooi om ook deze zaken naar de formule-wereld te verschuiven, maar alleen om ze kort en duidelijk voor te stellen. Is dat eenmaal gedaan, dan is het niet moeilijk meer om de symbolen door gewone woorden te vervangen.

2 Wat is *context*? Alles wat in WOT wordt gezegd, elke mededeling, elke vraag, elke opdracht, staat in de een of andere context. Wie die context niet kent, kan de tekst zelf niet begrijpen.

Er zijn twee duidelijk verschillende soorten van dingen die men moet weten om een stuk tekst te kunnen lezen. Eerst zijn er de woorden en symbolen die in het verleden gedefinieerd zijn. Wij zullen die niet tot de context rekenen. Wat we wél de context noemen valt weer in tweeën uiteen:

- a) *de op dit ogenblik geldige variabelen*, elk met een beschrijving van het soort ding dat ze voorstellen.
- b) *de op dit ogenblik geldige onderstellingen*.

Als voorbeeld noemen we

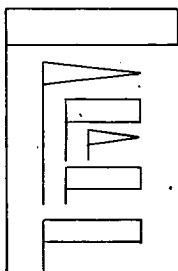
$$\text{'het kwadraat van } \log(x + 2) \text{ is kleiner dan } 2\pi\text{'}. \quad (1)$$

De dingen die in het verleden gedefinieerd zijn, zijn kennelijk 'kwadraat van', 'log', 'kleiner dan', '2', ' π ', '+' en de productvorming ' 2π '. Een variabele is kennelijk x , de soortbeschrijving kan $x \in \mathbb{R}$ geweest zijn. Er zijn misschien méér variabelen op dit ogenblik in leven, die toevallig in de zin (1) niet voorkomen. Verder zullen er wel onderstellingen zijn gemaakt die garanderen dat $x + 2$ in het domein van de logaritmie ligt. En er zijn natuurlijk nog meer onderstellingen geweest, anders zou (1) niet waar zijn.

In een wiskundige beschouwing (bijv. binnen een bewijs) kan de context gedurig wisselen: er komen variabelen en onderstellingen bij, en er worden variabelen en onderstellingen afgedankt. Het eerstgenoemde wordt meestal netjes in een afzonderlijke zin aangekondigd: 'laat y een reëel getal zijn', 'we nemen nu eerst aan dat $p > q$ '. Maar het afdanken treft men in WOT nooit aan! Het is als met huwelijken: trouwerijen worden uitvoerig aangekondigd, echtscheidingen worden niet geadverteerd. In schriftelijk WOT kan men nog iets zien aan de indeling in zinnen, alinea's, paragrafen, hoofdstukken e.d., en aan de 'layout' van 'stelling', 'bewijs', enz. Men kan dus zeggen dat de context gesuggereerd wordt, maar niet aangegeven.

In allerlei stukjes wiskunde is het plezierig (leerzaam, overzichtelijk) om de context duidelijk aan te geven. Men kan dit doen als volgt: onderstellingen duidelijk omlijnen met een rechthoek, en met een verticale streep langs de kantlijn aangeven over welk stuk van de tekst de onderstelling werkt. Met het invoeren van variabelen doen we hetzelfde, maar ter onderscheiding doen we het met driehoeken i.p.v. rechthoeken. Het worden vlaggen waarvan de genoemde streep de stok is. We zullen ze *contextvlaggen* noemen.

Wezenlijk is dat bij afvoer van variabelen en onderstellingen het principe 'last in first out' wordt gehuldigd. Het werkt als een stapel: nieuwe variabelen en onderstellingen komen boven op de stapel, en bij afdanking wordt er van boven af weggehaald. Dit brengt met zich mee dat we een 'geneste' structuur krijgen (dit woord is gevormd naar aanleiding van een nest schalen of pannen). Het kan er uit gaan zien als in de bijgaande figuur aangegeven.



Na het invoeren van een vlag kan er een heel stuk tekst komen vóórdát er weer een vlag wordt opgericht of afgedankt. In veel gevallen is het eenvoudiger: dan worden de vlaggen direct ná elkaar ingevoerd, de context blijft lange tijd constant, en alle vlaggen worden tegelijk afgedankt. In zulke gevallen kunnen we de context in één regel schrijven, zoals in (2) zal gebeuren. Daar hebben we de teksten niet in de vlag gezet maar rechtsonder aan de stok.

3 We nemen eens een voorbeeld. We lezen ergens de opgave: ‘Van gegeven reële getallen x en y weten we dat $y < x < 5$ en $x + y > 8$. Bewijs dat $32 < x^2 + y^2 < 50$ ’.

Wat betekent eigenlijk ‘gegeven’? Als er had gestaan ‘Van de reële getallen x en y is gegeven dat ...’ was er precies hetzelfde bedoeld. Het betekent dat gevraagd wordt om binnen de context

$$\begin{array}{l} \text{P} \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ y < x < 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ x + y > 8 \end{array} \quad (2)$$

af te leiden dat $32 < x^2 + y^2 < 50$. De vraag wordt dus binnen de context gesteld en het antwoord wordt binnen de context verwacht.

Laat ons het even doen. We redeneren bijv.: als $y \leq 0$ was, was (wegens $x + y > 8$) ook $x > 8$ en dat kan niet, wegens $x < 5$. Dus $y > 0$. Nu verder $0 < y < 5$, $0 < x < 5$, $x^2 < 25$, $y^2 < 25$, $x^2 + y^2 < 50$, en ook $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2 > 64$, dus $x^2 + y^2 > 32$.

Wat is hier gebeurd? We zijn begonnen met de context uit te breiden tot

$$\begin{array}{l} \text{P} \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ y < x < 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ x + y > 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{P} \\ y \leq 0 \end{array} \quad (3)$$

en binnen deze nieuwe context hebben we een tegenspraak afgeleid. Doordat in (3) een tegenspraak is afgeleid, kunnen we zeggen dat in de context (2) is afgeleid dat $y \leq 0$ niet waar is, dus $y > 0$. De rest van het verhaal speelt zich weer in de context (2) af.

Het had heel goed zonder de omweg over (3) gekund, maar ons doel was te laten zien hoe de contextuitbreiding en inkrimping werkt.

4 Een ander voorbeeld: ‘Gegeven is een reëel getal a ; los de vergelijking $x^2 - x + a = 0$ op’. We hebben één contextvlag, in woorden te beschrijven door

‘laat a een reëel getal zijn’

en binnen die context wordt de vraag gesteld wat de verzameling

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + a = 0\}$$

is, en het antwoord wordt binnen die context verwacht.

5 ‘Van het reële getal x is gegeven dat $3x + 4 = 37$. Bepaal x ’. Wat is nu het goede antwoord: ‘ $x = 11$ ’ of ‘ $\{11\}$ ’? Wie zich aangeleerd heeft om de opgave te vervangen door ‘Los in $\mathbb{R}$ de vergelijking $3x + 4 = 37$ op’, en dat weer door ‘Bepaal de oplossingsverzameling van $3x + 4 = 37$ ’, komt op $\{11\}$ terecht. Maar men komt op het antwoord ‘ $x = 11$ ’ uit door de opgave op te vatten als de vraag ‘wat is x ’, gesteld binnen de context

$$\begin{array}{l} \text{P} \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \square \\ 3x + 4 = 37, \end{array}$$

waarbij het antwoord binnen die context verwacht wordt.

Maakt het veel uit welke opvatting juist is zolang de 11 maar tevoorschijn komt? Voor het gevoel van velen is het taalgebruik niet nauwkeurig genoeg vastgelegd om het verschil te maken tussen de genoemde opvattingen.

Als overigens de opgave in plaats van ‘Bepaal x ’ had bevat ‘Wat is x ?’ was het antwoord ‘11’ ook acceptabel geweest. Pijnlijk, omdat we de leerlingen met veel moeite (en misschien met weinig overtuiging) hebben bijgebracht dat 11 en $\{11\}$ totaal verschillende dingen zijn.

6 Ook *definities* staan binnen een context. Dit is belangrijk, want vele definities zijn *conditioneel*, d.w.z. ze zijn alleen maar van kracht als zekere voorwaarden vervuld zijn. Als voorbeeld noemen we de middelloodlijn van de punten A en B . Daarbij is verondersteld dat $A \neq B$. De context is dus driedig: ‘laat A een punt zijn’, ‘laat B een punt zijn’, ‘onderstel $A \neq B$ ’. Wanneer later eens over de middelloodlijn van P en Q wordt gesproken, dient men na te gaan of P en Q punten zijn, en of $P \neq Q$.

7 Het zojuist gegeven voorbeeld laat zien hoe er later een beroep gedaan wordt op iets dat geschreven staat in een andere context. De oude variabelen worden door nieuwe dingen vervangen, en er moet worden nagegaan of ze van het goede soort zijn en of ze voldoen aan de voorwaarden die in de oude context aan de oude variabelen werden gesteld.

Het ging hier over het gebruik van vroegere definities, maar ook op vroegere *uitspraken* kan een dergelijk beroep worden gedaan. Elke uitspraak waarbij de context is vermeld kan later gebruikt worden. Het is daarbij beslist niet nodig dat die uitspraak van een uithangbord ‘stelling’ was voorzien. Men kan bijv. vaak putten uit uitspraken die binnen het bewijs van stellingen zijn gedaan, mits men maar op de context let. We zagen al dat de context ook binnen een bewijs veranderlijk is.

8 In de ‘moderne’ wiskunde hebben we geleerd om de combinatie ‘context + uitspraak’ te vervangen door een uitspraak gevuld met kwantoren en implicaties. Men kan bijvoorbeeld de mededeling ‘in de context (2) geldt $32 < x^2 + y^2 < 50$ ’ omwerken tot

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} y < x < 5 \Rightarrow (x + y > 8 \Rightarrow 32 < x^2 + y^2 < 50). \quad (4)$$

Contextbewusten zullen zeggen dat dit niet hoeft. Alle conclusies die uit

(4) getrokken kunnen worden, kunnen ook direct uit de contextschrijfwijze worden gehaald. Die past bij de natuurlijke taal, en we hebben niet zoiets als de in (4) zo sterk verschillende behandeling van al-kwantoren en implicaties. Liefhebbers van logische symbolen zullen zeggen: waarom over context praten als het met (4) ook kan? Smaken verschillen. Maar de contextbewusten boeken een duidelijk winstpunt als er conditionele definities in het spel zijn. Nemen we als voorbeeld:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x > 3} \log(x^2 - 1) > 0. \quad (5)$$

Dit mag niet worden omgezet in

$$\forall x \in \mathbb{R} (x > 3 \Rightarrow \log(x^2 - 1) > 0),$$

want $\log(x^2 - 1) > 0$ is niet voor elke x een propositie! Als bijvoorbeeld $x = 0$ is $\log(x^2 - 1)$ niet gedefinieerd! Wie probeert voor deze $\Rightarrow$ een waarheidstafel te maken loopt dan ook vast.

