

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

54e jaargang

1978/1979

no. 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2343 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 25,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, 2242 CD Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet leden f 33,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer is per abonnement f 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Vaardigheden van een wiskundedocent(e), het gepland en ad hoc kunnen reageren¹⁾

FRANCIS MEESTER

Een docent moet vaardig zijn op allerlei terreinen.

In dit artikel probeer ik in het vaak schijnbaar intuïtieve handelen van een docent wat meer structuur aan te brengen. Waar schort het aan als een docent in een klas, niet kan werken zoals hij/zij graag zou willen. Hoe kan het dat van twee docenten, die beide met hetzelfde materiaal werken, de één prima draait, terwijl de ander na een paar weken de grond onder zijn voeten voelt wegglijden? Wat moet een docent niet allemaal kennen en kunnen om zijn/haar onderwijsdoelen te kunnen verwezenlijken? Daar gaat dit artikeltje over. Eerst vertel ik iets over het onderwijs, zoals wij dat op het Ignatiuscollege in Purmerend geven. 'Wij', dat zijn zes wiskundedocenten, die in nauwe samenwerking een werkwijze ontwikkeld hebben, opdat leerlingen binnen de wiskunde beter tot hun recht komen. Ik beperk mij tot 3 HAVO en 4 VWO. Daarna kijken we wat er voor vaardigheden van de docent gevraagd worden om op deze manier onderwijs te kunnen geven. In deze vaardigheden brengen we een verdeling aan. Ik hoop dat ik duidelijk kan maken, dat het zinvol is om onderscheid tussen vaardigheden te maken, om je bewust van dit onderscheid te zijn en dat je daarmee teleurstellingen kunt voorkomen.

Werkwijze Ignatiuscollege

Wij, op het Ignatiuscollege, willen dat 'leerlingen zich ontwikkelen tot zelfstandige, denkende en handelende mensen in samenwerking met anderen, dat zij bewust eigen mogelijkheden en beperkingen leren kennen en gebruiken'.

De docent probeert dit te doen vanuit de attitude van aanvaarden van de leerling zoals deze is. Een attitude van bereidheid om te luisteren, te adviseren, met verschillen tussen leerlingen rekening houdend. Hij/zij is bereid om materiaal te bewerken of nieuw materiaal te ontwikkelen.

Wat betekent dit nu in concreto voor ons voor het wiskundeonderwijs op drie HAVO?

Als eerste hebben we een zorgvuldige leerstofanalyse gemaakt. Twee vragen stonden daarbij centraal:

- Wat moet een leerling kennen en kunnen, die in 4 HAVO wiskunde kiest;
- Wat moet een leerling kennen en kunnen, die drie jaar wiskunde gehad heeft, wat kan hij/zij gebruiken in een vervolgstudie?

Dit resulteerde in het volgende schema.

Leerstofindeling 3 HAVO

(van A tot Z – M⁴3a – M⁴3b – M⁴4)

aug. tot 15 jan. tot eind febr.	Proef	deel	lessen	
	26	3a	14 – 15* – herhaling 3a	
	27	3b	16* – 21* – 22 – 27	
	28	3b	18 – 23 – 24 – 26	
	29	3b	28 – 29*	{ 29* – 19 – 29 – 29 1 – 5 – 8
		4	1 – 2	
	30	4	4 – 5 – 8	
maart t/m juni	31	3b	herhaling 3b	
	Wiskunde in pakket			geen wiskunde
	Proef	deel	lessen	proef
	32	4	3 – 6 – 7 – 9	Kansberekening
			§2* – §3* – §4*	
	33	4	11 – 12 – 13	meetkundige rijen
	34	4	herhaling M ⁴ 4	lineaire programmering

Lessen met sterretje * gemerkt:

Hierbij moet je niet vergeten de extra of vervangende instructie te maken.

We gebruiken de *Van A tot Z* delen, de MAVO-editie. Binnen een hoofdstuk hebben we vaak sommen of onderdelen van sommen weggestrept.

De werkvorm

Leerlingen hebben in de eerste en in de tweede klas leerstof doorgewerkt in samenwerking met anderen of individueel. Dit zet zich voort in de derde klas, met soms een klassikale introductie of een klasgesprek als afsluiting van een onderwerp. De leerlingen kijken hun gemaakte hoofdstukken na met een antwoordenboekje.

Wanneer we nog even naar de leerstofplanning kijken, zien we dat er de tweede helft van het schooljaar twee programma's door elkaar lopen, binnen één klas, met één docent en vaak in één lokaal. Maar ook daar kun je in veel zaken voorzien, materialen, antwoordenboekjes, proeven, minimumtempo, werkvorm kun je van te voren plannen.

Maar leerlingen reageren niet altijd zoals de plannen zijn. Zij willen bijvoorbeeld geen klassikale introductie, maar willen eerst iets afronden. Begrijpelijk, maar jij denkt aan het groepje dat er wel aan toe is. De leerstof kan voor enkelen wel eens moeilijk vallen of er kan misbruik van het antwoordenboekje

gemaakt worden of er wordt gewoon de vraag gesteld: ‘Waarom moet ik dit doen?’.

Na al het voorbereidende werk in de vaksektie wordt er nu van de docent gevraagd op die bijzondere klassesituatie, op dat moment, voor die paar leerlingen zo adequaat mogelijk te reageren. Dit kan zijn, door een inleiding van een hoofdstuk voor een paar leerlingen te houden, werkafspraken met een paar leerlingen te maken voor de volgende les, samen met een leerling zijn schrift doornemen, enthousiast zijn voor geleverd werk etc.

Vaardigheden

Steeds gaat het om het kunnen reageren van de docent op de verschillen tussen leerlingen. We hebben gezien, dat dit op verschillende manieren kan gebeuren n.l. gepland en ad hoc.²⁾

gepland reageren:

van te voren bedenken welke individuele verschillen er mogelijk zijn en hoe hierop te reageren met materialen, werkvorm, leerstof, om aan je doelstellingen te kunnen werken.

ad hoc reageren:

in onverwachte situaties zó kunnen reageren, dat je als docent(e) rekening houdt met de bijzondere situatie van dat ogenblik en (toch) individuele verschillen honoreert.

Binnen deze vaardigheden is er een onderscheid mogelijk naar het sociale gebied en het wiskundig didactisch terrein. Schematisch weergegeven

	het sociale gebied (1)	het wiskundig didactisch terrein (2)
gepland reageren (A)		
ad hoc reageren (B)		

Voorbeelden:

- A1 – praten over werkvorm – leerlingen gevoelig maken voor een nieuw onderwerp – samenwerken
- A2 – leerstofanalyse – proeven – antwoordenboekjes – planning tempo
- B1 – luisteren – stimuleren – prijzen – leiding geven – leiding aan anderen overlaten – feedback geven – feedback ontvangen
- B2 – op nivo van de leerling uitleggen – voorbeelden snel kunnen bedenken – een niet volledige oplossing aksepteren – diagnosticeren

Om de rij B nog wat duidelijker te maken, denken we aan vrijdagmiddag het zesde uur drie HAVO van 25 leerlingen in noodlokalen. U begrijpt dit zijn niet de gemakkelijkste uren. Hoe reageer je op vragen als: ‘Tot hoe lang duurt dit uur?’, (als ze vijf minuten binnen zijn), ‘Nee, ik doe nu niets, ik doe het thuis wel’, of ‘Ik heb mijn schrift thuis laten liggen, ik heb het wel gemaakt. Nu

schrijf ik de antwoorden even over om het thuis na te kunnen kijken' of 'Kunnen we die sinusregel niet overslaan?'

In zo'n uur speelt motiveren, vertrouwen geven, open staan voor wat zij denken een belangrijke rol. Uit wat voor soort opmerkingen van mij blijkt dan dat vertrouwen geven of dat motiveren?

- individuele werkafspraken maken, cel B1
- aangeven, dat nu het even moeilijk is, ze het niet moeten opgeven. In het verleden (liefst concreet aanwijzen) zijn we er ook uitgekomen, cel B2
- een opdracht aan jou laten uitleggen, cel B2 of aan andere leerlingen, cel B1, 2
- aan iemand, die zegt er niets van te snappen, de eis stellen dat hij/zij drie dingen opschrijft, die niet gesnapt worden, B1-2
- de eis stellen dat iemand tien minuten lang zijn mond dichthoudt, cel B1
- aan hun klacht, dat ze het vreselijk druk hebben met allerlei vakken, tegemoet komen door andere werkafspraken te maken (weliswaar binnen grenzen), cel B2.

Ik hoop dat ik met de voorbeelden duidelijk heb gemaakt, wat ik met de matrix bedoel.

Zinvolheid van een indeling

Wat is nu het nut van zo'n matrix, die een indeling in vaardigheden geeft? Het kan een kapstok zijn om jouw functioneren in de klas, in de collegezaal te analyseren. Waarom loopt het niet, zoals ik graag zou willen?

Ik weet, dat als ik mijn lessen goed voorbereid, van te voren over de op te treden verschillen nadenk, ik veel minder ad hoc hoeft te reageren en me zekerder voel (ik denk nu ook aan beginnende docenten).

Er moet een soort evenwicht tussen de verschillende cellen uit de matrix bestaan, een evenwicht dat van de individuele docent afhankelijk is, voor iedere docent is het anders. De één reageert veel gemakkelijker ad hoc dan een ander en voelt zich in een geplande situatie benauwd. Anderen willen veel geplands achter de hand hebben, voelen zich anders onzeker. Maar nooit zal een docent het met vaardigheden uit één rij redden. Een onderschatting van een rij kan al vervelende gevolgen hebben. Wij zijn daar dit jaar weer met onze neus opgedrukt.

Vorig jaar maakten wij plannen voor 4 VWO (ongedeeld). We wilden leerstof geven, die zowel zinvol was voor leerlingen, voor wie wiskunde eindonderwijs is, als voor leerlingen, die wiskunde één of wiskunde twee zouden kiezen. De leerlingen zouden door het materiaal zelf ontdekken, waar hun interesses en mogelijkheden en beperkingen lagen. Het materiaal moest dus via uitbreiding en verdieping zelfdeterminerend werken.

We kozen voor het volgende pakket, dat we grotendeels zelf moesten maken:

- 1 differentiaalrekening (inleiding)
- 2 statistiek
- 3 functies van twee variabelen (IOWO)
- 4 meetkunde
- 5 differentiaalrekening (vervolg formules)
- 6 lineaire programmering

Voor ieder blok was zes weken gepland, waarbij aan verdieping werd gedacht

bij de laatste vier blokken. Ook zouden er pakketten leerstof zijn, die gekozen konden worden naast andere leerstof. Wij dachten aan logica, grafentheorie en complexe getallen. Dit was om het totale aanbod van leerstof royaler te maken en tempoverschillen op te vangen.

We hebben onszelf overschat. Over de vaardigheden om de leerstof te maken beschikken we wel, dat geloven we nog steeds, maar de tijd ontbrak ons. Al met al kwamen we niet toe aan het maken van de verdieping en uitbreidingsstof. Ook de extra pakketten werden niet gemaakt. We voorzagen dus vorig jaar dat er verschillen tussen leerlingen zouden gaan optreden, we waren bereid daarop gepland te reageren, maar konden niet vanwege de tijd.

