

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

54e jaargang

1978/1979

no 2

oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2343 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 25,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 8912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, 2242 CD Wassenaar, tel. 01751-133 67.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet leden f 33,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer is per abonnement f 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Gebruik en misbruik van variabelen¹⁾

P. G. J. VREDENDUIN

Wat is een variabele? Als men probeert deze vraag te beantwoorden, blijkt dat moeilijker te zijn dan men op het eerste gezicht vermoedt. In een algebraboek voor de eerste klas heb ik eens gelezen:

Een letter stelt soms een bepaald bekend getal voor, soms een bepaald maar nog niet bekend getal en soms een willekeurig getal.

Met 'letter' is hier kennelijk 'variabele' bedoeld.

Wat de auteur voor de geest gezweefd heeft, is wel duidelijk.

- a. Een variabele stelt soms een bekend getal voor. Bijv.: waaraan is $a^3 + a^2 - a$ gelijk, als $a = 4$? Antwoord: 76. De variabele a stelt hier het bekende getal 4 voor.
- b. Een variabele stelt soms een bepaald maar nog niet bekend getal voor. Bijv.: los x op uit $3x - 7 = x + 3$. De variabele x stelt hier het getal 5 voor. Dit is een bepaald getal. Maar bekend is het nog niet, want we moeten de vergelijking nog oplossen.
- c. Een variabele stelt soms een willekeurig getal voor. Bijv.: $a + b = b + a$. Dit is juist, wat we voor a en b ook kiezen.

Het geheel doet een beetje naïef aan, maar is misschien toch wel een geschikte springplank voor een nader onderzoek.

- a. Hier wordt beweerd:

$$a = 4 \Rightarrow a^3 + a^2 - a = 76 \quad (1)$$

Het natuurlijke verstand zegt, dat a hier het getal 4 voorstelt. Het formeel logische verstand zegt daarentegen, dat (1) juist is, voor elk getal a . Ook bijv. voor $a = 5$. Omdat $5 = 4$ niet juist is, is (1) immers dan wel juist.

Het natuurlijke en het formeel logische verstand liggen wel eens vaker met elkaar in de clinch. Laten we de analyse eens nader voortzetten om na te gaan aan welk verstand we de voorkeur geven, althans in dit verband. Volgens het formeel logische verstand is (1) gelijkwaardig met

$$a^3 + a^2 - a \neq 76 \Rightarrow a \neq 4 \quad (2)$$

Het ongetrainde natuurlijke verstand heeft er aanvankelijk enige moeite mee dit in te zien, maar laat zich aan de hand van meer praktische voorbeelden toch gemakkelijk overtuigen. Maar geen enkel verstand zal menen, dat in (2) de

¹⁾ Voordracht gehouden voor de NVvW en de VVWL op 18 maart 1978 te Breda.

variabele a het getal 4 en geen ander getal voorstelt. Daarmee is dunkt me het pleit wel beslist.

Dat de variabele a in (1) het bekende getal 4 voorstelt, is dus een onhoudbare simplificatie. Een nadere analyse heeft ons doen inzien, dat a een willekeurig getal voorstelt.

b. Ik ga liever niet uit van een vergelijking, maar kies een iets sprekender probleem. A zegt tegen B : neem een natuurlijk getal in gedachten; vermenigvuldig het met 6; tel bij de uitkomst 12 op; deel nu door 3; trek van de uitkomst 7 af; wat heb je nu gekregen? B zegt: 27. Dan had je 15 in gedachten genomen, zegt A . Hoe komt A hieraan? Hij redeneert als volgt. Neem aan dat B het getal a in gedachten genomen heeft. Dan heeft hij daarna resp. gevonden $6a$; $6a + 12$; $2a + 4$; $2a - 3$. Dus $2a - 3 = 27$. Dit levert $a = 15$. Hier stelt a het bepaalde, maar A aanvankelijk nog niet bekende getal 15 voor.