Dit voorbeeld doet inzien dat 'als ... dan' niet altijd met $\Rightarrow$ kan worden beschreven. Want (5) laat zich uitstekend omschrijven met: 'als x een reëel getal > 3 is, dan is $\log(x^2 - 1) > 0$ '.

Terzijde merken we op dat velen de vlaggen in (5) liever tot één vlag zouden willen samenvatten:

$$\bigwedge_{x > 3} \log(x^2 - 1) > 0.$$

Daar is weinig bezwaar tegen.

9 Er is duidelijk behoefte aan goede standaardzinnen voor op- en afvoeren van variabelen en onderstellingen. Het is niet moeilijk daarvoor een goed systeem te ontwerpen maar het is een grote kunst het te verkopen.

Laten we voorlopig niet zo optimistisch zijn om te hopen dat men op grote schaal de moeite zal willen nemen om het afdanken van variabelen en onderstellingen aan te geven. Maar laat ons wel proberen de introductie ervan duidelijker te beschrijven.

Het vervelende is dat iets als 'stel $x > 0$ ', 'laat $x > 0$ ' op twee verschillende manieren bedoeld kan zijn. Het kan zijn een onderstelling over een x die al eerder was ingevoerd, maar het kan ook aanduiden de driehoekige vlag 'laat x een positief getal zijn'. Om te weten welk van de twee bedoeld is, zou men moeten nagaan of er in het voorafgaande ergens een x was ingevoerd die nog niet is afgedankt. Maar doordat het afdanken nooit wordt aangegeven, is dat een lastige kwestie!

Het beste is om zolang er geen algemeen aanvaarde afspraken zijn, zinswendingen te kiezen die misverstand uitsluiten. Wij noemen er enkele:

Voor de rechthoekige vlag (onderstelling):
'onderstel $x > 0$ ', 'neem aan $x > 0$ '.

Voor de driehoekige vlag (introductie van een variabele, ook

wel *declaratie* genoemd):
'neem $x > 0$ ', 'voer in $x > 0$ '.

Soms loopt de context met erachtergeplaatste tekst bij elkaar in één zin af. Dan is de zinswending 'als $x > 0$ dan is ...' dubieus want het kan zowel de rechthoekige als de driehoekige vlag betekenen. Duidelijk rechthoekig, maar langer is: 'als aan $x > 0$ voldaan is dan is ...'. Voor de driehoekige vlag is heel bevredigend: 'voor elke $x > 0$...'.

De zinswendingen 'stel $x > 0$ ', 'zij $x > 0$ ', 'laat $x > 0$ ', 'voor $x > 0$ is ...' zijn heel gebruikelijk, maar ongeschikt. Ze maken niet duidelijk welke vlag hier gehesen wordt.

10 Is al dit vlagvertoon geschikt voor gebruik op school? Misschien wel een beetje, hier en daar. Misschien kan het helpen om te laten zien wat een 'variabele' is. Maar de bedoeling van dit artikel is niet om de vlaggen voor schoolgebruik aan te praten. De werkelijke bedoeling is om aan te bevelen de vlaggen in het achterhoofd te hebben bij het spreken en schrijven van wiskunde, en de keuze van het taalgebruik daardoor te laten leiden.

Over de auteur:

N. G. de Bruijn (geboren 1918 te Den Haag) is sinds 1946 hoogleraar in de wiskunde, achtereenvolgens te Delft (tot 1952), Amsterdam (tot 1960) en Eindhoven. Publiceerde over onderwerpen uit veel verschillende delen van de wiskunde. Leidt sinds 1967 het project 'Wiskundige Talen Automath' dat behelst wiskunde zo volledig op te schrijven dat een computer het in alle details 'begrijpen' kan. Van het begin af leefde de gedachte dat dit vruchten kan afwerpen op didactisch terrein, door verbetering van notaties en taalgebruik, maar ook door verbetering van inzicht in de structuur van de wiskunde.

CENTRALE OPLEIDINGSCURSUSSEN VOOR MIDDELBARE AKTEN

(C.O.C.M.A.) Maliebaan 97, 3581 CH Utrecht.

In verband met de komende instituutsexamens zal de cursus **wiskunde m.o.B** niet in januari 1980 beginnen maar reeds in september 1979.

De aarde draait

G. SCHOEMAKER

Op de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren werkten we in groepen aan een aantal problemen onder het motto 'instappen en toepassen'.

Het eerste probleem waar we met ons groepje intrapten was deze CROCK:

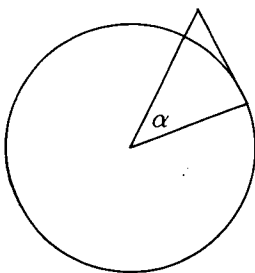
CROCK



De plaatjes gaven in onze groep – na enig heen en weer gepraat dat de kenners oriënteren noemen – aanleiding tot de vraag: 'Hoe ver kan de bovenste man van een toren van k mannen zien?' We namen een vaste afstand tussen twee opvolgende hoofden van 1 meter onder deze benarde omstandigheden.

We rekenden als volgt:

De afstand die gezien wordt, is de lengte van de boog van middelpuntshoek α .



Een boogminuut van een meridiaan is 1 zeemijl.

$$\cos \alpha = \frac{6000000}{6000000 + k}$$

$$60 \text{ arc cos } \frac{6000000}{6000000 + k} = \text{afstand in mijlen.}$$

Met het rekenmachientje vinden we
bij 1 m hoogte 2,17 mijl $\approx$ 4,0 km.
bij 2 m hoogte 2,66 mijl $\approx$ 4,9 km.
bij 3 m hoogte 3,44 mijl $\approx$ 6,3 km.

Voor kleine torens maakt 't weinig uit of je de lengte van het raaklijnstuk neemt (uitrekenen met de macht) of de booglengte. Voor hoge torens maakt dat veel uit. De 'afstand' zou onbegrensd zijn.

We lieten dit liggen en vroegen ons af hoe leerlingen hiermee aan de slag zouden kunnen. We kwamen daarbij op de volgende ideeën:

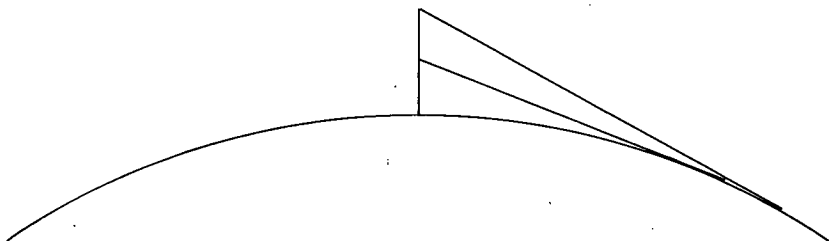
De didactische overdrijving

Als er nu eens een toren tot de maan was?

Wat kun je dan zien van de aarde?

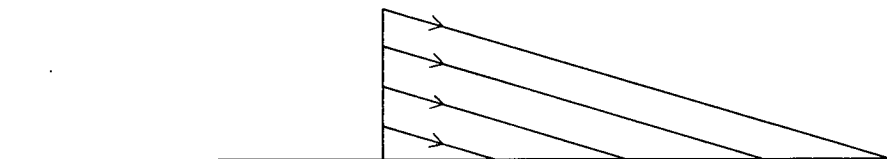
Kinderen b.v. van een brugklas zouden zo wellicht tot een inzicht komen dat de conclusie in de plaatjes niet deugt.

Tekenen van een model



Ook weer op een kwalitatieve manier zouden kinderen tot verwerpen van de hypothese kunnen komen.

Tenslotte stelden we ons de vraag: Welk wereldmodel moet je maken om de uitspraak kloppend te krijgen?

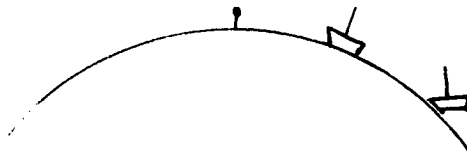


Iedereen kijkt in dezelfde richting naar een platte aarde. De conclusie is nog niet zo gek. Militairen moeten nu eenmaal dezelfde kant uit kijken en in de woestijn is de aarde als een grote zandvlakte.

Thuis gekomen gaat de twijfel knagen:

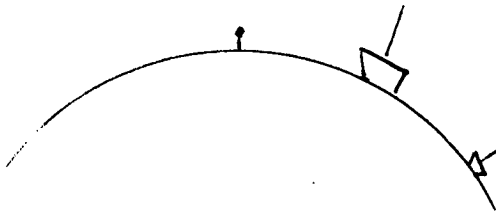
Toen ik thuis was gekomen zei m'n dochter: 'Je bent eigenlijk forens, hè'. Het woord had ze twee jaar eerder bij aardrijkskunde geleerd. Nu gebruikte ze het woord voor 't eerst met een schok van herkenning.

In de leao-mavo school in de Gansstraat zijn we nu in de brugklas bezig met een pakketje waar o.a. het modelbegrip van de aarde en van aarde en maan aan de orde komt. Veel kinderen blijken de vraag van het schip – waarvan de mast eerst te zien is en pas later de kajuit – te herkennen. Hun verklaring luidt: 'De aarde is rond'. Een enkeling zegt per ongeluk 'De aarde draait'. (En toch beweegt zij, denk ik dan). Anderen zeggen: 'Het schip komt dichterbij en dan wordt het groter'. De vraag het te tekenen brengt veel narigheid aan het licht.



Ik vind 't niet aardig als 't bootje zo getekend wordt.

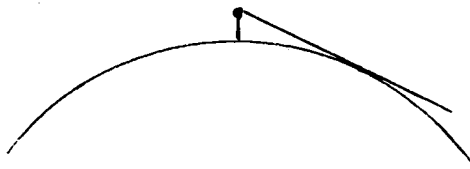
Deze kinderen zijn nog lang niet door het stadium 'Wij staan rechtop, en in andere landen lopen ze op de kop'.



Deze tekening hoort bij het antwoord: 'Het schip komt dichterbij en dan wordt het groter'.

Deze antwoorden wijzen op 't bestaan van vele 'forensen'.

Het besef van raaklijn-model kon ik bij geen enkel kind waarnemen.



We zijn er – daar in de Gansstraat – flink tegenaan gegaan. Voetbal erbij pionnetje erbij, kan ie dit zien?

en dit en dat?



Eenmaal bezig hebben we ook de schijn-gestalten van de maan laten zien met een spotje gericht op de voetbal.

Maar tijdens dat leuke onderwijs ontmoet je steeds weer nieuwe 'forensen' en je vraagt je af of je bezig bent er nieuwe bij te maken. Want na zo'n periode van leuk onderwijs blijken kinderen weer meer uitspraken paraat te hebben om te onpas te kunnen gebruiken.

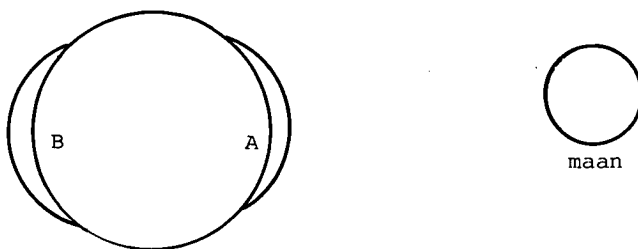
Soms valt 't mee.

