EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

54e jaargang
1978/1979
no. 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2343 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt ƒ 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ 25,–; contributie zonder Euclides ƒ 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst.

Abonnementsprijs voor niet leden ƒ33,50. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. **Tel. 050-162189.** Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

'Talig' bezig zijn met wiskunde-onderwijs

SIEB KEMME

Inleiding

Onze wiskunde-lerares had iets gezelligs over zich. Je kon van alles aan haar vragen en ze wist overal iets nieuws bij te bedenken.
We hadden net een paar weken op negatieve getallen zitten zwoegen. Optellen vermenigvuldigen, proberen te begrijpen waarom $(-1) \times (-1)$ gewoon weg niets anders kàn zijn dan 1. 'Schrijf er maar eens een opstel over', zei ze aan het eind van de zoveelste les. We mochten er meteen aan beginnen. Ze liep rond en gaf allerlei aanwijzingen, maar toch bleef het je eigen opstel. Een week later werden er natuurlijk een stel voorgelezen. Als er iets niet duidelijk was, moest je het helemaal zelf uitleggen. Nou ja, ze hielp wel een beetje. Vrijdagsmiddags, aan het eind van het laatste uur, las ze voor. Uit: Het taaie ongerief, van Theo Thijssen. Dat had gelukkig niks met negatieve getallen te maken.

Het is echt gebeurd. In 1957, mijn eerste klas op de HBS. Het is het beste voorbeeld van 'talig' met wiskunde-onderwijs bezig zijn dat ik ken. Het is me altijd bijgebleven, zonder dat ik nu precies wist te omschrijven waarom. In de loop van de tijd heb ik nog wat van dergelijke ideeën verzameld. Bovendien kwamen er geleidelijk aan wat theoretische argumenten naar boven drijven die een rechtvaardiging zouden kunnen zijn van talig bezig zijn. Ik zal met de ideeën beginnen en daar stiekum de argumenten wat doorheen vlechten. Misschien hebt u aan die ideetjes al genoeg.

Suggesties

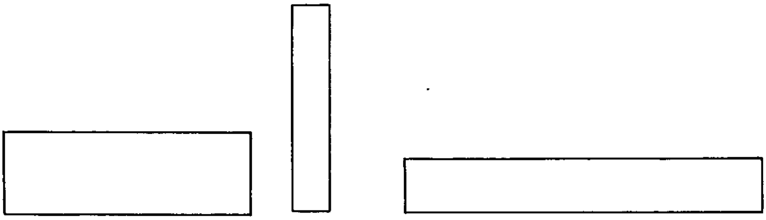
Het 'opstel'-idee kun je natuurlijk niet iedere week uitvoeren. Ook zijn niet alle onderwerpen even geschikt. Bovendien hangt veel ervan af hoe je met een onderwerp bent bezig geweest. Leerlingen moeten op zijn minst enig houvast hebben aan je uitlatingen om er over te kunnen schrijven. Het hele gebeuren moet voor hen de moeite van het opschrijven waard zijn. In het maken van huiswerksommen zal niemand veel inspiratie voor een opstel kunnen ontdekken.

Denk eens aan het woord 'gelijkvormig'.

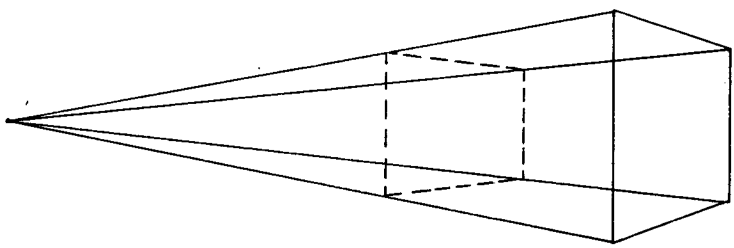
We kennen allemaal:
- twee driehoeken heten *gelijkvormig* als ze gelijke hoeken hebben.

Gevolgd door:
- laat zien dat $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig zijn, waarbij die driehoeken op één of andere manier meetkundig gegeven zijn.

Het woord 'gelijkvormig' wordt hier wel erg bruut van haar gebruikelijke betekenis ontdaan. Let maar eens op de radeloze gezichten van de leerlingen als



ineens niet meer 'gelijk'-vormig blijken te zijn. ('Het zijn toch allemaal rechthoeken?') Het woord is niet meer wat het was: gelijk van vorm.
Wat kun je daar aan doen? Heel veel.
Leen eens een vergrotingsapparaat van je natuurkundekollega. Of maak schaduwen op de muur met een zaklataarn. Of doe het met touwtjes. Dan kun je ook verkleinen.



Laat ze de vergrotingsfaktoren bepalen van 'gelijk'-vormige kartonnen figuren door ze te laten opmeten. Dan zie je vanzelf dat je voor 'echte' gelijkvormigheid, in alle richtingen evenveel moet vergroten (of verkleinen). (Laat ze wel eerst zèlf die figuren uitknippen).
Wordt het zo'n toestand in de klas? Probeer dan wat te sturen met behulp van opdrachten in een bepaalde volgorde.

Wist u dat de bladeren aan de boom bij benadering gelijkvormig zijn? Uw biologiekollega zal u dankbaar zijn voor deze toepassing.

Al die aktiviteiten over gelijkvormigheid laten zich prima 'talig' begeleiden:
* vraag leerlingen om hun ervaringen van tijd tot tijd op te schrijven,
* laat 'ontdekkingen' uitleggen voor de hele klas,
* vraag om een zelfstandig samenvattend eindverslagje,
* maak eventueel zèlf een aantal begeleidende vragen die uitnodigen tot taal. Die vragen hoeven niet altijd strikt wiskundig te zijn. Samenwerkingsproblemen, plezier en teleurstelling zijn heel belangrijk bij het leren, ook bij wiskunde.

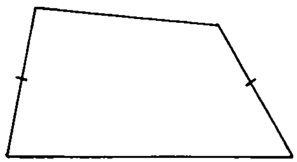
- Hoe groot is $a - \frac{1}{2}a\sqrt{3}$?
* $a(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$
- En hoe groot is dàt?
* ??
- Hoe groot is $\sqrt{3}$?
* Ongeveer 1,6.
- Dus $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is?
* Ongeveer $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
- Dus hoe groot is $a - \frac{1}{2}a\sqrt{3}$?
* Ongeveer $0{,}2 \times a$.

Dergelijke dialogen laten zich gemakkelijk uitbreiden tot allerlei andere afschattingsaktiviteiten.
Afschattingsaktiviteiten zijn erg 'talig'. Iedere afschatting vraagt haast vanzelf om een verantwoording en iedere verantwoording is, in verband met de nauwkeurigheid, weer aanvechtbaar.
Zie bijvoorbeeld:
- Hoe groot is $\sqrt{3}$?
* Tussen 1 en 2.
- Dus 1,1?
* (Stilte) Nee groter.
- 1,9?
* Dat is te groot.
- Waarom?
* $(1{,}9)^2$ is groter dan 3.
- Geef dan eens iets beters.
* (Gereken) Tussen 1,6 en 1,7.

Je zou deze diskussie kunnen besluiten met:
- Schrijf eens op hoe je wortels uit getallen kunt berekenen.

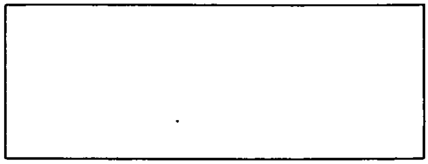
Door het vraag en antwoord karakter van het afschatten, leren leerlingen de problemen met hun eigen taal te lijf te gaan.

Dergelijke bewerings- en weerleggingsdialogen kun je ook oproepen bij definitieproblemen:
- Vertel eens wat een vlieger is.
* Twee zijden zijn gelijk.
- Dus dit is een vlieger?



* Nee, de andere zijden moeten ook gelijk zijn.

- Dus dit?



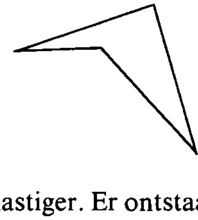
* Dat is een rechthoek en geen vlieger.
- Maar het voldoet wel aan je voorwaarden.
enzovoorts..

Op een dergelijke manier zou je wel eens op een heel andere formulering kunnen uitkomen dan je in je hoofd (of boekje) had. Die formulering geeft dan aardig weer hoe het begrip op hun niveau funktioneert. Ze zijn er misschien nog helemaal niet aan toe om een exakter geformuleerde definitie te aksepteren, eenvoudigweg omdat die exaktheid voor hen geen funktionele betekenis heeft. Ze hebben het gevoel dat je móeilijk doet op niks af. Voor hen is de taal een middel om iets aan anderen duidelijk te maken, veel minder om iets heel precies vast te leggen. (Een parm is een puntsymmetrische vierhoek.)

Je zou een dergelijke dialoogvorm kunnen opvatten als een expliciteerfase. Met de extra toevoeging dat je ze in hun eigen taal laat expliciteren, waarbij je zorgvuldig dient te waken voor imitatie.
Meestal wordt de explicitering opgevat als een eindfase van de begripsvorming, of als een soort tussenfase vanwaar uit het begrip verder wordt uitgebouwd. Soms echter kan een dergelijke dialoog een middel zijn tot de eerste begripsvorming. Sorteer- en expliciteerfase vallen dan als het ware samen. Iedere bewering (onderdeel van het expliciteren) wordt beantwoord met een tegenvoorbeeld (sorteren) of een verzoek tot nadere argumentatie of verduidelijking.

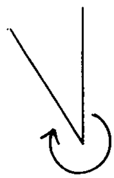
Een voorbeeld:
- De som van de hoeken in een driehoek is 180°. Hoe groot is de som van de hoeken in een vierhoek?

Leerlingen bepalen zelf hun methode van oplossen. De meeste beginnen te tekenen en te meten. Dit levert al gauw het antwoord 360° op.
- Geldt het ook voor deze vierhoek?



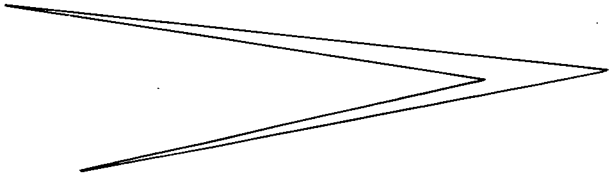
Het meten wordt nu wel wat lastiger. Er ontstaan diskussies over hoe je die rare hoek moet meten. Dit leidt tot een nadere omschrijving van het woord 'hoek' in een vierhoek.

* Je moet de hoek *in* de vierhoek meten. Sommigen vinden dat geen hoek (hij staat ook niet op je geodriehoek).
Je haalt de sekondenwijzer van de klok erbij:
- Van 0 naar 20 sekonden, hoeveel graden?
- Van 0 naar 30 sekonden?
- Van 0 naar 50 sekonden?
- En daar heb je net zo'n rare hoek.



Ze vragen zich toch nog af hoe je nu zo'n hoek zou kunnen meten.
Weer de klok erbij gehaald (met optelling):
- Van 0 naar 30 sekonden is hoeveel graden?
- Van 30 naar 50 is hoeveel graden?
- Dus totaal?
- Hoe kun je dat met je geodriehoek doen?

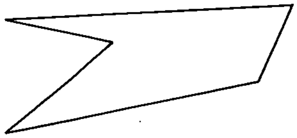
Na deze 'hobbel' genomen te hebben wordt er weer getekend en gemeten. Het resultaat voor deze andere vierhoeken is weer 360°.
- En voor deze?



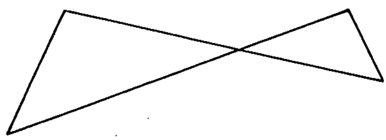
Door de extreme vorm wordt het meten nu wel erg moeilijk. Ze worden haast gedwongen naar een redenering te zoeken die niet op een meting berust. Een aanzet hiervoor kan zijn:
- Knip eens zo'n vierhoek uit en knip hem dan langs de diagonaal in twee stukken. Wat kun je nu zeggen over de som van de hoeken?

Dit geeft meteen een opening op vijfhoeken. Om te beginnen zou je de vraag heel open kunnen houden:
- Wat kun je zeggen over de som van de hoeken in een vijfhoek?

Leerlingen zullen na het voorgaande als vanzelf gaan tekenen en meten. Ze zullen zelfs gemakkelijk geneigd zijn om figuren als



in hun onderzoek te betrekken.
Ook het knipwerk kan al als een methode van onderzoek worden benut. Het zal weer het inzicht leveren waarom het resultaat 540° moet zijn.
Maar een vijfhoek als:



zal de tongen aardig los maken:
* Dat is geen vijfhoek?
- Ik zie anders wel 5 hoeken.
* Die middelste is geen hoek, dat zijn er twee.