Wat voor konsekwenties had dit nu in de klas? Er werd een te groot beroep op de vaardigheden van de docent uit rij B gedaan. Goede leerlingen gingen zich vervelen, werden te weinig uitgedaagd en werktempo en enthousiasme zakten ineen. Een onderschatting van rij A doet een te groot beroep op de vaardigheden uit rij B. Een zelfde gevaar dreigt als een rij overgewaardeerd wordt. Denk aan cel A2, een geheel geplande situatie, het schrikbeeld voor ons onderwijs. De basisleerstof is gepland en ligt vast, er zijn antwoordenboekjes, er is een D-toets (diagnostische toets) met verwijzingen naar de steunstof verrijkingsstof en uiteindelijk een B-toets (beoordelingstoets). Eveneens zal in zo'n geplande leersituatie een beroep op de vaardigheden uit cel B1 gedaan worden. Want de leerling voelt zich niet meer persoonlijk benaderd, motivatiedaling en frustratie zijn het gevolg. Maar met het geplande materiaal kan de docent prima lesgeven, hij/zij moet er ad hoc mee kunnen omspringen.

Terug naar de vraag: 'Waar is die kapstok voor mij of voor mijn sectie nuttig voor?'

Wij weten dat nieuwe docenten in de wiskundesectie vaardigheden uit rij A en vooral cel A2 gedeeltelijk zelf ontwikkeld hebben en ook van ons mee kunnen krijgen. Zij zullen deze vaardigheden verder gaan ontwikkelen. Maar vaardigheden uit rij B kunnen wij niet meegeven. Wij weten wel uit ervaring dat op 3 HAVO een veel groter beroep op de ad hoc vaardigheden wordt gedaan dan in een eerste of tweede klas. Met als konsekwentie, dat er bij voorkeur geen nieuwe docenten in deze klassen komen te staan.

Een ander voorbeeld. Wij zijn aan het plannen maken voor de brugklas van het volgend jaar. Nadat we eerst hebben uitgesproken wat we wilden, zijn we gaan inventariseren wat er voor een vaardigheden gevraagd worden. Daarna het stadium van de haalbaarheid, haalbaar in tijd? Maar nog veel belangrijker lijken de gevraagde vaardigheden uit rij B. Wanneer we aan IOWO-materiaal denken, wordt er een groot beroep op ad hoc vaardigheden gedaan. Denk maar aan klassikale nabesprekingen, terwijl leerlingen willen doorwerken, problemen in het groepswerk, de meer open probleemstelling, waardoor leerlingen vooral in het begin vaak sneller een beroep op de leerkracht doen. Dit kan voor ons voor het volgend jaar betekenen dat wij maar incidenteel IOWO-materiaal gaan gebruiken.

Nog wat konklusies: Hoe vaardiger je in de geplande reacties wordt, des te gemakkelijker je ook ad hoc reageert. Je kunt altijd veilig terugvallen op de vaardigheden, die gepland waren.

Wanneer je langer in het onderwijs bezig bent, dus ook langer in de rij A aan het werk geweest bent, wordt je arsenaal waaruit je ad hoc kunt putten, groter. In onverwachte situaties heb je herkenning uit het verleden, met alle gevaren van dien, je herinnert je het succesvolle optreden of niet succesvolle optreden van toen en je reageert vaardig op de situatie.

De cel A1 wordt systematisch onderschat in het onderwijs. Denk maar eens aan het evalueren van een les of lessenreeks. Heel vaak gebeurt dit alleen met een leerstofoets en zelden met de vraag: 'Hoe vonden jullie het gaan? Hoe heb je (samen)gewerkt?' Dat wij onze vaardigheden in die eerste kolom nog veel verder moeten ontwikkelen lijkt een duidelijke zaak.

Schriftelijke informatie is volkomen gepland. Wel kan het ad hoc reacties oproepen, herkenning uit klaspraktijk en/of voorbeelden. Wanneer u die wilt opschrijven, graag. Op die manier komen we in de didaktiek verder.

Over de auteur:

Francis Meester behaalde in mei 1967 haar hbs-b diploma, in december 1969 haar mo-a en in juni 1971 haar mo-b. In september 1970 is zij les gaan geven op het Ignatius college in Amsterdam, later in Purmerend. Al die jaren is haar sectie bezig met vormen van differentiatie binnen de wiskunde.

Ze is lid van de didaktiekkommissie en werkt mee aan het voorbereiden en uitvoeren van de A, B en C cursussen.

Naast haar schoolwerk begeleidt ze nieuwe docenten en helpt ze mee aan het schrijven van een lbo-wiskunde serie.

¹ Deze lezing is gehouden op het kongres van het Wiskundig Genootschap in maart 1978.

² Deze indeling is gemaakt door de didaktiekkommissie bij de voorbereiding van de C-cursus.

Schoolboekenmarkt voor wiskunde in de jaren 1900–1925

JOH. H. WANSINK

1 In een tweetal artikelen heb ik eerder een en ander meegedeeld over de schoolboekenmarkt hier te lande voor wat het wiskunde-onderwijs 'oude stijl' betreft. In *Euclides* kwamen daarbij enquêtes uit de jaren 1890 en 1961 ter sprake (dl. 51, p. 315–324). In het *Nieuw Archief voor Wiskunde* werd de ontwikkeling op de schoolboekenmarkt in de periode 1800–1940 geschetst (XXVI, p. 214–230). Dit laatste artikel is ook opgenomen in de door het Mathematisch Centrum uitgegeven bundel *Chapters in the recent history of mathematics*. Ook hier komen de enquêtes van de jaren 1890 en 1961 ter sprake. Het is jammer, dat er over de tussen 1890 en 1961 liggende jaren geen statistische gegevens beschikbaar waren, die ons over de frequentie waarmee titels van schoolboeken voor wiskunde in de boekenlijsten worden aangetroffen, hadden kunnen inlichten, zoals de enquêtes van Koppeschaar en mevrouw Stellwag dat voor de jaren 1890 en 1961 hadden gedaan.

Het lijkt me echter mogelijk het genoemde hiaat enigszins op te vullen, zij het niet door kwantitatieve gegevens, maar wel met een reportage die op een persoonlijke impressie steunde.

W. Lietzmann († 1959) geeft ons op gezag van de Utrechtse gymnasiumleraar D. J. E. Schrek († 1962) in zijn *Methodik des Mathematischen Unterrichts* van 1926 een overzicht van de titels van de belangrijkste boeken voor wiskunde die destijds op de Nederlandse scholen gebruikt werden (II, p. 334–339). Lietzmann's overzicht is naar mijn mening bijzonder waardevol, omdat het kon steunen op het inzicht van een man van gezag als Schrek, een docent met grote culturele, historische en didactische belangstelling, die voorzover ik kan beoordelen, zich er meer dan iemand anders voor heeft ingezet om de Nederlandse leraren met reformbewegingen in het buitenland en de leraren in het buitenland met de situatie in Nederland op de hoogte te brengen.

2 We vatten de gegevens door Lietzmann en Schrek verstrekt met weglating van de vermelde titels samen in het volgende overzicht. Achter de namen van de auteurs staan jaartallen vermeld waarin of waarvoor hun eerste schoolboek werd uitgegeven. De namen van eventuele bewerkers van herdrukken zijn niet vermeld.

De negen rubrieken hebben opvolgend betrekking op de deelvakken: rekenen, algebra, planimetrie, stereometrie, gonio- en trigonometrie, beschrijvende

meetkunde, analytische meetkunde, differentiaal- en integraalrekening, logaritmentafels.

auteurs	r	a	p	s	t	bm	am	di	ta	uitgevers
1. H. A. Derksen en G. L. N. H. de Laive, 1899	•	•	•	•	•	•				Thieme
2. C. van Drooge, 1913						•				Van Dishoeck
3. J. Droste en W. F. de Groot, 1923		•						•		Wolters
4. J. van de Griend jr, 1905			•		•					Wolters, Tj. Willink
5. W. W. Jager Bruining en J. Pijl Dzn, 1912	•									Tjeenk Willink
6. W. J. A. Jongkees, 1915						•				Honig
7. A. Kylstra en Joh. A. Vreeswijk, 1911					•					Tjeenk Willink
8. P. Molenbroek, 1896			•	•	•					Sijthoff, Noordhoff
9. W. Reindersma, 1912			•	•	•					Wolters
10. L. Roorda, 1923		•								Noordhoff
11. K. W. Rutgers en N. R. Pekelharing 1922		•								Tjeenk Willink
12. J. du Saar en Joh. A. Vreeswijk, 1919		•								Tjeenk Willink
13. D. J. E. Schrek, 1918							•			Noordhoff
14. G. Smits, 1885			•	•						Robijns
15. A. van Thijn, 1906	•	•	•	•	•		•	•		Wolters
16. D. P. A. Verrijp, 1899					•					Ykema
17. J. Versluys, 1868				•	•		•		•	Wolters, Noordhoff, Versluys
18. W. J. Vollewens, 1920							•	•		Egner
19. W. L. van de Vooren, 1919								•		Noordhoff
20. Jan de Vries en W. H. L. Janssen van Raay, 1893			•							Loosjes, Wolters
21. P. Wijdenes, 1904	•	•	•		•	•			•	Dixon, Noordhoff
22. B. Gonggrijp, 1923									•	Noordhoff
23. A. J. van Pesch, 1872									•	Sijthoff

Het gros van de auteursnamen uit bovenstaande lijst vinden we terug in de enquête van 1961, alleen de onder 3, 6, 7, 10 en 16 vermelde namen ontbreken daar. De lijst van uitgeversnamen is onvolledig; voor wat Wijdenes betreft wijzen we erop dat zo goed als al zijn boeken verschenen bij Noordhoff, alleen het eerste werk, een verzorgde herdruk van Van Pesch (beschrijvende meetkunde), met oefenbladen van Wijdenes, kwam in 1904 uit bij Dixon.

3 Het valt ons in Schrek's lijst op, dat er in 1925 nog grote waardering blijkt te bestaan voor leerboeken die al meer dan een kwart eeuw oud waren. Verdwenen bleken echter ook tal van namen die in het laatste kwart van de vorige eeuw een voorname plaats op onze boekenlijsten hadden ingenomen. Zo ontbreken in 1925 de namen Ninck Blok, Brogtrop, Van Zanten, Bos (P. J.), Knapper, Kreling en Wisselink (D. B.) uit Koppeschaar's voorkeurlijst van 1891.

We laten hier de namen volgen van enige vooraanstaande auteurs uit 1926, van wie reeds in de negentiende eeuw schoolboeken op de markt werden gebracht.

(1) *De meetkunde van Molenbroek*, een auteur die mede dank zij het aandeel

dat Wijdenes bij de verzorging van de opvolgende drukken op zich zou nemen, op den duur een dominerende plaats in ons wiskundeonderwijs wist te veroveren, dateert van 1896. In dat jaar gaf Molenbroek aan het schrijven van een geheel nieuw leerboek de voorkeur boven de verzorging van een nieuwe herdruk van het uit 1868 stammende leerboek van Van Geer.

(2) De verzamelingen *algebraïsche en meetkundige vraagstukken van Smits* dateren van 1885 en wisten zich in de bewerking van Visser en De Van tot ver in deze eeuw te handhaven. Ze dankten hun succes mede aan de ruime plaats die aan het vraagstuk boven de theorie werd ingeruimd.