We spelen het spel nog eens. Wat heb je ten slotte gekregen?, vraagt A . B zegt: 46. Dan kan je niet rekenen of je houdt me voor de gek, zegt A . Inderdaad, want voor geen enkel natuurlijk getal a geldt $2a - 3 = 46$.

Hier kan men moeilijk volhouden, dat a een bepaald maar nog niet bekend getal voorstelt. Het natuurlijke verstand sputtert misschien nog even en wil volhouden, dat a hier geen enkel getal voorstelt. Maar als we aan de hersenarbeid van A denken, is ook dit niet houdbaar. A heeft immers geconstateerd, dat voor geen enkel natuurlijk getal a geldt $2a - 3 = 46$. Anders gezegd: voor elk natuurlijk getal a geldt $2a - 3 \neq 46$. Ook hier stelt a weer een willekeurig natuurlijk getal voor.

Dat bij het oplossen van vergelijkingen met veranderlijke x de variabele x niet een bepaald, maar nog niet bekend getal voorstelt, lijkt me evident. Denk maar eens aan vergelijkingen als

$$x^2 = 9; \quad x^2 + 5x + 7 = 0;$$

$$(x - 2)(x - 3) - x(x - 5) = 6$$

Lossen we deze in $\mathbb{R}$ op, dan vinden we resp.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\} = \{-3, 3\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 7 = 0\} = \emptyset$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2)(x - 3) - x(x - 5) = 6\} = \mathbb{R}$$

In al deze getallen zoeken we alle reële getallen die aan de vergelijking voldoen. Telkens stelt x dus een willekeurig reëel getal voor.

c. Hier is geen meningsverschil mogelijk. In $a + b = b + a$ stellen a en b willekeurige getallen voor.

In alle gevallen stellen de variabelen dus willekeurige getallen voor. Of, iets nauwkeuriger gezegd, *willekeurige elementen van een bepaalde getalverzameling*. Als je goed nadenkt over wat hier staat, wordt het je hoe langer hoe duidelijker dat je het niet snapt. Ten minste zo gaat het mij. Wat is dat, een *willekeurig element van een bepaalde getalverzameling*?

Laten we de kwestie eens van een andere kant benaderen. De schrijver van bovengenoemd algebraboek beweerde: een letter stelt soms voor En met 'letter' bedoelde hij 'variabele'. Hij gaf hiermee weer, dat een variabele een bepaald *taalbestanddeel* is, een onderdeel van de mathematische taal. In de taal waarin we wiskundige beweringen formuleren, komen bestanddelen voor die we variabelen noemen. Dat lijkt me een vruchtbaar uitgangspunt. Om beter

inzicht te krijgen, is het verstandig eens een wiskundig taalsysteem in concreto te kiezen en te zien welke rol variabelen daarin spelen. Ik neem daarvoor een heel simpele taal, namelijk een taal waarin we beweringen kunnen formuleren over natuurlijke getallen. We nemen aan dat optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd zijn. Het gaat dus om beweringen over $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Als we een taal willen opstellen, moeten we weten:

- over welke symbolen beschikken we?
- welke symboolcombinaties zijn termen?
- welke symboolcombinaties zijn uitspraken?

a. Symbolen

De symbolen waarover onze taal beschikt, zijn

0, 1, 2, 3, ... deze symbolen heten natuurlijk-getalsymbolen

a, b, c (eventueel voorzien van indices) deze symbolen heten variabelen

$+, \cdot, =, \vee, \wedge, (,)$

b. Termen

elk natuurlijk-getalsymbool is een term

elke variabele is een term

als T_1 en T_2 termen zijn, dan zijn ook $(T_1 + T_2)$ en $(T_1 \cdot T_2)$ termen.

c. Uitspraken

als T_1 en T_2 termen zijn, dan is $T_1 = T_2$ een uitspraak

als U_1 en U_2 uitspraken zijn, dan zijn ook $(U_1 \vee U_2)$ en $(U_1 \wedge U_2)$ uitspraken.

