

WISKUNDE

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

54e jaargang

1978/1979

no. 6

februari

Wolters-Noordhoff.

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2343 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 25,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-250834.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet leden f 33,50. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement f 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

12 Betekenis en kontekst

Na de zomervakantie van 1972 werd in Exeter het tweede internationale kongres over wiskundeonderwijs gehouden. Daar deze groots opgezette konferenties, net als de Olympische Spelen (voor amateurs!) of de Wereld Kampioenschappen Voetbal (voor professionals), om de vier jaar gehouden worden, hebben we inmiddels ook het derde kongres (Karlsruhe 1976) al achter de rug. Toch moet ik nu, na 6 jaar, terugkomen op een gedachte, die door een van de gastsprekers (René Thom) naar voren werd gebracht (*Modern Mathematics: does it exist?*)* De reden daarvan wil ik u graag bekennen. Toen ik zes jaar geleden de lezing aanhoorde en kort daarop de bijbehorende 'paper' kon bestuderen, ontging mij volledig waarom het ging. Thom kwam bij mij over als iemand, die met weemoed terugdacht aan de tijden van voor de 'moderne wiskunde' en die daarvoor argumenten binnen de leerstof aanvoerde. De kern van Thom's betoog komt tot uitdrukking in de volgende uitspraak (pag. 202):

The real problem which confronts mathematics teaching is not that of rigour, but the problem of the development of 'meaning', of the 'existence' of mathematical objects.

De betekenis hiervan ontging mij destijds geheel, zoals ik al zei; de oorzaak daarvan denk ik nu ook te weten. Ik zoek deze in het ontbreken van een onderwijskontekst, waarin 'meaning' voor mij 'betekenis' kon krijgen. Gedurende de afgelopen jaren hebben verschillende 'onderwijsleersituaties' mij geholpen om Thom's woorden beter te begrijpen. Voordat ik hiervan enige aan u voorleg, vestig ik graag uw aandacht op het proefschrift van mijn kollega Adri Treffers (Wiskobas Doelgericht, IOWO 1978). Hierin noemt hij Thom's artikel (noot 26 bij hoofdstuk V) in verband met het 'als zinvol ervaren van een wiskundige activiteit'. (pag. 206)

Naast de kontekst, waarin Treffers zelf op de didaktische betekenis van 'meaning' terecht komt, noemt hij vele momenten in het IOWO-materiaal waar men dit ook kan ervaren.

*) Thom, R.: *Modern Mathematics: does it exist?*, in: Howson, A.G., *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, 1973 (pag. 194-209).

Mijn eigen ervaringen wil ik u nu noemen.

We gaan daarvoor weer eens naar de PA. Tweedejaarsstudenten zijn voor de didaktische opgave geplaatst om 'de staartdeling' te introduceren. Het blijkt, dat men de delingsalgoritme zelf op het nivo van de mentale handelingen goed kan uitvoeren. Het automatisme funktioneert goed, maar onbewust. Vanzelfsprekend moet eerst getracht worden om de verschillende stappen van het algoritme bewust te maken, om naderhand aan elke stap een betekenis op lager nivo (bijvoorbeeld van materiële handelingen) te kunnen toekennen. Hiertoe wordt onder andere de volgende vraag gesteld:

Waarom trekken we eigenlijk steeds af in de staartdeling?

De studenten moeten voorlopig het antwoord schuldig blijven, totdat er iemand op het idee komt om de delingsopdracht in een reële verdelingssituatie een concrete betekenis te geven:

Je bent met 26 verenigingen en je mag 3445 kaartjes verdelen.

Ineens blijken de studenten zich te realiseren wat de stappen in de staartdeling betekenen.

Veel sterker nog dan in het PA-geval kwam de didaktische waarde van het begrip 'betekenis' naar voren op een didaktieksamen voor wiskunde m.o.: De kandidaat heeft een speciaalstudie gemaakt van logaritmen. Zijn werkstuk is getiteld: *Invoering van de logaritme in klas 4 atheneum*. Hierin verslaat hij 8 lessen, beginnend bij een oriëntatie op het (bekende) machtsverheffen, nader ingaand op de vraag naar de onbekende eksponent, het benaderen daarvan met behulp van een grafiek ($y = 10^x$) en het ekspliteren van de definitie:

${}^g\log a = x \Leftrightarrow g^x = a, a > 0, g > 0, g \neq 1.$

Dan maken de leerlingen eenvoudige opgaven van het type ${}^4\log 16 = \quad$, terwijl de theorie voortgezet wordt met aandacht voor de specifieke beperkingen die aan g gesteld dienen te worden. Hij stelt hierbij:

We laten zien dat ${}^0\log a = x$ voor $a \neq 0$ geen betekenis heeft en voor $a = 0$ een identiteit is.

Op dit punt kun je je afvragen welke betekenis logaritmen voor de kinderen heeft gekregen, opdat ze kunnen inzien dat ${}^0\log a = x$ géén betekenis heeft. Hoogstwaarschijnlijk zeggen de kinderen in dit geval:

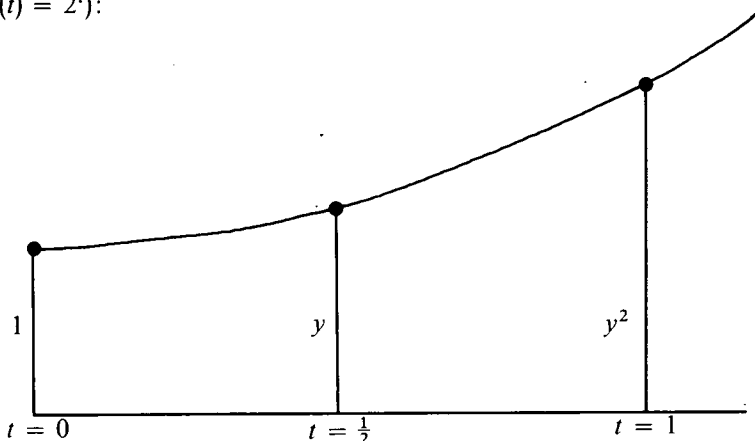
0 tot welke macht dan ook gebracht, geeft altijd 0. Dus voor $a \neq 0$ bestaat ${}^0\log a$ niet. Evenzo heeft het geen zin om over ${}^0\log a$ te praten, daar hiermee alle (reële) getallen bedoeld kunnen zijn!

Het begrip logaritme ontleent zijn betekenis (voor de leerlingen) aan de wiskundige kontekst van het machtsverheffen. Dit kan ook anders; mijn kollega Jan de Lange heeft dit laten zien in zijn onderwijsleerpakket *'Exponenten en*

logaritmen' (IOWO 1978). In de (algemene) kontekst van GROEI richt men speciaal de aandacht op de eksponentiële groei, waarbij het begrip groeifaktor essentieel is.

Heer Bommel (en Tom Poes) geven met hun 'ponenten', vreemdsoortige planten, waarvan het aantal, als ze in het water komen, dagelijks met een faktor 2 vermenigvuldigd wordt, betekenis aan de macht 2^t ($N(t) = 2^t$).

Begint Bommel voorzichtig met 1 plantje in zijn vijver, dan krijgt 2^0 (het aantal plantjes op tijdstip 0), de vanzelfsprekende betekenis van 1, een psychologische ondersteuning van de latere wiskundige inbedding. Fundamenteel in deze kontekst is het feit, dat in gelijke perioden de groei met een gelijke faktor toeneemt. Deze karakteristiek biedt een didaktische mogelijkheid om het verband tussen $2^{\frac{1}{2}}$ en $\sqrt{2}$ betekenisvol aan te brengen. Neem bijvoorbeeld de 'ponenten' ($N(t) = 2^t$):



Enerzijds geldt, dat de groei (y) op $t = \frac{1}{2}$ gelijk is aan $N(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}}$, anderzijds is $y^2 = 2$ (groei op $t = 1$), zodat $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

In dezelfde kontekst krijgt ${}^2\log x$ betekenis: het tijdstip waarop 'het aantal' gegroeid is tot x , bij groeifaktor 2.

Wie nu ${}^2\log 16$ nader wil bepalen moet als het ware zelf nog de rekenalgoritme uitvinden, terwijl die in de eerdergenoemde aanpak direkt voor handen is.

Tenslotte geef ik u nog even door hoe Tom Poes betekenis weet te geven aan de bekende eigenschap ${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$). Hij vond een langzamer groeiend soort kroos voor zijn eigen vijver en begint met 1 m² te planten. Na a dagen heeft de oppervlakte zich verdubbeld, na b dagen verdrievoudigd. Nu weet Tom Poes direkt na hoeveel dagen er een verzesvoudiging zal zijn opgetreden ($a + b$ dagen). Tom Poes denkt fundamenteel, dus in dit geval over de groeifaktor, zeg g .

Op $t = {}^g\log 2$ is er 2 m², op $t = {}^g\log 3$ is er 3 m². Het verdubbelde is dus verdrievoudigd op het tijdstip $t = {}^g\log 2 + {}^g\log 3$, terwijl op $t = {}^g\log 6$ er een verzesvoudiging is opgetreden. Aldus:

$${}^g\log 2 + {}^g\log 3 = {}^g\log 2.3$$

Terwijl ik dit opschrijf, heb ik de grootste moeite om mijn eigen algoritmische kennis van logaritmen te negeren. Het vermoeden komt bij me op, dat de PA-studenten in hun didaktische opdracht met betrekking tot het delen voor dezelfde moeilijkheid waren geplaagd.

Het onderwijzen van logaritmen in de kontekst van 'groei' lijkt mij erg zinvol. Voor de leraar, die gewend is alleen binnen de wiskundige kontekst te werken, zal het niet eenvoudig zijn. Maar welke wiskundeleraar zou deze uitdaging niet willen aannemen?

Wie wil, kan gelijk beginnen om alle bekende definities en eigenschappen met betrekking tot het machtsverheffen, worteltrekken en logaritme nemen in de kontekst van groei betekenis te geven. Voor examenkandidaten een serieuze didaktische opdracht, die meer waardering zal vinden dan het op de voet volgen van bestaande leerboeken. Voor een doordenking van deze problematiek op grotere schaal kan ik ten eerste het artikel van A. Kirsch aanbevelen in *'Didaktik der Mathematik'*, jrg. 4, 1976, pag. 257-285: *Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen*.

Overigens hoeft men zich niet te beperken tot het gebied van de eksponenten; of groei, zo u wilt. Het bedenken van konteksten om aan een deel van de wiskunde 'zin' te geven, is een didaktische uitdaging van hoog nivô. Ik denk nu onder andere aan de goniometrie, die in moderne wiskundeleerboeken veelal slechts in de wiskundige kontekst behandeld wordt. Met Thom's gedachten over 'meaning' is de keus tussen 'oud' en 'nieuw' bespreekbaar geworden. Goniometrie in de kontekst van 'helling en steilheid' krijgt een andere betekenis voor de leerlingen dan goniometrie in de kontekst van 'eenheidscirkel en vektor'. De keuze voor een van beide benaderingen dient niet besproken te worden in termen van 'oude' of 'nieuwe' wiskunde, maar op het nivô van de wiskunde-onderwijsfilosofie: *Wat wil ik dat wiskunde voor mijn leerlingen betekent?*

Ik hoop, dat we daarop een antwoord kunnen vinden.