(3) Het bondige leerboek der vlakke meetkunde van *Jan de Vries en W. H. L. Janssen van Raaij*, dat in 1937 door Okken zou worden aangepast aan het nieuwe wiskunde-programma van dat jaar, dagtekende van 1893. Het bevatte sobere theorie en geen vraagstukken. Het was zeer lang een algemeen gewaardeerd schoolboek.

(4) Op het gebied van de logaritmentafels voor schoolgebruik had *Van Pesch* pioniersarbeid verricht. Zijn tafel in vijf decimalen verscheen in 1872, beleefde in 1925 zijn twaalfde druk; in 1958 kwam de 21ste uit. Eerst in 1963 zou de tafel uit de handel genomen worden, na meer dan 90 jaar lang dienst te hebben gedaan. Ze moest toen wijken voor de tafels van Wijdenes.

(5) Ook nog uit de negentiende eeuw dagtekent de eerste druk van het *leerboek der trigonometrie van Verrijp*. We geven aan dit werk hier enig reliëf, omdat de auteur ervan in tal van sectoren van het organisatieleven van de wiskundedocenten hier te lande zozeer een dominerende plaats heeft ingenomen. In 1929 kwam er van het leerboek een omgewerkte herdruk uit, met omstreeks 1150 opgaven, zoals op de titelpagina staat vermeld. Aan de druk van 1899 was een tweede deeltje toegevoegd geweest dat de leerstof voor sferische trigonometrie, die op het gymnasium werd behandeld, bevatte.

Verrijp's boek was een boek van niveau, dat wil hier zeggen: van hoog wetenschappelijk niveau. Men wordt er duidelijk in geconfronteerd met een ernstig streven naar uiterste gestrengheid en volledigheid. De auteur verzet zich daarbij uitdrukkelijk tegen de opvatting, dat de gonio- en trigonometrie in de schoolwiskunde slechts als een 'bijvak' zou mogen worden beschouwd. Hij onderstreept daarbij de betekenis die aan dit deel van de schoolwiskunde dient toe te komen, als we letten op de toepassingen die er bij voortgezette studie van gemaakt kunnen worden. Maar hij onderkent daarbij onvoldoende de dreigende gevaren van overlading en overbelasting voor de jonge leerling, die aan een streven naar perfectionisme inherent kunnen zijn.

In zijn didactische opvattingen stond Verrijp diametraal tegenover een groeiende groep van leraren, die beseften dat bij wiskunde-onderwijs aan jonge leerlingen didactische principes meer dan voorheen een dominerende rol dienden te spelen, een groep waarvan we Reindersma, wiens naam we ook op Schrek's lijstje aantreffen, als representant kunnen beschouwen. Reindersma was destijds de enige auteur die voor een propaedeutische inleiding tot een logisch op te bouwen meetkunde pleitte en daartoe tevens reeds in 1912 een van de gangbare methoden radicaal afwijkend leerboek op de markt bracht.

(6) Eveneens nog van 1899 dagtekent het vierdelig *leerboek van de algebra* van *Derksen en De Laive*, twee auteurs die in het begin van deze eeuw een volledige

serie schoolboeken voor wiskunde op de markt zouden brengen die in brede kring buitengewoon in de smaak zouden vallen. Zij wisten marginaal tal van verbeteringen aan te brengen in de aanbieding van de leerstof, maar hoedden zich ervoor daarbij sterk van de traditie afwijkende vernieuwingen te propageren. Karakteristiek is in deze de houding geweest die ze aannamen bij de behandeling van de gelijkvormigheidstheorie. In 1897 had Van der Harst voor het eerst hier te lande in een schoolboek de vermenigvuldiging van figuren geïntroduceerd als grondslag voor de gelijkvormigheidstheorie. Geleidelijk aan werden de Nederlandse wiskundeleraren voor de nieuwe behandelingswijze gewonnen. Niet echter Derksen en De Laive. In 1937 zou Van den Heuvel Rijnders bij de bewerking van een nieuwe druk van een planimetrieboek van beide auteurs kunnen verklaren: 'De theorie van de vermenigvuldiging van figuren, waartegen de oorspronkelijke schrijvers steeds paedagogische bezwaren hadden, is in de zesde druk opgenomen en de gelijkvormigheid is daaruit afgeleid. Niet omdat ik de bezwaren van de heren Derksen en De Laive niet deel, maar omdat het nieuwe programma dit imperatief voorschrijft.' Het nieuwe programma waarvoor de auteur tenslotte had te zwichten, was dat voor de HBS van 1937.

Blijkens de enquête van mevrouw Stellwag hebben de meeste schoolboeken van Derksen en De Laive de zestiger jaren van deze eeuw weten te halen.

(7) In de rij van negentiende-eeuwse auteurs verdient *Versluys* in het bijzonder onze aandacht. Reeds enkele jaren na het totstandkomen van de hogereburgerscholen in 1863 blijkt hij zich een plaats op de schoolboekenmarkt te hebben veroverd, en deze plaats heeft hij zijn leven lang weten te behouden. Lietzmann getuigde in 1926 van hem:

'Vor etwa 25 Jahren hatten die Werke dieses äusserst fruchtbaren Verfassers fast die Alleinherrschaft im mathematischen Unterricht Hollands. Späterhin wurden sie von anderen verdrängt.'

In het tweede kwart van deze eeuw zou de eerste plaats die Versluys eenmaal innam door Wijdenes worden overgenomen.

Na Versluys' dood in 1920 gingen zijn werken over in het fonds van Noordhoff. Enkele schoolboeken van Versluys werden daarna nog opnieuw bewerkt: het *leerboek der stereometrie door Schogt*, de *vlakke driehoeksmeting door Postma* en het *leerboek der analytische meetkunde door Wijdenes*. De eerste drukken van deze werken dagtekenden opvolgend van de jaren 1871, 1872 en 1880.

Uit de enquête-Stellwag blijkt, dat 90 jaar na Versluys' debuut zijn stereometrie, zijn driehoeksmeting en zijn logaritmentafels nog op onze scholen in gebruik waren.

(8) In 1926 treffen we in Schrek's voorkeurlijst enige namen niet meer aan van auteurs die bij Koppeschaar nog tot de koplopers hadden behoord: Ninck Blok, Brogtrop, Van Zanten, Bos (P. J.), Knapper, Kreling, Wisselink (D. B.). Enkele van hen hebben in de periode 1900-1925 nog wel een herdruk van hun schoolboek beleefd, terwijl bijvoorbeeld de meetkunde van Knapper een rol bleef spelen bij de studie voor de akte wiskunde-I.o.

4 Schrek's overzicht vermeldt naast de namen van 'oudere' auteurs ook enkele

namen van auteurs die boeken op de markt brachten, die uitdrukkelijk wens-ten te getuigen van instemming met het belangrijk vernieuwingsstreven dat zich in de eerste jaren van de twintigste eeuw in enige westeuropese landen had gemanifesteerd en waaraan namen verbonden waren als die van Felix Klein, Tannery, Borel, Perry, Percy Nunn. In mijn *Didactische Oriëntatie* (dl I, p. 115–119) heb ik uiteengezet, dat de belangstelling voor de groeiende reformbeweging in het buitenland hier aanvankelijk maar matig is geweest en gewezen op de personen die hier te lande in het vernieuwingsstreven een rol hebben gespeeld.

Van de acht auteurs die in 1925 reeds schoolboeken over het omstreden vak differentiaal- en integraalrekening op de markt hadden gebracht, treffen we de volgende aan in het overzicht van Schrek:

Droste en De Groot, Van Thijn, Vollewens, Van de Vooren.

Onder de 'nieuwe' auteurs uit de door ons beschouwde periode neemt Schrek zelf een belangrijke plaats in. Zijn uit 1918 daterende *leerboek van de analytische meetkundè* zal in 1961 nog blijken tot de bestsellers te behoren.

Op het algebra-onderwijs hier te lande hebben de reformbewegingen in zover reeds vroeg enige invloed gehad, dat auteurs bij herdrukken van hun boeken besloten hoofdstukken over grafische voorstellingen en functiebegrip in de leerboeken in te lassen. Bos (P. J.), wiens driedelig leerboek van de algebra in 1885–1887 was verschenen, deed dit bijvoorbeeld bij een herdruk van het jaar 1909. Tot hen die systematisch deze heroriëntering van het algebra-onderwijs nastreefden, behoort Wijdenes, zoals blijkt uit zijn *Algebraïsche Vraagstukken* van het jaar 1913. In zijn didactische opvattingen over het algebra-onderwijs sloot hij zich meer dan enig ander aan bij de opvattingen van Felix Klein. Systematisch kreeg de heroriëntering eerst zijn definitieve vorm bij Wijdenes in zijn *Nieuwe Schoolalgebra* van 1924, in eerste instantie een driedelig werk dat voor vele jaren het meest gezaghebbend leerboek zou blijken voor dit deel van de schoolwiskunde.

5 Schrek's lijst betekende een persoonlijke keuze. Hij heeft zich daarbij gezien de beschikbare voorraad van titels een rigoureuze beperking weten op te leggen. Van de leerboekschrijvers die hun werk mede voor HBS en gymnasium hebben bedoeld, noemen we nog de volgende namen:

Atkins, Van Bommel, Cikot, Ten Dam en De Jong van Arkel, Deuss, Van Dinter, Van Eek, Elfrink, De Gast, Gravelaar, Van der Harst, Heis, Hempenius, Heydeman, Jaeger, Kempe, Kleefstra, Koppeschaar, Kruijtbosch, Meyer, Nort, Piets, Robijns, Rutgers (W.), Ruben, Schamhardt, Schönfeld, Vaes, Visser (P.), Wafelbakker, Walstra en Van Dalfsen, De Vries (J.), Wisselink (D. B.), Wisselink (W. H.), Wolda, Yntema, Drewes en Bloten.

Als verzamelaars van examenopgaven kunnen voor de beschouwde periode voorts nog genoemd worden:

Van Deventer, Van Everdingen, Gerrits, De Jong, Kruijtbosch en Plette.

Bovenstaande opsomming betreft zowel eerste drukken als herdrukken, en bevat naast waardevolle werken ook wel werk van aanvechtbare of inferieure kwaliteit.

Ik heb de indruk dat Schrek destijds uit het beschikbare materiaal een zeer verantwoorde keuze voor Lietzmann's '*Methodik*' heeft weten te maken.

6 Het is duidelijk, dat we bij ons oordeel achteraf over schoolboeken uit het verleden ook gaarne geïnformeerd willen worden over het oordeel van de tijdgenoten van de auteurs. Tot op zekere hoogte kunnen we dit oordeel aflezen uit het aantal drukken dat een schoolboek wist te bereiken, maar daarnaast zullen we stellig omzien naar een didactische evaluatie zoals die bijvoorbeeld uit recensies naar voren kan komen.