Voorbeelden. a is een term, 1 is een term; $(a + 1)$ en $(a \cdot 1)$ zijn dan ook termen; $(a + 1) = (a \cdot 1)$ is een uitspraak.

3 en 4 zijn termen; $3 = 3$ en $3 = 4$ zijn uitspraken; ook $(3 = 3 \vee 3 = 4)$ en $((3 = 3 \vee 3 = 4) \wedge 3 = 4)$ zijn dan uitspraken.

Het nut van de haakjes wordt nu duidelijk. Ze leggen eenduidig de volgorde van de bewerkingen vast; voorrangsregels zijn niet meer nodig. De taalstructuur wordt daardoor eenvoudig.

Dit dorre symboolsysteem moet nu nog wat leven ingeblazen worden. We gaan het systeem interpreteren, d.w.z. een betekenis aan de symbolen verbinden. De betekenis van een natuurlijk-getalsymbool is uiteraard het corresponderende natuurlijke getal. Verder kennen we aan de uitspraken op de gebruikelijke manier de predikaten 'waar' en 'onwaar' toe. De uitspraak $3 = 3$ is waar, $3 = 4$ onwaar, $(3 = 3 \vee 3 = 4)$ waar, $((3 = 3 \vee 3 = 4) \wedge 3 = 4)$ onwaar.

Totnogtoe zijn de variabelen buiten beschouwing gebleven. We willen nu afspreken onder welke voorwaarde we aan een uitspraak waarin een variabele voorkomt, het predikaat 'waar' of het predikaat 'onwaar' toekennen. We maken dit aan een voorbeeld duidelijk.

$$(a + 2) = (2 + a)$$

Substitueer voor a een natuurlijk-getalsymbool. Welk natuurlijk-getalsymbool we ook kiezen, steeds ontstaat dan een ware uitspraak. Daarom noemen we $(a + 2) = (2 + a)$ een ware uitspraak.

$$((a + 2) \cdot (a + 3)) = ((a \cdot a) + (2 \cdot 3))$$

Als we voor a een natuurlijk-getalsymbool substitueren, dan ontstaat niet steeds een ware uitspraak. Deze uitspraak is daarom onwaar. De rol die de variabelen in de hier beschouwde taal spelen, is door deze afspraken ondubbelzinnig vast-

gelegd. Maar wat betekent een variabele? Wat stelt een variabele voor? Wie nu wil antwoorden: een variabele stelt een willekeurig natuurlijk getal voor, mag gerust zijn gang gaan. Als hij maar weet, wat met deze vage uitspraak bedoeld wordt. Daarmee wordt bedoeld: een uitspraak is waar als hij na substitutie van natuurlijk-getalsymbolen voor de variabelen steeds in een ware uitspraak overgaat, en anders onwaar. *Een variabele markeert dus de plaats waar in een uitspraak een natuurlijk-getalsymbool gesubstitueerd dient te worden.* We zien nu meteen, dat de term 'variabele' eigenlijk uitermate ongunstig gekozen is. Er varieert niets. De engelse termen 'blank' (open plaats) en 'place-holder' (plaats-bepaler) zijn veel markanter.

We kunnen onze taal uitbreiden met meer getalsymbolen, bijv. voor gehele resp. rationale getallen, en met meer bewerkingstekens, namelijk voor aftrekken, delen en machtsverheffen. In principe verandert er dan weinig. Dat men niet door 0 kan delen, levert een kleine complicatie, maar daarover wil ik het nu niet hebben. Men kan regels toevoegen over het weglaten van haakjes waardoor men de Waal weer op en af moet gaan varen.

We krijgen dan de taal waarvan we ons in Nederland in de brugklas plegen te bedienen.

Men kan ook het aantal logische symbolen uitbreiden. En dan komen we voor verrassingen te staan. Als nieuwe symbolen voegen we toe: $\neg$ en $\Rightarrow$.