Merkwaardige notaties

P. G. J. VREDENDUIN

In een vorig artikel, over *Gebruik en misbruik van variabelen*¹⁾, heb ik enkele merkwaardige notaties gesignaleerd, zoals

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df(x)}{dx}$$

$$dx^2 = 2x dx$$

Het schijnt dat in de eerste formule x links gebonden en rechts vrij voorkomt, in de tweede links vrij en rechts gebonden en ook in de derde zowel vrij als gebonden. Dat kan natuurlijk niet het geval zijn. Hoe zit het dan? Om dit probleem op te lossen moeten we de structuur van de uitspraken nader analyseren. Daartoe moeten we twee dingen nader bezien: de functienotatie en de betekenis van differentiaal.

De functienotaite. We maken tegenwoordig consequent onderscheid tussen de functie f en de functiewaarden $f(x)$. We spreken bijv. van de functie

$$f: x \rightarrow x^2 + x \text{ van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R}$$

of van de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = x^2 + x \text{ voor } x \in \mathbb{R}.$$

Toch bevestigen ook hier uitzonderingen de regel. Een stochast is een functie die aan elementen van een verzameling gebeurtenissen reële getallen toevoegt. De gebeurtenissen zijn bijv. worpen met tien dobbelstenen en de functiewaarden de sommen van de gegooide ogen. Noem deze stochast X . De kans dat deze

¹⁾ Euclides, 54e jaargang, oktober 1978.

som tussen 30 en 40 ligt, noteren we $P(30 < X < 40)$. Hierin stelt X echter de functiewaarde voor. Zowel functie als functiewaarden worden dus door X voorgesteld.

Een ander voorbeeld, ditmaal uit de natuurkunde. De wet van Boyle-Gay Lussac luidt: voor de druk p , het volume V en de absolute temperatuur van een constante hoeveelheid gas geldt

$$pV = cT$$

Deze p , V en T zijn functies van de tijd. We zeggen ook, dat op een bepaald tijdstip $p = 2$, $V = 5$ en $T = 300$ is. Dan stellen p , V en T geen functies voor, maar functiewaarden. Eigenlijk zouden we dus moeten spreken van de drie functies

$$\begin{aligned} p &: t \rightarrow p(t) \\ V &: t \rightarrow V(t) \\ T &: t \rightarrow T(t) \end{aligned}$$

en zeggen dat op het tijdstip t_1 geldt: $p(t_1) = 2$, $V(t_1) = 5$ en $T(t_1) = 300$. Dat is geen gebruik. Evenals bij de stochasten stellen hier p , V en T zowel functies als functiewaarden voor. Dit is de gebruikelijke manier van noteren in de fysica.

Differentialen. We gaan een stap verder en laten druk, volume en temperatuur van het gas in de tijd veranderen. Voor een dergelijke verandering geldt

$$p \, dV + V \, dp = c \, dT$$

Hierin stellen dV , dp en dT kleine veranderingen van p , V en T voor die horen bij een kleine toename dt van de tijd. Voor een fysicus een normale zaak, voor de mathemaat echter onverteerbaar vaag geformuleerd.

De mathemaat zal door verscherping van de begripsvorming precieze inhoud aan het bovenstaande willen geven. Hij gaat als volgt te werk.

Kies een waarde van t . Bepaal de bijbehorende waarden van p , V en T . Kies een toename van t . Bepaal de bijbehorende toenames van p , V en T . Bepaal de verhouding

$$\text{toename } p : \text{toename } V : \text{toename } T : \text{toename } t$$

Bepaal de limiet van deze verhouding voor toename $t \rightarrow 0$. Deze limiet noteren we

$$dp : dV : dT : dt$$

Het is mogelijk dat op een bepaald tijdstip

$$dp : dV : dT : dt = 0 : 0 : 0 : 1$$

We zeggen dat de toestand van het gas op dat tijdstip stationair is. Op een

dergelijk tijdstip kunnen we niet spreken van

$$dp : dV : dT$$

Op elk ander tijdstip wel. We noemen $dp : dV : dT$ dan de differentiaalverhouding van p , V en T .

In het vervolg van dit artikel sluiten we stationaire toestanden gemakshalve uit. De differentiaalverhouding $dp : dV : dT$ is een functie van t . Maar het is gebruikelijk te zeggen dat op een bepaald tijdstip bijv. $dp : dV : dT = 2 : 3 : 1$ is. En dan stelt $dp : dV : dT$ niet meer de functie, maar een functiewaarde voor. Ook hier dus ambivalentie.

Nu een wiskundig voorbeeld. We gaan uit van het oppervlak met vergelijking

$$xy = cz$$

Differentiatie levert

$$x dy + y dx = c dz$$

De analogie met het bovenstaande is duidelijk. Desondanks is de betekenis van dit resultaat nog niet duidelijk.

Eerst bezien we daarom een erop gelijkend fysisch probleem. Gegeven in de fysische ruimte een oppervlak met vergelijking

$$xy = cz$$

Op dit oppervlak beweegt zich een stoffelijk punt. De coördinaten x , y en z van dit punt zijn functies van de tijd t . Voor deze functies geldt

$$x dy + y dx = c dz$$

Wat dit wil zeggen, is zojuist uiteengezet.

Nu weer terug naar de wiskunde. Kies een kromme op het oppervlak. We kunnen nu natuurlijk niet zeggen, dat de coördinaten x , y en z van een punt op het oppervlak functies van de tijd zijn. We nemen aan, dat x , y en z functies zijn van de een of andere variabele t . Dan kunnen we op precies dezelfde manier als in de fysica gebeurd is, definiëren wat verstaan wordt onder de differentiaalverhouding

$$dx : dy : dz$$

en daarna afleiden dat

$$x dy + y dx = c dz$$

We zouden eigenlijk nog een onderscheid in notatie moeten maken tussen functies en hun functiewaarden. We zouden dus moeten schrijven:

$$\begin{aligned}
 x &: t \rightarrow x(t) \\
 y &: t \rightarrow y(t) \\
 z &: t \rightarrow z(t) \\
 dx : dy : dz &: t \rightarrow (dx : dy : dz)(t)
 \end{aligned}$$

Een dergelijk onderscheid maakt men niet. Dat is begrijpelijk, want nadat is vastgesteld dat het mogelijk is x , y en z als functies op te vatten van een zelfde variabele t , speelt deze variabele geen enkele rol meer en zou het storend zijn hem in de notaties te laten voortbestaan.

Gevolg hiervan is dat de formules

$$\begin{aligned}
 xy &= cz \\
 x \, dy + y \, dx &= c \, dz
 \end{aligned}$$

op twee manieren geïnterpreteerd kunnen worden.

Eerste manier. Het zijn gelijkheden van functies (van t).

Tweede manier. Het zijn gelijkheden van hun functiewaarden.

Men moet er daarbij wel aan denken dat achter een symbool d alleen maar een functiesymbool kan staan (volgens de definitie van een differentiaalverhouding).

In beide interpretaties stellen x in dx , y in dy en z in dz dus functies voor.

Ter verduidelijking de analyse van

$$x \, dy + y \, dx = c \, dz$$

onder beide interpretaties.

Bij de eerste interpretatie zijn x , y en $dx : dy : dz$ functies.

Bij de tweede stellen x , y en $dx : dy : dz$ functiewaarden voor. Maar de x in dx , y in dy en z in dz blijven functiesymbolen.

Een voorbeeld in twee dimensies.

$$x^2 + y^2 = 1$$

geeft na differentiatie

$$x \, dx + y \, dy = 0$$

Hier staan gelijkheden van functies. Maar we kunnen de formules ook lezen als gelijkheden van hun functiewaarden. In het laatste geval heeft het zin te zeggen, dat als $x = \frac{3}{5}$ en $y = \frac{4}{5}$, geldt $dx : dy = 4 : -3$.

Om te komen tot een analyse van de in de aanhef vermelde formules moeten we het differentiëren van functies onder de loep gaan nemen.

De relatie (tevens functie)

$$y = x^2$$

geeft na differentiatie

$$dy = 2x \, dx$$

Vervang y door x^2 . We krijgen dan

$$dx^2 = 2x \, dx.$$

Ook deze formule kan weer op twee manieren geïnterpreteerd worden. Daartoe echter een opmerking vooraf.

Als f en g functies zijn, dan zijn ook $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, cf ($c \in \mathbb{R}$) functies.

Als x een functie is, dan is dus ook x^2 een functie.

Nu de twee interpretaties.

Eerste interpretatie. x is een functie, x^2 is een functie en eveneens $dx : dx^2$.

Tweede interpretatie. $2x$ stelt een functiewaarde voor. In dx en dx^2 zijn x en x^2 functies, maar $dx : dx^2$ stelt een functiewaarde voor.

Men kan nu bijv. uit de formule aflezen: als $x = 4$, dan is $dx : dx^2 = 1 : 8$.

$$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$$

geeft na differentiatie

$$d \frac{x^2 - 2x - 1}{x} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Eerste interpretatie. x is een functie. Ook $\frac{x^2 - 2x - 1}{x}$ en $1 + \frac{1}{x^2}$ zijn dan

functies. Verder is $dx : d \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$ een functie.

Tweede interpretatie. Achter de symbolen d staan, zoals altijd functies. Maar

nu zijn $1 + \frac{1}{x^2}$ en $dx : d \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$ functiewaarden. Men leest uit de formule

af, dat de richtingsverhouding van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(1, -2)$ is $dx : dy = 1 : 2$.

$$y = \sin x$$

geeft

$$d \sin x = \cos x \, dx$$

Als x een functie is, is ook $\sin x$ een functie, namelijk de functie $\sin \circ x$. En $\cos x$ is de functie $\cos \circ x$.

Eerste interpretatie. x , $\sin x$, $\cos x$ en $dx : d \sin x$ zijn functies.

Tweede interpretatie. x en $\sin x$ achter de symbolen d zijn functies maar $\cos x$ en $dx : d \sin x$ stellen functiewaarden voor.

Nu algemeen:

$$y = f(x)$$

Differentiatie levert

$$dy = f'(x) dx$$

en dus

$$df(x) = f'(x) dx$$

Als x een functie is, is ook $f(x)$ een functie, namelijk de functie $f \circ x$. Dn $f'(x)$ is de functie $f' \circ x$.

Eerste interpretatie. $x, f(x), f'(x)$ en $dx : df(x)$ zijn functies.