Uiteindelijk zou een dergelijke diskussie kunnen leiden tot een preciesere formulering van de gevonden wetmatigheid en van het woord 'vijfhoek'. Voorwaarde daarvoor is echter dat je de leerlingen met hun eigen formuleringen laat werken. Dat eist nogal wat zelfbeheersing. Je hebt zelf altijd wel een formulering in je hoofd die veel en veel nauwkeuriger is dan die van je leerlingen. Die formuleringen zijn echter lang niet altijd hanteerbaar voor ze. Zolang je er niet zeker van bent dat jouw formulering voor leerlingen bruikbaar is in de diskussie, is het verstandiger die achter je kiezen te houden en je te beperken tot een 'katalyserende' funktie door het geven van tegenvoorbeelden of het stellen van vragen naar de geldigheid van een bewering.
Je kunt eraan twijfelen of het nut heeft om te weten dat in een samenhangende n-hoek de som van de hoeken $(n - 2) \cdot 180°$ is.
Zelf bezig zijn met het opscharrelen van regelmaat, daarbij voortdurend twijfelen aan je eigen bevindingen en formuleringen, en die bevindingen/formuleringen kunnen verdedigen, zijn (wiskundige) aktiviteiten waarvan het nut, althans voor mij, boven iedere twijfel verheven is.
Het zal duidelijk zijn dat je zoiets alleen maar voor elkaar krijgt in de eigen omgangstaal van de leerlingen.

Overgestruktureerde werkbladen, die de aktiviteiten beperken tot het invullen van tabellen en waarvan de slotopdracht bestaat uit het opschrijven van een formule, dragen net zo weinig bij tot de wiskundige vorming als het maken van teveel vektormeetkunde sommen voor het eindexamen. Dergelijke wiskunde reduceert leerlingen tot automaten, die zwijgend en in eenzaamheid sommen en opdrachten verwerken tot uitkomsten.
Dat betekent niet dat dergelijke sommen en opdrachten volstrekt nutteloos zijn. Ze zijn soms heel geschikt voor het inoefenen van een aantal zaken en voor (zelf)kontrole. Selekteer die opgaven dan ook op die funkties. Zorg ervoor dat die funkties ook voor leerlingen duidelijk zijn (niemand vindt het prettig om werk te doen waarvan de zin hem/haar volledig ontgaat). Misschien maak je het dan nog eens mee dat leerlingen zelf komen vragen om oefenmateriaal.

Eventjes iets heel anders. Vertel eens iets over de geschiedenis van een wiskundige term. Waar komt het woord vandaan? Hoe zit het in elkaar (*in*-houd, *op*-pervlakte, *om*-trek, *op*-tellen, *af*-trekken, even-wijdig). Wie maakt er eens een lijst van termen met hun geschiedenissen erbij? Of bestaat die lijst al?

Wat te doen met spel- en stel-fouten in wiskundig werk?
Verbeteren met een rood potlood en de rest aan je kollega van Nederlands overlaten? Misschien vindt die dat verbeteren wel volmaakt overbodig. Geen aandacht aan schenken? Dan weet je tenminste zeker dat er helemaal niets zal veranderen. Vooral als je daaraan nog toevoegt dat leerlingen in de wiskunde-les nauwelijks gemotiveerd zijn voor het korrekt gebruik van hun moedertaal. Bij de lessen Nederlands zijn ze er misschien op gespitst om het goed te doen. Hun leraar eist het daar toch van ze, ze worden er toch op beoordeeld? Waarom zou je het bij wiskunde ook nog eens proberen goed te doen? Je hebt wel wat anders aan je hoofd! Wat er uit die lastige som komt, bijvoorbeeld.
Je hebt met het onderwijs als geheel veel bereikt als leerlingen hun taal kunnen gebruiken, in de meest uiteenlopende situaties. Als de taal geen belemmering meer is om je in de wereld om je heen te kunnen handhaven, als het een bruikbaar instrument is om je gedachten en gevoelens te kunnen uiten. Dat betekent dat je ook in andere vakken als Nederlands, eisen moet durven stellen aan taalgedrag. Onderling overleg, over aanpak en beoordeling, tussen vakleraren en moedertaal-leraren, is hiervoor zeer noodzakelijk.

Maar er is ook een ander aspekt van taalgedrag waarop je als leraar attent kunt zijn.
Een voorbeeld:
'Een leerling schrijft: $3(x + 2)^2 - 12$ is volkomen gelijk aan $3x^2 + 12x$.' (Zie: J. S. ten Brinke, Euclides 45,9.)
Als wiskunde leraar denk je al gauw: 'Wat een onzin. Het woordje volkomen is hier volkomen overbodig. Het levert helemaal geen bijdrage aan de wiskundige inhoud. Trouwens, een gelijkteken was nog meer op zijn plaats geweest.' Er is hier nu eens geen sprake van een spel- of stel-fout. Toch ben je geneigd het taalgedrag te bekritiseren. Daarbij hanteer je louter wiskundige overwegingen van efficiëntie. Ten Brinke karakteriseert deze situatie met: er is een verschil tussen feitelijke inhoud en bedoelde inhoud. De feitelijke inhoud is de wiskundige gelijkheid van de twee formules. De bedoelde inhoud zou kunnen zijn: in alle omstandigheden levert de linkervergelijking hetzelfde resultaat op als de rechter. Een leerling die dat bedoelt, dien je ook als wiskunde leraar te feliciteren. Afkeuren van de bewering op overwegingen van zakelijkheid en efficiëntie, zou het gebruik van de dagelijkse omgangstaal binnen de wiskunde in een voortijdig stadium kunnen blokkeren. Het onderscheid tussen feitelijke en bedoelde inhoud is nogal kunstmatig, zoals we aan dit voorbeeld kunnen zien. Het komt voort uit een verschil aan interpretatie. Bij feitelijke inhoud van de bewering wordt alleen aandacht geschonken aan de logische waarde van die bewering (het waar of niet-waar zijn). De 'bedoelde inhoud' heeft betrekking op de intentie van de spreker in de gegeven omstandigheden. Die twee sluiten elkaar niet uit. In heel bepaalde omstandigheden (bijvoorbeeld in wiskundige publicaties) kan de schrijver de bedoeling van een logische bewering hebben, omdat de waarheid daarvan een onderdeel is van zijn verdere betoog. In dat

geval vallen de bedoelde en de feitelijke inhoud samen.
In het onderwijs van iedere dag zal dat over het algemeen niet het geval zijn en zal de duidelijkheid van de taal met betrekking tot de bedoelingen van de spreker, vooral een kriterium voor beoordeling moeten zijn. (Een extreem voorbeeld. Mijn dochtertje roept meestal als ik haar wil kietelen: 'Niet doen, nog een keer.') Komen de bedoelingen van de spreker goed over? Of is er nog ruimte voor interpretatie. Is die ruimte te wijten aan een gebrekkige formulering of komt die voort uit de gegeven omstandigheden. Als een leerling zegt: 'Een funktie is kontinu, als je de grafiek kunt tekenen zonder de pen van het papier te nemen', is die formulering taalkundig korrekt, de wiskundige inhoud is natuurlijk onduidelijk, maar is een goede weerspiegeling van de omstandigheden van de leerling.

Samenvattend

- Talig bezig zijn met wiskunde is meer dan alleen maar opdrachten uitvoeren met een taal-achtig karakter. Het is op een andere manier met wiskunde bezig zijn, waarin je ervaringen laat verwoorden, voor zichzelf en voor elkaar, zodat die ervaringen een basis kunnen worden om mee verder te werken.

- Veel talige aktiviteiten hebben het karakter van een dialoog, waarin de ene bewering de andere uitlokt. Bereidheid tot luisteren en de wil om iets voor anderen duidelijk te formuleren dienen hiervoor aanwezig te zijn. Beter luisteren en beter formuleren zal worden gestimuleerd als je het taalgedrag bekijkt op bedoelde duidelijkheid (in tegenstelling met inhoudelijke duidelijkheid).

- Daarnaast zijn er aktiviteiten met een samenvattend, expliciterend karakter. Bijvoorbeeld het maken van een opstel of een eindverslag. Ook de woordverklaringen hebben een dergelijk karakter.

Het verstandige aantal decimalen van een onnauwkeurig getal

THEO KRISTEL

Dit artikel is een verdieping van het artikel 'Rekenen met onnauwkeurige getallen', dat in het mei-nummer is verschenen. Organisch hoort het tussen het het eerste en tweede deel van dat artikel geplaatst te worden.

Ik begin met het stellen van de vraag: 'Waarom ronden we sowieso eigenlijk af?'. Het stellen van die vraag is minder gek dan het lijkt, omdat er twee volkomen verschillende redenen voor zijn.

a. Praktisch rekenwerk doe je eigenlijk altijd via de decimale voorstelling van getallen. En als daar dan delingen of wortels in voorkomen – en dat gebeurt al heel snel – dan moet je een groot (of zelfs vaak oneindig) aantal decimalen vervangen door een hanteerbaar aantal. Er is bijna geen realistische berekening te noemen waarin je daaraan ontkomt. Vandaar de uitspraak: afronden is noodzakelijk tijdens elk praktisch rekenwerk.
Belangrijk is het om in te zien dat elke afronding in een rekenproces gepaard gaat met het introduceren van een afrondfout. Als ik bijvoorbeeld 1/3 benader door de op 3 decimalen afgeronde waarde 0,333 dan maak ik door de vervanging van 1/3 door 0,333 een afrondfout van 0,333333.... – 0,333 = = 0,000333....; een afrondfout die ik veilig kan afschatten door $0{,}4 \cdot 10^{-3}$.
Alle afrondingen, die op deze manier noodzakelijkerwijs in elk rekenproces gemaakt worden, werken door in de uitkomst, die dan ook altijd met een afrondfout behept zal zijn. Ook in het geval dat we de berekening met exakte getallen begonnen!

b. Als je aan het eind van een berekening gekomen bent, dan heb je dus meestal een einduitkomst en een foutenmarge voor die einduitkomst. Bijvoorbeeld:

$$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}14638 \cdot 10^{-4}$$

Hierin zijn zowel 1,674813422 als 0,14638 via berekening, en dus door afronding, verkregen.
We willen nu de einduitkomst meestal afronden op een kleiner aantal decimalen, omdat we vinden dat de laatste decimalen, zoals . .3422, eigenlijk geen informatie over de werkelijke waarde x dragen. De afronding van een

einduitkomst wordt ons echter niet dwingend opgelegd, zoals onder a. het geval is.

De overwegingen onder a. leiden tot een stuk wiskunde dat bekend staat onder de naam foutentheorie. Daar zal ik het nu niet over hebben. Wat me in dit stukje interesseert is de situatie die onder b. beschreven is. Want juist het ontbreken van een dwingende noodzaak tot afronden schept de mogelijkheid om verschillende afrondkriteria tegen elkaar af te wegen. Daarbij zal ik me wel beperken tot kriteria die volgen uit het principe: het verstandige aantal decimalen is het kleinste aantal decimalen dat de foutenmarge onaangetast laat.

Met opzet heb ik de foutenmarge van x in 5 cijfers opgeschreven. Ook deze foutenmarge is door berekening ontstaan. In het geval dat deze berekening in bijv. 8 cijfers uitgevoerd is, is er geen enkele wiskundige reden te bedenken waarom je op minder dan 5 cijfers zou afronden (tenzij het aantal deelberekeningen extravagant hoog is).
Toch schrijft men in de gewone rekenpraktijk slechts 1 cijfer (en dus het belangrijkste cijfer) van de foutenmarge op. De filosofie daarachter is dat een nauwkeuriger kennis van de foutenmarge toch niet belangrijk is voor de werkelijke waarde x. Maar eigenlijk zou je het doorwerken van de fouten in je beginfouten moeten schatten om te kijken hoe goed of hoe slecht je foutenmarge is. En bij toevalsgrootheden speelt ook de standaardafwijking nog een rol.

Alhoewel ik in de rest van dit artikeltje me op het standpunt zal stellen dat slechts 1 cijfer van de foutenmarge belangrijk is, zal ik toch vaak meer cijfers voor de foutenmarge opschrijven. Dat komt omdat de manier waarop je aan dat eerste cijfer komt, relevant is voor de diskussie van de afrondproblematiek. Die bepaling van het belangrijkste cijfer van de foutenmarge kan op twee voor hand liggende manieren plaats vinden.

1. Je werkt altijd naar de veilige kant, zoals ik tot nu toe in dit artikeltje gedaan heb. Dit betekent dat ik de foutenmarge $0{,}14638 \cdot 10^{-4}$ naar boven afschat (niet: afrond) en als voorlopig resultaat opschrijf:

   $$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

   Voor leerlingen is dit een heldere procedure. Want je weet nu zeker dat de foutenmarge hoogstens $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ is. Dat is de reden dat ik deze procedure tot nu toe ook gebruikt heb.
2. Je rondt de foutenmarge op 1 cijfer nauwkeurig af. Dit betekent dat ik als voorlopig resultaat opschrijf:

   $$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}1 \cdot 10^{-4}$$

   Dit is een essentieel ondoorzichtiger procedure, omdat ik nu een foutenmarge van hoogstens $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ in de foutenmarge $0{,}1 \cdot 10^{-4}$ aksepteer. Ik weet nu niet meer zeker dat de foutenmarge hoogstens $0{,}1 \cdot 10^{-4}$ is. Wel weet ik zeker dat de foutenmarge hoogstens $0{,}15 \cdot 10^{-4}$ is.