We zouden zulke recensies voor de schoolboeken uit de door ons beschouwde periode 1900–1925 mogen verwachten in de volgende vaktijdschriften:

- (1) *De Vriend der Wiskunde*, uitgave van Blom en Olivierse in Culemborg; tot 1917.
- (2) Het *Wiskundig Tijdschrift*, uitgave van Visser in Haarlem; van 1904 tot 1921.
- (3) Het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, uitgave van Noordhoff, Groningen; vanaf 1913.
- (4) *Christiaan Huygens*, eveneens uitgegeven door Noordhoff, Groningen; vanaf 1921.
- (5) Het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, uitgave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.
- (6) *Euclides*, uitgave van Noordhoff, Groningen; vanaf 1924.

Een speurtocht naar gedegen recensies in deze vaktijdschriften loopt echter enigszins op een teleurstelling uit. De genoemde periodieken beperkten zich doorgaans tot simpele aankondigingen van verschenen leerboeken. Het internationaal ingestelde tijdschrift *Christiaan Huygens* liet ook deze weg. De redactie van het *Wiskundig Tijdschrift* deelde uitdrukkelijk mee, dat beoordelingen van Nederlandse schoolboeken niet zouden worden opgenomen, in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* lezen we dat van schoolboeken voor middelbaar en gymasiaal onderwijs slechts bij uitzondering een bespreking zou worden gegeven. Tot die uitzonderingen behoorde bijvoorbeeld het in Schrek's lijstje voorkomende boek van Droste en De Groot. Er wordt dan verder volstaan met opsommingen van titels van verschenen schoolboeken. In *De Vriend der Wiskunde* ontmoeten we naast zulke opsommingen weliswaar wat uitvoeriger commentaar, maar dit blijkt dan zo goed als geheel te bestaan uit inhoudsopgaven en uittreksels uit de voorwoorden van de desbetreffende werken. Men deinst voor beoordelingen terug, deels wellicht uit het besef dat er geen objectieve maatstaven beschikbaar zijn voor een duidelijke waardebeoordeling. De redactie van *Euclides* heeft wel vanaf het begin schoolboeken voor wiskunde gerecenseerd. Dat daarbij de feilen van sommige leerboeken ondubbelzinnig aan de kaak werden gesteld, viel niet bij alle lezers in goede aarde. 'Het is dringend nodig', schreef naar aanleiding hiervan de redactie reeds in de eerste jaargang, 'minder dat op goede leerboeken wordt gewezen dan wel, dat het volle licht valt op allerlei minderwaardig werk'. Het is begrijpelijk dat niet iedereen deze houding van de redactie toejuichte, maar goed beschouwd mocht men van een tijdschrift 'gewijd aan onderwijsbelangen' toch eigenlijk niet anders verwachten.

Voor wat de titels uit de lijst van Schreck betreft vinden we in de opvolgende jaargangen van Euclides recensies over het werk van de volgende auteurs: Wijdenes, Schrek, Molenbroek, Verrijp, Reindersma.

We wijzen er nog op, dat in de beschouwde periode in enkele algemenere periodieken ook recensies over schoolboeken voor wiskunde konden worden aangetroffen. In het bijzonder noemen we het lerarenweekblad waarin af en toe gedegen recensies waren te vinden.

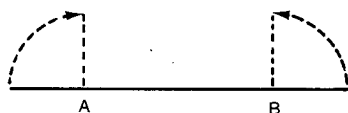
7 De terugblik op de leerboekenmarkt in het eerste kwart van deze eeuw heeft ons doen beseffen, hoezeer het de leraar van weleer ontbroken moet hebben aan betrouwbare onderwijskundige informatie die hem had kunnen dienen bij het samenstellen van de jaarlijkse boekenlijsten. Maar tevens dat het tekort aan informatie op dit punt tot op de dag van vandaag is blijven voortbestaan. Dank zij de te verwachten activiteiten van een departementale adviesgroep leermiddelen en van de groep van educatieve uitgevers bestaat thans echter de kans dat in een nabije toekomst over de in de handel zijnde leerboeken tijdig op zakelijke wijze enige objectieve informatie zal worden verschaft. Maar deze informatie zal voor de praktijk onbevredigend blijven, zolang de NVWL bijvoorbeeld er niet in slaagt aan bovenstaande informatie zo objectief mogelijk gefundeerde didactische informatie toe te voegen, waardoor de kans ontstaat dat de leraren de 'subjectieve' keuze die uiteindelijk de aanwijzing van een leerboek voor schoolgebruik steeds zal blijven betekenen, 'zakelijker' zullen kunnen verantwoorden dan thans nog het geval is.

Wiskunde 'doen'

*'I hear and I forget,
I see and I know,
I do and I understand.'*

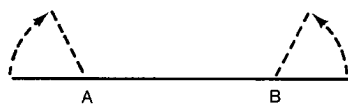
BRAM LAGERWERF

In HAVO- en VWO-boeken komt het probleem voor van de rechthoekige goot die uit een plaat van een meter breed moet worden.



De vraag is waar je de vouwen A en B moet aanbrengen, zó, dat er zo veel mogelijk water door de goot kan stromen. Erge lage randen geven een goot van bijna een meter breed waar maar een dun laagje water in kan. Erg hoge randen geven een zeer smalle goot van bijna een halve meter hoog. Beide uitersten lijken niet aantrekkelijk.

Het probleem wordt ingewikkelder als de goot niet persé rechthoekig hoeft te zijn. Het kostte mij niet veel moeite aan te tonen dat buigen onder een stompe hoek betere resultaten zou kunnen opleveren.

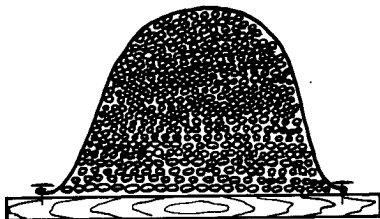


Maar er hoeft niet persé slechts op twee punten gevouwen te worden. Hoe zou het zijn met een geleidelijk gebogen goot?



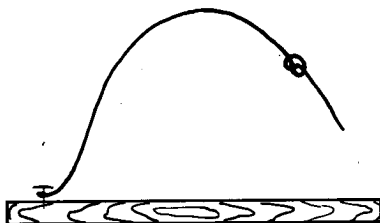
Op de een of andere manier was ik er van overtuigd geraakt dat het geen halve cirkel zou moeten zijn maar iets meer afgeplat, een ellips of zo iets. Ik zon op een manier om de vorm proefondervindelijk te bepalen. Ik dacht aan een bosje cocktail-prikkers; als je daar een elastiekje om doet wordt de doorsnede cirkelvormig. Hier zou ook zo iets moeten kunnen, maar dan met één kant recht.

Een elastiekje aan een plankje en dan kijken hoe er de meeste cocktail-prikkers onder te schuiven zijn.

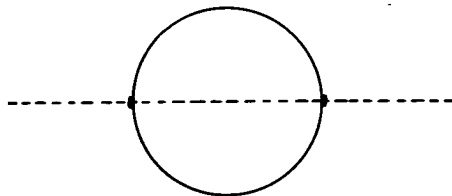


Dat leek bij voorbaat niet zo'n succes. Het resultaat zou sterk afhangen van de kwaliteit van het elastiek. Als er maar genoeg rek in zat zou ik er prikkers onder kunnen blijven schuiven.

Ik moest dus een touwtje nemen, en de afstand tussen de punaises zou variabel moeten zijn.



Een plankje had ik; punaises ook, ik gebruikte er één; aan het andere eind een knoop in het touwtje. Cocktail-prikkers waren niet voorhanden; in de kantine haalde ik een doos rietjes. Toen was het rietjes stapelen geblazen. Ik drukte met mijn duim de knoop op het plankje, en ik had dus maar één hand over om de onwillige rietjes op hun plaats onder het touwtje te krijgen. Een halve doos rietjes kreeg ik er onder. Maar toen ik de knoop met mijn duim wat verschoof, hing het touwtje weer slap. Verder vullen dus. Zo vond ik de voordeligste plaats van de knoop. Nu de vorm waarin het touwtje de stapel rietjes omspande. Het was inderdaad iets ellips-achtigs. Ik mat de hoogte en de breedte van de stapel: 6,3 cm en 12,4 cm. Hoe kan dat? Had ik dat verkeerd gemeten? Nee, het meten had ik weliswaar met één hand moeten doen, maar de resultaten waren juist. Dan toch een halve cirkel? Maar natuurlijk! Dat was zo helder als glas. Dat was gemakkelijk in te zien als je niet één goot nam, maar twee.



Van dezelfde afmetingen, en met de randen waterdicht aan elkaar gelast. Als je daar water door gaat persen, wordt het vanzelf een ronde pijp; dat is de cirkelvorm van het bosje cocktail-prikkers uit het begin.

Heel eenvoudig, maar ik kon het pas bedenken nadat ik de proefondervindelijke oplossing had gevonden. Mijn aandacht werd helemaal in beslag genomen door het idee van de ellips-achtige vorm. Kennelijk had ik het 'handwerk' nodig om ook andere opkomende ideeën een kans te kunnen geven.

De onderwijs-toepassing kwam een paar dagen later bij een collega. Het ging om de kortste weg tussen twee steden met dezelfde geografische breedte. Bij een student had de mening post gevat dat die weg langs een breedtecirkel liep, en hij was daar niet van af te brengen. De halve groep bemoeide zich er mee. De verwarring bleef. Totdat de docent hem een sinaasappel en een touwtje aanreikte met de woorden: 'Hier, probeer het maar'. Dat proberen duurde niet lang. Ook hier gaf het handwerk een kans aan andere gedachten dan de overheersende. De student doorzag de situatie, en kon er ook een goede redenering bij geven.

Over de auteur:

Bram Lagerwerf is docent bij de vakgroep wiskunde van de Stichting Opleiding Leraren te Utrecht.

Korrel

Sommige

Het is vaak moeilijk iemand ervan te overtuigen, dat het noodzakelijk is het natuurlijke taalgebruik te vervangen door verscherpt logisch taalgebruik, als men wiskunde wil bedrijven.

Een mooi voorbeeld om dit duidelijk te maken krijgt men door na te gaan welke inhoud men toekent aan 'sommige' in het natuurlijke taalgebruik.

Daartoe nam ik een experiment met 26 na-kandidaats studenten aan de TH Delft. Ik schreef de volgende zeven uitspraken op:

sommige priemgetallen zijn even (om ruis te voorkomen legde ik nog even uit wat een priemgetal is)

sommige priemgetallen zijn kleiner dan 4

sommige priemgetallen zijn kleiner dan 10

sommige gehele getallen zijn positief

sommige natuurlijke getallen zijn geheel

voor sommige reële getallen x geldt: x^2 is positief

voor sommige reële getallen x geldt: $\{x(x - 1)(x - 2)(x - 3)\}^2$ is positief.

Ik vroeg hen na te gaan welke uitspraken waar zijn en te noteren hoeveel uitspraken volgens hen waar zijn. Het resultaat was:

aantal waar	aantal studenten
7	4
6	9
5	4
4	5
3	3
2	1

Valt precies één, allemaal, bijna allemaal nog onder sommige? Daar bleken de knelpunten te liggen.

P. G. J. Vredenduin

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978

Tweede ronde, vrijdag 1 september 1978

- 1 Bewijs, dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking

$$3x^2 = 9 + y^3.$$

- 2 Men wil een rechthoekige vloer met vierkante tegels betegelen. De lengte van de vloer is a dm, de breedte is b dm, waarbij a en b gehele getallen zijn. De tegels mogen elkaar niet overlappen, en de zijden van de tegels moeten evenwijdig aan de zijden van de vloer liggen.