Tweede interpretatie. x en $f(x)$ achter de symbolen d zijn functies, maar $f'(x)$ en $dx : df(x)$ stellen functiewaarden voor.

Omdat we uitgegaan zijn van een differentieerbare functie, is

$$df(x) : dx = 1 : 0$$

onmogelijk. Vandaar dat we in plaats van $df(x) : dx$ veelal schrijven $\frac{df(x)}{dx}$.

We noemen dit dan een differentiaalquotiënt i.p.v. een differentiaalverhouding. Ook een differentiaalquotiënt kan op tweeërlei wijze, namelijk als functie en als functiewaarde, geïnterpreteerd worden.

We keren terug naar de formules waarmee we begonnen zijn.

$$dx^2 = 2x dx$$

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

De analyse van deze twee formules heeft reeds plaats gehad. Wie $2x$ opvat als functiewaarde en tegelijk $dx : dx^2$ of $\frac{dx^2}{dx}$ als functie, maakt een fout. Deze fout heeft aanleiding gegeven tot het in de aanhef gesignaleerde misverstand.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}$$

In het linker lid zijn $f(x)$ en $f(x + h)$ functiewaarden.

In het rechter lid moeten we dus ook $\frac{df(x)}{dx}$ lezen als een functiewaarde. Wie

het rechter lid leest als een functie, begaat een fout.

We hebben langs deze weg een correcte interpretatie van de discutabele formules gevonden.

Zijn de voorkomende variabelen vrij of gebonden? Functievariabelen zijn in onze taal (de predikatenlogica van de eerste orde) steeds vrij. En de variabelen voor functiewaarden zijn ook vrije variabelen. In het voorgaande kwamen dus uitsluitend vrije variabelen voor.

Tot slot een persoonlijke opmerking. Ik heb steeds veel moeite gehad bij het lesgeven in en schrijven over differentiaalvergelijkingen met de vraag: stelt $dx : dy$ de richtingsverhouding van de raaklijn in een willekeurig punt voor (is het een functie) of de richtingsverhouding van de raaklijn in een bepaald punt (is het een functiewaarde)? Ik kwam hier niet uit, want soms was het ene het geval en soms het andere. Bovenstaande analyse heeft me geleerd dat deze tweeslachtigheid legitiem is. Dit inzicht is voor mij verhelderend geweest. Ik hoop dat de lezer er ook iets aan zal hebben.

Colleges 'Achtergronden van de Schoolwiskunde' aan het Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht

PROF. DR. A. F. MONNA

Sedert enige jaren staat op het programma van de colleges, gegeven aan het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht, een college getiteld 'Achtergronden van de schoolwiskunde'. Men kan dit college zien als verre navolger van de door Felix Klein gegeven colleges 'Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus'. Zij worden gegeven in samenwerkingsverband tussen F. van der Blij, P. Lemmens, J. van Dormolen en schrijver dezes. Het college is ingepast in de eerste fase na het kandidaatsexamen en het is in het bijzonder bedoeld voor studenten die voor hun doctoraalexamen hebben gekozen voor de z.g. onderwijsstroom (daarnaast is er een stroom gericht op onderzoek in de zuivere wiskunde en een stroom voor toegepaste wiskunde). Het programma in deze onderwijsstroom is vrij breed opgezet daar dit in verband met de toekomstige werkkring wenselijk leek. Het doel van het college Achtergronden is degenen die leraar willen worden reeds tijdens hun studie achtergrondinformatie te verschaffen met betrekking tot de door hen later te doceren stof. Het gaat daarbij niet over de didactiek van de wiskunde – al worden incidenteel wel eens opmerkingen dienaangaande ingelast – maar over de behandeling van onderwerpen die in dit kader relevant worden geacht en die in het algemeen niet reeds in het reguliere programma staan. Tot dusverre is er geen vast programma opgesteld; er zijn wisselende onderwerpen behandeld. Zij moeten in zekere relatie staan tot de schoolwiskunde en zij moeten ertoe bijdragen de a.s. leraren het inzicht bij te brengen dat de elementaire wiskunde is verbonden met interessante en soms moeilijke wiskunde problemen. Uiteraard gaat het hierbij niet om het simpele doornemen van de stof die de leraar later zelf zal hebben te behandelen.

We noemen enkele van de behandelde onderwerpen (maar er zijn er nog veel meer).

1 Sedert een aantal jaren wordt in de lagere klassen de meetkunde opgebouwd vanuit de begrippen translatie, rotatie en spiegeling, ongeveer in de geest van het boek van F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Achtergrondinformatie aangaande deze opbouw is gewenst en een inleiding hiertoe is behandeld.

2 De theorie van de reële getallen biedt vele mogelijkheden. Op universitair niveau worden de reële getallen gewoonlijk ingevoerd als equivalentieklassen

van Cauchy-rijen, op school mogelijk als decimale breuken. Hoe is het verband daartussen?

Theorie en vraagstukken over ongelijkheden geven aanleiding iets te vertellen over geordende groepen, ringen en lichamen, waarbij zich o.a. de kwestie van eenduidigheid van ordeningen voordoet. Voorbeelden verschillend van de klassieke reële en complexe getallen zijn instructief, om de plaats van deze wat te relativiseren, bijv. de p -adische getallen, polynoomringen met niet-archimedische ordeningen.

3 Kwadratische vergelijkingen zijn belangrijk op schoolniveau. Er is op het college gesproken over kubische en bikwadratische vergelijkingen (waarvoor in het normale programma geen tijd is). Dit onderwerp sluit aan bij de reguliere colleges over de Galoistheorie. Er is ook gesproken over kwadratische vergelijkingen in lichamen verschillend van die van de reële of complexe getallen, bijv. in lichamen met karakteristiek 2 of in niet-commutatieve lichamen (quaternionen). Ook over vergelijkingen over ringen.

4 De analyse biedt vele aanwijzingspunten. Bijvoorbeeld het onderwerp 'oppervlakte, inhoud, integraal'. Hoe introduceert men het begrip oppervlakte? Men kan voor polygonen, in $\mathbb{R}^2$ dus, een meetkundige weg volgen, neerkomend op decompositie in eenvoudiger figuren. Dit leidt tot interessante beschouwingen die reeds bij Hilbert zijn te vinden in zijn 'Grundlagen der Geometrie'. Hoe verdeelt men een vierkant in een eindig aantal delen die, anders samengevoegd een gelijkzijdige driehoek vormen? In $\mathbb{R}^3$ ligt deze zaak veel moeilijker; daar kan een dergelijke theorie niet worden doorgevoerd. Wat is daarvan de reden? Men kan voor de invoering van de begrippen oppervlakte en inhoud ook de axiomatische weg volgen, waarbij het begrip afbeelding in de verzameling van de niet-negatieve reële getallen op de voorgrond staat. Dit is de weg van de analyse die leidt tot de maattheorie en, in het bijzonder het begrip Haar-maat. De Haar-maat op de multiplicatieve groep van de positieve reële getallen kan worden gebruikt voor een definitie van de logaritmische functie. Aan deze beschouwingen wordt verbonden een bespreking van de z.g. functionaalvergelijking van Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (het is het geval $\mathbb{R}^1$). Het gaat om de existentie van de continue resp. discontinue oplossingen; men kan spreken van een onorthodoxe behandeling van de lineaire functie. Ook andere functionaalvergelijkingen zijn in dit kader interessant, bijvoorbeeld in verband met de definitie van de trigonometrische functies. Verschillende van deze zaken zijn aan de orde gekomen.

5 We noemen nog enkele andere onderwerpen.

Het verband tussen integratie en differentiatie is van belang in verband met het primitieveringsprobleem (de praktijk van het berekenen van integralen); daarbij komen verschillende typen van het begrip integraal aan de orde.

Verder de begrippen afgeleide en differentiaal, het laatste ook in relatie tot de natuurkunde (differentiaalvergelijkingen). Wat is een differentiaal? Wat is dx ? Is dx 'oneindig klein'? Beschouwingen daarover leiden tot de z.g. niet-standaard analyse, waarin 'oneindig kleine elementen' een exacte behandeling vinden.

Men kent in de algebra het begrip derivatie (d.i. een zekere hier niet nader te specificeren afbeelding). Wat is het verband met het begrip afgeleide van een

functie?

6 Tenslotte noemen wij maxima- en minimaproblemen. We behandelden de isoperimetrische eigenschap van de cirkel en de bol. Men komt dan ook tot kortste afstand problemen op polyeders en gekromde oppervlakken.

Dit is slechts een assortiment van de onderwerpen waaraan in de loop van enkele jaren aandacht is besteed. Zonder moeite kan men hieraan nog andere onderwerpen toevoegen.*)

Over de auteur:

Schrijver, geboren in 1909, studeerde wis- en natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Leiden, waar hij in 1935 promoveerde. Na o.a. een ambtelijke carrière kwam hij in 1961 bij de Rijksuniversiteit te Utrecht. Op 1 april 1965 werd hij gewoon hoogleraar in de zuivere wiskunde. Op 1 september 1976 ging hij als zodanig met emeritaat; met ingang van die zelfde datum werd hij benoemd tot buitengewoon hoogleraar.

* Een aantal van de hiervoor genoemde onderwerpen is in uitgewerkte vorm samengevat in een uitgave van het Mathematisch Instituut te Utrecht 'Klassieke Algebra en Analyse; naar colleges Achtergronden van de schoolwiskunde'. Deze is verkrijgbaar bij het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Utrecht, Budapestlaan, De Uithof, Utrecht (tel. 030 - 53 14 22). Prijs: f 10,-.

Het afleiden van goniometrische formules m.b.v. rotaties

DRS. P. DUYVESTEYN

In de meeste leerboeken worden de vele goniometrische formules op verschillende manieren afgeleid. Bovendien is de behandeling van de goniometrie vaak geheel afwijkend van de vektormeetkunde.

Ik wil enkele notities maken, die een mogelijkheid bieden de goniometrie m.b.v. vektoren en afbeeldingen in de $\mathbf{R}_2$ te benaderen. Ik zal me beperken tot de bepaling van een standaardmethode voor het afleiden van de meest gebruikte goniometrische formules.

Beschouw hiertoe in de $\mathbf{R}_2$ de afbeeldingen $R_{O,a}$ (rotatie over een hoek a om de oorsprong), S_{x-as} (spiegeling t.o.v. de x -as) en $S_{y=x}$ (spiegeling t.o.v. de lijn $y = x$).