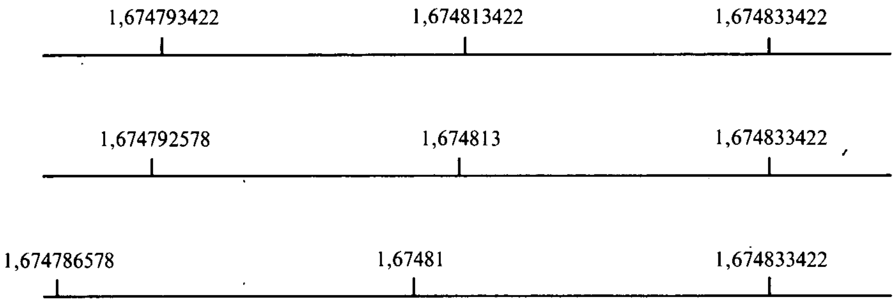
Het zal blijken dat mijn omschrijving van het verstandige aantal decimalen zich in de gevallen 1. en 2. anders gedraagt. Voor we naar dit gedrag gaan kijken ligt het voor de hand om eerst naar de invloed, die de fout t.g.v. het afronden op minder decimalen heeft op de oorspronkelijke foutenmarge, te gaan kijken. Als voorbeeld kies ik

$$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

Dit betekent dat 1,674813422 het midden is van het interval

$$1{,}674793422 \leqq x \leqq 1{,}674833422$$

Waar x in dit interval ligt weten we niet. Als de foutenmarge volgens methode 2. bepaald is kan x zelfs buiten dit interval liggen.



Als we nu bijvoorbeeld gaan afronden op 6 decimalen, dan verschuift het midden van dit interval van 1,674813422 naar 1,674813; dus over een afstand van 0,000000422 naar links. De afstand van dit nieuwe midden tot het rechtereindpunt 1,674833422 is nu groter dan de afstand van dit nieuwe midden tot het linkereindpunt 1,674793422. Vanwege onze notatie-afspraak moeten we het nieuwe interval met 1,674813 als midden dus vergroten tot

$$x = 1{,}674813 \pm 0{,}000020422$$

Afronding van de einduitkomst op minder dan 6 decimalen levert op volkomen analoge wijze het volgende rijtje op.

$$\begin{aligned}
x &= 1{,}67481 && \pm\, 0{,}000023422 \\
x &= 1{,}6748 && \pm\, 0{,}000033422 \\
x &= 1{,}675 && \pm\, 0{,}000206578 \\
x &= 1{,}67 && \pm\, 0{,}004833422 \\
x &= 1{,}7 && \pm\, 0{,}025206578 \\
x &= 2 && \pm\, 0{,}325206578 \\
x &= 0 && \pm\, 1{,}674833422
\end{aligned}$$

Dit rijtje geeft ons uitstekend zicht op de invloed van afronding op de oorspronkelijke foutenmarge $0{,}2 \cdot 10^{-4}$. Tot en met de afronding op 6 decimalen blijft de foutenmarge ruwweg $0{,}2 \cdot 10^{-4}$. Voor de afronding op 5 decimalen weet ik het zo net nog niet. Afronding op 4 of minder decimalen zou ik zelf een ontoelaatbare vergroting van de foutenmarge willen noemen. In ieder geval hebben we hier duidelijk een precisering gevonden van de opmerking dat de laatste decimalen eigenlijk geen informatie over de werkelijke waarde x dragen.

In het geval dat de foutenmarge volgens methode 1. bepaald wordt, is het absoluut niet duidelijk wanneer de foutenmarge $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ ontoelaatbaar aangetast wordt. Als je erg principieel bent kun je zelfs beargumenteren dat je geen enkele aantasting van de foutenmarge meer wenst, omdat deze door het afschatten naar boven al voldoende aangetast is. Dus: niet afronden.
Veronderstel dat we wat minder principieel willen zijn, en wel enige aantasting van de foutenmarge willen toelaten. Hoever moeten we dan met deze aantasting gaan?
Een redelijke interpretatie lijkt: het eerste cijfer van de foutenmarge moet onaangetast blijven. Maar pas op! Want als je afrondt op 8 decimalen, dus

$$x = 1{,}67481342 \pm 0{,}20002 \cdot 10^{-4},$$

dan moet je (volgens methode 1.) weer veilig naar boven afschatten, zodat je dan krijgt

$$x = 1{,}67481342 \pm 0{,}3 \cdot 10^{-4}$$

waardoor het eerste cijfer van de foutenmarge toch aangetast is.
Ook bij deze redelijke interpretatie van 'aantasting van de foutenmarge' vinden we dat afronden niet mag!
Dit gekke resultaat heb je echter verkregen omdat je feitelijk twee maal achter elkaar de foutenmarge nogal ruw hebt afgeschat. Want als je uitgaat van de oorspronkelijke waarden

$$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}14638 \cdot 10^{-4}$$

dan volgt uit onderstaande serie afrondingen van de einduitkomst

$$\begin{aligned}
x &= 1{,}67481342 && \pm\, 0{,}14640 \cdot 10^{-4}\\
x &= 1{,}6748134 && \pm\, 0{,}14660 \cdot 10^{-4}\\
x &= 1{,}674813 && \pm\, 0{,}15060 \cdot 10^{-4}\\
x &= 1{,}67481 && \pm\, 0{,}18060 \cdot 10^{-4}\\
x &= 1{,}6748 && \pm\, 0{,}28060 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

dat we op 5 decimalen mogen afronden alvorens we de veilige marge van $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ overschreiden.
De konklusie is onontkoombaar: als je methode 1. wilt hanteren voor het bepalen van de uiteindelijke foutenmarge, dan is het sterk aan te bevelen om de einduitkomst af te ronden vanuit de meercijferige foutenmarge tot je net onder de veilige bovengrens hiervan aangekomen bent. Pas daarna schat je de foutenmarge zelf af.

In het geval dat de foutenmarge volgens methode 2. bepaald wordt, zoals bij de overgang van

$$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}14638 \cdot 10^{-4}$$

naar

$$x = 1{,}674813422 \pm 0{,}1 \cdot 10^{-4},$$

waarbij we zeker weten dat de foutenmarge hoogstens $0{,}15 \cdot 10^{-4}$ is, dan ligt een natuurlijke interpretatie van wat toelaatbaar is erg voor de hand: je mag afronden tot de nieuwe foutenmarge de grens $0{,}15 \cdot 10^{-4}$ gaat passeren. Via onderstaand rijtje

$$x = 1{,}674813 \pm 0{,}10422 \cdot 10^{-4}$$
$$x = 1{,}67481 \pm 0{,}13422 \cdot 10^{-4}$$
$$x = 1{,}6748 \pm 0{,}23422 \cdot 10^{-4}$$

kun je dan gemakkelijk nagaan dat je dan (toevàllig?) ook uitkomt op 5 decimalen.

Maar nu schijnt er een nieuw probleem te rijzen. Want als ik was gaan afronden vanuit de meercijferige foutenmarge (zie het vorige rijtje) dan had ik na 7 decimalen al de $0{,}15 \cdot 10^{-4}$ gepasseerd. Volgens mij is dat echter geen terechte argumentatie (in tegenstelling tot die voor methode 1.) omdat die grens van $0{,}15 \cdot 10^{-4}$ is ontstaan omdat we het nodig achtten om op het eerste cijfer van de foutenmarge af te ronden. In het geval dat je meer cijfers van de foutenmarge belangrijk vindt, dan kun je voor die meer cijfers weer kiezen tussen methode 1. en 2..
Voor de rest van dit artikel moet ik een keuze doen. Mijn persoonlijke keuze, die ik nu niet wil beargumenteren, is methode 2..

Voor diegenen onder U, die door het bovenstaande verhaal opnieuw aan het denken gezet zijn over afronden, heb ik een aantal vragen bij elkaar gezocht uit de folklore rond dit onderwerp.

- Als je 1,6748 om welke reden dan ook op 2 decimalen wil afronden, dan gebruik je traditioneel de regel: omdat $48 < 50$ wordt 1,6748 dus 1,67.
  Soms zie je dat men afrondt in 2 stappen: omdat $8 \geqq 5$ wordt 1,6748 dus 1,675, en omdat $5 \geqq 5$ wordt 1,675 dus 1,68.
  Waarom denkt U dat de eerste methode geprefereerd wordt?

- Een andere manier om decimalen uit een getal weg te halen is gewoon afkappen: als ik 1,6748 op 3 decimalen afkap krijg ik 1,674.
  Waarom denkt U dat men waar mogelijk liever afrondt dan afkapt?
  Wat heeft dit met methode 1. uit dit artikel te maken?

- Als statistici grote hoeveelheden getallen moeten (of willen) afronden gebruiken ze de regel: als het laatste cijfer een 5 is wordt er afgerond naar het dichtsbijzijnde even cijfer.
  Bijvoorbeeld: 1,6735 wordt 1,674; 1,6745 wordt 1,674; 1,6755 wordt 1,676; 1,6765 wordt 1,676.
  Waarom denkt U dat statistici de gewone afrondprocedure niet goed genoeg vinden?

- Op basis van onze intervalinterpretatie van (onnauwkeurige) getallen geldt de volgende gelijkheid van verzamelingen:

  $3{,}1 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-2} = 3{,}10 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-2}$

  Toch zegt men vaak dat je in het op 2 decimalen afgeronde getal 3,10 de 0 niet zo maar mag weglaten en 3,1 neerschrijven. Hoe zit dat nu?

POSITIE IOWO IN DISCUSSIE

Zoals u bekend zal zijn, is de positie van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO, met de afdelingen wiskobas, wiskivon en onderwijscomputercentrum) reeds geruime tijd in discussie.
Na langdurige onderhandelingen tussen de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO), departement en IOWO, leek het erop alsof de continuering van de zorg voor het wiskundeonderwijs redelijk gewaarborgd was, ook al zou het aspect van de leerplanontwikkeling geleidelijk overgedragen dienen te worden aan de SLO.
Recente beleidsmaatregelen maken deze continuering onmogelijk. Niet alleen wordt het IOWO als institúút opgeheven, ook de effectuering van activiteiten ter ondersteuning van duizenden onderwijsgevenden en hun leerlingen wordt per 1 augustus 1979 geliquideerd.
De medewerkers van het IOWO wensen zich vooralsnog niet neer te leggen bij de beleidsuitspraak van de staatssecretaris. Ze voelen zich moreel aan het Nederlandse onderwijs verplicht het IOWO-werk in stand te houden, want mét het IOWO

- verdwijnt de ontwikkeling van wiskundeonderwijs, waarvan – zo blijkt uit aktuele toetsgegevens – met name kinderen in achterstandsituaties in belangrijke mate profiteren;
- verdwijnen de innovatieve en responsieve kanalen van het IOWO (wiskobasbulletin, wiskrant, oculair) zonder dat er alternatieven zijn;
- verdwijnt de in acht jaar opgebouwde know-how;
- verdwijnt een goed lopend instituut, met internationale bekendheid.

Niet alleen de penibele situatie van hun eigen instituut, maar vooral ook de intentie vanwaaruit de beleidsuitspraak ontspringt: de splitsing in de Nederlandse onderwijsstructuur in 'modelbouw' en 'invulling', verontrust hen in hoge mate.

De IOWO-medewerkers, Tiberdreef 4, Utrecht, tel. 030 - 61 16 11.

Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften

JOH. H. WANSINK

Het jongste nummer van de *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, uitgave van Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, is gevuld met een serie bijdragen ter ere van *Heinrich Behnke*, emeritus-hoogleraar aan de universiteit van Münster, die op 9 oktober 1978 zijn tachtigste verjaardag vierde. Door zijn voorzitterschap van de CIEM in de jaren 1950-1954, waarin het vierjaarlijkse mathematisch congres in Amsterdam tot stand kwam, heeft Behnke's naam ook onder Nederlandse leraren een kwart eeuw geleden bekendheid gekregen. Ook wijzen we er op, dat het Behnke was, die in het begin van de vijftiger jaren, samen met Walter Lietzmann en Wilhelm Süss, de Semesterberichte tot stand bracht.

Horst Tietz opent in het jongste nummer de artikelenreeks met een chronologisch geordende serie citaten van de hand van Behnke zelf, onder de titel '*Im Herbst des Lebens*'. Hans-Georg Steiner levert een historische bijdrage '*Zur Geschichte der Lehrplanentwicklung für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe* (1810-1945)'. Verder dragen tot de bundel bij de auteurs: Pickert, Kirsch, Griesel, Brüning, Spallek, Bigalke en Börger.