Gebruikt men tegels met zijden van 2 dm, dan houdt men evenveel onbedekte oppervlakte over als wanneer men tegels met zijden van 4 dm gebruikt. Neemt men tegels met zijden van 3 dm, dan blijft een oppervlakte van 29 dm^2 onbedekt.

Wat zijn de afmetingen van de vloer?

- 3 In het vlak liggen 1978 punten. Bij elk punt behoort een cirkelschijf met dat punt als middelpunt, en als straal de afstand van dat punt tot een vast gekozen punt.

Bewijs, dat er vijf van deze cirkelschijven zijn, die tezamen alle 1978 punten bedekken.

(Met cirkelschijf wordt bedoeld: de cirkel en zijn binnengebied.)

- 4 In het vlak met een rechthoekig coördinatenstelsel is een verzameling van oneindig veel rechthoeken gegeven. Elke rechthoek heeft de oorsprong als één van zijn hoekpunten. De zijden van alle rechthoeken zijn evenwijdig aan de coördinaatassen, en alle zijden hebben een gehele lengte.

Bewijs, dat er minstens twee rechthoeken in de verzameling zijn, waarvan de één de ander geheel bedekt.

'A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with *ideas*.

... The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be *beautiful*; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.'

Uit: G. H. Hardy, A mathematician's apology

Oplossingen

- 1 Stel (x, y) voldoet. Dan is $y^3 = 3(x^2 - 2)$: y^3 bevat blijkbaar minstens één factor 3, en dit kan alleen als $y = 3y_1$ voor zeker geheel getal y_1 . Dan is $9y_1^3 = x^2 - 3$, dus $x^2 = 3(1 + 3y_1^3)$. Hieruit volgt dat $x = 3x_1$ voor zeker geheel getal x_1 , dus $9x_1^2 = 3(1 + 3y_1^3)$, m.a.w. $3(x_1^2 - y_1^3) = 1$. Dit kan niet, want 1 bevat geen factor 3.

- 2 a en b moeten beide een 4-voud $+ 1$ zijn:

$$a = 4k + 1, \quad b = 4l + 1. \quad (1)$$

Stel verder dat

$$a = 3p + a_1 \quad \text{en} \quad b = 3q + b_1 \quad (2)$$

voor zekere natuurlijke getallen p en q , en

$$0 \leq a_1, b_1 < 3. \quad (3)$$

Dan is

$$ab_1 + a_1b - a_1b_1 = 29 \quad (4)$$

of, na invullen van (1), $4kb_1 + 4la_1 = 29 + a_1b_1 - a_1 - b_1$.

Dit schrijven we als

$$4(kb_1 + la_1) = 28 + (a_1 - 1)(b_1 - 1). \quad (5)$$

$(a_1 - 1)(b_1 - 1)$ moet dus een viervoud zijn. Op grond van 3 is de enige mogelijkheid $(a_1 - 1)(b_1 - 1) = 0$. Hieruit volgt $a_1 = 1$ of $b_1 = 1$. a en b komen symmetrisch voor, dus we kunnen veronderstellen $a_1 = 1$.

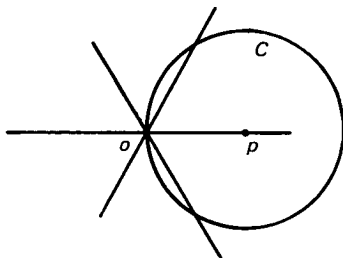
$$(5) \text{ wordt nu } kb_1 + l = 7. \quad (6)$$

voor b_1 zijn er 3 mogelijkheden:

- (i) $b_1 = 0$. Dit geeft in (4) $b = 29$, in tegenspraak met (2) en $b_1 = 0$.
- (ii) $b_1 = 1$. Dit geeft in (6) $k + l = 7$. Omdat $a_1 = b_1 = 1$ komen k en l symmetrisch voor. We behoeven dus slechts te onderzoeken:
 - $k = 0, l = 7$. Dan is $b = 29$, in tegenspraak met (2) en $b_1 = 1$.
 - $k = 1, l = 6$. Dan is $a = 5$, in tegenspraak met (2) en $a_1 = 1$.
 - $k = 2, l = 5$. Dan is $a = 9$, in tegenspraak met (2) en $a_1 = 1$.
 - $k = 3, l = 4$. Dan is $b = 17$, in tegenspraak met (2) en $b_1 = 1$.
- (iii) $b_1 = 2$. Dit geeft in (6) $2k + l = 7$. De mogelijkheden zijn:
 - $k = 0, l = 7$. Dan is $a = 1$, $b = 29$. Dit is een oplossing.
 - $k = 1, l = 5$. Dan is $b = 21$, in tegenspraak met (2) en $b_1 = 2$.
 - $k = 2, l = 3$. Dan is $b = 13$, in tegenspraak met (2) en $b_1 = 2$.
 - $k = 3, l = 1$. Dan is $a = 13$, $b = 5$. Dit is een oplossing.

De oplossingen zijn dus $a = 1, b = 29$
 $a = 29, b = 1$
 $a = 5, b = 13$
 $a = 13, b = 5$.

- 3 Stel dat p een punt met maximale afstand tot de oorsprong is, en dat C de bijbehorende cirkelschijf is. Verdeel het vlak in 6 gelijke sectoren door 3 lijnen te trekken door de oorsprong onder gelijke hoeken, en zo, dat p op één van die lijnen ligt. Alle punten in de beide sectoren aan weerszijden van p worden door C bedekt. Kies in elk van de 4 overblijvende sectoren een punt met maximale afstand tot de oorsprong.



De bijbehorende cirkelschijf bedekt dan alle punten in die sector.

De 5 cirkelschijven bedekken dus samen alle 1978 punten.

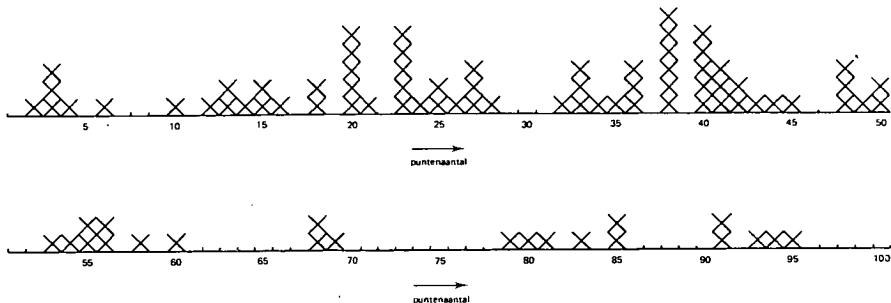
Overigens, het aantal van 5 is minimaal: kiest men 5 punten als hoekpunten van een regelmatige vijfhoek op afstand 10, en de overige 1973 punten op afstand 1 van de oorsprong, dan kan men deze 1978 punten niet met minder dan 5 cirkelschijven bedekken.

- 4 In minstens één van de 4 kwadranten, zeg in het eerste kwadrant, liggen ook oneindig veel rechthoeken. Zo'n rechthoek R wordt volledig bepaald door de coördinaten (p, q) van het hoekpunt tegenover de oorsprong.

p en q zijn natuurlijke getallen. Van de verzameling van alle p 's en de verzameling van alle q 's bevat minstens één, zeg die van alle p 's, oneindig veel verschillende elementen. De verzameling van alle q 's heeft een kleinste element. Stel dat R_0 met hoekpunt (p_0, q_0) een rechthoek is waarvoor de q -waarde minimaal is. Omdat er oneindig veel verschillende p 's zijn, is er zeker een rechthoek R_1 met hoekpunt (p_1, q_1) zo, dat $p_1 > p_0$. Aangezien ook $q_1 \geq q_0$, want q_0 is minimaal, bedekt R_1 de rechthoek R_0 geheel.

Commentaar bij de resultaten van de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978

De maximale waardering bij de opgaven 1 t/m 4 was resp. 15, 25, 30 en 30 punten (totaal 100 punten). Een overzicht van de resultaten geeft het staafdiagram.



De eerste opgave werd door ruim de helft van alle deelnemers opgelost. Bij de tweede opgave waren er wat minder volledig correcte oplossingen. Voor onvolledige antwoorden moesten vaak punten worden afgetrokken. Overigens, de uitwerking van deze opgave, die na afloop van de zitting werd uitgereikt, was ook niet volledig, en bovendien nogal omslachtig. Met onze excuses volgt hier een veel kortere en wel volledige oplossing, zoals die door een aantal deelnemers werd gegeven:

Stel $a = 3k + r$, $b = 3m + s$, met $k, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \{0, 1, 2\}$, dan is $29 = 3ks + 3mr + rs$. Omdat $rs \in \{0, 1, 2, 4\}$, moet $rs = 2$ zijn, dus $r = 1$, $s = 2$ of omgekeerd. a en b komen symmetrisch voor, dus men mag aannemen $r = 1$ en $s = 2$.

Dan is $27 = 6k + 3m$, m.a.w. $9 = 2k + m$. De mogelijke paren (k, m) zijn dus $(0, 9)$, $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$ en $(4, 1)$. Deze geven voor (a, b) : $(1, 29)$, $(4, 23)$, $(7, 17)$, $(10, 11)$ en $(13, 5)$. Alleen het eerste en het laatste paar laten dezelfde rest bij bedekking met tegels van 2×2 als bij tegels van 4×4 . De mogelijke afmetingen zijn dus 1×29 en 13×5 .

Het vergeten van de oplossing 1×29 gaf een kleine puntenaftrek. Werden er wel oplossingen vermeld, maar was de argumentatie dat dit ook *alle* oplossingen zijn, niet volledig, dan gingen er ook enige punten af.

Moeilijker waren de opgaven 3 en 4. Slechts 6 deelnemers hadden bij opgave 3 een bewijs waar niets op aan te merken was. 22 deelnemers gaven een redenering die veel goede elementen bevat, maar aan precisie en duidelijkheid te wensen overliet. In zulke gevallen werden er ook minder punten toegekend.

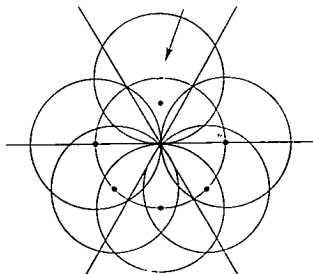


fig. 2

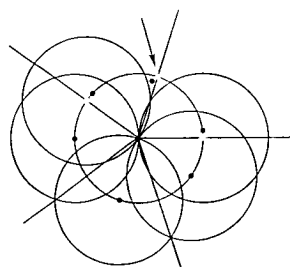


fig. 3

Er waren ook veel echte fouten: sommigen meenden dat het ook wel met 4 of zelfs met 3 cirkels kon. Anderen begonnen ermee het vlak vanuit het vaste punt O op een willekeurige wijze in 6 gelijke sectoren te verdelen. In elke sector kozen zij de cirkel van een punt met maximale afstand tot O . Daarna lieten zij de kleinste cirkel weg. Dat dit mis kan gaan, toont fig. 2. Ook als men het vlak in 5 gelijke sectoren verdeelt, en in elke sector een punt met maximale afstand tot O neemt, behoeven de bijbehorende cirkels niet alles te bedekken (fig. 3).