Definieer:

$$R_{O,a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad (1)$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} R_{O,-a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos -a \\ \sin -a \end{pmatrix} \\ &= S_{x-as} \circ R_{O,a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= S_{x-as} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ -\sin a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \cos -a &= \cos a \\ \sin -a &= -\sin a \end{aligned} \quad (2)$$

Bij de volgende afleidingen worden herhaaldelijk de formules van (2) toegepast.

$$R_{O,-a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S_{y=x} \circ R_{O,a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= S_{y=x} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin a \\ \cos a \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt:

$$R_{O,a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{pmatrix} \quad (3)$$

Met behulp van (1), (2) en (3) kunnen nu op eenvoudige wijze de formules van cosinus en sinus afgeleid worden. Een voorbeeld zal dit verduidelijken.

$$\begin{aligned} R_{O,a+b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(a+b) \\ \sin(a+b) \end{pmatrix} \\ &= R_{O,b} \circ R_{O,a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= R_{O,b} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = R_{O,b} \left(\cos a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b$$

Op analoge wijze kunnen nu de formules van tangens bepaald worden.

Definieer:

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

Nu volgt uit (1) en (3):

$$R_{O,a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos a \begin{pmatrix} 1 \\ \tan a \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$R_{O,a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos a \begin{pmatrix} -\tan a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Een voorbeeld laat zien hoe nu m.b.v. (2), (4) en (5) de formules van tangens

via dezelfde methode, als gebruikt bij de bepaling van sinus en cosinus, afgeleid kunnen worden.

$$\begin{aligned}
 R_{O,a-b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \cos(a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ \tan(a-b) \end{pmatrix} \\
 &= R_{O,-b} \circ R_{O,a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= R_{O,-b} \left(\cos a \begin{pmatrix} 1 \\ \tan a \end{pmatrix} \right) \\
 &= \cos a \cdot R_{O,-b} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tan a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \cos a \cdot \cos b \begin{pmatrix} 1 + \tan a \cdot \tan b \\ -\tan b + \tan a \end{pmatrix} \\
 &= \cos a \cdot \cos b \cdot (1 + \tan a \cdot \tan b) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b \cdot (1 + \tan a \cdot \tan b)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Over de auteur:

P. Duyvesteyn is sedert 1 augustus 1978 als wiskundedocent verbonden aan het Amsterdams Lyceum, Valeriusplein 15, Amsterdam.

Jaarrede 1979

Dames en heren,

Het is voor het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een groot genoegen U welkom te heten op onze jaarvergadering of themadag zoals de nieuwe naam van deze bijeenkomst luidt.

Hoewel dit welkom U allen gelijkelijk geldt, wil ik toch enkelen onder U in het bijzonder begroeten. In de eerste plaats natuurlijk onze ere-leden, de heren dr. Joh. Wansink, E. H. Schmidt en dr. P. G. J. Vredenduin. Zonder Uw aanwezigheid is de jaarvergadering niet denkbaar. [Het is een beetje wennen om Piet nu tegenover ons te zien, de wetenschap dat hij zijn mond zeker niet zal houden, zal dit gewennings-proces zeker versnellen].

Het verheugt ons dat de spreker van vanmiddag, prof. dr. F. v.d. Blij reeds nu in ons midden is. Prof. v.d. Blij, Uw intense belangstelling voor en Uw daadwerkelijke medewerking aan de ontwikkeling van het wiskunde onderwijs worden door ons op zeer hoge prijs gesteld.

De heer Inspecteur W. E. de Jong is tot ons genoegen hier aanwezig. De heer N. J. Zimmerman is door ziekte verhinderd deze dag bij te wonen. Wij wensen hem een voorspoedig herstel toe.

Het aantal leden van de Vlaamse Vereniging van Wiskunde Leraars hier aanwezig, is kleiner dan andere jaren. Hieruit mag niet worden afgeleid dat de betrekkingen tussen de beide verenigingen nu minder hartelijk zijn, maar is het gevolg van een samenloop van omstandigheden. De Vlaamse Vereniging heeft vandaag een studiedag over het aanvankelijk meetkunde onderwijs. We waarderen het dus heel bijzonder dat we toch twee bestuursleden van de Vlaamse Vereniging mogen begroeten, Lode Dircken en Arthur Schoeters.

Dames en heren,

De ontwikkeling van *het wiskundeonderwijs in het lbo* geeft ons nog steeds reden tot zorg. Ervan uitgaande dat het B-programma het normale programma is voor de lbo-leerling kunnen we grofweg twee richtingen onderscheiden.

In het lto, het lager technisch onderwijs, is wiskunde een onmisbaar vak. Het beroepsbegeleidend onderwijs en het bedrijfsleven stellen bepaalde eisen. Het onderwijs richt zich daarnaar. De docenten proberen dat programma af te werken, soms traditioneel, maar vaak zoekend naar moderne vormen.

In de andere takken van het lbo is sinds enkele jaren het vak wiskunde verplicht

in de onderbouw. Men is hier veel minder en vaak helemaal niet gebonden aan eisen van het vervolgonderwijs en het bedrijfsleven. De docenten in het lhno en mogelijk ook hier en daar elders in het lbo zijn onbevoegd voor het geven van wiskunde. Een gedeelte van deze docenten heeft door de HOLBO-kursussen van het IOWO kennis gemaakt met een andere aanpak van het wiskundeonderwijs, een aanpak die én de leerling aanspreekt én inspeelt op de behoefte van alledag. Wiskunde leren door het te doen is daar de leus. De docenten hopen met behulp van moderne methoden de beoogde resultaten te bereiken. Jammer genoeg moest de HOLBO-kursus, die in een behoefte voorzag, verdwijnen. Het ministerie van O en W heeft het Nederlands Genootschap tot Opleiding van Leraren bij het Beroepsonderwijs opdracht gegeven een éénmalige tweejarige cursus wiskunde te geven voor onbevoegde docenten bij het lbo. Een groot deel van de docenten die deze cursus gaat geven, is verbonden aan de avondopleidingen van het Genootschap. Wij vragen ons af of de ideeën van de HOLBO-kursus voldoende bekend zijn bij deze docenten. Als dat niet zo is dan zal de filosofie erachter niet doorwerken naar de kursisten en dus niet herkenbaar zijn in hun onderwijs in het lbo.

Bovendien is het bevreemdend dat de HOLBO-kursisten maar een zeer beperkte vrijstelling krijgen van deze cursus. Dit zou er toe kunnen leiden dat een deel van deze mensen niet meer zal deelnemen. Zij worden dan niet bevoegd en zullen in de toekomst geen wiskundeonderwijs meer mogen geven. Het gevolg zal naar wij menen zijn, dat de ideeën van deze modern opgeleide mensen niet meer zullen doordringen tot de leerlingen en tot de kollega's, die traditioneler zijn opgeleid.

Ook ten aanzien van de C-programma's voor wiskunde is er nog geen harmonie. Nog steeds is het zo, dat er twee C-examens wiskunde worden samengesteld, die niet gelijkwaardig naar inhoud zijn. Opnieuw willen wij pleiten voor één C-examenprogramma en voorlopig één C-examen wiskunde voor het hele lbo dat niet helemaal los staat van het mavo-examen.

Wat de A-programma's voor wiskunde betreft vinden wij dat ook deze inhoud moeten krijgen opdat degenen die minder begaafd zijn, dát kunnen leren wat ze minimaal nodig hebben om in de maatschappij te kunnen functioneren. In opdracht van de staatssekretaris is een onderzoek gaande naar de mogelijkheid om o.a. bij het examen wiskunde voor het mavo en het lbo de twee zittingen van elk twee uren te brengen tot één zitting van twee uren. Bij het onderzoek gaat het tevens om de mogelijkheid bij deze ene zitting uitsluitend gebruik te maken van meerkeuze vragen. Hoewel de examentijd als ook de wijze waarop geëxamineerd wordt ter discussie gesteld kan worden, heeft het voornemen het wiskundeexamen op één zitting van twee uren te brengen, grote bezwaren bij ons opgeroepen. Het lijkt ons niet mogelijk dat in één zitting met dezelfde doeltreffendheid kan worden getoetst hoe de vele facetten van de leerstof zijn verwerkt als in de huidige situatie, waarin aan de leerlingen in de ene zitting dertig korte vragen (vierkeuze vragen) en in de andere zitting vier open vragen van complexer aard worden voorgelegd. Men houde hierbij in het oog dat een mavo 4-leerling vier jaar lang gemiddeld vier wekelijkse lessen wiskunde heeft gehad.

Het houden van slechts één zitting zal het examen verschrallen. Er is dan ook

veel weerstand tegen deze mogelijkheid bij het mavoverband. Ook vele docenten wiskunde bij het mavo zijn verontrust. Dit bleek bij de besprekingen van de mavo-examens wiskunde 1978 die overal in het land gehouden zijn. Verreweg het grootste gedeelte van de ongeveer duizend hierbij betrokken docenten sprak zich tegen de mogelijkheid van één zitting uit.

Het houden van één zitting met meerkeuze vragen achten wij onderwijskundig gezien zeer dubieus. Het is de vraag of het wel mogelijk is bepaalde leerdoelen met behulp van meerkeuze vragen te toetsen. Er zal zeker een negatieve invloed uitgaan van deze wijze van examineren op de kwaliteit van het wiskundeonderwijs bij het mavo.

Bovendien zullen vele docenten bij het mavo het als een diskriminatie beschouwen dat men bij het havo en vwo wel in openvraagvorm examineert. Ook zal de aansluiting mavo-havo door deze nieuwe manier van examineren niet verbeterd worden.

Ons opinieonderzoek bij bovengenoemde vergaderingen wees uit dat men praktisch unaniem van mening was dat één zitting met meerkeuze vragen het wiskundeexamen (en daarmee het mavodiploma) zal devalueren.

Op verzoek van de cvo (commissie vaststelling opgaven) voor vwo, havo en mavo werkt men bij het CITO aan een onderzoek naar de korrelatie tussen de resultaten van meerkeuze vragen en open vragen. Tevens is er bij het CITO een onderzoek gaande naar de in de wiskundeexamens in openvraagvorm verwerkte leerstof en naar de moeilijkheidsgraad van de opgaven.

De genoemde onderzoeken zijn nog niet afgesloten. Het zou voorbarig zijn tot een wijziging van het aantal zittingen over te gaan voordat de cvo tot een advies is gekomen.

Hoewel, blijkens een brief namens de staatssecretaris, ons advies niet zal worden ingewonnen, zal het bestuur toch zijn standpunt in deze kwestie aan het departement kenbaar maken.

Het doet ons deugd dat de *Wiskunde Olympiade* bloeit. Het aantal deelnemers wordt steeds groter. Dit jaar deden ruim 3500 leerlingen van ruim 300 scholen aan de eerste ronde mee. We menen dat dit succes mede te danken is aan de uitstekende kwaliteit van de opgaven van de laatste jaren. Dat geldt trouwens ook voor de opgaven van de tweede ronde.

De kandidaten voor uitzending naar de Internationale Olympiade werken met veel plezier aan lesbrieven. Deze zullen binnenkort verkrijgbaar zijn voor leraren die daarmee hun begaafde leerlingen een plezier kunnen doen.