Op de vraag – in een ander pakketje – 'Leg eens uit waarom 't 's-nachts meestal kouder is', zei een leerling: 'De aarde draait'. Ik had de tenen al krom. Gelukkig vroeg de leraar: 'Leg dat eens verder uit'.

Toen kwam er een uitstekende verklaring waarin het draaien van de aarde echt functioneerde om dag en nacht uit te leggen.

Ook bij volwassenen zijn er op dit terrein vele verborgen 'forensen'.

In boekjes waarin eb en vloed wordt verklaard kwam ik 't volgende tegen:

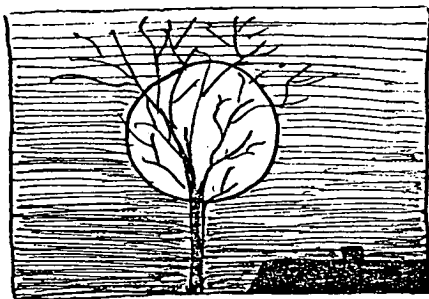


'Bij A en B is het hoog water. Dit komt door de aantrekkingskracht van de maan'. Hetgeen die waterbult bij B dan ook moet verklaren. In een ander boek las ik als verklaring voor de bult bij B. 'Deze verhoging ontstaat door de draaiing van de aarde'.

In een brugklas in de Gansstraat kwam aan de hand van het verhaal van 'Kuifje in de zonnetempel' een totale zonsverduistering ter sprake. Verbazing over

hoe dat nou kan. We kwamen er uit. Tot slot vroeg ik: 'Die maan is veel kleiner dan de zon, toch zie je niks meer van de zon'. Opgewonden zei een meisje: 'Net als met dat rechthoekje en het raam'. Een tijd daarvoor hadden ze een rechthoekje moeten knippen waarmee ze vanaf hun plaats het raam afgedekt konden zien.

Een vraag in de Sinterklaastijd. Zie de maan schijnt door de bomen.

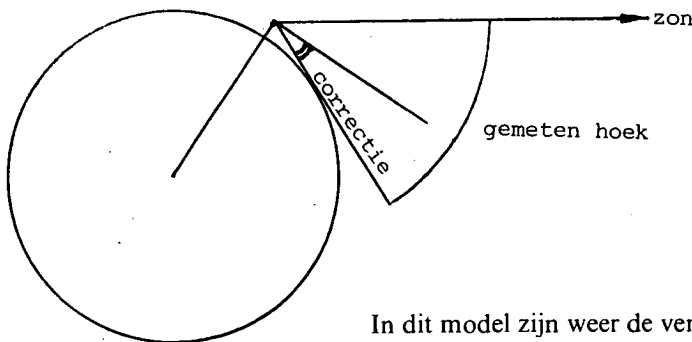


Als je 's avonds de maan door de bomen ziet schijnen en je loopt over straat, dan is het net alsof de maan met je meeloopt. Leg dat eens uit. Deze vraag bleek veel te moeilijk voor brugklassers. We werden getraceerd op antwoorden als: 'De aarde draait, dus de maan gaat met je mee'.

Mijn reactie op deze serie voorvallen: We hebben hier iets essentieels te pakken. Het is de moeite waard hier tijd aan te besteden in de school. We moeten begrippen hier heel geleidelijk uitbouwen. Niet alleen omdat er zulke leuke wetkunde achter zit. Ik geloof stellig dat veel leerlingen hieraan meer hebben voor hun verdere leven dan aan een aantal waanwijsheden die ze leren en die vaak gebaseerd zijn op 'forensen'.

De Crock plaatjes hadden nog een andere nawerking:

Het is gemakkelijk in te zien dat bij het schieten van een zonnetje met behulp van een sextant een correctie moet worden toegepast voor de ooghoogte van de waarnemer. Naarmate hij hoger staat moet hij een grotere hoek aftrekken als correctie op de gemeten hoek.



In dit model zijn weer de verhoudingen zoek.

In feite berekenden wij deze correctie in minuten voor verschillende ooghoogten toen we in ons groepje op de studiedag het aantal mijlen zicht vonden bij verschillende torens van mannen.

In de Almanak staat deze tabel in voeten.

DIP OF SEA HORIZON—Subtract.							
Height of eye	Dip	Height of eye	Dip	Height of eye	Dip	Height of eye	Dip
feet		feet		feet		feet	
1	1.00	14	3.67	27	5.10	40	6.20
2	1.38	15	3.80	28	5.18	45	6.60
3	1.70	16	3.92	29	5.28	50	6.93
4	1.97	17	4.03	30	5.37	55	7.27
5	2.18	18	4.15	31	5.43	60	7.58
6	2.40	19	4.27	32	5.55	65	7.90
7	2.60	20	4.38	33	5.63	70	8.40
8	2.77	21	4.48	34	5.72	75	8.48
9	2.93	22	4.60	35	5.80	80	8.77
10	3.08	23	4.70	36	5.88	85	9.03
11	3.25	24	4.80	37	5.97	90	9.30
12	3.40	25	4.90	38	6.03	100	9.80
13	3.53	26	5.00	39	6.12		

Dat kan ook met een rekenmachientje met

$$60 \arccos \frac{6368000}{6368000 + k \times 0,3048} \text{ waarbij } k \text{ van 1 t/m 100 loopt.}$$

't Vervelende is dat het rekenmachientje grotere waarden oplevert in de orde van 10%. Toen lag 't voor de hand de tabel uit de Almanak te voeren aan de computer, daarnaast de tabel te laten maken met de bovenstaande formule en de resultaten te laten vergelijken d.m.v. het quotiënt.

Zie hier een gedeelte van het resultaat.

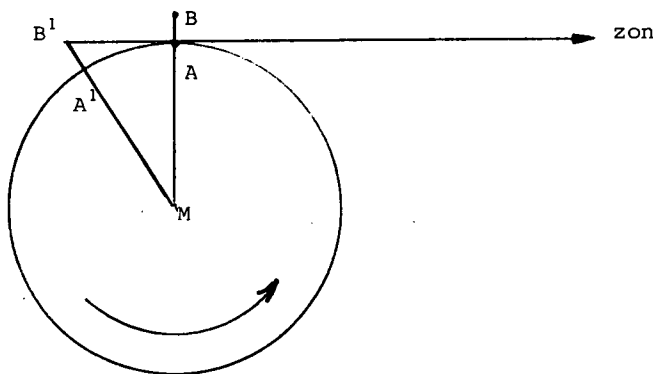
hoogte voet	tabel	berekend	<u>tabel</u> berekend
1	1.00	1.064	0.949
2	1.38	1.504	0.917
3	1.70	1.842	0.922
4	1.97	2.127	0.926
5	2.18	2.379	0.916
6	2.40	2.606	0.920
7	2.60	2.814	0.923
8	2.77	3.009	0.920
9	2.93	3.191	0.918
10	3.08	3.364	0.915
11	3.25	3.528	0.921
⋮	⋮	⋮	⋮
75	8.48	9.212	0.920
80	8.77	9.514	0.921
85	9.03	9.807	0.920
90	9.39	10.091	0.921
100	9.80	10.637	0.921

De verklaring ligt voor de hand. Door de breking van het licht wordt de kim hoger waargenomen dan deze is. De correctie moet iets kleiner zijn. De tabel in de Almanak is gecorrigeerd voor de straalbreking, zo bleek me na enige navraag bij een zeevaartkundige.

In dezelfde Almanak staat de correctie van de diameter van de zon. Deze is vrijwel dezelfde als van de maan. Maar dat wisten brugklassertjes ook al dank zij het verhaal over Kuifje.

Nog zo'n nawerking van de Crock :

Als je bij zonsondergang op het strand staat kun je de zon de kim zien raken. Iemand die op 't duin staat, ziet dat even later. Het tijdsverschil is een maat voor de lengte van de straal van de aarde. Hebben we voldoende lichamelijke conditie om zelf beide waarnemingen te kunnen doen?



In t seconden draait de aarde door totdat vanaf B^1 de zon op de kim wordt gezien. Nemen we voor AB een lengte van d meter. In t seconden draait de aarde over een hoek van $\alpha = t \cdot \frac{360}{24 \times 60 \times 60}$ graden $= \frac{t'}{4}$. De afstand over aarde

van A naar A^1 is dan $\frac{t}{4}$ mijl $= 1852 \times \frac{t}{4}$ meter $= 463 \cdot t$ meter. Pythagoras in $\triangle ANB^1$. AB^1 is - voor kleine α - te vervangen door AA^1 .

$R^2 + 463^2 t^2 \approx (R + d)^2$. We vinden $R \approx \frac{463^2 t^2}{2d}$. Bij een duin van 10 meter hoog en een tijd van 24 sec. vinden we een benadering van de aardstraal van 6200 km. De vraag naar de lichamelijke conditie zal ieder voor zichzelf moeten beantwoorden.

Maar Hier zit een cirkelredenering achter. De lengte van een zeemijl is afgeleid van de omtrek van de aarde.

Een andere benadering dan maar:

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + d} \text{ waarbij } \alpha = \frac{t^0}{240}$$

In zijn boek 'de natuurkunde van 't vrije veld' geeft Professor Minnaert de volgende berekening:

$$B^1 B^2 = B^1 A \cdot (B^1 A + 2R). \quad B^1 B^2 = d(2R + d). \quad \text{Vervang } BB^1 \text{ door boog } AB = \alpha R \text{ dan vinden we } \alpha^2 R^2 \approx d \cdot 2R. \quad \text{Waarbij voor } \alpha \text{ geldt } \alpha = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \times t \text{ enz.}$$

Op de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren hadden ze nog andere leuke sommen, en dat alles onder het motto 'instappen en toepassen'.

Over de auteur:

*George Schoemaker, 44 jaar, medewerker van het IOWO gedurende de laatste vier jaren;
de voorste veertig jaren grotendeels in diverse scholen doorgebracht in verschillende functies.*

NUTSACADEMIE VOOR PEDAGOGISCHE EN MAATSCHAPPELIJKE VORMING TE ROTTERDAM

De cursus **WISKUNDE M.O.-B** vangt dit jaar aan in de maand **november**.

Verzoeken om toezending van de studiegids, waarin een inschrijfformulier voor het cursusjaar 1979-1980 is opgenomen, kunnen worden gericht aan het Bureau van de Nutsacademie, Heemraadssingel 80, 3021 DD Rotterdam, telefoon 010-77 38 11.