Steiner's historisch overzicht bevat tal van gegevens, die ook menig wiskundeleraar hier te lande kunnen interesseren, omdat ze prikkelen tot een vergelijking van ontwikkelingen ginds en hier. 'Schulpflicht' dateert in Pruisen reeds vanaf het jaar 1717!
Aan de orde komen in Steiner's artikel de 'Humboldtsche Reformen' uit het eind van de achttiende eeuw, de invoering van het abituriëntenexamen voor de gymnasia in 1788, de eerste plannen voor een gymnasiale onderwijswetgeving van Süvern in 1812. Toegelicht wordt dat de reorganisatie in de geest van Humboldt en Süvern niet alleen gefundeerd was in de neo-humanistische opvattingen van die tijd, maar ook in mathematisch-realistische denkbeelden zoals die in Frankrijk naar voren waren gekomen.
De verstarring van de schoolwiskunde in de tweede helft van de vorige eeuw wordt mede toegeschreven aan de invloed die in het bijzonder van de filologen uitging bij het totstandkomen van wettelijke bepalingen. De leerplannen van 1856 worden als een toonbeeld van reactionaire schoolpolitiek gekenschetst.
Steiner wijst erop, dat Realgymnasium en Oberrealschule zich over het alge-

meen bij de traditie van het humanistische gymnasium hebben aangesloten zonder dat er een aanpassing van de lesroosters vanuit modernere inzichten tot zijn recht kon komen. Steiner constateert dat de leerplannen van 1882 géén vooruitgang hebben betekend.

Het spreekt vanzelf, dan aan Klein's betekenis, aan zijn Erlanger Programm en zijn Gesetz der historischen Verschiebung, voorts aan de Meraner leerplannen, aan de IMUK(CIEM) en aan de activiteiten van de Duitse DAMNU uitvoerig aandacht wordt besteed.

Voor de Nederlandse lezer is het wellicht interessant de betekenis van een onderwijsman als Holzmüller nader belicht te zien. In ons land hebben namelijk de auteurs Derksen en De Laive zich bij de presentatie van hun schoolboeken uitdrukkelijk op het gezag van een man als Holzmüller beroepen (zie het leerboek van de stereometrie van 1906).

Als eindjaar voor zijn historisch overzicht geeft Steiner het jaartal 1945. Naar mijn mening had hier beter 1940 kunnen staan. Uit de nationaal-socialistische periode worden de jaren 1933, 1934 en 1938 genoemd, geen latere. In het eerste jaar werd de DAMNU, Duitse subcommissie van de IMUK, opgeheven 'ohne das eine Todesurkunde ausgestellt wurde', in 1934 volgt de oprichting van een Reichsministerium für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung, in 1938 wordt de schoolorganisatie van het voortgezet onderwijs in feite teruggebracht tot twee typen Oberschulen.

Het zou m.i. zinvol geweest zijn in de uitvoerige lijst van literatuurverwijzingen ook een werk op te nemen als 'Mathematik in Erziehung und Unterricht', door de bekende Lietzmann samen met ene Graf geschreven (1940), omdat de verwijzing naar een gezaghebbend werk als dit, waarin de plaats van de wiskunde in het Duitse onderwijs op nationaalsocialistische grondslag uitvoerig wordt toegelicht, de keuze van 1945 als eindpunt van zijn historisch overzicht zinvoller zou hebben gemaakt.

Voor een nadere aanduiding van de plaats die de Semesterberichte in onze didactische literatuur innemen volsta ik met een verwijzing naar mijn opmerkingen erover in *Euclides* 51, p. 368-370.

Nog steeds staat de inhoud ervan vakwetenschappelijk op hoog niveau, maar heeft doorgaans in veel sterkere mate betrekking op de problematiek van de universitaire propaedeuse en op de nascholing van de leraar dan op de didactische problematiek, zoals die hier te lande in de kringen van de NVWL meer en meer in het centrum van de belangstelling komt te staan. De Semesterberichte dragen niet voor niets de ondertitel: '*zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität*'.

Bepaling van hogere machten van sinus- en cosinus-functies met behulp van een 'halve' driehoek van Pascal

IR. J. O. DE KAT

Hogere machten van sinus- en cosinus-functies vinden een practische toepassing bij onder meer de bestudering van vervorming, welke optreedt tengevolge van een niet-lineaire overdrachtsfunctie van elektronenbuizen en transistoren. Stellen wij zo'n overdrachtsfunctie voor door een machtreeks van de n-de graad, dan zal bij sinusvormige excitatie een uitgangssignaal ontstaan, waarin de n-de macht van sinus of cosinus voorkomt, en waaruit een n-de harmonische als hoogste ontstaat. Is de overdrachtsfunctie als machtreeks bekend, dan kan hieruit de harmonischen-produktie worden berekend. Omgekeerd kunnen uit meting van de harmonischen, b.v. met een wave-analyzer, de coëfficiënten van de machtreeks worden bepaald.

Voor machten van sinus- en cosinus-functies kunnen wij in naslagwerken bijvoorbeeld de volgende formules vinden:

$$\sin^{2n-1} x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \left\{ \sin(2n-1)x - \binom{2n-1}{1} \sin(2n-3)x + \ldots \right.$$

$$\left. + \ldots + \ldots (-1)^{n-1} \binom{2n-1}{n-1} \sin x \right\}$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \left\{ \cos(2n-1)x + \binom{2n-1}{1} \cos(2n-3)x + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \binom{2n-1}{n-1} \cos x \right\}$$

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nx - \binom{2n}{1} \cos(2n-2)x + \ldots \right.$$

$$\left. + \ldots + \ldots (-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} \cos 2x \right\}$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \left\{ \cos 2nx + \binom{2n}{1} \cos(2n-2)x + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \binom{2n}{n-1} \cos 2x \right\} \qquad (1)$$

Directe afleiding van de formules voor $\sin^n x$ en $\cos^n x$ is ook mogelijk met behulp van de bekende formules uit de goniometrie:

$$\sin p \sin q = \tfrac{1}{2}\cos(p-q) - \tfrac{1}{2}\cos(p+q) \tag{2}$$

$$\sin p \cos q = \tfrac{1}{2}\sin(p-q) + \tfrac{1}{2}\sin(p+q) \tag{3}$$

Uit (2) volgt voor $p = q = x$:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x \tag{4}$$

Hierna is $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x$, hetgeen met (3) en $p = x, q = 2x$ overgaat in:

$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x \tag{5}$$

Gaan wij zo voort voor enige waarden van n, en voeren wij dit ook uit voor $\cos^n x$, dan vinden wij de volgende Fourier reeks-ontwikkelingen voor $\sin^n x$ en $\cos^n x$ ($n = 1, 2, \ldots$):

n	$\sin^n x$							
1		$\sin x$						
2	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}\cos 2x$					
3		$\frac{3}{4}\sin x$		$-\frac{1}{4}\sin 3x$				
4	$\frac{3}{8}$		$-\frac{4}{8}\cos 2x$		$+\frac{1}{8}\cos 4x$			
5		$\frac{10}{16}\sin x$		$-\frac{5}{16}\sin 3x$		$+\frac{1}{16}\sin 5x$		
6	$\frac{10}{32}$		$-\frac{15}{32}\cos 2x$		$+\frac{6}{32}\cos 4x$		$-\frac{1}{32}\cos 6x$	
7		$\frac{35}{64}\sin x$		$-\frac{21}{64}\sin 3x$		$+\frac{7}{64}\sin 5x$		$-\frac{1}{64}\sin 7x$

n	$\cos^n x$							
1		$\cos x$						
2	$\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}\cos 2x$					
3		$\frac{3}{4}\cos x$		$+\frac{1}{4}\cos 3x$				
4	$\frac{3}{8}$		$+\frac{4}{8}\cos 2x$		$+\frac{1}{8}\cos 4x$			
5		$\frac{10}{16}\cos x$		$+\frac{5}{16}\cos 3x$		$+\frac{1}{16}\cos 5x$		
6	$\frac{10}{32}$		$+\frac{15}{32}\cos 2x$		$+\frac{6}{32}\cos 4x$		$+\frac{1}{32}\cos 6x$	
7		$\frac{35}{64}\cos x$		$+\frac{21}{64}\cos 3x$		$+\frac{7}{64}\cos 5x$		$+\frac{1}{64}\cos 7x$

Hoewel correct, zullen deze methoden niet snel tot het doel leiden, terwijl van een mogelijkheid van onthouden van zulke formules geen sprake kan zijn. Toch is het mogelijk om geheel zonder uitwendige hulpmiddelen de reeksen voor $\sin^n x$ en $\cos^n x$ direct op te schrijven, wanneer van de volgende overwegingen wordt uitgegaan:

1 Begin voor $n = 2$ en $n = 3$ met afleiding uit een grafische voorstelling.

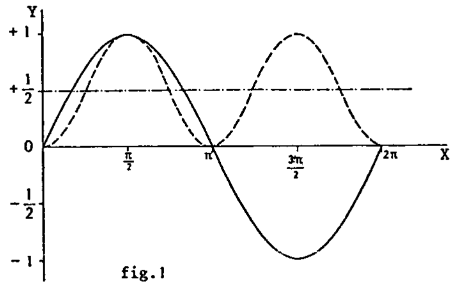


fig. 1

Wanneer wij de functie $y = \sin x$ grafisch weergeven (fig. 1, getrokken lijn), dan is hierin gemakkelijk door redenering de functie $y = \sin^2 x$ te tekenen. Immers: de nuldoorgangen van beide functies zullen samenvallen, terwijl voor $\sin x = +1$ zal gelden: $\sin^2 x = +1$, en voor $\sin x = -1$ eveneens zal gelden: $\sin^2 x = +1$, omdat $(-1)^2 = +1$. De functie $y = \sin^2 x$ slingert dus tussen nul en $+1$ met 'dubbele frequentie'; de gemiddelde waarde zal dan $\frac{1}{2}$ zijn. Zo kunnen wij uit de figuur aflezen (zie de stippellijn in fig. 1):

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

Voor het bepalen van de derde macht van $\sin x$ gaan wij weer uit van de grafiek van $y = \sin x$ (zie fig. 2, getrokken lijn), waarin wij nu de derde macht 'construeren'. De nuldoorgangen vallen weer samen, maar nu zal voor $\sin x = -1$ ook $\sin^3 x = -1$ zijn, omdat $(-1)^3 = -1$. Voorts zal overal $|\sin^3 x| \leqq |\sin x|$ zijn, omdat overal geldt: $|\sin x| \leqq 1$.

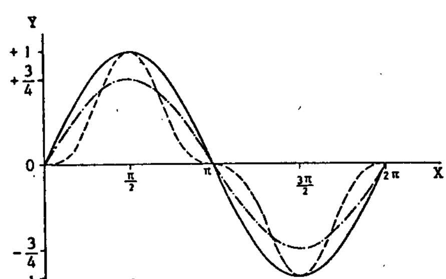


fig. 2

Aldus ontstaat de gestippelde functie in fig. 2. Deze functie zal zich nu slingeren om een gemiddelde waarde, die eveneens een sinusverloop heeft, in tegenstelling tot het vorige geval, waarin deze gemiddelde waarde gemakkelijk herkend werd als de lijn $y = \frac{1}{2}$. Nu wordt dit: $y = \frac{3}{4}\sin x$ (fig. 2, streep-stippellijn), waarbij het getal $\frac{3}{4}$ het enige is in ons gehele betoog, wat wij zullen moeten onthouden. Doen wij dit, dan kunnen wij uit de figuur gemakkelijk aflezen:

$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x.$$

Wij geven nu zonder meer de figuren, waarmee de formules voor $\cos^2 x$ en $\cos^3 x$ kunnen worden onthouden (figuren 3 en 4).

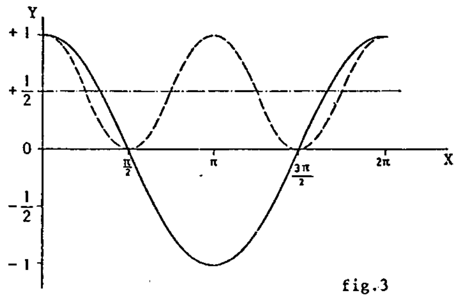


fig.3

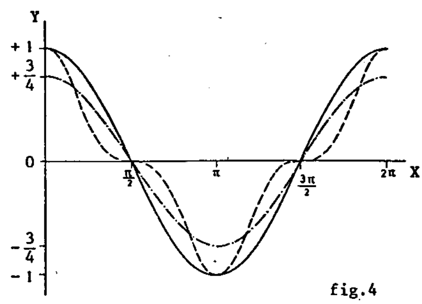


fig.4

2 Aangaande de reeksen voor $\sin^n x$ en $\cos^n x$ merken wij het volgende op:

- De n-de macht van sinus of cosinus ontwikkelt zich in een Fourier-reeks met sinussen en cosinussen, met als hoogste harmonische sin nx of cos nx. Voor $\sin^n x$ zien wij: wisselend teken; even machten geven reeksen met cosinussen, oneven machten geven reeksen met sinussen. Voor $\cos^n x$: alleen plustekens en cosinussen.
- De som van de absolute waarden der Fourier-coëfficiënten = 1. Dit volgt uit het feit, dat altijd geldt:

$$|\sin^n x| \leqq 1$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$|\cos^n x| \leqq 1$$

- Verder geldt voor de coëfficiënten, dat zij bestaan uit breuken, waarvan de tellers te vinden zijn uit een *halve* driehoek van Pascal, terwijl de noemers allen gelijk zijn aan de som van alle tellers per reeks.