De resultaten die de ploeg dit jaar in Roemenië behaalde zijn wat minder dan die van het vorig jaar. Toch zijn er wel individuele prijzen uitgedeeld aan Nederlandse deelnemers.

Wisbrug 200 is, naar de aanvragen gemeten, een succes. Over de manier waarop het verwerkt is op de scholen bestaat jammer genoeg weinig informatie.

Het IOWO

De discussie over de toekomst van het IOWO duurt al bijna drie jaar en is nog niet afgerond.

Deelnemers aan deze discussie zijn naast het IOWO, het departement en de SLO, de stichting leerplan ontwikkeling.

Van SLO-zijde werd aanvankelijk voorgesteld het IOWO in te bouwen binnen de SLO. Daartegen bestonden van de kant van het IOWO ernstige bezwaren. Men wees erop dat het ontwikkelen van het wiskundeonderwijs niet geïdentificeerd kan worden met leerplanontwikkeling.

Onderwijsontwikkeling kan uiteengelegd worden in drie componenten te weten: leerplanontwikkeling, veranderingssteun en onderzoek.

Kenmerkend voor de werkwijze van het IOWO bij het ontwikkelen van het wiskundeonderwijs is de ongescheiden aanpak van deze drie componenten.

Het IOWO heeft in opdracht van het departement een plan opgesteld waarin de overdracht van werkzaamheden van het IOWO naar andere instituties wordt geregeld, het zogeheten reallokatieplan.

Reallokatie betekent geleidelijke overdracht van werkzaamheden. Het departement had de volgende uitgangspunten voor het reallokatieplan vastgesteld.

- het leerplanontwikkelingswerk van het IOWO zal worden ingeschoven in de SLO.
- alle her- en bijscholingsactiviteiten gaan naar de initiële opleidingsinstituten.
- mocht blijken, dat er naast deze taken, belangrijke facetten van fundamentele research, die nu door het instituut wordt verricht, niet meer behartigd zouden worden, dan is de minister bereid te bezien of enigerlei vorm van voortzetting van deze facetten in een inter-universitair instituut mogelijk is.
- de reallokatie moet op 1 augustus 1981 voltooid zijn.

Deze overdracht en opsplitsing van het onderwijs-ontwikkelings-werk wordt zoals uit het Reallokatieplan blijkt, door het IOWO niet toegejuicht maar als een vaststaand gegeven aanvaard.

Inderdaad is het een ernstig verlies dat het ontwikkelen van nieuwe leerstof-onderdelen en het voorbereiden van de onderwijsgeveenden op deze vernieuwingen niet meer vanuit één visie zal plaatsvinden.

We maken ons in dit verband ook zorgen over de didaktiekkursussen.

Het zou een gevoelig verlies zijn als de administratieve, financiële en vooral de morele steun die we van het IOWO steeds hebben gehad, zou wegvallen.

In september is de 25e cursus gevierd. In de afgelopen vijf jaar hebben zo'n 1300 leraren aan een didaktiekkursus deelgenomen.

Na uitvoerig overleg zijn vertegenwoordigers uit besturen en directies van IOWO en SLO tot overeenstemming gekomen over een aantal basisvoorwaarden betreffende de regeling van de reallokatie van de werkzaamheden en de overgang van een aantal medewerkers van het IOWO naar de SLO. Tevens zijn er mogelijkheden geschapen voor een samenwerking gedurende een eerste periode.

Een bron van aanhoudende zorg voor het IOWO is, dat er geen garanties bestaan, dat er in de periode tot 1 augustus 1981 geen gedwongen ontslagen zullen plaatsvinden.

Tenslotte onderzoekt het bestuur van het IOWO de mogelijkheid tot het realiseren van een onderzoeksinstituut van een redelijke omvang. In het bijzonder dient de financiering van dit instituut zó geregeld te worden, dat ook op langere termijn het voortbestaan mogelijk is.

De A/B-problematiek

Zoals algemeen bekend is de huidige indeling van de wiskunde in de bovenbouw van het VWO in wiskunde I en wiskunde II niet in alle opzichten bevredigend.

Wiskunde I bevat o.a. een goede inleiding in de differentiaal- en integraalrekening voor toekomstige studenten in de bèta-fakulteiten, wiskunde II echter bevat onderwerpen uit de meetkunde die op een te abstracte manier worden behandeld, bovendien brengt dit vak weinig ruimtelijk meetkundig inzicht bij. Daar kwam bij dat de fakulteiten slechts twee keuzeëisen mochten stellen aan de zeven vakken van eindexamenpakket.

De meeste bèta-fakulteiten eisen wiskunde I en natuurkunde, geen fakulteit eist wiskunde II. Een aantal gamma-fakulteiten koos voor wiskunde I. Dit was een verlegenheidskeus. Wiskunde I is voor deze studierichtingen niet de meest optimale vooropleiding, maar er was geen andere mogelijkheid.

De gevolgen zijn bekend. Wiskunde I wordt gevolgd door de bèta-leerlingen en door gamma-leerlingen die i.h.a. onvoldoende in staat zijn dit vak met succes te bestuderen.

Dat was voor de academische raad zo'n zes jaar geleden aanleiding een commissie in te stellen, de z.g. commissie Molenaar, die zich bezig hield met de vraag: 'Welke wiskundeonderdelen worden door de verschillende fakulteiten geëist?'.

Ook de commissie Bovenbouw van de CMLW o.l.v. Van Lint werkte in dezelfde richting. Het resultaat was dat er voorstellen zijn gedaan om het vak wiskunde A in te voeren als voorbereiding op de studie aan de gamma-fakulteiten en wiskunde B voor de bèta-fakulteiten, dit vak had overeenkomst met wiskunde I. Het vak wiskunde II zou moeten verdwijnen.

Deze zeer gedetailleerde voorstellen zijn in 1976 ingediend en verdwenen in bureauladen ten departemente.

Er is nooit een reactie op gekomen.

Begin 1978 echter besloot staatssekretaris de Jong tot instelling van een werkgroep die advies zal moeten uitbrengen over een herverkaveling van de vakken wiskunde I en wiskunde II.

De werkgroep heeft tot taak na te gaan:

a) welke wiskundeonderdelen de verschillende fakulteiten eisen en welke wijzigingen dit in de eindexamenprogramma's voor het vwo vereist.

Dit was overigens de opdracht die zes jaar geleden aan de commissie Molenaar was gegeven en waarover uitvoerig gerapporteerd is.

b) welke consequenties zulke wijzigingen moeten of kunnen hebben ten aanzien van het havo-wiskundeprogramma.

c) de wenselijkheid van eventuele her- en nascholingsactiviteiten.

d) met ingang van welk jaar de nieuwe programma's bij de eindexamens kunnen worden toegepast.

Een aantal leden van de werkgroep had ook zitting in de commissie Molenaar of in de commissie Bovenbouw.

Wat zijn de resultaten van de tot nu toe gehouden besprekingen van deze werkgroep, die zich de fraaie naam Werkgroep HEWET heeft toegedacht. (Hervorkaveling Eindexamenprogramma Wiskunde Eén en Twee)

De werkgroep heeft zich bezig gehouden met: het programma voor de vierde klas; het programma voor wiskunde A; het programma voor wiskunde B. De konklusies van de kommissies Molenaar en Van Lint speelden een voorname rol. Het programma van de vierde klas moet zowel inspelen op de A- als op de B-wiskunde, maar ook veel gemeenschappelijke onderwerpen van de A- en B-programma's bevatten. Het moet mogelijk, maar ook zinvol zijn wiskunde A en wiskunde B beiden in het eindexamen pakket op te nemen.

De werkgroep zal waarschijnlijk voorstellen de analyse uit wiskunde I een plaats in het programma wiskunde B te geven. Het onderdeel kansrekening en statistiek zal waarschijnlijk worden vervangen door een stuk meetkunde van de ruimte. Over de inhoud van dit onderdeel is nog weinig te zeggen, alleen dat het de bedoeling is onderwerpen op te nemen, waarvan de bestudering het ruimte-inzicht ontwikkelt en verdiept.

Het programma voor de klassen 5 en 6 voor wiskunde A zal, zoals het er nu uitziet waarschijnlijk drie onderdelen omvatten, analyse, lineaire algebra en een stuk kansrekening en statistiek.

Bij de analyse zal de nadruk liggen op de toepassingen. Bij de lineaire algebra zal waarschijnlijk de matrixrekening centraal komen te staan. Het is echter niet de bedoeling dat de lineaire afbeeldingen in het programma een rol zullen spelen. Er zijn allerlei interpretaties van matrices in omloop, zoals datamatrices, incidentiematrices en kansmatrices en vanuit die interpretaties zou het onderwerp benaderd kunnen worden. Het is mogelijk dat ook een stukje computerkunde wordt opgenomen.

Het onderdeel kansrekening en statistiek zal ongeveer de onderwerpen bevatten, die nu bij wiskunde I worden behandeld, met misschien een kleine uitbreiding.

Wat de eventuele invoering van wiskunde A en B betreft denkt de werkgroep aan een zekere fasering, zodat b.v. het eerste jaar op drie scholen wordt begonnen, het tweede jaar op een wat groter aantal scholen en het derde jaar op alle scholen.

Het advies van de werkgroep zal binnen niet al te lange tijd gereed zijn.

Zoals U weet is het thema van deze dag *'Instappen en toepassen'*. Enkelen van ons hebben zeer veel werk verzet om dit thema uit te werken en om deze dag voor te bereiden. Dit zijn Bert Zwaneveld, Leo Muskens, Martin Kindt, Cees Hoogsteder, Frank Mahieu, Felix Gaillard en natuurlijk Joop van Dormolen. Ik weet dat ik namens U allen spreek als ik hen reeds nu heel hartelijk dank voor het vele dat ze gedaan hebben om deze dag te doen slagen.

En na het uitspreken van de wens dat U allen een waardevolle dag zult hebben verklaar ik de themadag voor geopend.

Dr. Th. J. Korthagen, voorzitter Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 28 oktober 1978 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht

Om 10.03 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden E. H. Schmidt, dr. P. G. J. Vredunduin en dr. Joh. H. Wansink, de inleider prof. dr. F. van der Blij, de inspecteur drs. W. E. de Jong en de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars L. Dircken en A. Schoeters en vermeldt dat de inspecteur N. J. Zimmerman dit jaar door ziekte verhinderd is de vergadering bij te wonen. Hierna spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit en dankt de organisatoren van deze themadag voor het vele werk dat zij tijdens de voorbereidingen hebben verricht.

Hierna worden de notulen van de algemene vergadering op 29 oktober 1977 en de jaarverslagen goedgekeurd; de penningmeester wordt décharge verleend en in de kascommissie worden gekozen mevr. A. Verweij uit Leiden en de heer H. J. M. Vink uit Bodegraven.