Wiskunde tastbaar maken

BRAM LAGERWERF

A In dit artikel gaat het over 'handwerk' bij het leren en het beoefenen van wiskunde. De laatste jaren is van vele kanten gewezen op de grote aandacht voor het intellectueel bezig zijn op onze scholen, en op het kleine beetje aandacht dat daardoor overblijft voor bezigheden waarin we ons als mens wat completer kunnen uiten. Ik denk dat het vaak mogelijk is in leer-lesSEN elementen te gebruiken van wat bijvoorbeeld gebeurt in de lessen tekenen, handvaardigheid, gymnastiek en expressie in woord en gebaar. Hoewel het dus om méér gaat, vat ik dat soort bezigheden voorlopig maar samen onder de term 'handwerk'.

Al vóór 1968 waren er met name stereometrieboeken met bouwplaten om moeilijkheden met 'ruimtelijk inzicht' te verhelpen. In het eerste deeltje van 'Moderne Wiskunde' in 1968 werd op meer manieren het handwerk gestimuleerd; ik denk aan het spijkerbord, een viervlak maken met behulp van rietjes, de vraag: op hoeveel manieren past een rechthoek in de opening waaruit je hem hebt geknipt, en dergelijke.

De ontwikkeling die daarmee leek ingezet is niet ver gekomen. Het was voor de meeste leraren niet duidelijk wat het belang was van die opgaven, denk ik. Het viervlak van rietjes was, en is nog, veelal een opgave voor wie daar aardigheid in had; het spijkerbord werd niet gehanteerd door de leerlingen, trouwens de leraar zelf behielp zich liever met een aantal roosterpunten op het bord; en ook de rechthoeken werden vaak niet echt geknipt, maar behandeld met voor de leraar meer vertrouwde tekeningen.

Ik noem nu een paar argumenten voor handwerk bij het beoefenen en het leren van wiskunde.

- Voor veel mensen is het zonder meer leuk.
- Het bovengenoemde 'completer mens zijn'; ik vind het belangrijk dat mensen zich in hun werk op allerlei manieren kunnen uiten, en daarbij niet beperkt worden tot wiskundige redeneringen met zo nu en dan een wiskundig plaatje.
- Leerpsychologen hebben er al lang geleden op gewezen dat 'doen' het 'denken' ondersteunt. Ik noem hier in de eerste plaats het werk van Piaget, met name zoals het verwoord en uitgebreid is door Aebli, in de vijftiger jaren.¹⁾ In de tweede

¹⁾ Hans Aebli: *Didactique Psychologique*. Neuchâtel, 1951 (ook in het Duits uitgegeven, Stuttgart 1970).

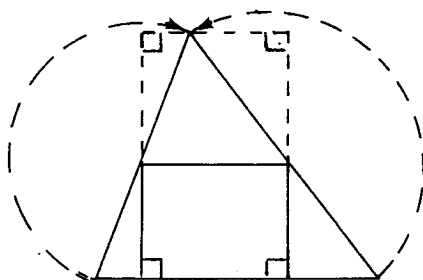
plaats noem ik het werk van 'de Sovjet Psychologen', van wie in Nederland vooral de naam Galperin bekend is.²⁾

Aebli betoogt dat denken uit mentale handelingen bestaat; en die mentale handelingen ontwikkelingen zich langzamerhand uit daadwerkelijk uitgevoerde handelingen. Hij verbindt daaraan de conclusie dat we leerlingen zoveel mogelijk de gelegenheid moeten geven de te leren handelingen ook met-terdaad uit te voeren. (bladzijde 96 van de Duitse uitgave van 1970).

De Sovjet Psychologen hebben dit basis-idee verder onderzocht en gesystematiseerd; ze ontwikkelden een onderwijsstrategie waarbij leerlingen door doen en hardop denken tot denken komen.

B De hoogste tijd voor een paar wiskundeonderwijs-voorbeelden.

1 Een SOL-student in een bijles-situatie. Het gaat over de oppervlakte van een willekeurige driehoek. In het boek gaat het zo: Middenparallel; in de uit-



einden twee loodlijntjes naar de overstaande zijde; maak van de brokstukken van de driehoek nu een rechthoek; oppervlakte van de rechthoek vind je door lengte maal breedte. De leerling begrijpt het niet; de student put zich uit, het op allerlei manieren uit te leggen; dat lukt niet tot hij zich de doe-strategie herinnert: schaar er bij, knippen en plakken, student en leerling verguld door het succes.

2 SOL-situatie. Al enkele weken zijn functies met twee variabelen aan de orde. De studenten lijken niet veel verder te komen dan het maniertje voor het zoeken van uiterste waarden en dergelijke. Ik vraag hun: Maak nu eens van karton een echte ruimtelijke grafiek van een paar functies van twee variabelen. Dan wordt pas duidelijk wat er aan de hand is als je een van de variabelen even constant houdt, en ook welke eigenaardigheden zich in gekromde oppervlakken kunnen voordoen.

3 Een leerling in het voortgezet onderwijs, die spiegelen al lang achter de rug heeft, kan niet goed zeggen wat het is. Leraar: Teken eerst eens een spiegeling op het bord. Als de leerling dat gedaan heeft, lukt het.

4 Laat een leerling eens hardop zeggen wat hij doet.

5 Beschouw een functie als een machientje, dat bij een gegeven getal een ander getal produceert. Dat machientje moet geïnstrueerd worden, in een aantal stappen uit het gegeven getal het nieuwe getal te vinden. Laat de leerlingen de

²⁾ Van Parreren, Carpay, red.: Sovjet Psychologen aan het woord. Groningen, 1972. Een stuk eenvoudiger is:

Van Parreren: Leren op school. Groningen, 1976; hoofdstuk 3; dit staat niet in de oudere drukken.

instructie schrijven, bijvoorbeeld voor de functie $x \rightarrow (x - 3)^2 + 5$. Laat vervolgens het machientje werken voor de klas; elke stap wordt door een leerling metterdaad uitgevoerd. De klas geeft het begin-getal, het machientje produceert de functie-waarde.

6 In de film 'Isometries' (Stichting Film en Wetenschap, Utrecht) lopen twee mensen een spiegeling in de sneeuw. Laat dat zien en laat dat doen!

C Nu eerst wat tegengas. Op de leerpsychologen valt best wat af te dingen. Al heel wat leerlingen met twee linkerhanden hebben met wiskunde goede vorderingen gemaakt. Het onderzoek van het 'door doen tot denken' richt zich trouwens vooral op het basis-onderwijs. Bovendien weet iedereen uit eigen ervaring dat iets bedenken heel goed mogelijk is zonder dat door handelingen vooraf te laten gaan.

Maar gooi nu met het badwater niet ook het kind weg. Nieuwe onderwijs-strategieën zijn er niet om oude beproefde werkwijzen te vervangen, maar meer om ze aan te vullen. Je hebt er vaak wat aan in gevallen dat leren moeilijk gaat – zie het eerste voorbeeld. Daarnaast kan het zijn dat meer handwerk in het wiskundeonderwijs, leer-moeilijkheden voorkomt.

D Het zal nu duidelijk zijn dat handwerk in de klas leerpsychologische voordelen kan bieden. Ik wil dan verder wijzen op een paar belangrijke *didactische voordelen*.

In een nascholings-bijeenkomst met oud-SOL-studenten praatten we over het invoeren van en het werken met negatieve getallen. Tot en met optellen en aftrekken gaat dat makkelijk met behulp van de getallenrechte. Iedereen begreep waar het om ging. Toch maar even een doe-activiteit ingelast. Een lange getallenrechte in de gang op de grond; de eenheid is ongeveer een stap-grootte. Nu elkaar sommetjes opgeven en in tweetallen uitbeelden. Dit lijkt voor sommigen te kinderachtig, maar blijkt voor iedereen nog moeilijk genoeg. Duidelijk is bijvoorbeeld $5 + 2$; nummer 1 loopt van 0 naar 5, nummer 2 gaat naast hem staan en loopt nog twee stappen verder. Bij $5 - 2$ is er al verwarring; moet nummer 2 met zijn rug naar 0 gaan staan en twee stappen terug doen of met zijn gezicht naar nul en dan twee stappen vooruit? Daar komt het verschil tussen $+5 + -2$ en $+5 - +2$ om de hoek kijken. Dat gedoe met die vectoren op het bord in de eigen klas blijkt nu niet zo eenvoudig als het leek. Ook de leraren die het te kinderachtig vinden worden overgehaald mee te doen; ook zij ervaren de moeilijkheid, en ook de hulp van het doen en van het hardop denken. Degene die beweerde dat het voor hem van meet af aan glashelder was, komt nu met de uitroep: 'O, nou snap ik het'.

Wat wil ik met dit voorbeeld?

1 Uit de doe-activiteit bleek dat de theorie niet zo duidelijk was als de cursisten van zich zelf dachten.

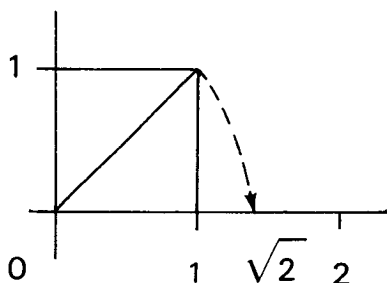
2 De docent kreeg de zekerheid dat uiteindelijk iedereen het doel bereikte.

3 Bij het doen werd pas goed duidelijk waar de moeilijkheid precies zit.

4 Je kunt leerlingen precies zeggen wat ze moeten *doen*, en je kunt dat ook controleren; je kunt niet voorschrijven wat iemand moet *denken*, noch daar controle op uitoefenen.

E Ik kom nu aan het eind; nog een paar losse opmerkingen.

- Zelf doen is belangrijker dan zien wat anderen gemaakt hebben. Ik vind het in het algemeen beter dat een leerling zelf een kegel maakt en daar allerlei doorsnijdingen in aanbrengt, dan in de kast een prachtige set doorzichtige plastic exemplaren te hebben. Mijn regel is dat studenten mee naar huis nemen wat ze maken, of ik gooi het weg.
- Zien doen is echter al weer meer dan helemaal niets.



Dit plaatje duidt een handeling aan die het begrip van het getal $\sqrt{2}$ kan verbeteren.

Het kan voldoende zijn dat de leraar zo'n plaatje even op het bord tekent.

- Handwerk speelt niet alleen bij het leren van wiskunde, maar evengoed bij het beoefenen van wiskunde. Zie mijn artikel in Euclides 54e jrg 1978/1979 nr 4.
- Meer handwerk maakt het wiskundeonderwijs moeilijker te geven denk ik.

Het vraagt van de leraar een grotere creativiteit. Het stelt hogere eisen aan de goede samenwerking tussen leraar en klas. De leraar moet beter in de gaten houden wat elke leerling afzonderlijk doet. Er komen meer initiatieven van de leerlingen, en daar moet de leraar wat mee.

De leraar zal denken dat de klas te groot en de tijd te kort is. Mijn idee is: Laat je niet te snel ontmoedigen; de praktijk leert dat er meer mogelijkheden zijn dan je in eerste instantie denkt.

- De centrale vraag is steeds: Welke handeling van de leerling kan in dit geval leiden tot het denken dat hij moet leren? Het gaat om het tastbaar maken van de leerstof, om het in materie vatten. Galperin spreekt hier van 'vermaterialiseren'.