Driehoek van Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

n

op deze halveringslijn komt de helft van de coëfficiënt te staan.

Vergelijk de rechter helft van deze driehoek van Pascal met de coëfficiënten van de reeks-ontwikkelingen van $\sin^n x$ en $\cos^n x$. De constanten komen van de halverings-lijn.
Met behulp van dit schema is het voor een ieder mogelijk om zonder uitwendige hulpmiddelen ogenblikkelijk iedere gehele macht van sinus en cosinus uit te schrijven. Het bewijs van de juistheid van de driehoek van Pascal hiervoor moet bij de complexe functies gezocht worden.
De coëfficiënten bij de reeks-ontwikkelingen voor gehele machten van sinus en cosinus blijken overeenkomst te vertonen met de helft van de binomiaal-coëfficiënten van Newton. Het ligt dus voor de hand om sinus en cosinus als binomium op te vatten, hetgeen mogelijk is door hen als complexe functie te schrijven:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Nu is volgens Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

waarin

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

welke getallen direct zijn op te schrijven als 'driehoek van Pascal'.
Wij passen dit toe op de complexe uitdrukkingen van sinus en cosinus.

$$\sin^n x = \frac{1}{(2i)^n}(e^{ix} - e^{-ix})^n = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(n-k)x} \cdot (-e)^{-ikx}$$

Hierin is

$$(-e)^{-ikx} = \begin{cases} -e^{-ikx} \text{ voor } k \text{ oneven.} \\ +e^{-ikx} \text{ voor } k \text{ even.} \end{cases}$$

Schrijf dit uit voor enkele waarden van n:

$n = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} e^{i(1-k)x} \cdot (-e)^{-ikx} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x.$$

$n = 2$

$$\sin^2 x = \frac{1}{(2i)^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} e^{i(2-k)x} \cdot (-e)^{-ikx} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\left\{\binom{2}{0} e^{i2x} \cdot (-e)^0 + \binom{2}{1} e^{ix} \cdot (-e)^{-ix} + \binom{2}{2} e^0 \cdot (-e)^{-i2x}\right\} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\{e^{i2x} - 2 - e^{-i2x}\} = \tfrac{1}{2} - \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{4} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

$n = 3$

$$\sin^3 x = \frac{1}{(2i)^3} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} e^{i(3-k)x} \cdot (-e)^{-ikx} =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left\{\binom{3}{0} e^{i3x} \cdot (-e)^0 + \binom{3}{1} e^{i2x} \cdot (-e)^{-ix} + \right.$$

$$\left. + \binom{3}{2} e^{ix} \cdot (-e)^{-i2x} + \binom{3}{3} e^0 \cdot (-e)^{-i3x}\right\}.$$

Wij moeten nu voor hogere machten van x steeds termen combineren, die symmetrisch liggen ten opzichte van het midden van de vorm tussen accoladen. Hiermee ontstaan dan steeds weer sinus- of cosinus-functies. Dit verklaart, waarom de 'halve' driehoek van Pascal moet worden gebruikt.

$$\sin^3 x = -\frac{1}{8i}\left[\left\{\underset{(k=0)}{e^{i3x}} + \underset{(k=3)}{(-e)^{-i3x}}\right\} + 3\left\{\underset{(k=1)}{e^{i2x} \cdot (-e)^{-ix}} + \underset{(k=2)}{e^{ix} \cdot (-e)^{-i2x}}\right\}\right] =$$

$$= -\frac{1}{8i}\{(e^{i3x} - e^{-i3x}) + 3(-e^{ix} + e^{-ix})\} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} + \tfrac{3}{4}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x.$$

Door dit verder uit te breiden kunnen wij door volledige inductie de juistheid van de gevonden rekenregel bewijzen, zo ook voor $\cos^n x$.

Conclusie

Uit de grafische voorstellingen van $y = \sin x$ en $y = \cos x$ kunnen door redenering onmiddellijk de Fourier-ontwikkelingen worden opgeschreven van y^2 en y^3. Hierna kunnen met behulp van een 'halve' driehoek van Pascal de reeksen voor $\sin^n x$ en $\cos^n x$ voor iedere gehele waarde van n direct worden opgeschreven. Het bewijs van deze regel kan gegeven worden door ontwikkeling van het binomium van Newton voor $\sin x$ en $\cos x$, geschreven als complexe functies.

Tenslotte zij nog opgemerkt, dat de formule voor $\sin^2 x$ omgekeerd gebruikt kan worden voor het memoreren van formule (2), waarmee dan weer gemakkelijk andere goniometrische formules kunnen worden gevonden.
Het lijkt mij nuttig om het gebruik van de driehoek van Pascal in dit geval in handboeken en bij het onderwijs aan te geven, aangezien dit een belangrijke besparing aan geheugenwerk betekent.

Ik dank ir. J. Bloemsma, die mij wees op de 'grafische methode' voor $n = 2$ en $n = 3$, welke noodzakelijk is voor een juiste start van deze reeks-ontwikkelingen.

Over de auteur:

Ir. Jan Otto de Kat kwam kort na de oorlog als electrotechnisch HTS-ingenieur in dienst van Rijks Waterstaat, waar hij werkte aan de eerste ontwikkelingsfase van de 'DELTAR', een electronische rekenmachine voor bestudering van de waterbeweging in benedenrivieren.
Na een studie in de electronica ging De Kat over naar de Technische Hogeschool te Delft, waar hij zich voornamelijk bezig hield met analoge rekenmachines en meettechniek.
Enige tijd geleden construeerde hij met behulp van computer-berekeningen een onderdeel voor het Delftse cyclotron, waarin een nieuw injectie-systeem werd gerealiseerd. Thans is hij als wiskundig ingenieur verbonden aan het Laboratorium voor Magnetische Techniek te Delft.

Het Interimrapport en het wiskunde-onderwijs

J. G. A. HAUBRICH

Dezer dagen dwarrelde op mijn tafel het Interimrapport neer van de Werkgroep van Advies voor de Herverkaveling enz. Het is zeker een gedegen werkstuk. Op grond van goede overwegingen komt de werkgroep tot een programma voor wiskunde-A en voor wiskunde-B. Het komt mij voor, dat beide programma's voor het doel waarvoor zij bestemd zijn zeer geschikt lijken. Zeker indien bij wiskunde-A het accent op het vaardig kunnen toepassen van de stof ligt, zoals naar ik meen te kunnen lezen inderdaad het geval is, komt het mij voor dat beide programma's een goede voorbereiding geven voor de verdere studies. Kritiek op de programma's zou wat mij betreft dan ook hier en daar slechts een detail betreffen.

Behalve wiskundige, of wat daar voor door moet gaan, ben ik echter ook leraar, naar ik vermoed zelfs met meer diensttijd dan de mediale wiskundeleraar. (Wie vond ook weer het woord 'modaal' uit?) Was het in de tijd van de HBS en het Gymnasium nog zo, dat de keuze A of B (resp. α of β) vrij nauwkeurig samenviel met redelijke aanleg voor exacte vakken, sinds de mammoet is dat niet meer zo. Voor de echte B-leerlingen, dus zij die tenminste wiskunde-I, Natuur- en Scheikunde in hun pakket kiezen, geldt nog wel dat een redelijke aanleg voor exacte vakken aanwezig is, maar voor de overigen, en met name vaak voor de A-leerlingen, is de keuze van een vak vaak het compromis tussen de pakketeis van de gewenste studierichting en de haalbaarheid van tenminste een 4 op het eindexamen. Meer en meer komt het voor, dat een A-leerling wiskunde-I in zijn pakket opneemt, in de wetenschap dat hij met een beetje geluk er nog wel een 4 uit zal halen. De daarvoor vereiste kennis is niet groot, en met de vorig jaar ingevoerde hulp van het Cito zelfs nog verder beperkt. De gewenste aanleg is vaak geheel afwezig. Bij het ontraden van zo'n keuze staat de wiskundeleraar meestal geheel alleen, immers andere exacte vakken komen al bij voorbaat niet in aanmerking.

De taak, die voorheen de docenten wiskunde-natuurkunde-scheikunde tesamen hadden inzake de keuze A of B, is vrijwel geheel verschoven naar de wiskundeleraar alleen, die in veel gevallen de keus van zijn vak ontraadt in de overtuiging dat die raad in de wind wordt geslagen. De grote aantallen cijfers van 4 en lager, die jaarlijks op het CSE worden gehaald, spreken boekdelen.

Ik denk nu aan de groeiende aantallen leerlingen van dit soort, als ik het voorgestelde programma wiskunde-A lees. Twee jaar lang 4 uur per week, of beter:

Euclides

Maandblad voor de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren

54ste jaargang 1978/1979

Wolters-Noordhoff bv Groningen

Inhoud van de 54ste jaargang 1978/1979

ARTIKELEN

KORRELS

THEMANUMMERS

BOEKBESPREKINGEN

DIVERSEN

RECREATIE - 35 - 68 - 99 - 128 - 247 - 295 - 323 - 422

De 54ste jaargang stond onder redaktie van B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers (tot 15 november) - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. D. P. M. Krins (tot 1 januari) - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

anderhalf jaar lang 4 uur per week. Die 4 uur per week moet ik verdelen over 4 volkomen los van elkaar staande onderwerpen. Hoe stellen de didactici zich dat voor? Elk onderwerp één uur per week, of twee onderwerpen elk twee uur per week en na een x-aantal weken stoppen en weer de andere twee onderwerpen voortzetten waar de leerlingen ze weer vergeten waren? Of ziet iemand kans, een leerboek, sorry, een leermethode, zodanig op te zetten dat het net lijkt of alles met elkaar te maken heeft?
De leerlingen zullen vooral diegenen zijn die weinig aanleg hebben voor exacte vakken, daarin begrepen de leerlingen die we nu nog zover krijgen dat ze inderdaad maar geen wiskunde-I gaan doen, hoewel dat zo nodig moet voor sociologie of wat dan ook. Er zal immers geen studierichting meer over blijven die niet minstens wiskunde-A eist. Voor dat publiek met geringe tot minimale aanleg moeten de leraren dan in anderhalf maal 4 lesuren vier losstaande onderwerpen op enig niveau behandelen en het ze nog aanleren ook. Behandelen gaat nog wel, maar of ik het ze ook aan kan leren? Ik betwijfel het. Zelfs met 7 of 8 uren per week, zodat het tempo kan worden aangepast aan de leerlingen, zie ik grote aantallen lieden al snel op apegapen liggen. En voorbij is straks de tijd dat je gewoon door kunt gaan, omdat er toch altijd nog een grote meerderheid in de klas zit die het wel kan bijhouden. Nee, we moeten te veel en te moeilijke stof in te weinig tijd aanleren bij te veel leerlingen die er te weinig van kunnen begrijpen.
Om misverstand te voorkomen: ik betreur dat ten zeerste. Ik denk dat ik zal blijven streven naar het niet in een pakket opnemen van een vak, en zeker wiskunde, als er niet een redelijke vooruitzicht is om een 6 of meer te halen. Alleen op die manier kan een daling van het niveau en daarmee van het peil van het examen een halt worden toegeroepen. Dat het Cito zulks achteraf frustreert is alleen maar te betreuren. Reeds te lang wordt bij te veel vakken de de norm niet door gezond verstand bepaald maar door het verkoopbaar geachte percentage onvoldoendes.