De heren dr. Th. J. Korthagen en drs. J. W. Maassen worden als bestuurslid herkozen en in de in 1977 ontstane vacature wordt voorzien door verkiezing van mevr. drs. N. Verhoef.

De contributie voor het verenigingsjaar 1979/1980 wordt vastgesteld op f 40, —. Vervolgens gaat de vergadering over tot het thema van deze dag 'Instappen en toepassen'.

Na een inleiding over dit thema door drs. J. van Dormolen krijgen alle aanwezigen gelegenheid om zich in groepjes bezig te houden met een stel probleempjes die tot gesprekken met collega's kunnen leiden over het thema van de dag.

Na een lunchpauze houdt prof. dr. F. van der Blij een inleiding over het thema van deze dag en vervolgens zijn er werkgroepen met als onderwerpen:

- napraten met prof. dr. F. van der Blij en drs. J. van Dormolen,
- instapproblemen en toepassingen uitwisselen en verzinnen,
- ervaringen met IOWO-materiaal opdoen en uitwisselen,
- ervaringen met rekenmachientjes in de klas uitwisselen,
- doorgaan met de morgenactiviteiten.

Na een theepauze volgt de rondvraag.

De heer C. Hollander dankt voor het verloop van de gehele dag. Het enige dat hij jammer vond was dat hij niet alle werkgroepen had kunnen bezoeken.

De heer H. Broekman informeert welke acties door de vereniging ondernomen

gaan worden om de door het IOWO ondersteunde activiteiten van de vereniging bij een opheffing van dit instituut, voort te doen zetten. De voorzitter ziet hier-toe nog geen concrete mogelijkheden maar er zal in het bestuur over gedacht worden.

De heer J. Boeijink vraagt wanneer het advies van de commissie HEWET, betreffende de herindeling van wiskunde A en B verwacht kan worden. De voorzitter verwacht dat dit in januari of februari 1979 bij de staatssecretaris zal zijn. De heer T. Goudriaan vraagt in hoeverre wiskundeleraren een stem zullen krijgen bij een eventuele invoering van dit programma. De voorzitter zegt toe dat indien door de staatssecretaris een advies gevraagd zal worden hierover een vergadering zal komen. De heer W. E. de Jong suggereert te vragen of het interimadvies gepubliceerd mag worden; dan kan er nog een inbreng van de kant van de leraren zijn.

De heer T. Goudriaan vermeldt ook de brief van de staatssecretaris over het gebruik van rekenmachientjes op het eindexamen. Deze brief is zeer abrupt en zonder voorkennis verschenen. De voorzitter merkt hierover op dat er een advies door de vereniging is gegeven terwijl de heer De Jong verwijst naar een circulaire die drie jaren geleden is uitgegaan en waarin vermeld is waarom destijds geen rekenmachientjes waren toegestaan en waarin tevens beloofd is dat bij herziening van dit standpunt twee jaren voor het eindexamen waarop de apparaten worden toegestaan een mededeling gedaan zou worden. De vergadering vindt het merkwaardig dat er in de circulaire uitsluitend over minimumeisen wordt gesproken terwijl later uit de pers blijkt dat er over maximumeisen wordt gedacht en hierover nog geen officiële mededelingen zijn ontvangen. Volgens inspecteur De Jong is er geen bericht dat de vorige circulaire ingetrokken zal worden, zodat deze geldt en er geen maximumeisen zijn. De heer Van Dormolen vermeldt nog dat er bij het advies van de vereniging zorgvuldig is nagegaan of er een maximum voor rekenmachientjes aangegeven moest worden. Hierbij is o.a. de vraag gesteld, wanneer is een machine programmeerbaar en waar heeft men voordeel van een geprogrammeerde machine. Volgens de heer P. G. J. Vredenduin moeten we tevreden zijn want de vereniging heeft geadviseerd geen maximum te stellen en dit is ook niet gebeurd.

Volgens sommigen in de vergadering bepaalt het soort machine dat men gebruikt het onderwijs; indien bij voorbeeld een machine de standaarddeviatie kan bepalen behoeft men de leerlingen dit niet te laten uitrekenen. De heer Van Dormolen wil hierbij twee dingen goed scheiden, namelijk wat is standaarddeviatie en bereken de standaarddeviatie. Over het eerste zijn zeker vragen te stellen op het examen. De heer De Jong vraagt het hoofd koel te houden. Zou het verschil in type rekenmachine groter zijn dan het verschil in leraren, leerboeken, rekenlinealen en dergelijke? Laten we over een paar jaren, na enige ervaring, eens verder praten. De heer G. Vonk meent dat het stellen van maximumeisen aan een rekenmachine te vergelijken is met het trachten een stroom tegen te houden met een strohalm.

De heer W. van Eijk stelt een vraag naar aanleiding van het feit dat dit jaar eindexamencijfers berekend werden door het omzetten van score naar cijfer. Hij meent dat de bedoeling was met behulp van deze omzetting de normen bij te stellen en vraagt zich af waarom bij het examen tweede tijdvak de omzet-

tingstabel van te voren gegeven kon worden. Volgens de heer De Jong is bij het tweede tijdvak dezelfde omrekeningstabel gebruikt als bij het eerste tijdvak omdat er geen mogelijkheden waren om ook het tweede tijdvak een steekproef te houden. Bij het tweede tijdvak was er te weinig tijd en was bovendien de de groep kandidaten niet aselekt.

De omrekening is niet om een bepaald percentage voldoende te krijgen maar om foute schattingen in de normering weg te werken.

De heer F. Mahieu voegt hier nog aan toe dat de normenadviescommissie na het examen eerste tijdvak de normen bijstelt door middel van de omrekeningstabel. Deze commissie heeft het recht om na het tweede tijdvak weer bijeen te komen indien er problemen bij de opgaven van dat tijdvak zijn.

De heer E. Koerts meent dat de leerstof steeds meer in het gedrang komt omdat men steeds minder tijd voor lessen krijgt. Hij wijst er op dat in 1979 het eindexamen een maand vroeger is dan in 1978. De heer J. Maassen vergelijkt de examenperiode met de jaren voor 1978. In 1978 is bij wijze van experiment het eindexamen drie weken verlaat, zodat het eindexamen in 1979 niet een maand, maar een week vroeger is dan in de vorige jaren.

Volgens de heer De Jong is een ander probleem de vakantiespreiding, waardoor aan het begin van het schooljaar een verschil van twee weken kan optreden. De heer L. Dircken bedankt namens de Vlaamse collega's voor de uitnodiging en feliciteert de vereniging met de geslaagde dag. Er is jarenlang een goede samenwerking tussen de Vlamingen en de Nederlanders en de Vlamingen komen graag naar Nederland. *Op 24 maart is er een gezamenlijke dag in Rotterdam.* Hiervoor nodigt hij alle aanwezigen uit. *Begin juni is er een driedaags congres over meetkunde in Vlaanderen.* Ook hier is iedereen hartelijk welkom. De voorzitter dankt voor deze woorden en zegt dat wij vaak jaloers zijn op het aantal en het succes van de Vlaamse studiedagen.

Tenslotte vraagt de voorzitter aandacht voor de eindexamens 1980 en doet een beroep op de leden zich als maker van eindexamenopgaven op te geven. Om 17.01 uur sluit hij de vergadering.

Ontvangen boeken

VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO B-4a, ISBN 90 231 3244 0, f 8,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO B-4b, ISBN 90 231 3245 9, f 8,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO C-4a, ISBN 90 231 3241 6, f 8,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO C-4b, ISBN 90 231 3242 4, f 8,50.
TOELICHTING bij deze vier werkschriften.

VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO 1a, ISBN 90 231 3246 7, f 7,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO 1b, ISBN 90 231 3247 5, f 7,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO 1c, ISBN 90 231 3248 3, f 7,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO A-1b, ISBN 90 231 3249 1, f 6,50.
VAN A TOT Z, wiskunde werkschrift voor het LBO A-1c, ISBN 90 231 3250 5, f 6,50.
TOELICHTING bij 1a, 1b en 1c.

Uitgeverij J. Muusses, Purmerend

Opgaven

397. Op een schaakbord zet men 8 torens zo, dat geen toren een van de andere kan slaan.

a Op hoeveel manieren is dit mogelijk?

b Hoeveel van deze manieren zijn puntsymmetrisch?

c Hoeveel gaan door een rotatie over 90° in zichzelf over?

Liefhebbers kunnen ook nog nagaan hoeveel manieren lijnsymmetrisch zijn.

Ik zal de vraag niet beantwoorden, omdat het antwoord te veel gepeuter zou bevatten.

398. Kies een getal. Verminder het met de som van de cijfers. (Bijv. 1034 geeft $1034 - 8 = 1026$.)

Herhaal deze bewerking totdat men als uitkomst 0 krijgt.

Er zijn getallen met de eigenschap dat men na 154 keer uitvoeren van deze bewerking voor het eerst 0 krijgt. Hoeveel zijn dat er? En welk getal daarvan is het grootste?

Oplossingen

395

a. $297 + 176 + 1506$ en GELUK = 87453

b. $1003 + 60 + 347 + 569$ of

$1003 + 40 + 389 + 547$

c. $81 + 923 + \triangle 85$

396. Oerkoud: -273.

Tegengestelde: 273.

Voorste cijfer er ook achter: 2732.

Heerlijk geurend: 4711.

$4711 - 2732 = 1979$.

Hiermee wenst onze oude, nu tachtigjarige vriend P. Bronkhorst de lezers van Euclides een gelukkig nieuwjaar.

Boekbesprekingen

Frédérique, *Les enfants et la mathématique* 4, Marcel Didier, Bruxelles Montréal Paris 1976, VIII + 599 blz., 1425 BF.

Het boek bestaat uit protocollen van experimentele lessen gegeven door Frédérique (mevrouw Papy) aan leerlingen van de vierde klas van de basisschool.

Het is verdeeld in vijf delen, getiteld: Nombres, Géometrie vectorielle plane, Mathématique appliquée, Trivialités fondamentales, Aires.

In het eerste deel worden de reële getallen ingevoerd. Dit geschiedt door middel van inkrimpende intervallen op de getallenlijn. Kies een getal tussen 0 en 1. Verdeel het interval $[0, 1]$ in $[0, 0,1]$ en $[0,1, 1]$ (binair geschreven). Het getal ligt bijv. in het tweede interval. We schrijven dan op: 0,1. Verdeel nu $[0,1, 1]$ in twee gelijke gesloten intervallen. Het getal ligt in het eerste. Schrijf dan: 0,10. Enz. Daarna geschiedt dit ook in het drietallig, het vijftallig en het tientallig stelsel.

Toepassing op het optellen van hoeken. De cirkel wordt verdeeld in vier kwadranten, acht octanten enz. Men telt nu kwarten, achtsten enz. op modulo 1 en leert zo hoeken optellen. De opwindfunctie wordt daarbij gebruikt.