F Tenslotte.

In dit artikel heb ik proberen aan te geven dat ik handwerk, in de brede zin die ik aan het woord gegeven heb, belangrijk vind in het wiskundeonderwijs, en ik heb een aantal uiteenlopende voorbeelden gegeven. Ik hoop dat u niet het gevoel hebt iets opgedrongen te krijgen, of de gedachte dat u van mij alles anders zou moeten gaan doen. Dat was namelijk niet mijn bedoeling. Ik hoop eigenlijk dat u met de vraag in het achterhoofd: Kan ik mijn leerlingen hierbij iets anders laten doen dan praten, lezen, luisteren, schrijven en denken?, zelf op een idee komt dat u de moeite waard vindt.

IJdele hoop?

Pocket calculator of computer?

J. DOMPELING

Het zakrekenmachientje voldoet als snelle rekenliniaal uitstekend en werkt nauwkeurig bovendien, te nauwkeurig misschien, want wat moet je bijv. beginnen met een uitkomst van een quotiënt van twee waarnemingsgetallen, beide in 1 decimaal nauwkeurig, in 8 decimalen? Moet heropname van een inleiding in de analyse van fouten in het leerplan wiskunde vwo/havo, zoals die in het leerplan-wisk 1958 voor gymnasium en h.b.s.B opgenomen was, overwogen worden? Gelet op het gebruik van de pocket-calculator zou het huidige leerplan hoogstens op dit punt aanvulling behoeven, lijkt me.

Ook zie ik niet zitten dat leerlingen op grote schaal – in de dubbelzinnige betekenis van het woord – gaan stoeien met functies als:

$$x \rightarrow x^x, x \rightarrow x^{\tan x},$$

tenzij we alleen maar geïnteresseerd zijn in hun grafieken.

Misschien dat het rekenmachientje hier en daar aanleiding geeft tot een andere aanpak bij de uitwerking van een probleem, zoals hier:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2},$$

of hier:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = 1\frac{1}{2},$$

want de stappen in de resp. limietberekeningen worden door het rekenmachientje aardig geïllustreerd door:

voor $x \cdot 10^{10}$ te substitueren en $\frac{x^3 + x^2 + 1}{2x^3 - x^2 + 1}$ op het apparaatje uit te rekenen,

resp. voor $x \cdot 10^{-5}$ te substitueren en $\sin 3x/2x$ uit te rekenen.

Een funktie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, om een ander voorbeeld te noemen, wordt via de pocket-calculator operationeel als een stel handelingen dat aan een (evt. in STO geplaatst) getal hoogstens een ander getal toevoegt:

bv. de funktie $f: x \rightarrow \sqrt{x} - 2$ correspondeert met (RCL, $\sqrt{x}$, -2)

en de functie $f: x \rightarrow (\sin x - 1) : (\sin x + 1)$ met $((\text{RCL}, \sin, -1) : (\text{RCL}, \sin, +1))$, maar ook met $(\text{RCL}, \sin, \text{STO}(\text{RCL}, -1) : (\text{RCL}, +1))$, hetgeen men als opeenvolging van de twee handelingen: $\text{RCL}, \sin$ en $((\text{RCL}, -1) : (\text{RCL}, +1))$ kan zien, als een samenstelling van twee functies dus. De eerlijkheid gebiedt mij echter te vermelden dat de handigste berekeningswijze van $f(x)$ minder goed f als samenstelling van twee andere functies illustreert, want die verloopt als volgt: $((\text{RCL}, \sin, \text{STO}, -1) : (\text{RCL}, +1))$ en op mijn apparaatje zelfs zó: $((\text{RCL}, \sin, -1) : (\text{CE} + 2))$ en de leerlingen vinden het wellicht het eenvoudigst $f(x)$ als volgt te berekenen: $\text{RCL}, \sin, -1 =$, antw. in 8 decimalen (dat is veilig!) noteren op blaadje, antw. weer intoetsen (het apparaatje is immers onderwijl uitgegaan, of de batterijen zijn opgeraakt) : $(\text{RCL}, +1) =$, maar nu klopt er natuurlijk niets meer van!

Kortom, wie overal een stuk wiskunde ziet optreden, ziet dat ook wel in rekenapparatuur; de meeste gebruikers van de zakrekenmachientjes echter zullen waarschijnlijk in dit soort apparaten niet meer willen zien dan rekentuig.

Eén ding kan echter duidelijk naar voren komen: een cyclus van een (zelfde) stel handelingen. Neem bv. weer de functie $f: x \rightarrow \sqrt{x} - 2$. We wensen $f(x)$ voor $x = 0, 1, 2, \dots, 10$. De cyclus die hier naar voren komt is: verhoog STO met 1, $\text{RCL}, \sqrt{x}, -2, =$

Heel geleidelijk kan zo een computerprogrammaatje ontstaan, zonder veel extra moeite uit te voeren op een programmeerbare calculator.

Nu ik op het punt van de programmeerbare rekenapparatuur gekomen ben, durf ik dit nu alvast te poneren: wie computerkunde wil incorporeren in het wiskunde onderwijs, dient extra aandacht te schenken aan deze instrumentjes, waarvan de mogelijkheden praktisch onbeperkt lijken te zijn.

Jarenlang is numerieke wiskunde een deel van mijn WiskII-onderwijs. Voorheen waren mijn leerlingen uitsluitend aangewezen op de diensten van het OC. De nogal afstandelijke en omslachtige programmaverwerking die hiermee gepaard ging, weerhield menig leerling ervan programma's met blijvende regelmaat op te stellen en, erger nog, maakte het mij onmogelijk een voor het leerpakket noodzakelijk minimum aantal programma's verwerkt te krijgen. (Als leidraad gebruik ik in mijn num.wisk.onderwijs: Numerieke Wiskunde-G. Vonk)

Sinds kort werken de leerlingen met de programmeerbare TEXAS INSTR. TI 58 en de (oudere) SR 56. Behalve dat alle programma's, uitgezonderd de recursieve, die in 'Num.Wiskunde' van Vonk voorkomen of opgegeven worden, met de TI 58 en de SR 56 inderdaad uitvoerbaar blijken te zijn, heeft het gebruik van deze apparaatjes nog andere voordelen aan 't licht gebracht:

- een tijdrovende introductie in een programmataal, als ECOL, is overbodig
- bij het doorwerken van 'Numerieke Wiskunde' blijkt: er wordt minder tijd aan 't opstellen van programma's besteed, zodat de aandacht meer gericht kan worden op numeriek-wiskundige problemen
- doordat de apparaatjes erg traag werken, is de leerling niet zomaar tevreden met programma's die werken, maar zal hij programma's proberen te maken die zo snel en efficiënt mogelijk werken; met een tweetal voorbeelden wil ik dit illustreren:

1. in de beginfase blijkt het volgende probleempje als een leuk instap-probleem te functioneren: 'in een klas met jongens en meisjes doet 57% van de jongens en 41% van de meisjes aan sport; hoeveel % van alle leerlingen in die klas doet aan sport?'

In een bepaalde fase van de behandeling van dit probleem moeten rationale getallen m/n , met m en $n \in \mathbb{N}^+$ gezocht worden, die tussen 0,565 en 0,575 liggen; als je dit een apparaatje laat doen d.m.v. een programma dat stomweg alle breuken m/n uitprobeert, waarbij n afloopt van bijv. 100 naar 1 en m van n naar 1, krijg je er al gauw de pest in, want je moet minstens een $\frac{1}{2}$ uur op de resultaten wachten; daarna ben je wel bereid een zuiniger algoritme te zoeken! ('t blijkt in 5 minuten te kunnen)

2. een leerling wilde de trapezium regel uitproberen op de integraal: $\int_0^1 \ln x dx$;

hij wilde resultaten in 4 decimalen nauwkeurig; die kreeg hij wel, door uit te gaan van een zeer dicht bij 0 gelegen ondergrens, maar een en ander duurde wel heel erg lang; hij ontdekte dat alles veel sneller ging als je uit-

ging van de inverse van $\ln x$ en dus van de integraal: $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

en toen ontstond pas het probleem:

waarom gaat die ene integraal zo veel sneller dan die andere

In de numerieke wiskunde een erg interessante probleemstelling!

- opdrachten om een programma op tijd te stoppen, zijn dikwijls overbodig
- twee opdrachten kunnen soms door elkaar lopen, hetgeen een zekere compactheid in de programma's teweeg kan brengen, neem b.v.:
'vermenigvuldig een in een geheugen geplaatst getal met een bepaald getal en vermeerder een getal dat zich in een ander geheugen bevindt met datzelfde getal'

In ECOL gaat dat zo: $a := a * b$

$c := c + b$

met de TI 58: RCL 1 $\times$ RCL 0 SUM 2 = STO 1

- als er voor elk vijftal leerlingen een apparaatje beschikbaar is (kosten $\pm$ f60,- per leerling in 5 jaar, als 5 jaar de afschrijvingsduur is, dus f12 per leerling per jaar) dan kan iedere leerling in de gelegenheid gesteld worden thuis te oefenen en zelf een en ander uit te proberen.

T.b.v. diegenen die zouden kunnen opmerken dat de programmeerbare rekenmachientjes alleen maar geschikt zijn voor programmaatjes die passen in 't kader van de numerieke wiskunde op VWO-niveau en op zich vrij eenvoudig zijn, wil ik er nog op wijzen dat ik het apparaatje TI 58 'uitgetest' heb op de boekjes 'Computerkunde' van Grts e.a. Het zal duidelijk zijn dat ik met dingen als bestanden en personeelsadministratie niet zo veel kon beginnen. De in deze boekjes voorkomende simulatie opdrachten konden echter allemaal uitgevoerd worden!

Samenvattend zou ik willen stellen :

1. De *niet-programmeerbare* rekenmachientjes hebben het wiskunde onderwijs niet zo heel veel interessants te bieden.
2. Onze bijzondere aandacht verdienen de *programmeerbare* apparaatjes : zij bieden verrassend veel mogelijkheden en voordelen en we kunnen hiermee werken in de richting van de onmiskenbare maatschappelijke ontwikkeling die er toe leidt dat ieder op elke tijd en elke plaats de beschikking heeft over computercapaciteit.

Het IOWO in gevaar

Reeds geruime tijd bereiken ons berichten dat het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs in zijn bestaan bedreigd wordt. Mededelingen in de pers van de laatste maanden maken duidelijk, dat het nu ernst schijnt te worden. De pogingen om een deel van het IOWO-werk – namelijk de leerplan-ontwikkeling – te reallokeren naar de (niet operationele) sectie wiskunde van de Stichting Leerplan Ontwikkeling, blijken weinig te hebben opgeleverd. Staatssekretaris Hermes heeft nu, tegen de uitdrukkelijke wens van de Tweede Kamer om het werk en de know-how van het IOWO te sparen, gemeend de botte bijl te moeten hanteren. Een ongedefinieerd deel van de medewerkers van het IOWO is een al even ongedefinieerd ontslag aangezegd. De enige uitweg die hen gelaten is om aan een wachtgeldregeling te ontkomen, is in dienst te treden bij de SLO. Daar een belangrijk en essentieel deel van het IOWO-werk evenwel statutair niet binnen SLO-verband plaats kan vinden, wordt deze ‘oplossing’ binnen het IOWO terecht van de hand gewezen.