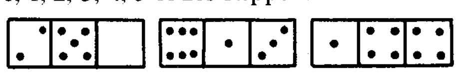
Steeds vaker meen ik te kunnen merken, dat wiskundeleraren het dan ook niet meer zo zien zitten en van hun leerlingen dan ook maar niet meer die dingen eisen die ze toch niet doen of toch niet kunnen, en ook dat maar weer laten lopen. Om één voorbeeld te noemen: tien jaar terug zou je er niet aan denken om in een grafiek van een functie de schaalverdeling weg te laten, tegenwoordig kijken sommige collega's en alle leerlingen je verbaasd aan als je zegt dat je daar punten voor aftrekt. Zo ken ik er meer, ook van inhoudelijker aard. Met de kwaliteit van de leerlingen en de norm van het examen glijdt ook de leraar mee af, de ene om zich niet elke les op te vreten, de andere zonder dat hij het zelf door heeft, de een wat vlugger dan de ander, maar allemaal gaan ze.
Dat proces moet nodig gestopt. Een herverkaveling zou daar misschien in kunnen bijdragen. Het programma wiskunde-A moet dan echter zodanig zijn, dat elke vwo-leerling die voor de gewone A-vakken bij de daar geldende normen een voldoende kan halen, die voldoende ook kan halen bij wiskunde-A. Ik meen, dat het programma dan gehalveerd zal moeten worden en uit niet meer dan twee onderdelen mag bestaan, die liefst nog een redelijke samenhang vertonen. Van de stof die behandeld wordt, hoop ik echter wel op een normale diepgang die recht doet aan het voor een academische studie vereiste vermogen,

min of meer gecompliceerde gehelen te doorzien. De listige lezer zal begrijpen, dat ik hier doel op het havo-programma waar voor goniometrie en logarithmen vrijwel hetzelfde programma geldt als voor vwo, maar waarbij alles op een laag pitje mag branden. Ook daar ben ik er nog niet achter hoe je dezelfde stof op twee niveaus kunt doceren of leren, anders dan door het wel of niet met alle gradaties daartussen te kennen en beheersen. Die mislukking zou ik gaarne aan het wiskunde-A program voorbij zien gaan.
Ik ben mij ervan bewust, hier geen alternatief program wiskunde-A aan te bieden. Evenzo spuw ik heel wat gal, maar dat lucht op. Ik hoop dat veel collega-wiskundeleraren zich bij mijn gedachten kunnen aansluiten en, als dat inderdaad zo is, dat ook vanuit de optiek van de haalbaarheid wordt gewerkt bij opstellen van het definitieve program wiskunde-A. Enkele normen daartoe heb ik hierboven aangeduid.

Nederlandse wiskunde olympiade 1979

Eerste ronde: vrijdag 23 maart 1979, 14–17 uur.

A1:
Bij een bedrijf werken 32 mensen. Iedere werknemer, uitgezonderd de boekhouder, heeft een jaarsalaris dat *f* 950,– minder is dan het dertigste deel van wat er in totaal aan salaris uitgekeerd wordt aan alle andere personeelsleden (inclusief de boekhouder).
Wat is het jaarsalaris van de boekhouder?
A2:
Welke zijn de laatste twee cijfers van het getal 11^{1979}?
A3:
Een correct lopend horloge wijst op dit moment een tijdstip aan tussen 14.00 uur en 15.00 uur. Over 3 minuten zal de grote wijzer (de minutenwijzer) zich bevinden precies tegenover de plaats waar de kleine wijzer 15 minuten geleden stond.
Hoe laat is het op dit moment?
A4:
Bepaal het kleinste gehele getal groter dan 1979, dat na deling door 4, 5, 6 of 7 steeds rest 1 geeft.
B1:
Een *drie*minospel bestaat uit stenen van *drie* vierkanten (*velden*) op een rij. Op elk veld staan 0, 1, 2, 3, 4, 5 of zes stippen.

Voorbeelden: 

Alle mogelijke stenen komen precies één keer voor.
Uit hoeveel stenen bestaat het spel?
B2:
Gegeven is een natuurlijk getal van vier cijfers. Men schrijft er een cijfer voor en een cijfer achter. Geen van deze twee cijfers is een nul. Hierna zet men ergens tussen de verkregen zes cijfers een komma. Het zo verkregen getal is het vierde deel van het oorspronkelijke getal van vier cijfers.
Bereken dat oorspronkelijke getal.
B3:
Een schaatser legt een traject af dat bestaat uit negen aaneengesloten rechte stukken, waarvan er niet twee op een lijn liggen. Hij eindigt weer op zijn vertrekpunt.
Hoeveel zelfdoorsnijdingen kan zijn traject maximaal bevatten?
B4:
Bepaal het grootste natuurlijke getal a waarvoor $a^3 - 11a^2 + 11a$ na deling door a-11 rest nul geeft.

B5:
Voor welke positieve gehele getallen b kleiner dan 90 is $\frac{b^8 - 3b^7 + 2b^6}{155}$ een positief geheel getal?

C1:
Bepaal drie verschillende positieve gehele getallen met de volgende eigenschappen:
(a) het produkt van de drie getallen is groter dan 500 en kleiner dan 900, en
(b) de som van elk tweetal getallen is deelbaar door het derde getal.

C2:
In een driehoek PQR is K het midden van QR en L het midden van PR.
De zwaartelijnen PK en QL hebben opvolgend de lengten 15 cm en 18 cm.
Bereken de maximale oppervlakte van driehoek PQR.

C3:
Een wijnhandelaar bezit drie rekken met elk 20 literflessen wijn van dezelfde soort. De wijn in het eerste rek bevat 9% alcohol, die in het tweede rek 11%, en die in het derde rek 14%. Hij wil 20 liter mengen zo, dat een mengsel met 12% alcohol ontstaat. Daarbij wil hij geen aangebroken flessen overlaten en van elk rek minstens één fles gebruiken.
Wat zijn de mogelijkheden om dit te realiseren?

Opgave	*Antwoord*	*Opmerkingen*
A1	*f* 28500,–	
A2	91	
A3	14.39 uur	
A4	2101	
B1	196	
B2	6667	
B3	27	$\frac{1}{2} \times 9 \times 6$; bv. te realiseren in een sternegenhoek met hoeken van 20°.
B4	132	$\frac{a^3 - 11a^2 + 11}{a - 11} = a + 11 + \frac{121}{a - 11}$
B5	31, 32, 62	Voor elk goed antwoord 1 punt; voor elk fout antwoord 1 punt aftrek; minimale score: 0 punten.
C1	5, 10, 15	
C2	180 cm^2	oppPQR = 2 × oppPQL (of ook: 2 × oppPQK) Driehoek PQL (of driehoek PQK) is maximaal als $PK \perp QL$.
C3	9% 11% 14% 5 5 10 2 10 8	Elk goed drietal 2 punten; elk fout drietal 1 punt aftrek: minimale score: 0 punten

Wiskunde 'doen' en denken

J. K. TIMMER

Met de eerste helft van bovenstaand opschrift als titel lezen we op blz. 118 een stuk van collega Lagerwerf, dat om twee redenen mijn belangstelling heeft getrokken.
Bij de kwestie van de rietjes is er sprake van *achtergrondstructuur*:
de halve cirkel wordt gezien tegen de achtergrond van de volledige cirkel, waarvan hij een deel is.
De student, die hardnekkig vasthield aan zijn denkbeeld, dat de kortste weg tussen twee steden met eenzelfde geografische breedte langs een breedtecirkel zou lopen, had ook met denkwerk tot de juiste opvatting bekeerd kunnen worden, n.l. met het systeem, dat ik graag de *karikaturistische methode* genoemd heb, omdat bepaalde facetten daarmee aangedikt worden. In dit geval kiezen we twee punten op aarde, beide met geografische breedte $89° 59' 59''$. Ze liggen op een cirkel met practisch de noordpool als middelpunt en een straal van ruim 30 meter. De juiste oplossing, eventueel via de pool, is nu met één oogopslag te zien. Bovendien blijkt, hoe groot de maximale omwegverhouding is, n.l. π op 2.
In het practische geval, dat onze student voor ogen had, zal de omwegfactor wel met een uiterst bescheiden percentage aangegeven kunnen worden. Het lijkt mij niet onmogelijk, dat dit geringe percentage de diepere oorzaak van de foutieve gedacht is geweest. Het karikaturistische systeem vergroot dit percentage zodanig, dat het misverstand wel moet verdwijnen.

De heer Timmer geeft een waardevolle aanvulling op mijn artikel. Op beide punten die hij noemt ga ik even nader in.

1. *Achtergrondstruktuur*
De kwestie van de hele cirkel speelde al voortdurend door mijn hoofd en was zelfs voor mij de aanleiding het experiment met de rietjes te beginnen. Echter mijn beginveronderstelling dat de gootvorm iets ellips-achtigs zou moeten zijn, zat die achtergrondgedachte danig in de weg. Eerst heb ik experimenteel afgerekend met mijn beginveronderstelling. Pas toen kreeg de achtergrondstruktuur een kans.

2. *Karikaturistische methode*
Ook wel genoemd: Voorbeelden in het extreme trekken.
Ik vind dit een aantrekkelijke didactische methode. In het geval van de kortste weg over het aardoppervlak kom je, bij proberen op een sinaasappel, al gauw in extreme situaties terecht. Ik geef er vaak de voorkeur aan de extreme voorbeelden niet zelf te geven, maar door de leerlingen te laten zoeken. Bijvoorbeeld door het probleem tastbaar te maken. Ik denk dat dat de zelfstandigheid van de leerlingen vergroot en dat vind ik een belangrijk voordeel.

Bram Lagerwerf

PYTHAGORAS

Ik bedoel niet die oude Griek, maar het wiskundetijdschrift voor jongeren dat thans aan zijn 16e jaargang toe is. Ik hoef het niet bij u te introduceren, u kent het immers.
Houdt u ervan? Hoe vindt u het? Heeft het gedurende 16 jaargangen zijn kwaliteit weten te handhaven of niet? Ik denk van wel, of denkt u er anders over? In elk geval heeft het zijn abonnementental, althans dat van zijn beste jaren, niet kunnen handhaven. De abonnees zijn uw leerlingen. Is het bij u ook zo dat minder leerlingen er belang in stellen? Zo ja, weet u er een oorzaak van aan te wijzen? Mocht het aan Pythagoras liggen, wat kan Pythagoras eraan doen? Mocht het aan de leerlingen liggen, kunt u er dan iets aan doen?
Ik bedoel: de leerlingen aanmoedigen. Hoe? Ieder heeft wel zijn eigen manier. Bijvoorbeeld, tussen neus en lippen door, als het net te pas komt of als het niet te pas komt, vragen: 'Heb je wel in het laatste nummer van Pythagoras gelezen dat ...?'
Pythagoras heeft uw hulp nodig. Laat hem niet in de steek.

Hans Freudenthal

Korrel

Limieten

Zeer toevallig maakten op onze school twee leerlingen uit twee parallelklassen van vwo-6 vrijwel gelijktijdig bezwaar tegen de uitspraak van mij en mijn collega dat:

$$\lim_{x \to \infty} (x + e^{-x}) = \infty$$

Deze limiet moest naar aanleiding van een vraagstuk uit Moderne Wiskunde deel 9 worden berekend. De stellingen betreffende de limieten van som, produkt en quotiënt waren de leerlingen bekend. De somstelling mocht hier echter niet worden toegepast omdat immers $\lim_{x \to \infty} x$ niet bestaat. En $\infty + 0$ is onzin, omdat $\infty \notin \mathbb{R}$. In geen van de mij bekende leerboeken wordt hieraan aandacht besteed. Alleen in het boek 'Algebra' van Schuh (uitgave van 1926) vond ik een vraagstuk over deze kwestie. Ik heb deze zaak als volgt aangepakt:
Gegeven:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ en } \lim_{x \to a} g(x) = \infty.$$

Stel

$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = L'.$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} [\{f(x) + g(x)\} - f(x)] = \lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} - \lim_{x \to a} f(x) =$$

$$= L' - L \text{ in strijd met het gegeven } \Rightarrow \lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$$

Verder geldt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [\{f(x) + g(x)\} - g(x)] = L \neq$$

$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} - \lim_{x \to a} g(x)$$

omdat beide laatstgenoemde limieten niet bestaan. Het is mij gebleken, dat voornamelijk door de zwakkere examenkandidaten nogal eens tegen deze laatste uitspraak wordt gezondigd. Het zal niet moeilijk zijn soortgelijke stellingen te bewijzen voor produkten en quotiënten van functies. Misschien zijn er collega's die dergelijke bewijzen geschikt vinden om tijdens een schoolonderzoek aan de leerlingen voor te leggen.
H. van der Hak

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Op de jaarvergadering van de N.V.v.W. werd de aanwezigen een aantal wiskundige puzzles voorgelegd. Hieronder volgen er twee van.

403. Rondom een circuit (met éénrichtingsverkeer) staan op willekeurige afstanden een aantal auto's geparkeerd. De auto's rijden alle even zuinig. In totaal hebben ze in hun tanks precies genoeg benzine om het circuit één keer rond te rijden.
Elke auto mag, als hij daartoe voldoende benzine heeft, oprijden tot zijn voorganger en de benzine uit diens tank overhevelen in de zijne. Is er onder de auto's ten minste één die door dit steeds te herhalen het gehele circuit rond kan rijden?

404. Een slak zit aan de voet van een paal die 1 km lang is. Elke dag klimt hij 1 cm omhoog. Aan het eind van elke dag wordt de paal zo homogeen uitgerekt, dat hij 1 km langer wordt. Komt de slak ooit aan het boveneind van de paal?