Volgt nog een grondige training in het begrepen rekenen met rationale getallen.

In het tweede boek worden de axioma's aanschouwelijk gefundeerd die in Mathématique Moderne aan de meetkunde ten grondslag gelegd worden. Eerste axioma: het vlak is een oneindige puntverzameling. Om dit te funderen wordt een cirkelschijf getekend. Teken punten daarbinnen. Nu dreigt het mis te gaan. De punten beginnen elkaar te raken en de leerlingen blijven daardoor in het eindige steken. Frédérique schakelt over op een lijnstuk. Hetzelfde gevaar blijft dreigen. Maar nu haalt Frédérique de reële getallen erbij. Bij deze wordt het tussen nooit uitgeput. Bij de punten dus ook niet. Aanschouwelijk wordt aangetoond dat door elk punt precies één rechte gaat die tot een bepaalde richting hoort (richting wordt correct gedefinieerd). En dit resultaat wordt expliciet het axioma van Euclides genoemd.

Nu het vectorbegrip. De vector ab wordt gedefinieerd als de verzameling van puntenparen die ekwipollent zijn met het paar (a, b) . Men hoort uit de mond van de leerlingen: C'est une fonction. C'est une permutation du plan. Vectoren worden opgeteld (samenstelling van functies). De samenstelling levert weer een vector, hetgeen officieel bewezen wordt ook. De projectie van een vector op een lijn is weer een vector. Ook dit wordt bewezen, nadat men zich eerst zorgvuldig gerealiseerd heeft wat deze bewering eigenlijk wil zeggen. En dit is geen sinecure. De projectie van het midden blijkt nu het midden van de projectie te zijn en de diagonalen van een parallellogram delen elkaar dus middendoor.

Op de rechte lijn zijn twee natuurlijke totale ordeningen. Om de portee hiervan beter te begrijpen worden op de rechte lijn ook totale ordeningen geconstrueerd die van de natuurlijke verschillen. Er zijn er daarbij die een maximaal en een minimaal element hebben, maar ook die dergelijke elementen niet hebben.

Hierna wordt op de rechte lijn een tweetal punten gekozen waarbij de getallen 0 en 1 gezet worden en daarna met behulp van de eigenschap van de diagonalen van een parallellogram een duale schaal op de lijn aangebracht. Bewezen worden de stelling van Thales (als bij projectie 0 en 1 overgaan in 0 en 1, gaat elk punt van de duale schaal over in een punt met dezelfde coördinaat) en de stelling van Desargues. Tot slot volgt nog de scalaire vermenigvuldiging van vectoren en de homothetie.

Nu eerst enig commentaar. Sommige stukken, met name de invoering van het reële getal, de optelling van hoeken, het laten zien dat het vlak en de rechte lijn oneindige puntverzamelingen zijn, zijn ware momenten uit de hogeschoolkunst van de didactiek. Men leest ze ademloos en ze kunnen door de leerlingen in deze vorm goed begrepen worden. Dan volgt een stuk meetkunde over vectoren dat ik met verbazing gelezen heb. Dit kan nauwelijks meer een voorbereiding op later meetkundeonderwijs genoemd worden. Het is al vrijwel dezelfde strenge meetkunde die men ook in MM vindt. Het blijft een enorme kunst de leerlingen zover te brengen dat ze de gedachtengang volgen en daarin slaagt Frédérique. Maar tussen de psyche en het bevattingvermogen van een kind van 10 of 11 jaar en de inhoud en presentatie van de stof kan ik nauwelijks meer verband zien. Het derde deel over toegepaste wiskunde komt weer veel dichterbij de realiteit en daardoor dichterbij de kinderziel. Aardige problemen komen ter tafel. Een krantenman koopt kranten en verkoopt

ze met 2 F winst. Elk niet verkocht exemplaar levert echter 1.50 F verlies op. Over de te volgen strategie zijn aardige vragen te stellen. Verder de taxi afstand en het aantal taxiwegen van A naar B en enkele combinatorische problemen zoals aantallen permuties en het aantal deelverzamelingen met 5 elementen van een verzameling met 9 elementen. Hierna nog een korte inleiding in de kansrekening. Een didactisch zeer fraai hoofdstuk.

Het vierde deel is weer erg wiskundig. Er worden grapjes met oneindig uitgehaald waardoor men bijv. ziet dat het mogelijk is oneindig veel personen elk een hoed bij de vestiaire te laten inleveren en daarna bij vertrek 10 hoeden op te zetten. Het is voor mij de vraag of hierdoor een goed inzicht in het oneindige bevordert of belemmert wordt. Daarna een uiteenzetting over structurele begrippen, zoals commutativiteit, associativiteit, distributiviteit, neutraal element, groep, die weer erg abstract is en waarbij geen contact met de realiteit gelegd wordt.

Het laatste deel is bedoeld als een inleiding tot de axiomatische fundering van het oppervlaktebegrip. Eerst wordt door quadrillage een oppervlakte benaderd. Daarna worden na aanschouwelijke voorbereiding de axioma's geponeerd: bij translatie resp. puntspiegeling is de oppervlakte van de beeldfiguur gelijk aan die van de oorspronkelijke. Hierna kan de oppervlakte van een parallelogram en van een driehoek gevonden worden.

Men zal uit de bespreking al gemerkt hebben dat ik het boek met gemengde gevoelens gelezen heb. Enerzijds met grote bewondering voor de didactische gaven van de schrijfster. Maar anderzijds geloof ik dat haar streven om op zo jeugdig mogelijke leeftijd de kinderen reeds zoveel mogelijk wiskunde bij te brengen en op zo hoog mogelijk niveau, haar parten gespeeld heeft. De kinderlijke formuleringen van de leerlingen worden vaak gecorrigeerd op een zodanige manier dat de formulering nu wiskundig correct is, maar niet meer rekening houdt met de manier waarop kinderen zich uitdrukken als ze proberen iets te begrijpen. Vergeleken met de eerste drie delen van *Les enfants et la mathématique* vind ik dit een achteruitgang die ik betreurt. Het is natuurlijk waar dat de kinderen inmiddels een jaartje ouder zijn geworden, maar of ze geestelijk zo snel rijpen, dat ze op deze manier gepresenteerde stof kunnen verwerken, betwijfel ik.

Hetgeen niet wegneemt dat het voor ieder die zich voor de problemen van het onderwijs op de basisschool interesseert, een belangwekkend boek is.

P. G. J. Vredenduin

Helmut Brass, *Quadraturverfahren*, serie Studia Mathematica, Skript 3, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977, 311 blz., DM 35, —.

Dit boek behandelt een klasse van methoden ter berekening van bepaalde integralen van continue reële functies. Daar de standaardmethode via primitieve functies uiteraard meestal niet bruikbaar is, wordt naar geschikte methodes gezocht. Men vindt al direct een methode in het feit, dat een integraal limiet is van een rij Riemann-sommen. Hieruit is dan op eenvoudige wijze een rij functionalen te verkrijgen. Belangrijke overwegingen zijn dan het afschatten van resttermen en interpolaties.

Als voorkennis dient men te beschikken over een goede kennis van de reële analyse, van de grondbeginselen van de functietheorie en de functionaalanalyse.

Het boek wordt besloten met een uitgebreide literatuurlijst en een register.

W. Kleijne

Mededelingen

Ausschreibung des Comenius-Preises

Das Frankfurter Institut für Bildungsmedien e. V., hat im Gedenken an Johann Amos Comenius, den überragenden Pädagogen und Verfasser des ersten mehrsprachigen weltberühmten Schulbuchs "Orbis Sensualium Pictus", den Prediger und Bischof der Böhmisches Brüdergemeinde, einen Comenius-Preis ausgeschrieben, der mit 10 000,- DM dotiert ist.

Der Comenius-Preis wird einer Persönlichkeit verliehen, die in hervorragendem Maße vornehmlich durch ihre Tätigkeit auf dem Gebiet der wissenschaftlichen Forschung oder der Publizistik den Einsatz moderner Bildungsmedien im Unterricht gewürdigt und gefördert hat durch allgemein verständliche journalistische Darstellung in Presse, Funk oder Fernsehen.

oder

durch die öffentliche Mitteilung von Ergebnissen pädagogisch-didaktischer Forschungen

oder

durch nachhaltig wirksame Beteiligung an der öffentlichen Diskussion über den Einsatz moderner Bildungsmedien im Unterricht.

Für die erstmalige Verleihung im Jahre 1979 werden alle diejenigen einschlägigen Arbeiten berücksichtigt, die seit dieser Ankündigung im Bundesanzeiger bis zum 15. Mai 1979 publiziert wurden und dem Preisrat des Comenius-Preises bekannt geworden sind.

Unterlagen und weitere Einzelheiten können beim Institut für Bildungsmedien e. V., Postfach 900540, Zeppelinallee 33, 6000 Frankfurt am Main, angefordert werden.

Frankfurt am Main, den 5. April 1978, Institut für Bildungsmedien e. V., Der Vorstand, Dipl.-Volksw. Hans-Peter Vonhoff, Dr. phil. Norbert Siara

Vierde gezamenlijke studiedag van de VVWL en de NVvW

Op zaterdag 24 maart a.s. wordt te Rotterdam de vierde gezamenlijke studiedag van de VVWL en de NVvW gehouden.

Plaats van samenkomst: Restaurant Engels, Stationsplein 45, Rotterdam (in het Groothandelsgebouw).

Aanvang 11.00 uur, einde 16.00 uur.

Sprekers:

George Schoemaker, Wat moet iedereen van wiskunde weten?

Prof. Dr. Fred Vermandel, Wiskundig denken in de klas.

Fred Vermandel is hoogleraar in de didactiek aan de UIA (Universitaire Instelling Antwerpen).

De lunchkosten bedragen f 9.50, per giro te voldoen voor 15 maart door storting op giro 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

Een goed contact tussen vlaamse en nederlandse wiskundeleraren is van groot belang. Reserveer daarom direct in uw agenda deze dag.

Het bestuur

Brief aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen

Naar aanleiding van een passage in CVO-bulletin nr. 2 van 17 november 1977 willen wij het volgende onder Uw aandacht brengen.

Bladzijde 4 van genoemd bulletin vermeldt een extra vergadering van de CVO waarbij op Uw verzoek de mogelijkheid werd besproken de twee examenzittingen bij o.a. het examen wiskunde voor m.a.v.o. op één zitting te brengen, waarin aan de kandidaten meerkeuzevragen worden voorgelegd.