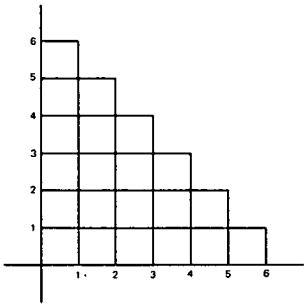


fig. 4

Bij opgave 4 hadden veel deelnemers moeite met de uitdrukking ‘oneindig veel’. Sommigen dachten bijvoorbeeld dat de gegeven verzameling dan ook *alle mogelijke* rechthoeken zou moeten bevatten, maar dat is natuurlijk niet nodig. Een veel gebruikte bewijsmethode was de volgende: Aangevoerd werd dat men na eindig veel stappen niet meer verder kan, als men probeert een verzameling van zulke rechthoeken te maken zonder dat er twee bij zijn waarvan de één de ander geheel bedekt. Omdat de gegeven verzameling oneindig veel rechthoeken bevat, moeten er dan dus wel zulke overlappingen zijn. Een aantal deelnemers bewees het ‘vastlopen’ echter alleen maar voor een heel speciale keuze van de rechthoeken, zoals bv. in fig. 4, waar alle rechthoeken dezelfde omtrek hebben. Omdat de gegeven verzameling echter van een geheel andere aard kan zijn, is dit helemaal geen bewijs.

Uitslag tweede ronde

Aan de tweede ronde namen 91 scholieren deel, die waren geselecteerd uit ca. 3500, die aan de eerste ronde in het voorjaar deelnamen. Het is de gewoonte dat de tien beste deelnemers een prijs krijgen. Omdat nummer 11 slechts 1 punt verschilde van nummer 10, en omdat er tussen nummer 11 en de daarop volgende een groter verschil is, is de 11de ook gevraagd de prijs-uitreiking mee te maken.

- 1 Geert Jan van Oldenborgh te Hendrik Ido Ambacht; 95 punten (eerste ronde 26 uit 33), Gemeentelijk Lyceum te Dordrecht, wiskundeleraar: de heer Wijdeveld.

- 2 Freek Wiedijk te Den Burg; 94 (33), Rijks Scholen Gemeenschap Texel, de heer Steenbruggen.
- 3 Jan Herman Veldkamp te Groningen; 93 (33), Willem Lodewijk Gymnasium, de heer Goldschmeding. (Jan Herman Veldkamp behaalde in 1977 ook een derde plaats en nam deel aan de Internationale Wiskunde Olympiade in Boekarest, juli 1978.)
- 4 Laura Joppe te Sommeldijk; 91 (30), Rijks Scholen Gemeenschap Goeree Overflakkee, Middelharnis, de heer Ketellapper.
- 5 Jan Koen Annot te Veenendaal; 91 (29), Christelijk Lyceum te Veenendaal, de heer V.d. Putte en mej. Visser.
- 6 Jos v.d. Bijl te IJmuiden; 85 (31), Ichthus College te Driehuis-IJmuiden, de heren De Boer en Van Vlegen.
- 7 Hugo Cramer te Nuenen; 85 (26), Augustinianum te Eindhoven, de heer Timmers.
- 8 Harry Bruning te Hoogeveen; 83 (22), Menso Alting College te Hoogeveen, de heer Jonkman.
- 9 Carel Faber te Groningen; 81 (28), Willem Lodewijk Gymnasium te Groningen, de heren Cuperus en Goldschmeding.
- 10 Kees Huizing te Spijkenisse; 80 (26), Christelijke Scholen Gemeenschap Blaise Pascal te Spijkenisse, de heer Van der Heyden.
- 11 Paul Louis Iske te Amsterdam Banne; 79 (22), Scholengemeenschap Noord te Amsterdam, de heer Westerbeek.

In memoriam Wim Burgers

Door een triest ongeval is een plotseling einde gekomen aan het leven van Wim Burgers. Hij was redacteur van Euclides. Ik wil hem hier echter in de eerste plaats herdenken als een vriend waarvoor ik groot respect heb gehad.

Een prima mens waarop men kon vertrouwen en die met hart en ziel elke taak verrichtte waarvoor hij zich gesteld zag. Het leiding geven zat hem in het bloed, maar niet het overheersen of zich op de voorgrond stellen. Waar hij leiding gaf, ontstond vriendschap.

Op de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs heeft hij veel invloed gehad, zowel door zijn speelse geest en helder inzicht als door zijn organisatorische talenten. Ook op kerkelijk sociaal gebied heeft hij veel goed werk verricht. Geen wonder dan ook dat zijn verdiensten erkend zijn door zowel een onderscheiding als ridder in de Orde van Oranje Nassau als in de orde van Sint Silvester.

Heden is hij begraven. Veel van zijn vrienden waren aanwezig. Men kon aan de gezichten duidelijk zien wat dit verlies voor hen betekende. Wat het voor zijn zijn vrouw betekent, kunnen we ons nauwelijks voorstellen. We wensen haar heel veel sterkte.

Piet Vredenduin

18 november 1978

Opgaven

395. Van E. C. Buissant des Amorie ontving ik een tweetal nieuwjaarswensen. Hoewel het lijkt dat ze een persoonlijk karakter hebben, zijn ze toch bestemd voor alle lezers van Euclides. Verschillende letters stellen verschillende cijfers voor.

$$\begin{array}{r} \text{V R E} \\ \text{D E N} \\ \text{D U I N} \\ \hline 1 \ 9 \ 7 \ 9 \end{array}$$

Nevenvoorwaarde: GELUK moet maximaal zijn.

$$\begin{array}{r} \text{V E E L} \\ \text{G E} \\ \text{L U K} \\ \text{P G J} \\ \hline 1 \ 9 \ 7 \ 9 \end{array}$$

De getallen op de eerste drie regels zijn onderling ondeelbaar.

Toegift om de aandacht van de redacteur af te wenden:

$$\begin{array}{r} \text{E U} \\ \text{C L I} \\ \text{D E S} \\ \hline 1 \ 9 \ 7 \ 9 \end{array}$$

De getallen staan alle in het elftallig stelsel.

Neem $C < D$ en $U < I < S$.

Zonder verdere gegevens is het aantal oplossingen dan L.

396. Neem een welbekend oerkoud getal. Neem het tegengestelde. Zet het voorste cijfer er ook nog achter, waardoor er dus een cijfer bijkomt. Trek het nu verkregen getal af van een heerlijk geurend getal. Welke uitkomst krijgt u? (P. Bronkhorst)

$$\begin{array}{r} 4711 \\ -2732 \\ \hline 1979 \end{array}$$

Oplossingen

393. Voor de opgaven zie het vorige nummer.

a Als een term n bewerkingstekens (+ en *) bevat, dan bevat hij $n + 1$ grondsymbolen (a, b, c, d). Dus is dan $p = 2n + 1$.

Van rechts naar links gelezen begint de term met een grondsymbool. Dit symbool niet meegerekend moet van rechts naar links gelezen op elk moment het aantal gelezen bewerkingstekens hoogstens gelijk zijn aan het aantal gelezen grondsymbolen. In een rooster wil dit zeggen, dat we het aantal wegen moeten vinden van het punt $(0, 0)$ naar het punt (n, n) die de lijn $y = x$ niet overschrijden.

Dit aantal is al eens uitgerekend in recreatie 385. We vonden daar $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. (Stel in de daar gevonden formule $m = n$.)

Nu kan elk grondsymbool op 4 manieren gekozen worden en elk bewerkingsteken op 2 manieren.

Zodat we in totaal vinden: $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} 4^{n+1} 2^n$ termen, waarin $n = \frac{1}{2}(p - 1)$.

b Als een term n bewerkingstekens bevat, dan bevat hij $n + 1$ grondsymbolen en $2n$ haakjes. Dus is dan $p = 4n + 1$.

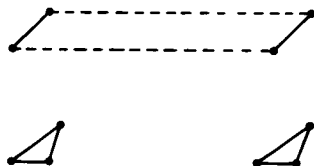
Er is een bijtjie tussen de termen met $n + 1$ grondsymbolen in de talen sub a en b. We vinden dus dezelfde uitkomst als hierboven, maar nu met $n = \frac{1}{4}(p - 1)$.

394. Iemand heeft 1000 brieven genummerd 000 tot en met 999 en 100 brievenbussen genummerd 00 tot en met 99. Hij schrapt van iedere brief één cijfer. Blijft dan over bijv. de cijfervolgorde 35, dan doet hij de brief in de bus 35. Hoeveel brievenbussen heeft hij minimaal nodig? Hij heeft in elk geval nodig de bussen 00, 11, ..., 99. Alle brieven met twee of meer gelijke cijfers kan hij dan kwijt. We beschouwen daarom verder alleen nog maar de brieven met drie verschillende cijfers.

Kies in het vlak 10 punten waarvan er geen drie op één rechte lijn liggen. Nummer deze 0, 1, ..., 9. Met elke brief correspondeert nu een driehoek en met elke bus een lijnstuk. Als zo'n lijnstuk zijde van een driehoek is, zeggen we dat het de driehoek representeert.

We lossen eerst het volgende probleem op. Hoeveel lijnstukken hebben we minimaal nodig om alle $\binom{10}{3} = 120$ driehoeken te representeren?

Splits de 10 punten in twee vijftallen. Elk vijftal levert $\binom{5}{3} = 10$ driehoeken. Om een dergelijk tiental te representeren zijn minimaal 4 lijnstukken nodig. Zie onderstaande figuur.



De $2 \cdot 4 = 8$ getekende lijnstukken representeren $2 \cdot 10 + 8 \cdot 5 = 50$ driehoeken. Er blijven er dan nog 60 over die nog niet gerepresenteerd zijn. Voeg twee lijnstukken toe die zoveel mogelijk nieuwe driehoeken representeren. In de figuur zijn ze gestippeld. Ze representeren elk 6 nieuwe driehoeken. Er blijven er dan nog 48 over. Elk volgend lijnstuk representeert maximaal 5 nieuwe driehoeken. Dus zijn er nog minstens 10 lijnstukken nodig. Dus in totaal $8 + 2 + 10 = 20$.

Met 20 lijnstukken kunnen we inderdaad de 120 driehoeken representeren. Kies hiervoor namelijk maar de 10 verbindingslijnstukken van het ene vijftal punten en de 10 verbindingslijnstukken van het andere vijftal.

Totnogtoe corresponderen met elk lijnstuk twee brievenbussen. We richten nu de lijnstukken waardoor met elk lijnstuk nog slechts één bus correspondeert. Richten we een lijnstuk bijv. van 3 naar 5, dan zullen de brieven 935, 395 en 359 gebust kunnen worden, maar 953, 593 en 539 nog niet. Opnieuw moeten we van elke driehoek een zijde kiezen. In elk geval hebben we dus nog 20 lijnstukken nodig. Dit aantal is ook voldoende. Kies namelijk na 35 nu 53 en de overige drie brieven kunnen gebust worden. M.a.w. in totaal hebben we nodig

de tien bussen 00, 11, ..., 99,

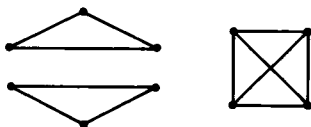
de 20 bussen die met de eerste 20 gekozen gerichte lijnstukken corresponderen en

de 20 bussen die met de omgekeerd gerichte 20 lijnstukken corresponderen.