Oplossingen

Voor de opgaven zie het vorige nummer.

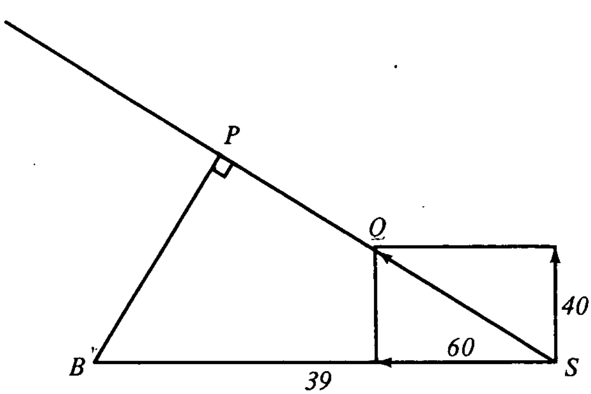
401. Verbind een coördinatenstelsel aan de Bismarck. De snelheid van de Suffolk t.o.v. dit stelsel is SQ. De afstand Bismarck-Suffolk is minstens BP. Gelijkvormigheid van driehoeken geeft

$$BP : BS = 40 : \sqrt{(40^2 + 60^2)}$$

$$BP : 39 = 2 : \sqrt{13}$$

$$BP = 6\sqrt{13}$$

Omdat $6\sqrt{13} > 20$, blijft de Bismarck onzichtbaar op het radarscherm van de Suffolk.



402. Noem de breedten van de wegen a_1, a_2 en a_3, de breedten van de hekken x_1, x_2 en x_3 en stel $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$.
Dan is

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= a_1 \\ x_2 + x_3 &= a_2 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$x_1 + x_2 + x_3 = s$$

en dus

$$x_1 = s - a_2,\ x_2 = s - a_3,\ x_3 = s - a_1$$

In ons geval vinden we voor de breedten van de hekken 1,40 m, 1,90 m en 2,80 m.

Neem nu $n = 4$. We vinden dan

$$\begin{array}{llllll} x_1 + x_2 & & & & = a_1 \\ & x_2 + x_3 & & & = a_2 \\ & & x_3 + x_4 & & = a_3 \\ x_1 & & & + x_4 & = a_4 \end{array}$$

Dit stelsel is afhankelijk als $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$ en anders strijdig.

Neem $n = 5$.

$$\begin{array}{llllll} x_1 + x_2 & & & & & = a_1 \\ & x_2 + x_3 & & & & = a_2 \\ & & x_3 + x_4 & & & = a_3 \\ & & & x_4 + x_5 & & = a_4 \\ x_1 & & & & + x_5 & = a_5 \end{array}$$

Hieruit vinden we, als $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$,
$x_1 = s - (a_2 + a_4), \ldots, x_5 = s - (a_1 + a_3)$

Hetgeen alleen een uitkomst geeft die bruikbaar is, als geen van de getallen x_i negatief wordt.
In het algemeen kunnen we zeggen, dat men voor n even strijdigheid of afhankelijkheid vindt en voor n oneven niet. Men ziet dit ook aan de discriminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Deze is gelijk aan $1 + (-1)^{n-1}$. Dus gelijk aan 2 voor n oneven en aan 0 voor n even. Voldoende voorwaarde voor het vinden van een oplossing is dat de veelhoek die de ophangpunten van de hekken als hoekpunten heeft, een ingeschreven cirkel heeft. Maar noodzakelijk is deze voorwaarde niet.

Boekbesprekingen

Edward A. Bender, *An introduction to mathematical modeling*, John Wiley and Sons, New York 1978, X + 256 blz., £ 11.95.

De realiteit is zeer gecompliceerd en bovendien eenmalig. Het opstellen van een mathematische beschrijving van deze werkelijkheid is dan ook een onbegonnen werk. Wel kunnen we een vereenvoudigd model van deze werkelijkheid maken dat voor een wiskundige behandeling toegankelijk is. Onderwerp van dit boek is het maken van deze modellen. Op welke wijze kunnen we aannamen ontwerpen ter vereenvoudiging van de werkelijkheid en hoe controleren we of deze modellen tot resultaten leiden die een adequate beschrijving leveren van datgene wat men als object gekozen heeft?
Een veelheid van methoden komen ter sprake. Om er enkele te noemen: grafische verwerking, optimalisering door middel van differentiaalrekening, monte-carlomethode, differentiaalvergelijkingen, waarschijnlijkheidsrekening. Dit is niet opzienbarend.
Verrassend voor de lezer is de grote verscheidenheid van problemen die voor wiskundige behandeling in aanmerking komen en de wijze waarop vereenvoudigende aannamen gemaakt worden om ze mathematisch hanteerbaar te maken. Ik noem er enkele:
Hoeveel man moet ingezet worden bij het blussen van een bosbrand om de schade minimaal te houden? De 'schade' bestaat uit brandschade plus bluskosten.
Wat is de beste methode om vervuiling van het water in grote meren ongedaan te maken?
Welke voorraden atoomwapens zullen twee landen aanleggen om voldoende waarborgen te hebben een plotselinge aanval van de ander te kunnen weerstaan?
Hoe komt biologisch evenwicht op een eiland tot stand?
Volgens welk tijdschema zal een dokter zijn patienten oproepen om ervoor te zorgen dat enerzijds hij niet te lang zonder patient zit en anderzijds zijn patienten niet te lang moeten wachten?
Bijzonder leuk vond ik het volgende probleem. Verschillende kiezers maken een rangorde op betreffende een groep kandidaten. Uit deze verschillende rangordeningen moet op eerlijke wijze een rangorde van kandidaten afgeleid worden. Axioma's worden opgesteld waardoor vastgelegd wordt wat onder 'een eerlijke wijze' verstaan wordt. Deze blijken contradictoor te zijn. Is het dus onmogelijk een dergelijke rangordening uit de gegevens te destilleren? Of moeten we aan het model (de axioma's) sleutelen?
Een erg nuttig en interessant boek.

P. G. J. Vredenduin

A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1977, 258 blz.

Dit boek handelt over problemen van de vorm
(1) $Az = u$.
Hierbij is u een gegeven element van een metrische ruimte U, en stelt A een afbeelding voor van een metrische ruimte F in U. Gevraagd wordt een oplossing $z \in F$ te bepalen voor het geval (1) *niet goed*

gesteld is. Dit laatste houdt in dat z niet op stabiele wijze van het gegeven element u afhangt. Voorbeelden van niet goed gestelde problemen zijn

a) De bepaling van de afgeleide $z = u'$ van een gegeven functie u (die benaderend in tabelvorm gegeven kan zijn);
b) De oplossing van een slecht geconditioneerd stelsel lineaire vergelijkingen met matrix A;
c) Het probleem van Cauchy voor de vergelijking van Laplace, $\Delta z = 0$;
d) De oplossing van de diffusie vergelijking voor $t < 0$, bij gegeven waarden voor z ten tijde $t = 0$.

Met de in dit boek beschreven methoden kan op *stabiele wijze* een *benaderende oplossing* van het probleem (1) worden bepaald. Speciale aandacht wordt geschonken aan de *regularizeringsmethode*, afkomstig van Tikhonov (1963). Deze methode wordt in het boek grondig theoretisch onderzocht, maar naar het oordeel van uw recensent zijn er wat weinig numerieke voorbeelden van gegeven. Dit boek is zeker van belang voor numeriek wiskundigen, en voor allen die in de praktijk met niet goed gestelde problemen te maken hebben.

M. N. Spijker.

Arthur H. Moehlman, *Theorien der demokratischen Erziehung und Bildung;* 252 blz., gebonden DM 39,80, Schroedel Verlag, Hannover; 1978.

Dit werk maakt deel uit van een serie onder algemene titel '*Das Bildungsproblem in der Geschichte des europäischen Erziehungsdenkens*'. In deze serie krijgen het tijdperk der Verlichting, de revoluties in Engeland, in Amerika, in Frankrijk, de industriële revoluties en de jongste ontwikkelingen op wetenschappelijk en technisch gebied uitvoerig aandacht.
De geest van Moehlman's werk laat zich karakteriseren door het volgende citaat uit de opdracht aan de in dit boek veelvuldig aangehaalde James Bryant Conant: 'Equality of oppertunity for all youth, equality of respect for all honest citizens and a better life for a free world = Human fulfillment on an ecologically balanced planet'.
Uit dit citaat wordt reeds voldoende duidelijk, dat we niet te maken hebben met een werk dat zich speciaal tot de *wiskunde*-leraar richt: het is een studiewerk voor álle leraren. De wiskunde zelf komt slechts terloops ter sprake en krijgt in de systematiek van de auteur een overigens zeer aanvechtbare plaats, namelijk binnen het geheel der natuurwetenschappen! Wel wordt er ingegaan op de groeiende betekenis van computerkunde en cybernetica.
De problematiek rondom de middenschool hier te lande heeft in de jongste tijd een brede belangstelling voor verwante problemen in het buitenland doen groeien, zoals o.a. blijken kan uit de aandacht die de hervorming van het Duitse schoolstelsel, de comprehensive school en de highschool in de leraarsbladen in toenemende mate weten te trekken. Een en ander maakt dat een boek als dit door zijn uitvoerige documentatie voor tal van Nederlandse collega's van waarde zal kunnen zijn.

Joh. H. Wansink.

K. A. Schäffer, *Splinefunktionen in der Statistik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1978, 103 blz., DM 19,80.

Na de tweede wereldoorlog is het onderzoek van splinefuncties op gang gekomen. Daar slechts weinigen deze in de praktijk gebruiken, heeft men in juni 1977 in Augsburg een congres gewijd aan statistische toepassingen van splinefuncties. Dit boek, dat als Heft 14 is uitgekomen in de serie 'Sonderhefte zum allgemeinen statistischen Archiv', bevat bewerkte voordrachten, die op dit congres zijn gehouden door E. Härtter, K. A. Schäffer, H. Söll, H. Hebbel en S. Heiler, R. Fahrion. De eerste drie bijdragen geven een elementaire inleiding tot splinefuncties en gaan in op de voordelen van de toepassing hiervan boven andere methoden wat betreft bijv. interpolatie. De laatste twee bijdragen hebben betrekking op tijdreeksen.

W. Kleijne

Mededelingen

Uitnodiging

Het eindexamen is weer achter de rug. Uw leerlingen hebben mogelijk leuke of bijzondere oplossingen gevonden. Of misschien zijn er zomaar wat andere zaken die u over dit eindexamen kwijt wilt. Hoe het ook zij, de redaktie nodigt u uit om een en ander op papier te zetten en dit *vóór 15 augustus a.s.* op te sturen naar de redaktie.

De redaktie

1ste-lustrumcongres van de VVWL Provinciaal Domein Oostmalle

Het 1ste-lustrumcongres van de VVWL vindt plaats van 30 juni t/m 2 juli 1979 in het Provinciaal Domein te OOSTMALLE.

Thema's: ONDERWIJS IN DE MEETKUNDE
EN
KNELPUNTEN IN HET WISKUNDEONDERWIJS

AGENDA
Zaterdag 30 juni 1979:
10.00: opening door voorzitter Frank LAFORCE
10.15: officiële toespraken
11.00: plenaire spreekbeurt door prof. dr. Franz BINGEN (Vrije Universiteit Brussel): *Ruimtemeetkunde*
13.00: lunch
15.00: keuze tussen 3 seminaries:
Inspecteur René LAUMEN: *Constructies in het meetkundeonderricht* (met nadruk op beroeps- en lager technisch onderwijs)
Jan ADE (Middelbare Normaalschool Onze-Lieve-Vrouw-Waver): *Verschuivingen en homothetieën zijn goede vrienden* (lagere cyclus)
Rik VERHULST (Pius X-instituut Antwerpen): *De koninklijke weg van de multilineaire vormen* (hogere cyclus)
16.30: koffiepauze
17.00: keuze tussen 3 seminaries:
Inspecteur René LAUMEN: *Constructies in het meetkundeonderricht* (met nadruk op beroeps- en lager technisch onderwijs) (vervolg)
Edmund VAN VRECKOM (Koninklijk Atheneum Koekelberg): *De onderwijstechniek van de psychologische omkering toegepast op het meetkundeonderwijs* (oriëntatiecyclus)
Reinhilde JACOBS-CLAESSENS (Koninklijk Lyceum Laken): *Het verband tussen de*

affiene en de projectieve meetkunde: de inbeddingsstelling (hogere cyclus)
18.30: avondmaal

Zondag 1 juli 1979:
9.00: plenaire spreekbeurt door prof. dr. Dirk VAN DALEN (Rijksuniversiteit Utrecht): *Delen door nul. Noodzaak of misverstand?*
10.30: koffiepauze
11.00: plenaire spreekbeurt door Jan ADE (Middelbare Normaalschool Onze-Lieve-Vrouw-Waver): *Spelen met isometrieën*
13.00: lunch
15.00: keuze tussen 3 seminaries:
Inspecteur René LAUMEN: *Ken je deze methode, ken je deze oefening, ken je deze toepassing?* (met nadruk op beroeps- en lager technisch onderwijs)
Fernand GOETHALS (Koninklijk Atheneum Gent-Voskenslaan) *Het verband tussen equivalentierelaties en groepen in de meetkunde* (lagere cyclus)
Guido DEDENE (K.U. Leuven): *De meetkunde van het Minkowskivlak* (hogere cyclus)
16.30: koffiepauze
18.30: avondmaal

Maandag 2 juli 1979:
9.00: plenaire spreekbeurt door prof. dr. Freddy DUMORTIER (Limburgs Universitair Centrum): *Elementaire catastrofen*
10.30: koffiepauze
11.00: plenaire spreekbeurt door Rik VERHULST (Pius X-Instituut Antwerpen): *Voorbeelden van constructieve redeneringen en economie van de analogie in de meetkunde*
13.00: banket
15.00: keuze tussen 2 seminaries:
Prof. dr. Roger HOLVOET (K.U. Leuven): *De grootste gemene deler: een Vlaams knelpunt?*
Kristien DE BRUYN (K.U. Leuven): *Isometrieën van inproduktruimten*

Inschrijving en inlichtingen: bij Kristien DE BRUYN, secretaresse van de VVWL, Pol de Jaerlaan 26, 1060 BRUSSEL.