Hoewel naar onze mening de examentijd en ook de wijze waarop geëxamineerd wordt discutabele zaken kunnen zijn, heeft de mogelijkheid de examentijd op één zitting van twee uren te brengen grote bezwaren bij ons opgeroepen. Wij achten het onmogelijk dat in één zitting met dezelfde doeltreffendheid kan worden getoetst als in de huidige situatie, waarin aan de kandidaten in de ene zitting dertig korte vragen (meerkeuzevragen) en in de andere zitting vier open vragen van gecompliceerder aard worden voorgelegd. U gelieve daarbij in het oog te houden dat een m.a.v.o.-4-leerling vier jaren lang gemiddeld vier wekelijkse lesuren wiskunde heeft gehad en dat bij het centraal schriftelijk eindexamen alle elementen van de leerstof onderwerp van examinering kunnen uitmaken.

Het houden van één zitting zal het examen verschrompelen. Er is dan ook veel weerstand tegen deze mogelijkheid bij het Mavoverband.

Ook vele docenten wiskunde bij het m.a.v.o. zijn verontrust. Dit bleek uit de op 31 mei j.l. gehouden besprekingen van de m.a.v.o.-examens wiskunde in 1978. Verreweg het grootste gedeelte van de ongeveer duizend hierbij betrokken docenten sprak zich tegen de mogelijkheid van één zitting uit. Het houden van één zitting met meerkeuzevragen achten wij onderwijskundig gezien verwerpelijk. Wij zijn ervan overtuigd dat het niet mogelijk is bepaalde leerdoelen met behulp van meerkeuzevragen te toetsen. Er zal zeker een negatieve invloed van deze wijze van examineren uitgaan op de kwaliteit van het wiskunde-onderwijs bij het m.a.v.o. Bovendien komt dan de doorstroming naar het h.a.v.o. in het gedrang.

Vele docenten zullen het als een discriminatie beschouwen dat men bij het h.a.v.o. en v.w.o. in de open-vraagvorm kan blijven examineren, ervan uitgaande dat het niet in Uw bedoeling ligt op den duur ook bij het h.a.v.o. en v.w.o. op meerkeuzevragen over te gaan.

Ons opinie-onderzoek bij bovengenoemde besprekingen wees uit dat men praktisch unaniem van mening was dat één zitting met meerkeuzevragen het wiskunde-examen en daarmee het m.a.v.o.-diploma zal devalueren.

Op verzoek van de CVO werkt men bij het CITO aan een onderzoek naar de correlatie tussen resultaten van meerkeuzevragen en open vragen.

Tevens is er bij het CITO een onderzoek gaande naar de in de wiskunde-examens verwerkte leerstof en naar de moeilijkheidsgraad van de opgaven (ten aanzien van het examen in de open-vraagvorm). De resultaten van deze onderzoeken worden aangeboden aan de uit CVO-leden bestaande Stuurgroep Open Vragen.

De genoemde onderzoeken zijn nog niet afgesloten. Het zou jammer zijn als tot een wijziging van het aantal zittingen wordt overgegaan voordat de CVO tot een advies is gekomen.

Samenvattend dringen wij er bij U op aan in ieder geval niet over te gaan tot het houden van één zitting met meerkeuzevragen en alvorens verandering te brengen in het aantal zittingen een commissie van deskundigen in staat te stellen een mening te vormen over de onderwijskundige gevolgen van een dergelijke maatregel, waarbij zij tevens een advies zal kunnen formuleren omtrent de vraag hoe een examen van één zitting gestructureerd zou moeten zijn op basis van de in het onderwijs nagestreefde leerdoelen.

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,
drs. J. W. Maassen, secretaris, 16 november 1978.

Het vijftiende Nederlands Mathematisch Congres

Het vijftiende Nederlands Mathematisch Congres wordt gehouden op woensdag 11 en donderdag 12 april 1979 in het auditorium van de Technische Hogeschool te Eindhoven.

De openingsvoordracht van Prof. dr. F. van der Blij is getiteld 'Schoksgewijze groei; differentievergelijkingen voor liefhebbers en gebruikers'.

Prof. dr. ir. P. J. Zandbergen houdt de slotvoordracht over 'De stromingen en wervelingen in de toegepaste wiskunde'.

Het congres is ingedeeld in secties. Voor deelnemers is er gelegenheid in een bij hun onderwerp passende sectie een korte voordracht van 25 minuten te houden.

Aanmelding voor het houden van een dergelijke voordracht evenals inschrijving als deelnemer dient te geschieden vóór 1 maart.

Voor nadere inlichtingen kan men zich wenden tot de secretaris van de congrescommissie: J. van der Kleij, onderafdeling der Wiskunde, Technische Hogeschool Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB EINDHOVEN, tel. 040-472908/472761.

Regionale bijeenkomsten ter bespreking van de wiskunde-examens 1979

Deze bijeenkomsten zullen ook dit jaar weer worden gehouden. In een volgend nummer van Euclides hopen we een volledig overzicht af te drukken. De data kunt u nu alvast noteren:

donderdag 10 mei wiskunde mavo-4, open werk.

vrijdag 11 mei wiskunde mavo-3/Ito-C, open werk.

vrijdag 11 mei wiskunde I en havo.

Het bestuur

11e Vakbeurs voor Didactisch Materieel – SADIBEL

Van 5 tot en met 10 mei 1979 zal de 11e Vakbeurs voor Didactisch Materieel SADIBEL plaatsvinden in het Tentoonstellingspark van Brussel, georganiseerd door de Internationale Jaarbeurs van Brussel.

Deze manifestatie staat onder de hoge bescherming van de Ministers van Nationale Opvoeding van de Franse en de Nederlandse taalrol, van verschillende ouderverenigingen en geniet de steun van culturele organisaties. Zij zal een uitgebreide gamma van gespecialiseerde artikelen voorstellen die bijdragen tot de vorming en de opvoeding van de jeugd, de volwassenen en de 3e leeftijd.

Inderdaad, indien enkele jaren geleden de term 'didactisch' nauw verband hield met de term 'schools', is zijn betekenis momenteel veel ruimer en omvat hij alles wat te maken heeft met de pre-, para- en postschooltijd, alsook met de permanente vorming en de socio-culturele vrijetijdsbesteding.

De 11e Vakbeurs voor Didactisch Materieel SADIBEL richt zich voornamelijk tot de leraars, de studenten, de ouderverenigingen, de handelaren in didactisch materieel, maar tevens tot de technische scholen, bewaarscholen, de gemeentelijke overheden, de inspecteurs, de verantwoordelijken voor de permanente vorming.

Dit ruime publiek is inderdaad rechtstreeks betrokken bij het tentoongestelde materiaal, dat gaat van audio-visuele technieken, laboratorium- en computerinstrumenten, tot de atlassen, boeken voor volwassenen, zwarte, zelfklevende, magnetische borden en borden met viltten achterkant, schoolmeubelen, enz. . . .

Inlichtingen: Internationale Jaarbeurs van Brussel – Tentoonstellingspark – B - 1020 Brussel – Tel. 02/478.48.60 – Telex 23.643.

Zojuist verschenen in de serie:

getal en ruimte



deel 2M2N

Antwoorden bij 2M1

Handleiding bij 2M1

Antwoorden bij 2M2N

Handleiding bij 2M2N

Antwoorden bij 5/6V2 (4e druk)

Voor informatie:

Tel. 03450-3143

educaboek culemborg



leerdoelgerichte toetsen voor de onderbouw

- Nederlands
- Engels
- Biologie
- Frans
- Wiskunde

uitgebreide brochure op aanvraag beschikbaar.



productie en distributie: Educaboek – Culemborg tel. 03450-3143



de rijksuniversiteit groningen vraagt:

didacticus wiskunde m/v

(vac.nr. 790118/EUCL)

bij de Subfaculteit Wiskunde
(Paddepoel-complex).

Vervulling van de vacature door twee
medewerkers met elk een 5/10 dagtaak behoort
tot de mogelijkheden.

Taakomschrijving:

De werkzaamheden als lid van het team voor de
didaktiek van de wiskunde zullen voornamelijk
bestaan uit:

- geven van onderwijs in de didaktiek van de
wiskunde in het kader van de universitaire
opleiding tot wiskundeleraar
- begeleiden van stages van de studenten in de
scholen
- ontwikkelingen en uitvoeren van onderdelen
van het onderwijsprogramma voor de
geprofessionaliseerde lerarenopleiding
- deelnemen aan de organisatorische en
algemene werkzaamheden ten behoeve van
de universitaire lerarenopleiding
- verrichten van didactisch onderzoek, dat met
de overige taken samenhangt.

Vereisten:

Een aantal van de volgende kwaliteiten zijn
vereist:

- voltooide academische of gelijkwaardige
opleiding in de wiskunde
- ruime ervaring en een goede reputatie als
wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs
- gebleken belangstelling voor en bekendheid
met de ontwikkelingen in de didaktiek van de
wiskunde
- enige ervaring met het begeleiden van stages
in de school
- enige ervaring met didactiecurssussen voor
leraren
- bereidheid tot samenwerking met algemeen
didactici en didactici van de andere disciplines
binnen de faculteit.

Nadere inlichtingen kunnen worden ingewonnen
bij de didacticus wiskunde, drs. A. van Streun, tel.
050-116743 (privé 05944-2093).

Aanstelling geschiedt aanvankelijk in tijdelijk
dienst, doch betrokkene(n) is (zijn) in principe
bestemd voor opnemning in het vaste
wetenschappelijke corps.

Salariëring vindt plaats volgens het rangenstelsel
voor wetenschappelijk medewerker.

Datum indiensttreding:
01-04-1979.

sollicitaties:

schriftelijk binnen twee weken na plaatsing
van deze advertentie te richten aan de
directeur van de Dienst Personeelszaken,
Postbus 72, 9700 AB Groningen, onder
vermelding van het vacaturnummer op brief
en envelop.

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van
uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32^I - Amsterdam (c) - Tel. 020-2628 10

rekenvaardigheid



Voor training van de rekenvaardigheid in de brugklas.

Met toetsen voor diagnostisch gebruik.

Ruimte voor getallen ISBN 9011 81652 8

Antwoorden ISBN 9011 81653 6

Toetsen ISBN 9011 81654 4

Handleiding en antwoorden ISBN 9011 81653 2

Voor informatie:

Tel. 03450-3143

educaboek culemborg

INHOUD:

Fred Goffree: Vakdidaktische notities 221

P.G.J. Vredenduin: Merkwaardige notaties 225

Prof. Dr. A. F. Monna: Colleges 'Achtergronden van de Schoolwiskunde' aan het Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht 232

Drs. P. Duyvesteyn: Het afleiden van goniometrische formules m.b.v. rotaties 235

Dr. Th. J. Korthagen: Jaarrede 1979 238

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 244

Ontvangen boeken 246

Recreatie 247

Boekbesprekingen 248

Mededelingen 250

ADRESSEN AUTEURS:

Drs. P. Duyvesteyn, Wijnruitgaarde 30, 3436 HR Nieuwegein.

Fred Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin.

Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld.

Prof. Dr. A. F. Monna, Math. Inst. R. U. Utrecht, Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.