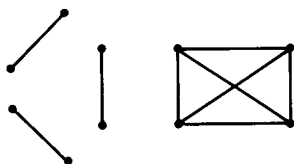
Dus 50 bussen. Minder kan niet en met 50 is het realiseerbaar. (Velen zullen deze 50 gevonden hebben door alle bussen te nemen waarvan de cijfers een even verschil hebben.)

Voor de overige gevallen geven we alleen de realisering. De bewijzen dat een realisering met kleiner aantal onmogelijk is, zijn analoog.

10^4 brieven. Minstens $10 + 2 \cdot 12 = 34$ bussen.



10^5 brieven. Minstens $10 + 2 \cdot 9 = 28$ bussen.



10^6 brieven. Minstens $10 + 2 \cdot 5 = 20$ bussen.



Daarna vindt men analogo resp. 18, 16, 14, 12, 10, 10, ... bussen.

Boekbesprekingen

H. J. Gusting, *Computerkunde*, uitg. Nijgh & Van Ditmar, 's-Gravenhage, 1977, 135 blz., f 20,75.

De ondertitel van dit boek geeft tevens de doelstelling: programmeren in Basic. Het vormt daarin een leergang bestemd voor het Middelbaar Technisch Onderwijs, gebaseerd op het concept leerplan computerkunde, opgesteld door de leerplancommissie van de VMTS.

Stap voor stap wordt de student in het gebied ingeleid. Achtereenvolgens behandelt de schrijver: de PRINT-opdracht; de LET-opdracht; de INPUT-opdracht; de GOTO-opdracht; de IF-opdracht; programmeerstroomschema's; de basic-functies SIN, COS, TAN, ATN, INT; de FOR-NEXT-opdracht; de READ-opdracht; de basic-functie TAB; de DEF-opdracht; de opdrachten GOSUB en RETURN; de DIM-opdracht; string-variabelen; de systeemcommando's; de basic-functies ABS, EXP, LGT, LOG, RND, CLK, TIM; de opdrachten REM, END, STOP, PAUSE, RESTORE en direct-mode opdrachten; uitgewerkte voorbeelden; overzicht van foutmeldingen. De gehele stof wordt aan concrete voorbeelden gedemonstreerd. Van essentieel belang is de zelfwerkzaamheid van de student. Leren programmeren kan alleen door te programmeren en zelf te werken met de computer. Het boek is ontstaan in het gebruik met de mini-computer P 852 van Philips. Het boek kan ook bij andere apparatuur gebruikt worden; systeemcommando's en foutmeldingen wijken dan af.

Een goed boek, dat met zorg is uitgevoerd.

W. Kleijne

Robert A. Carman, Marilyn J. Carman, *Basic Algebra*, John Wiley & Sons, New York, 1977, 566 blz., \$8, —.

Dit boek is bedoeld als een inleiding in de elementaire (school)algebra. Speciaal is dit boek bestemd voor die leerlingen die nogal wat moeite hebben met wiskunde. Zij hebben nodig 'a very carefully guided approach with emphasis on understanding and explanation rather than abstraction and formalism'. Deze instelling loopt als een rode draad door het gehele boek heen.

De schrijvers besteden veel aandacht aan de leesbaarheid van het boek. Het taalgebruik is spreektaal en geen 'boekenschrijftaal'. Ook de lay out is hieraan aangepast. Door het gehele werk heen staan grapjes, gespeelde conversaties, stukjes Peanuts, waarin op speelse, humoristische wijze veel informatie is verwerkt.

Ieder stukje stof wordt voorafgegaan door een pretest waarmee de leerling zelf kan bepalen, wat hij wel en wat hij niet weet. Hij wordt dan naar die plaatsen in het boek geleid, waar de stof wordt uitgelegd. Daarna volgt een eindtest over dit gedeelte. De bladzijden, ook van de testen, kunnen uit het boek verwijderd worden, zodat de docent deze ter controle kan innemen.

De schrijvers besteden veel aandacht aan ingeklede vergelijkingen, de zg. 'word-problems'. Een geheel hoofdstuk is gewijd aan het probleem van het vertalen van een tekst in wiskundetaal.

Al met al een boek, dat niet zonder meer in ons land gebruikt kan worden. De vormgeving en de presentatie van de stof vind ik echter zodanig, dat ik zou wensen, dat vele docenten van dit boek kennis zouden nemen. Het verdient m.i. aanbeveling, dat ook bij ons een dergelijke presentatie van de leerstof uitgetoetst wordt.

W. Kleijne

Roger Louwagie, Jos de Schrijver, Herman Prové, Willy Schepens, Roger Wilrycz, *Differentiaal- en integraalrekenen voor het hoger onderwijs*, deel I volume a en vol. b, Uitgeverij Acco, Leuven, 1976, samen 472 blz., resp. f 29, — en f 34, —.

De schrijversgroep heeft zich ten doel gesteld een 'brug te slaan tussen het secundair onderwijs en een hogere, technische opleiding, uiteraard wat betreft de wiskunde'. Dat betekent dat men een behoorlijke hoeveelheid kennis en vooral vaardigheden wil laten aanleren terwijl men zich niet wil verliezen in diepgaande theoretische overwegingen. Dat deze instelling de schrijvers voor diverse problemen stelt laat zich denken. Uit het voorwoord citeer ik in dit kader:

'... de formuleringen van stellingen en definities werden zo streng mogelijk gehouden. Vele gemakkelijke bewijzen werden weggelaten en voor moeilijke bewijzen verwijzen wij naar de literatuurlijst ... Maar, indien een bewijs nuttige inlichtingen verstrekt over een (wiskundige) methode vonden wij het wenselijk het verloop van dat bewijs in grote lijnen te schetsen.

'... Zodoende bereiken wij, naar wij verhoppen, een leergang wiskunde voor wiskundegebruikers, voldoende streng en toch niet herleid tot een receptenboekje'. Naar mijn smaak zijn de schrijvers in de realisering van deze doelstelling uitstekend geslaagd.

Een overzicht van de inhoud geeft een indruk van het gebodene:

Volume A: functies, continue functies (lokaal, globaal), continue uitbreiding van een functie (limieten, rijen, reeksen), afleidbare functies in een reële variabele (afgeleiden van numerieke functies, eigenschappen van afleidbare functies, toepassingen).

Volume B: integreerbare functies in een reële variabele (primitieve, oneigenlijke integralen, benaderde integratie), integratie van numerieke functies (systematisch onderzoek naar integratie van rationale, irrationale, goniometrische en sommige andere transcendente functies), analytisch onderzoek van functies in een reële variabele (enige numerieke analyse), toepassingen op krommen. Tot slot een literatuurlijst en een register.

Naar mijn smaak een uitstekend werk, dat ook hier te lande zeker kan dienen binnen diverse opleidingen.

W. Kleijne

Mededelingen

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

op zaterdag 6 januari 1979 in het Corderius College, L. Heynricstraat 23, te Amersfoort, over het onderwerp:

– WAT TE BEWIJZEN WAS –

over het bewijs in de wiskunde, met speciale aandacht voor het wiskunde-onderwijs op de middelbare school

Programma:

10.00 uur	ontvangst
10.30-11.30	Prof. dr. F. van der Blij, 'Bewijzen in het Wiskunde Onderwijs'
11.45-12.45	Prof. dr. N. G. de Bruijn, 'Natuurlijke Deductie'
12.45-14.00	Lunch
14.00-15.00	Dr. J. F. A. K. van Benthem, 'Logische Theorie en Wiskundige Praktijk'

Met nadruk zij er op gewezen dat het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap voor alle belangstellenden *gratis* toegankelijk is.

Wel wordt men verzocht zich schriftelijk voor deelname aan te melden bij:

G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, 3956 EN Leersum, vóór 1 januari 1979.

Wil men aan de lunch deelnemen, dan wordt men verzocht tevens f 10,- over te maken op postgirorekening 468081 t.n.v. G. W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, Leersum, onder vermelding: 'lunch wintersymposium', s.v.p. vóór 15 december 1978!

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap is speciaal bedoeld voor leraren: dat is een gevestigde traditie. Ditmaal is een thema uitgekozen, waarvan wij overtuigd zijn dat het U boeien zal, of U nu leraar bent of niet: het *Bewijs* in de wiskunde.

Zelfs een boeiend onderwerp staat of valt met de bekwaamheden van de sprekers. Het Bestuur van het Wiskundig Genootschap is erg blij drie sprekers tot medewerking bereid te hebben gevonden, die niet alleen terzake kundig zijn, maar die juist ook een gerechtvaardigde reputatie genieten als boeiend docent.

Als eerste zal spreken Prof. dr. F. van der Blij, directeur van het I.O.W.O. en hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Vanuit zijn functie bij het I.O.W.O. heeft Prof. van der Blij een goed gefundeerd inzicht in de hedendaagse onderwijskundige problematiek; hij zal dan ook spreken over

Bewijzen in het Wiskunde Onderwijs.

De tweede spreker, Prof. dr. N. G. de Bruijn, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven, is al jaren sterk geïntereiseerd in de relaties tussen wiskunde en taal. Wij gebruiken allen een taal – informeel dan wel min of meer geformaliseerd – om onze wiskundige betogen (met hun bewijzen) te presenteren. Over dit onderwerp geeft Prof. de Bruijn in Eindhoven colleges die

speciaal ook voor toekomstige leraren bedoeld zijn. Op het wintersymposium zal hij spreken over

Natuurlijke Deductie.

De laatste voordracht op deze symposium-dag heeft tot titel

Logische Theorie en Wiskundige Praktijk

en zal worden gehouden door dr. J. F. A. K. van Benthem, lector aan de Rijksuniversiteit te Groningen. Dr. van Benthem beweegt zich op de grensgebieden van wiskunde, wijsbegeerte en logica (zowel wat betreft zijn onderzoek als in zijn onderwijs); in zijn onderwijs aan niet-wiskundigen (filosofiestudenten) heeft hij zich de vaardigheid verworven ook moeilijke en technische onderwerpen heel helder en begrijpelijk aan niet-deskundigen over te brengen.

De drie sprekers hebben elk een korte (voorlopige) samenvatting van hun voordracht opgesteld, die U hieronder aantreft.

Bewijzen in het Wiskunde Onderwijs: samenvatting door F. van der Blij.

Bij het klassieke wiskunde onderwijs op de middelbare school werd in de meetkunde bewezen. In de algebra veel minder, nooit in de stijl van 'gegeven', 'te bewijzen', 'bewijs'. Wat zou trouwens het gegeven zijn bij een bewijs van $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$? De opgaven voor bewijzen door leerlingen vinden we in de vlakke-meetkunde boeken en in tweede ronde weer eens in de stereometrie. Bij de 'degeometrisering' van het wiskunde onderwijs is bij leerlingen de ervaring van gegeven, te bewijzen, bewijs verdwenen. Bij het vervolgonderwijs hoort men allerwege de klacht: 'Ze kunnen niet meer bewijzen'! Uitspraken als 'vanzelfsprekend', 'dat zie je zo', lijken in de plaats gekomen te zijn. Waarom moet je bewijzen dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn of dat $a \cdot (b + c) = ab + ac$? De noodzaak van een bewijs wordt wel gevoeld als een uitspraak discutabel is: gaan de vier zwaartelijnen en de drie middenverbindingslijnen in een viervlak door één punt? Is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \text{ meer of minder dan } 2\frac{3}{4}?$$

Voorlopige stelling: In het onderwijs is een bewijsvoering een proces, een discussie. Of een redenering een bewijs is hangt ook af van de context van onderwijssituatie en leerlingen-discussie.