Naschrift

Jarenlang heeft het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde jaarlijks een congres georganiseerd. Met deze traditie is thans gebroken.
Onze zustervereniging heeft nu deze taak overgenomen. Ter gelegenheid van haar eerste lustrum organiseert ze een congres. Zoals men ziet is de inhoud sterk direct gericht op het onderwijs, nog meer dan dat bij de congressen van het BCMW het geval placht te zijn.
We bevelen onze leden dan ook hartelijk aan naar dit congres te gaan en niet alleen van de inhoud maar ook van de gebruikelijke gezellige sfeer te genieten.

Het bestuur van de NVvW

Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden

De jaarlijks door de Stichting Mathematisch Centrum te organiseren Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden zal ook dit jaar weer plaatsvinden in twee steden, t.w. in

EINDHOVEN, op 15 en 16 augustus 1979
en
AMSTERDAM, op 16 en 17 augustus 1979

Als onderwerp is voor dit jaar gekozen:

NIEUWE TOEPASSINGSGEBIEDEN VAN DE WISKUNDE
(economie, sociale wetenschappen, biomathematica en linguistiek)

PROGRAMMA

1e dag:

dr. H. J. M. BOS	(Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Utrecht) 'Historische inleiding'
drs. D. FURTH	(Juridisch Instituut Universiteit van Amsterdam, vakgroep economie) 'Evenwicht in reguliere economieën'
prof. dr. I. W. MOLENAAR	(Faculteit Sociale Wetenschappen Rijksuniversiteit Groningen) 'Meten in de sociale wetenschappen'

2e dag:

dr. ir. J. GRASMAN	(Mathematisch Centrum, afd. toegepaste wiskunde) 'Mathematische modellen in de populatiedynamica'
dr. H. BRANDT CORSTIUS	(Instituut voor Algemene Taalwetenschap Universiteit van Amsterdam) 'Wiskunde en taal'

Inlichtingen en aanmeldingsformulieren zijn te verkrijgen bij de administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, 1091 AL Amsterdam, telefoon 020 - 947272, tst. 63.

KORTE SAMENVATTINGEN VAN ENKELE VOORDRACHTEN TE HOUDEN TIJDENS DE VAKANTIECURSUS VOOR LERAREN 1979

D. FURTH: *Evenwicht in reguliere economieën*
Soms handelt economie over markten, waar goederen verhandeld worden: Gaan we uit van een ruileconomie (zonder produktie), waarin de subjecten reeds verschillende goederen in bezit hebben (inkomensverdeling), dan zullen zij: (i) vraag uitoefenen naar goederen welke zij niet of niet in voldoende mate bezitten en (ii) goederen welke zij in overvloed bezitten aanbieden.
We spreken van een '*evenwicht*', als er een prijssysteem bestaat (waarbij een herverdeling optreedt) zodanig dat in *alle* markten de totale vraag het totale aanbod niet overtreft. We zullen aantonen dat zo'n evenwicht bestaat.
Verder zullen we schetsmatig laten zien dat voor zogenaamde reguliere economieën er slechts eindig veel van dergelijke evenwichten zijn en dat deze evenwichten op continue wijze van de inkomensverdeling afhangen.

Literatuur:

K. J. ARROW en F. H. HAHN: *General Competetive Analysis*, San Francisco 1971 (handboek)

G. DEBREU : *Economics with a Finite Set of Equilibrium*, Econometrica 1970, p. 287–92 (het oorspronkelijke artikel over dit onderwerp)

G. DEBREU : *Regular Differentiable Economics*, The American Economic Review '76, p. 280–87 (een eenvoudig overzichtsartikel)

E. DIEKER : *Regular Economics: A survey in: Intrilligator (ed.)*: Frontiers in Quantitative Economics, Vol. IIIA (een eenvoudig overzichtsartikel)

E. DIEKER : *Topological Methods in Walrasian Economics*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 92, Berlin 1974 (Inleiding in differentiaaltopologie voor economen, met toepassingen)

S. SMALE : *Global Analysis and Economics IIA. Extension of a theorem of Debreu*. Journal of Mathematical Economics (1974), p. 1–14 (moeilijk!)

I. W. MOLENAAR: *Meten in de sociale wetenschappen*

Lichaamslengten, lichaamsgewichten en lichaamstemperaturen laten zich bij de mens eenvoudig meten (al komt bij het vervaardigen van het meetinstrument al natuurkundige theorie te pas). Kunnen we ook meten hoe neurotisch, hoe intelligent of hoe autoritair iemand is? Op het grensvlak van empirie en wiskundig model zijn een aantal eisen geformuleerd, waaraan zo'n meetprocedure zou moeten voldoen. Bij een overzicht van klassieke en moderne meet-theorie blijkt dat de laatste zich van '*axioma's*' bedient, maar dat zijn hier stellingen die je toch moet '*bewijzen*': empirisch verifieerbare consequenties van een meetmodel maken het ons mogelijk de toepasbaarheid van dat model te beoordelen. Dit zal worden toegelicht aan de hand van de schaalmodellen van Rasch (gebaseerd op de logistische curve) en Mokken (een probabilistische variant op de deterministische Guttman-schaal).

Schaalconstructie wordt besproken omdat het een belangrijk en niet overbekend voorbeeld is van het gebruik van wiskunde binnen de Sociale Wetenschappen. Multivariate statistiek, inhoudsanalyse, factoranalyse, padanalyse met latente variabelen, grafenanalyse en andere belangwekkende toepassingen van wiskundige methoden zullen alleen kort worden aangestipt om de schaal- en meetmodellen voldoende uitvoerig te kunnen toelichten.

Literatuur:

a. elementaire inleidingen:

C. H. COOMBS, R. M. DAWES & A. TVERSKY	: *Mathematical psychology. An elementary introduction.* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall (1970)
R. M. DAWES	: *Fundamentals of attitude measurement*, John Wiley & Sons Inc., New York (1972)
A. C. McKENNELL	: *Surveying attitude structures. A discussion of principles and procedures*, Elsevier (1974)
F. N. STOKMAN	: *Syllabus schaalanalyse*, Bulletin nr. 23 van de Vakgroep Methoden en Technieken Sociologisch Instituut, RU Groningen (1978)

b. uitvoerigere inleidingen op het schaalprobleem:

G. H. FISCHER	: *Einführung in die Theorie psychologischer Tests.* Grundlagen und Anwendungen, Bern, Huber (1974)
R. J. MOKKEN	: *A theory and procedure of scale analysis. With applications in polotical research*, 's-Gravenhage, Mouton (1970)
D. K. KRANTZ, R. D. LUCE, P. SUPPES & A. TVERSKY	*Foundations of measurement.* Vol. I, Additive and polynomial : representations. Academic Press, New York and London (1971)

c. elementaire inleidingen over toepassingen van wiskunde binnen de sociale wetenschappen:

O. D. DUNCAN	: *Introduction to structural equation models*, Academic Press, New York (1975)
B. S. EVERITT	: *Cluster Analysis*, Repr. London: Heinemann, 1977. H.E.B. Paperback. *Review of current research* – Social science research council; 11
B. S. EVERITT	: *The analysis of contingency tables,* Chapman and Hall, London (1977)

J. GRASMAN: *Mathematische modellen in de populatiedynamica*

De uiteindelijke omvang van een biologische populatie stelt zich in door interactie van de populatie met zijn omgeving. Dit is een dynamisch proces, dat kan leiden tot een statisch evenwicht of een dynamisch evenwicht, waarbij de populatiegrootte permanente fluctuaties vertoont. Voor een inzicht in de dynamica van deze processen bedient men zich van mathematische modellen in de vorm van stelsels differentiaal- of differentievergelijkingen.

Naast modellen, die de groei en interactie van populaties beschrijven, zullen problemen uit de epidemiologie en de populatiegenetica behandeld worden.

Met name zal de invloed van plaatsafhankelijkheid bij de verspreiding van epidemieën aan de orde komen en berekenen we de kans op het uitsterven van een genotype in een populatie ten gevolge van random paarvorming.

Literatuur:

N. T. J. BAILEY : *The Mathematical Theory of Infectious Diseases*, Griffin, London (1975)

F. HOPPENSTEADT : *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*, SIAM, Philadelphia (1975)

R. M. MAY : *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton Univ. Press (1973)

J. MAYNARD SMITH : *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge Univ. Press (1968)

J. MAYNARD SMITH : *Models in Ecology*, Cambridge Univ. Press (1974)

V. VOLTERRA : *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris (1931)

H. BRANDT CORSTIUS: *Wiskunde en taal*

Wiskundigen en taalkundigen buigen zich beiden over de eigen hersenen. Wiskundigen hebben daarbij grote vrijheid in de keus van hun objecten. Taalkundigen achten zich tegenwoordig veelal gebonden aan de natuurlijke talen om ons heen, waarin zij het gemeenschappelijke trachten te vinden. Dat gemeenschappelijke zou van wiskundige aard kunnen zijn.

De wederzijdse beïnvloeding van wiskunde en taalkunde is, behoudens bij enkele personen (Grassmann! In Nederland: Freudenthal, De Bruijn) moeizaam. Beide claimen ze de voogdij over de logika. De invloed van de taalkunde op de wiskunde is gering en traag.

De invloed van de wiskunde op de taalkunde is drieërlei:

a. *kwantitatieve linguistiek*, waarin de wiskunde niet opzienbarend is,
b. computer-taalkunde en
c. algebraïsche taalkunde.

In mijn opdracht wil ik het over de laatste invloed hebben. Als W het woordenboek der Nederlandse taal is, alle verbogen en vervoegde vormen, hoe karakteriseren we dan de verzameling N van Nederlandse zinnen in de halfgroep W*), de verzameling a + le eindige rijtjes over W? Van bepaalde typen grammatika's kan men aantonen dat ze te arm zijn, anderen lijken te rijk. Er bestaan intrigerende verbanden tussen grammatikatypen en abstracte automaten: de eindige machine, de stapelautomaat en de Turingmachine.

Literatuur:

H. BRANDT CORSTIUS : *Algebraïsche Taalkunde*, Academische Paperbacks, Oosthoek's Uitg. mij., Utrecht (1974)

B. BRAINERD : *Introduction to the mathematics of language study*, Elsevier, New York (1971)

N. CHOMSKY : *Syntactic structures*, Mouton, The Hague (1957)

S. GINSBURG : *The mathematical theory of context free languages*, McGraw Hill, New York (1966)

W. J. M. LEVELT : *Formele grammatika's in linguïstiek en taalpsychology, I, II en III*, Van Loghum Slaterus, Deventer (1973)

MEDEDELING

Op *zaterdag 27 oktober 1979* houdt de Nederlandse vereniging van wiskundeleraren haar jaarlijkse themadag onder de titel

'HET ZIJN DE KLEINE DINGEN DIE HET 'M DOEN.'

Deze themadag wordt voorbereid door de didaktiekkommissie van de vereniging.

Nadere mededelingen over het thema en de organisatie van de dag zullen in komende nummers van EUCLIDES volgen.

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

H. van der Hak, M. Louisastraat 4, 3136 BJ Vlaardingen.

J. G. A. Haubrich, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven.

Ir. J. O. de Kat, Den Helderstraat 155, 2547 SE Den Haag.

S. Kemme, Leeghwaterstraat 2, 1541 LT Koog aan de Zaan.

Th. Kristel, Weezenhof 82-01, 6536 CA Nijmegen.

J. K. Timmer, Karel Gerardstraat 7, 7552 GT Hengelo.

Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.