Vanaf de instelling van het IOWO heeft men kunnen ervaren wat een entoesiast en deskundig team vermag bij te dragen aan de ontwikkeling van ons vakgebied. Vele publikaties van het IOWO getuigen hiervan. Ze kwamen voor een groot deel tot stand in samenwerking met direkt bij het wiskundeonderwijs betrokkenen: docenten aan lerarenopleidingen, mentoren, studenten en leerlingen.

Naast de materialen, die direkt in het onderwijs gebruikt kunnen worden, werden ook docentenboeken ter ondersteuning daarvan gepubliceerd.

Onder andere in samenwerking met de didaktiek-commissie van de NvWL kreeg de didaktiek van de wiskunde een brede basis voor deelnemers aan regelmatig georganiseerde konferenties.

Van het weldoordachte en (vaak) oorspronkelijke werk voor het wiskundeonderwijs heeft men in de afgelopen jaren ook kennis kunnen nemen via artikelen in ‘Euclides’. Direkt op het werk betrokken publikaties verschenen in de ‘Wiskrant’ en het ‘Wiskobas-bulletin’. De redactie heeft de inhoud van deze tijdschriften steeds beschouwd als de professionele aanvullingen op de bijdrage die ‘Euclides’ aan de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs kon leveren. In toenemende mate bleek daarin de unieke deskundigheid-in-ontwikkeling. Een deskundigheid, die naar mening van de redactie niet verloren mag gaan.

Fundamentele activiteiten van het wiskundeonderwijs in Nederland zouden worden afgebroken; unieke verworvenheden van de afgelopen tien jaar dreigen verloren te gaan.

De redactie

Korrel

Nogmaals limieten

Het bewijs van $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^{-x}) = \infty$, gegeven door de heer H. van der Hak in

no. 10 van Euclides van dit jaar (blz. 421) komt mij enigszins omslachtig voor. Ik zou het jammer vinden als collegae dit bewijs aan hun leerlingen zouden voorleggen, daar het zoveel eenvoudiger kan.

Onderstaande bewijzen steunen ook op een stuk theorie van wijlen prof. F. Schuh, echter uit zijn Nieuw Leerboek der Hogere Algebra (1943)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \text{ dus } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} \cdot e^{-x}} = \frac{0}{1 + 0 \cdot 0} = 0 \text{ waaruit volgt dat } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^{-x}) = \infty$$

Een ander bewijs gaat m.b.v. de stelling: Als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

en $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = k (\neq 0)$ dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) = \infty$.

$$\text{Immers } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x) \cdot g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = 0 \cdot \frac{1}{k} = 0$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{1}{x} \cdot e^{-x}\right) = \infty.$$

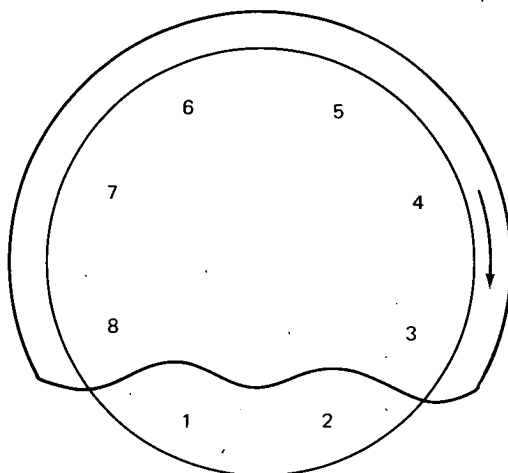
Als we onze leerlingen deze (en soortgelijke) bewijzen geven kunnen we voor oneigenlijke limieten de bekende limietstellingen over eigenlijke limieten uitbreiden door per definitie te stellen:

$$k + \infty = \infty; k \cdot \infty = \infty (k \neq 0); \infty \cdot \infty = \infty; k : \infty = 0; \infty : k = \infty.$$

A. van Uden, doc.wisk.St.Janslyc, Den Bosch.

Opgaven

405. In onderstaande figuur ziet men een schijf waarop de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 zijn aangebracht. De schijf zit in een omhulsel, waardoor alleen de cijfers 1 en 2 zichtbaar zijn. Men mag nu de zichtbare cijfers verwisselen;
de schijf één cijfer draaien in de richting van de pijl;
de dan zichtbare cijfers verwisselen enz.
Men kan desgewenst doordraaien zonder te verwisselen.
Men wil zo spoedig mogelijk als eindvolgorde bereiken 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (cyclisch). Hoeveel draaiingen zijn daarvoor nodig? (B. Kootstra)



406. Een fabrikant van bouwplaten wil een bouwplaat in de handel brengen van een of ander veelvlak. Hij wil de bouwplaat zo maken, dat hij een minimaal aantal plakrandjes nodig heeft. Welke strategie moet hij volgen?

Oplossingen

403. Rond een circuit staan auto's geparkeerd. Ze rijden even zuinig. Samen hebben ze precies genoeg benzine om het circuit één keer rond te rijden. Elke auto mag oprijden naar zijn voorganger en diens benzine in zijn tank overhevelen. Is er een auto die op deze wijze voortgaand het hele circuit kan rondrijden?

Het antwoord luidt: ja. Bewijs met volledige inductie.

Als het aantal auto's 1 bedraagt, is het mogelijk.

Onderstel n is een aantal waarvoor het mogelijk is. We tonen aan, dat $n + 1$ dan ook een dergelijk aantal is. Omdat de auto's samen genoeg benzine hebben om het gehele circuit rond te rijden, is er ten minste één die genoeg benzine heeft om zijn voorganger te bereiken. Noem deze A en zijn voorganger B . Laat A oprijden tot B en de benzine van B in zijn tank overhevelen. Laat nu B weg. Er zijn dan n auto's over. Hiervan kan er volgens de onderstelling ten minste één het gehele circuit

rondrijden. Als A nu het gehele circuit kan rondrijden, kon hij het in zijn aanvangspositie ook. Onderstel, dat een van A verschillende auto P het kan. Herstel in gedachten de oude toestand en laat A zijn oorspronkelijke positie dus weer innemen. Dan kan P nu ook het gehele circuit rondrijden. Hiermee is het bewijs voltooid.

404. Een slak zit aan de voet van een 1 km lange paal en klimt elke dag 1 cm naar boven. Aan het eind van elke dag wordt de paal 1 km homogeen uitgerekt. Komt de slak ooit boven?

De eerste dag legt de slak 10^{-5} maal de hoogte van de paal af.

De tweede dag legt de slak $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ maal de hoogte van de paal af.

De derde dag legt de slak $\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ maal de hoogte van de paal af.

Enz.

In n dagen legt hij dus af

$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) 10^{-5}$ maal de hoogte van de paal.

Omdat de harmonische reeks divergeert, is er een n waarvoor

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq 10^5$

De slak komt dus boven.

Een ruwe schatting levert dat het aantal benodigde dagen ligt tussen 2^{100000} en 2^{200000} . Het was dus een kunstsak.

Boekbesprekingen

A. V. Pogorelov, *The Minkowski multidimensional problem*, John Wiley & Sons, New York-Toronto-London-Sydney, 1978; 106 pag., £ 9.70.

Het probleem van Minkowski waarop de titel doelt, luidt in zijn oorspronkelijke vorm: In de driedimensionale Euclidische ruimte een gesloten convex oppervlak te bepalen als zijn Gausz-kromming (= het produkt der beide hoofdkrommingen) een gegeven (positieve) functie K is van de uitwendige eenheidsnormaal (dus een functie op de eenheidsbol).

Het probleem ligt derhalve in het ontmoetingsgebied van de differentiaalmeetkunde en de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen.

In een rij van publicaties heeft Pogorelov de uitbreiding van het vraagstuk tot de n -dimensionale ruimte, alsmede enige verwante problemen bestudeerd. Bovenstaand werk is de Engelse vertaling van een samenvatting van zijn resultaten. Hoewel de lectuur geenszins geringe eisen stelt, heeft uw recensent het geschrift ervaren als een voorbeeldig gecomponeerde en zeer helder geschreven monografie. De eerste § beschrijft de eigenschappen van een convexe variëteit V in E_n ; V wordt daarbij opgevat als de limiet van een rij convexe polyeders en daarop berust, met bijstand van het Lebesgue-maatbegrip, een 'meetkundige' definitie van de Gausz-kromming van V in elk van haar punten. §2 vat dan het eigenlijke probleem van Minkowski aan. Daarbij staan uiteraard de existentie en de eenduidigheid van de oplossing centraal; deze is voorlopig nog een zogenaamde 'gegeneraliseerde oplossing' en dan kan in §3 de vraag volgen aan welke voorwaarden de gegeven functie moet voldoen opdat V een reguliere variëteit zij. §4 beschouwt een algemener probleem: in plaats van de Gausz-kromming wordt een willekeurige symmetrische functie van de hoofdkromtestralen als gegeven aangenomen. Het oorspronkelijke probleem van Minkowski wordt analytisch begeleid door een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking; in §5 breidt de auteur de Monge-Ampere vergelijking $U_{xx} \cdot U_{yy} - U^2_{xy} = \varphi(x,y)$, met onbekende $U(x,y)$ en gegeven φ uit tot E_n : $\det(U_{ij}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Het boekje wordt in §6 afgesloten met een interessante toegift: als φ een constante is blijkt een convexe oplossing (gedefinieerd als een 'oneigenlijke affine hypersfeer') niets anders te zijn dan een elliptische paraboloid; deze stelling, voor $n \leq 5$ reeds door anderen aangetoond, wordt door Pogorelov bewezen voor willekeurige waarde van n .

O. Bottema.

Het boek is een bundeling van een 19-tal artikelen van de hand van de meest bekende onderzoekers op het gebied van de didactiek van de wiskunde. De artikelen zijn alle reeds eerder verschenen. Voorzover ze oorspronkelijk niet in het Duits geschreven zijn, zijn ze in het Duits vertaald. De artikelen zijn in drie groepen gerubriceerd, getiteld

I Zur Orts- und Aufgabenbestimmung der Mathematikdidaktik

II Empirische Forschung, psychologische und lerntheoretische Aspekte

III Gegenstandsdidaktische Analyse und Strukturierung.

Het is ondoenlijk 19 artikelen elk tot zijn recht te laten komen in een bespreking. Ik doe daarom een greep, ten einde de lezer toch een indruk te geven van het geheel.

In rubriek I geven twee zeer verschillend gerichte denkers, Steiner en mevrouw Krygowska, hun visie op het wezenlijke van de didactiek van de wiskunde.