Een legpuzzle verhaal is soms wel een bewijs voor de stelling van Pythagoras en soms niet. Bij leerlingen (en eerstejaarsstudenten!) kun je de noodzaak van een bewijs duidelijk maken door een conflictsituatie te scheppen, zo van het is welles, het is nietes. Kan dat bij iedere stelling op school?

Natuurlijke deductie: samenvatting door N. G. de Bruijn.

Natuurlijke deductie is een methode (afkomstig van Jaśkowski en Gentzen) om bewijzen te presenteren op overzichtelijke en doorzichtige wijze. Er wordt een goede administratie gehouden van de steeds veranderende lijst van onderstellingen, en er zijn duidelijke regels over wat er gebeuren mag wanneer deze lijst wordt gewijzigd. Is bijv. in de onderstelling a de formule b bewezen, dan mag na afdanking van de onderstelling a de formule $a \rightarrow b$ bewezen worden geacht.

In de voordracht wordt bijna uitsluitend gesproken over de afleiding van formules waarin het pijltje de enige operatie is. Een gedeelte van dit materiaal zou ook in het schoolonderwijs gebruikt kunnen worden. Het geeft veel gelegenheid tot zelfstandig samenstellen van bewijzen, en bovendien kan het een helder beeld geven van de rol van variabelen in de wiskunde.

Volgens extreme formalisten bestaan wiskundige bewijzen uit een harde kern van logische formules, die worden toegedeckt met allerlei stylistische franje:

concessies aan de zwakheid van mens. 'In wezen' doet echter alleen die syntaktische logische structuur er toe. Deze positie is ook door logici zelf veelvuldig bekritiseerd, vanuit diverse filosofische gezichtspunten.

Wel aanvaardt men algemeen het gebruik van syntaktische 'meta-mathematische' methoden, maar dan in het volle bewustzijn dat dit een methodische fictie is.

Juist het succes van deze fictie doet velen echter nog wel eens uit het oog verliezen hoeveel rijker de realiteit van het wiskundig redeneren is. Met klem is dit naar voren gebracht door de Engels-Hongaarse wetenschapsfilosoof Imre Lakatos in diens geruchtmakende boekje 'Proofs and refutations' (Cambridge University Press, 1976).

In deze lezing zal een korte schets worden gegeven van de opzet van een logische theorie. Vervolgens komt de visie van Lakatos ter sprake op wat hierbij allemaal onder tafel valt. Het geheel wordt geïllustreerd aan enkele voorbeelden uit de praktijk. Tenslotte nog dit: het formalisme heeft altijd al een slechte pers gehad, en soms attackeert Lakatos een vijand die al morsdood op de grond ligt. In zo'n geval ontluikt sympathie voor de underdog, en we zullen dan ook proberen duidelijk te maken wat de (rationele) intenties van de formalisten waren.

Wiskunde en Onderwijs

De abonnees op het tijdschrift Wiskunde en Onderwijs wordt verzocht het abonnementsgeld voor het jaar 1979 voor 15 december a.s. over te maken op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth. Het bedrag is onveranderd f 20,-. U zoudt me een groot plezier doen het meteen te voldoen, omdat ik het voor 1 januari moet afdragen.

Nieuwe abonnees zijn welkom. Ze kunnen zich opgeven door storting van het genoemde bedrag, met vermelding op het giroformulier van 'nieuw abonnee' en van hun postcodenummer. Ze zijn daardoor tevens lid van de VVWL, de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, en hebben het recht deel te nemen aan de activiteiten van deze vereniging.

P. G. J. Vredenduin

Dillenburg 148, Doorwerth; tel. 085-33 38 07

Een club voor programmamakers

Op verzoek van Thomas Coppens, bestuurslid van onze zustervereniging VVWL, hieronder de aankondiging, dat een club voor makers van programma's is opgericht. Hoewel de club gebonden is aan een bepaald merk, hebben we toch gemeend tot plaatsing te moeten overgaan. Het spreekt vanzelf, dat we analoge aankondigingen met betrekking tot andere merken ook zullen opnemen.

All owners of a Texas Instruments programmable calculator, no matter what type, had one complaint: there existed no 'users' club'

To become a member of our brand new club simply send your full name and address and 350 BF to PPC acc. no. 000-1149689-45 of

Texas Instruments Software Exchange Club

Tennisstraat 16

B - 2610 WILRIJK

BELGIUM

You will, therefore, be a member until December 31st, 1979. In return you will receive more details about the club, including special programing forms.

If you then send one program to:

TISOFT

(Texas Instruments Software Exchange)

Selstbaan 24

B - 2080 KAPELLEN

BELGIUM

we will send you back two programs that you can choose from a catalogue, now being compiled.

Lesbrieven voor buitengewoon wiskundig talent

Sinds enige jaren bestaan er zgn. 'lesbrieven' ten behoeve van leerlingen van het VWO met buitengewoon veel talent voor wiskunde. Elk jaar worden de beste deelnemers aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade bij het doorwerken van deze lesbrieven begeleid door de Voorbereidingscommissie Internationale Wiskunde Olympiade. Uit hun midden wordt de Nederlandse afvaardiging naar de Internationale Wiskunde Olympiade gekozen.

Gebleken is dat er ook bij anderen belangstelling voor deze lesbrieven bestaat. De brieven zijn daarom uitgetypt en vermenigvuldigd, en voor alle belangstellenden verkrijgbaar.

Er zijn 9 lesbrieven beschikbaar:

1. Getallentheorie I (inleiding).
2. Getallentheorie II (o.a. congruenties, restklassen, stelling van Fermat, phi-functie van Euler).
3. Polynomen.
4. Binomiaalcoëfficiënten, differentiequotiënten, getallenrijen.
5. Recursief gedefinieerde rijen, ongelijkheden.
6. Meetkunde I (eigenschappen van driehoeken en cirkels).
7. Getallentheorie III (o.a. entier-functie, drietallen van Pythagoras, Chinese reststelling).
8. Meetkunde II (isometrieën).
9. Meetkunde III (gelijkvormigheidstransformaties, regelmatige veelvlakken).

In sommige lesbrieven worden resultaten uit eerdere brieven gebruikt.

De prijs van de lesbrieven is f 2,- per stuk. Ze worden toegezonden na overmaking van het verschuldigde bedrag op postgiro nr. 1597553 t.n.v. J. van de Craats, Oltmansdreef 21 te Leiderdorp, onder vermelding van de nummers van de gewenste lesbrieven.

Namens de Voorbereidingscommissie, J. van de Craats.

Reactie op het artikel van H. Steur: Het vak wiskunde II

Aan de inspecteur voor het middelbaar onderwijs,
Aan de minister van onderwijs,
Aan commissie, zoals aangenomen te bestaan door dhr. Steur,

In het oktobernummer 1978 van het blad Euclides vond ik een bericht (gerucht) van de heer H. Steur over een voorbereidingscommissie, die aanbevelingen moet doen in het kader van de omvorming van het huidige programma wiskunde op het vwo tot een programma dat genoemd wordt wiskunde A en wiskunde B.

De heer Steur wil wiskunde 2 behouden zien in de huidige vorm, maar gaat voorbij aan een naar mijn smaak fundamenteeler probleem namelijk de grote aantallen onvoldoendes voor wiskunde 1 op het centraal schriftelijk eindexamen. Evenwel ben ik ook een voorstander van het behoud van wiskunde 2.

Nu heb ik een voorstel dat tegemoet komt aan dhr. Steur en mogelijkwerijs een oplossing is voor het andere probleem.

Naar mijn mening kan er in huidige programma wiskunde I een groot gedeelte van het leerplan nl. differentiaal/differentiaalvergelijkingen/vectormeetkunde komen te vervallen als we afspreken alleen differentiaalvergelijkingen te behandelen in wiskunde 1, die als oplossingen functies hebben. Vanuit het huidige programma wiskunde 2 gezien, behoren differentiaalvergelijkingen waar krommen als oplossingen verschijnen, gezien het gebruik van inproduct, vectoren, veeleer bij wiskunde 2 dan bij wiskunde 1, en hebben tot nu toe een niet acceptabele overlap gegeven tussen de programma's wiskunde 1 en wiskunde 2.

Nog even het voorstel concreet:

- 1 Uit het huidige programma wiskunde 1 laten we weg de theorie over differentiaalvergelijkingen voor zover oplossingen krommen zijn. Daarmee kan ook de lijnelementveld-theorie weggelaten worden.
- 2 Vectormeetkunde, onderzoek aan krommen, differentiaalvergelijkingen met als oplossingen krommen komen geheel bij wiskunde 2, waarbij eventueel de verplichting tot een keuze onderwerp komt te vervallen.

Hopend de discussie over een zo belangrijk onderwerp als het leerplan in ons orgaan en daarbuiten op gang te houden en te verdiepen,
teken ik met vriendelijke groet,

Nico Boose, Edisonstraat 23, Nijmegen.
Docent Wiskunde, Dominicus College.

**STICHTING DE VRIJE LEERGANGEN
OPLEIDINGEN
VOOR MIDDELBARE AKTEN
AMSTERDAM**

Het nieuwe studiejaar

WISKUNDE M.O.-B

begint 12 januari 1979 om 18.15
uur in het Hoofdgebouw van de
Vrije Universiteit, De Boelelaan
1105, Amsterdam.

Aanmelding gaarne voor 1
januari 1979.

De studiegids en
aanmeldingsformulieren zijn op
schriftelijke aanvraag
verkrijgbaar bij de administratie,
Postbus 90048, Amsterdam.

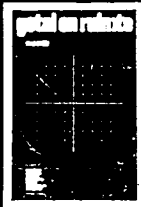
Inlichtingen bij: Drs.
P. Noordzij, Sandbergstraat 12,
Abcoude, tel. 02946-1950.

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van
uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32¹ - Amsterdam (c) - Tel. 020-262810



Verschenen:

Getal en Ruimte 5/6 V 2

analyse en statistiek voor de vijfde en
zesde klas vwo

ISBN 9011 81098 8/4e gewijzigde druk/
194 blz./ f.20,00

educaboek

culemborg

INHOUD

Francis Meester: Vaardigheden van een wiskundedocent(e), het gepland
en ad hoc kunnen reageren 105

Joh. H. Wansink: Schoolboekenmarkt voor wiskunde in de jaren 1900–1925 111

Bram Lagerwerf: Wiskunde 'doen' 118

P. G. J. Vredenduin: Korrel 121

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978 122

In Memoriam 127

Recreatie 128

Boekbesprekingen 130

Mededelingen 132

ADRESSEN AUTEURS:

Bram Lagerwerf, Laan van Cattenbroeck 29, 3703 BH Zeist.

Francis Meester, Waalstraat 118^{III}, 1079 EC Amsterdam

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.