Steiner valt over de tweevoudige discontinuïteit tussen schoolwiskunde en universitaire wiskunde. Deze treedt op bij de overgang van voortgezet naar wetenschappelijk onderwijs en voor de tweede keer bij de overgang van de universiteit naar het leraarsambt. Door instituutspractica heeft hij getracht de tweede discontinuïteit te overbruggen. Centraal stond voor hem daarbij het aanbrengen van kennis betreffende de wetenschappelijke achtergronden van de schoolwiskunde.

Bij mevrouw Krygowska staan daarentegen de meer typisch didactische problemen centraal. Zij interesseert zich in eerste instantie voor de doelstellingen van het onderwijs, de techniek van de kennisoverdracht en dergelijke. Zij vraagt: Kann die Methodologie des Mathematikunterrichts bereits als wissenschaftliche Disziplin betrachtet werden? Erfordert die Ausbildung des Mathematiklehrers derartige Studien? Twee vragen die ze uiteraard stelt, om als antwoord ja te zullen geven.

In rubriek II een geestig artikel van Diénès. Hij laat kinderen verschillende spelen doen die te maken hebben met permutaties van de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Daartoe worden spelregels opgesteld. Daarna worden isomorfieën tussen de verschillende spelen ontdekt. Dit leidt tot een algemene voorstelling van wat er gebeurt, gevolgd door invoeren van symbolen voor de verschillende bewerkingen. Ten slotte komt men tot formalisering van de regels waaraan de bewerkingen gehoorzamen. Een prachtige geleidelijke overgang van concreet naar abstract.

Wittman vergelijkt met elkaar de wiskundige structuren (Bourbaki), de structuren van de genetische psychologie (Piaget) en de strategieën van de heuristiek (Polya). In het eerste geval onderscheidt hij algebraïsche structuren, ordestructuren en topologische structuren. Deze vertonen verwantschap met resp. Verknüpfung von Handlungen (operaties), orderrelaties tussen klassen en objecten, beleving van tijd en ruimte. Ook ziet hij verwantschap met de heuristische strategieën analyse van een probleem, overgang naar eenvoudiger problemen (deelproblemen, speciale gevallen), overgang naar analoge problemen en continuïteitsoverwegingen. Dit wordt nader uitgewerkt en wat betreft de heuristiek toegelicht aan een concreet voorbeeld: het verdelen van een parallelogram in drie gelijke delen door middel van lijnen door een hoekpunt.

Niet onvermeld wil ik laten een artikel van Van Hiele en mevrouw Van Hiele-Geldof over denkniveau's. Een in ons land zo bekend onderwerp, dat ik er hier niet nader op in hoeft te gaan.

In rubriek III een aantal artikelen die betrekking hebben op leerstofkeuze of wetenschappelijke achtergronden van de schoolstof. Engel stelt een curriculum voor de waarschijnlijkheidsrekening op. Freudenthal zet uiteen dat de axiomatische fundering van de kansrekening met behulp van verzamelingen en daarop gedefinieerde functies onpraktisch is. Hij geeft de voorkeur aan uitgaan van uitspraken en dan werken met geordende n -tupels uitspraken en niet met het cartesisch produkt van verzamelingen.

Papy geeft een didactisch goed hanteerbare methode voor het bewijzen van de dimensiestelling van vectorruimten. Pickert houdt zich bezig met de ontwikkeling van het getalbegrip. En Steiner geeft een amusant voorbeeld van een axiomatisering van een onderwerp uit de praktijk. Ik zal het hier niet uiteenzetten. De lezer mag zich er desgewenst zelf eens in verdiepen. Zie de recreatie. Andere medewerkers zijn: Drenckhahn, Hilton, Fischbein, Bigalke, Weis, Bauersfeld, Kilpatrick, Pollak, Von Arnold Kirsch.

H. B. Griffiths, P. J. Hilton, *Klassische Mathematik in Zeitgemässer Darstellung*, Band 3, Das Zahlensystem, Topologie und Analysis, Logik und Kategorien, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978, 320 blz., DM 39,-.

Ook voor dit derde, en laatste deel, uit de genoemde serie gelden dezelfde, bij de vorige delen gemaakte, opmerkingen. Ik volsta daarom met het vermelden van de inhoud:

Aufbau des Zahlensystems und Topologie

de rationale getallen, de reële en de complexe getallen, topologie in $\mathbb{R}^n$

Infinitesimalrechnung

de algebra $\mathbb{R}^1$, limieten, continue functies, differentieerbare functies, integratie

Weitere Themen aus der Analysis

logaritmische en exponentiële functie, differentiaalvergelijkingen, complexe functies, approximatie en iteratie, functies van meer, reële, veranderlijke vektorfuncties, C^r -functies

Vertiefung der Grundlagen

kategorieën en funktoren, mathematische logica

Het boek wordt besloten met een literatuuropgave, een lijst van symbolen, en een index behorend bij de drie delen.

W. Kleijne

C. W. J. Granger, A. P. Andersen, *An introduction to bilinear time series models*, deel 8 uit de serie 'Angewandte Statistik und Ökonometrie', Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978, 94 blz., DM 28,-.

Daar de toepassingen van klasse van modellen tijdreeksen, die door Box-Jenkins ingevoerd werden, tot lineaire betrekkingen beperkt blijven, wordt gezocht naar een omvattende klasse, die ook op niet-lineaire problemen toegepast kan worden. Deze modellen moeten stationaire, niet-explosieve reeksen kunnen voortbrengen, die invertibel zijn. In dit boek wordt een klasse van bilineaire modellen onderzocht. In enige speciale gevallen van de algemene klasse wordt getoond, dat aan de genoemde voorwaarden is voldaan.

Achtereenvolgens behandelen de schrijvers:

non-linear time series models; bilinear models in economics; methodology of time series analysis; the general bilinear model and stability analysis; superdiagonal models; diagonal models; subdiagonal and other models; forecasting and invertibility; estimation and applications.

W. Kleijne

G. Tintner, J. N. K. Rao, H. Strecker, *New results in the variate difference method*, deel 11 uit de serie 'Angewandte Statistik und Ökonometrie', Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978, 102 blz., DM 28,-.

In dit boek behandelen de schrijvers modellen in het kader van de genoemde methode, die geldig zijn op basis van grote steekproeven. Ook een variant van deze methode, de quotiënt-methode wordt besproken. Eveneens komen enige resultaten ter sprake m.b.t. kleine steekproeven, hypothesen keuzen, multicollineariteit en gewogen regressie. Tenslotte wordt de relatie tot de regeltechniek en de theorie van diffusieprocessen behandeld. Een vrij uitvoerige bibliografie sluit het boek af.

W. Kleijne

P. D. Thionet, *Quelques problèmes concernant les sondages*, deel 9 uit de serie 'Angewandte Statistik und Ökonometrie', Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978, 137 blz., DM 34,-.

De schrijver behandelt een stukje geschiedenis van de in de titel aangegeven theorie. Hij doet dit door uit te gaan van zijn persoonlijke ervaringen, wat betreft de wiskunde in Frankrijk. De auteur toont telkens weer, dat de huidige theorieën hun oorsprong vinden in concrete, praktische situaties. Achtereenvolgens behandelt hij:

une théorie initiale utilitaire; quelques grands problèmes; stratification optimale; développements théoriques divers; approfondissements théoriques; sondages analytiques; information et sondage; traitement des 'mauvais' échantillons; statistiques d'ordre application; méthodes bayésiennes.

W. Kleijne

V. Sposito, W. Smith, G. McCormick, *Minimizing the sum of absolute deviations*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978, 60 blz., DM 22,-.

Dit boek is als deel 12 verschenen in de serie 'Angewandte Statistik und Ökonometrie'. Het behandelt het minimaliseren van de som van absolute deviaties.

Achtereenvolgens:

introduction, determining an L_1 estimator, distribution of L_1 estimators, linear programming formulation, generalized properties, unbiased L_1 estimators, efficient L_1 computational algorithms, optimality conditions and statistical consequences, summary and extensions, bibliography.

W. Kleijne

Stowasser/Mohry, *Rekursive Verfahren*, Ein problemorientierter Eingangskurs, Materialien für die Sekundarstufe II, Mathematik, Schroedel Hannover 1978, 105 blz., DM 10,80.

Het boek behelst een grote hoeveelheid systematisch gerangschikte problemen die met behulp van recursie opgelost kunnen worden. Om er enkele uit de veelheid te noemen: bewijzen door middel van volledige inductie, Fibonacci getallen, aantallen wegen in een twee- of driedimensionaal rooster, verdelen van gewichten, op hoeveel manieren kan men alle brieven in een verkeerde envelop doen. Om kort te gaan, de liefhebber van puzzels herkent veel dingen waar hij zich reeds mee beziggehouden heeft.

Voor de leerlingen kan het een erg aantrekkelijk boekje zijn, vooral door de vaak heuristische benaderingswijze van de problemen. Voor schoolbibliotheken is het zeer geschikt. Leerlingen worden erdoor tevens geprikkeld tot zelfwerkzaamheid door de vele aardige opgaven die het boek bevat. Zoals de lezer in de recreatierubriek kan zien, heeft het boekje me tot een tweetal opgaven geïnspireerd.

P. G. J. Vredenduin

The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers Volume One, *Selected Papers on Precalculus*. Edited by Tom M. Apostol, Gulbank D. Chakerian, Geraldine C. Darden, John D. Neff: published by The Mathematical Association of America, 1977, XVII + 469 blz., £16.95.

Mrs. Carol Ryrie Brink, de weduwe van Prof. Raymond W. Brink, heeft een belangrijk bedrag geschonken aan de Mathematical Association of America. Dit bedrag heeft men bestemd voor het doen verschijnen van een serie publikaties, de Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers, waarvan dit boek het eerste deel is.

De inhoud bestaat uit een groot aantal (180) herdrukken van artikelen uit American Mathematical Monthly (vol. 1-81) en Mathematical Magazine (vol. 1-49).

Een gering aantal van deze artikelen begeeft zich op didactisch terrein. De grote meerderheid is van

wetenschappelijke aard, maar staat wel in min of meer direct verband met de schoolwiskunde. Men vindt artikelen over getallentheorie, algebra, goniometrie, synthetische en analytische meetkunde. De logica ontbreekt.

Wat men met een dergelijk boek kan doen, is in hoofdzaak erin grasduinen. Men vindt dan talrijke aardige stukjes, waarbij uiteraard subjectief gebonden is wat men aardig vindt. Zelf heb ik bijv. met veel belangstelling gezien hoe in de jaren twintig hoogleraren worstelden met de betekenis van volledige inductie en hoe ze dingen over oneindig konden poneren waar men tegenwoordig van zou rillen. En die toch de moeite van het lezen wel waard zijn. Ook de rubriek recreatie is dankzij dit boek weer een aardige opgave rijker geworden.

We mogen mevrouw Brink dankbaar zijn, dat ze het mogelijk gemaakt heeft een dergelijk aardig boek voor een zo lage prijs verkrijgbaar te doen zijn.

P. G. J. Vredenduin

Mededelingen

Themadag/Jaarvergadering, zaterdag 27 oktober 1979

'Het zijn de dagelijkse dingen die het hem doen'

Huishoudelijk gedeelte

Inleiding over het motto van de dag

Werken in kleine groepen, na 'n korte inleiding per groep.

- 1 Proefwerk teruggeven en bespreken
- 2 De geodriehoek
- 3 Merkwaardige produkten
- 4 Kleine lokale redeneringen
- 5 Blickwisseling.

Pauze

Lezing

Werken in groepjes aan een van de thema's

Rondvraag

De themadag wordt verzorgd door de didactiek commissie van de N.V.V.W.



LERAREN COLLOQUIUM 1979/180

Dit cursusjaar zal, conform de beslissing van de betreffende commissie het onderwerp van het leraren-colloquium binnen de theorie van de *eindige groepen* vallen. In het navolgende wordt de geplande inhoud in het kort geschetst.

Een stel permutaties van een gegeven eindige verzameling met de eigenschap dat de compositie van ieder tweetal weer tot dat stel behoort, vormt een groep, een zg. permutatiegroep. Volgens een stelling van Cayley is iedere eindige groep voor te stellen als zo'n permutatiegroep. Er zijn echter ook andere manieren om de eindige groepen te benaderen. Zo kan een willekeurige groep ook voorgesteld worden als groep van lineaire transformaties van een (complexe) vectorruimte (en dus als groep van matrices). In het eerste deel van het colloquium zal het begrip groep aan de hand van beide voorstellingswijzen geïntroduceerd worden. In het tweede deel worden (recente) ontwik-

kelingen in de richting van een classificatie van alle eindige groepen terloops aangestipt. De nadruk zal liggen op de zg. Sylowstellingen die bij een gegeven groep uitspraken doen over existentie (en zelfs aantallen) van ondergroepen ter grootte van een priemmacht. Het ligt in de bedoeling de betrokkenen via enkele voorbeelden in het laatste deel van het colloquium te laten proeven hoe de groepentheorie en de discrete wiskunde op elkaar inwerken. Het colloquium zal een inleidend karakter dragen. De benodigde voorkennis zal ongeveer neerkomen op die van de permutaties en de matrix-rekening.

Over tijd, plaats en datum van aanvang kan men telefonisch inlichtingen verkrijgen bij het Mathematisch centrum, tel. 020-947272, toestel 76.

Mededeling van de penningmeester

Op de laatste jaarvergadering is besloten de contributie voor de vereniging te verhogen. Deze bedraagt voor 1979-1980: voor gewone leden f 40.-, voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL: f 27.- en voor leden, die Euclides niet via de vereniging ontvangen f 20.-.

Mededeling van de secretaris

Wij ontvingen onderstaande aankondiging van het vierde Internationale Congres over Wiskunde Onderwijs, dat van *10 tot 16 augustus 1980* aan de Universiteit van Californie te Berkeley gehouden zal worden. Deze vierjaarlijkse congressen zijn een unieke gelegenheid om kennis te nemen van gedachten die over de gehele wereld leven over het wiskundeonderwijs en om kennis te maken met buitenlandse collega's.

Evenals bij vorige congressen wil het bestuur uit het Fonds Eigen Publicaties leden, die dit congres zullen bezoeken een tegemoetkoming in de kosten geven. Het zal hier gaan om een bedrag van f 300.- à f 500.- gulden. De grootte van het bedrag zal afhangen van het aantal leden, dat van deze gelegenheid gebruik wil maken.

Deze leden worden verzocht zich (in principe) bij de secretaris J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag op te geven *uiterlijk drie weken na verschijning van deze mededeling*.

4th INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION

You are invited to participate in the 4th International Congress on Mathematical Education. The Congress offers participants an opportunity to become better informed about current issues and developments in mathematical education at all levels. There will be many scheduled and unscheduled, informal events so that participants may gain from personal contacts.

The official Congress languages are English, Spanish and French. At all times, simultaneous translations of at least one session, including plenary sessions, will be available.

A report of the proceedings of the Congress will be sent to all Full Members.

The participation fee for Full Members will be listed in the Second Announcement. There will be a lesser fee for Associate Members (accompanying a Full Member but not taking part in the work of the Congress). These fees include a choice of planned excursions and culture events. Optional excursions and activities will be at extra cost. The fee will NOT include travel, accommodations, or board.

Those interested in participating should complete the attached form 'Request for Information' and return it to the official Congress address:

ICME IV
Mathematics Department
University of California
Berkeley, CA 94720 USA

The Second Announcement and applications for registration and accommodations will be sent respondents in December.

Communications should be mailed to the official Congress address. Mark 'ATTN: PROGRAMM' on requests about program. Mark 'ATTN: LOC' on requests concerning exhibits, special interest groups, and local conference operations.

Programs

The scientific program will examine a broad spectrum of problems in mathematical education at all levels and for every variety of learner. Special emphasis will be given to questions of universal primary education, of research, technology, applications, the profession of teaching, and the relationship of language and mathematics. Preliminary plans include four plenary session invited addresses, at least fifteen other main invited speakers (1 hour each) and about sixty panels and debates (1 to 2 hours). Many of the main speakers will be followed by a panel on the same topic. There will be about twenty 3-lecture series (called 'miniconferences') on individual topics. Of special interest are proposed miniconferences in honor of the late Edward G. Begle on critical variables in mathematical education, and several expository series on topics which have become so fundamental, applicable, and pedagogically accessible that they could be considered worldwide for inclusion in the mathematics curriculum.

Short Communications

Following the pattern of the Third Congress, at Karlsruhe, participants are invited to present short communications via 'Poster Sessions', where papers selected for presentation can be displayed and authors will be available for discussion. Posters may be submitted on all topics; especially solicited are posters on teaching mathematics to the handicapped and on problems and curricula in mathematical education in the participating countries. Details will be in the Second Announcement.

Projects

Selected research and development projects in mathematical education throughout the world will be invited to make presentations.

Exeter Working Groups and Karlsruhe Study Groups

Existing working and study groups will be given the opportunity to meet, to continue their work, and to tie in with the rest of the program.

National and International Organizations and Journals

Meetings for national and international organizations of mathematics teachers and for editors of mathematical education journals will be scheduled during the Congress.

Films

Presentations of mathematical films are being organized. Forward your recommendations (NOT the films) to the official Congress address, marked 'ATTN: FILMS'.

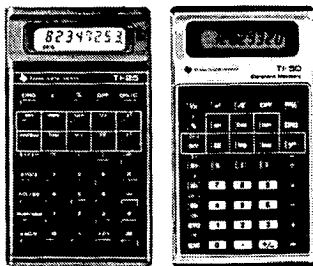
Exhibitions

Publishers and firms producing teaching aids for mathematical education may present their books and materials. Teacher-made and student-made mathematics exhibits will also be displayed.

(zie ook p. 40).

request for information (please print or type)			demande de renseignements (remplir en caractères d'imprimerie)			solicitud de informacion (por favor use letras de imprento)		
(title) (titre) (título)			(family name) (nom) (apellido)			(given name) (prénom) (nombre)		
postal address-adresse postal-dirección postal			for second announcement, please check para segundo anuncio, por favor marque pour recevoir le second announcement cocher. française language-langue-idioma			levels of interest-centres d'intérêt-		
(country) (pays) (pais) (code) (code) (código)			english ☐			niveles de interes:		
institutional affiliation-affiliation			español ☐			elementary-primaire-primaria		
institutinelle-affiliation institucional			française ☐			secondary-secondaire-secundaria		
						college-lycée-universitaria		
						teacher training-formation		
how many family members will probably accompany you?-prevision du nombre de membres de votre famille qui vous accompagneront?- cuantos miembros de su familia lo acompanarian?						d'enseignant-entrenamiento de profesor		
						supervision-direction-supervisión		
						university-universite-universitaria		
for planning purposes, please indicate housing preference. (this is <i>not</i> a commitment.) daily rates are for room only-pour nous aider dans l'organisation, indiquer le type de location préférée (ceci n'est par un engagement.) les taux journaliers sont pour la chambre seulement- para efectos de planificacion, por favor indique su preferencia en alojamiento (sin compromiso.) las tarifas diarias son solo por la pieza.								
☐ (\$10) dormitory dortoir dormitorio		☐ (\$20-35) hotel standard hotel standard hotel standard		☐ (\$40-60) hotel superior hotel supérieur hotel superior		☐ (\$60-100) hotel deluxe hotel de luxe hotel de lujo		
other (specify)-autre type (spécifier)-various (especificque)								
not a registration form-send no money-ceci n'est pas une inscription-ne pas envoyer d'argent-no envie dinero, esto no es un formulario de inscripcion								

Gefeliciteerd. U hebt uw leerlingen betaalbaarder handreken- machines bezorgd.



adviesprijs TI-25 f 89,- incl. BTW
adviesprijs TI-50 f 105,- incl. BTW

De prijsstelling van Texas Instruments handrekenmachines is zeker relatief gezien zeer concurrerend.

Wat dan ook de reden is, waarom veel scholen overgegaan zijn tot de kollektieve aanschaf van onze handrekenmachines.

Dat is zelfs in zodanige aantallen gegaan, dat Texas Instruments zich met ingang van juli j.l. een lagere marge op haar apparaten kan veroorloven.

Met andere woorden: u hebt uw leerlingen betaalbaarder handrekenmachines bezorgd. Gefeliciteerd.

Dat het bepaald niet om geringe verschillen gaat, mag blijken uit het feit dat zowel de populaire TI-25 als de TI-50 resp. dertig en vierentwintig gulden in prijs worden verlaagd. Zodat er nu adviesprijzen gelden van resp. 89 en 105 gulden per stuk. In de praktijk zullen die bedragen nog aanzienlijk lager kunnen liggen, mede in verband met de aanschaf van grotere aantallen tegelijk.

Texas Instruments verschaft u graag alle informatie. Evenals over de kwaliteiten van elk type handrekenmachine voor school- en examengebruik.

TEXAS INSTRUMENTS



Texas Instruments Holland B.V., European Consumer Division.
Laan van de Helende Meesters 421a,
1186 AL Amstelveen tel. 020-473391

INHOUD:

Plannen voor de komende jaargang	1
Joh. H. Wansink: Wat beoogt wiskobas?	2
Prof. Dr. N. G. de Bruijn: Wees contextbewust in WOT	7
G. Schoemaker: De aarde draait	13
B. Lagerwerf: Wiskunde tastbaar maken	21
J. Dompeling: Pocket calculator of computer?	25
Het IOWO in gevaar	29
A van Uden: Korrel	30
Recreatie	31
Boekbesprekingen	32
Mededelingen	37

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Technische Hogeschool, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven.

J. Dompeling, Keldercroftlaan 31, 1851 VG Heiloo.

B. Lagerwerf, Laan van Cattenbroeck 29, 3703 BH Zeist.

G. Schoemaker, De Dissel 11, 1251 ZA Laren.

A. van Uden, Robert Schumanlaan 9, 5283 KX Boxtel.

Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.