Een van de meest bekende leerlingenfouten is

$$(a + 1)^2 = a^2 + 1$$

Volgens de hierboven aangelegde criteria is dit een onware uitspraak. Het ligt voor de hand te schrijven

$$\neg(a + 1)^2 = a^2 + 1$$

Is dit nu een ware uitspraak, omdat $(a + 1)^2 = a^2 + 1$ een onware uitspraak is? Of moeten we nagaan of substitutie van een natuurlijk-getalsymbool voor a in

$$\neg(a + 1)^2 = a^2 + 1$$

steeds een ware uitspraak geeft? Substitueren we 0 voor a , dan krijgen we de onware uitspraak

$$\neg(0 + 1)^2 = 0^2 + 1$$

En op grond hiervan moeten we dan concluderen dat

$$\neg(a + 1)^2 = a^2 + 1$$

een onware uitspraak is.

We zijn in een impasse geraakt. Blijkbaar kunnen we in onze taal het onderscheid tussen

er is een a waarvoor niet

en

voor geen enkele a

niet tot uitdrukking brengen.

We kunnen formeel ook anders te werk gaan.

$$(a + 1)^2 = a^2 + 1 \Rightarrow (3 + 1)^2 = 3^2 + 1$$

en omdat $16 \neq 10$, is $(a + 1)^2 = a^2 + 1$ dan een onware uitspraak.

Of

$$(a + 1)^2 = a^2 + 1 \Rightarrow 2a = 0$$

en omdat $2a = 0$ een onware uitspraak is, is $(a + 1)^2 = a^2 + 1$ ook onwaar.

Hoe hebben we hier geredeneerd? De eerste keer bedoelen we als voor elke a : $(a + 1)^2 = a^2 + 1$, dan is $(3 + 1)^2 = 3^2 + 1$ en de tweede keer voor elke a : als $(a + 1)^2 = a^2 + 1$, dan is $2a = 0$ en hebben daaruit geconcludeerd als voor elke a : $(a + 1)^2 = a^2 + 1$, dan is ook voor elke a : $2a = 0$. Dit laatste is niet waar en daaruit concluderen we dat voor elke a : $(a + 1)^2 = a^2 + 1$ een onware uitspraak is. Hier staan drie soorten implicaties. Ze zijn resp. van de vorm: (voor elke a : U_1) impliceert U_2 voor elke a : (U_1 impliceert U_2) (voor elke a : U_1) impliceert (voor elke a : U_2). We zien geen kans het principiële verschil tussen deze drie soorten implicaties in onze taal tot uitdrukking te brengen.¹⁾

Om dergelijke onderscheiden tot uitdrukking te kunnen brengen breiden we onze taal uit en voegen *kwantoren* toe. We maken de volgende nieuwe afspraken omtrent uitspraken:

als U een uitspraak is, dan is ook $\neg U$ een uitspraak
als U_1 en U_2 uitspraken zijn, dan is $(U_1 \Rightarrow U_2)$ een uitspraak
als U een uitspraak is en v een variabele, dan zijn $\forall v U$ en $\exists v U$ uitspraken.
De afspraken omtrent het waar en onwaar zijn van deze uitspraken zijn de gebruikelijke.

We onderscheiden nu twee soorten variabelen: gebonden en vrije variabelen. *De variabele v heet overal waar hij voorkomt in $\forall v U$ en in $\exists v U$, gebonden. Een variabele heet overal waar hij niet gebonden voorkomt, vrij.*

Hierboven hebben we gezien, dat we in dubbelzinnigheden verzeild raakten, als we het waar of onwaar zijn van uitspraken waarin vrije variabelen voorkomen, wilden bepalen. Zowel $\neg U$ als $(U_1 \Rightarrow U_2)$ leverden moeilijkheden. Om daaraan het hoofd te bieden, *spreken we af dat we de predikaten 'waar' en 'onwaar' voortaan alleen zullen toekennen aan uitspraken waarin geen vrije variabelen voorkomen.*

Nog uit een geheel ander gezichtspunt is onze taal te arm. De variabelen waren alleen betrokken op natuurlijke getallen. In een taal kan uiteraard een beschrijving voorkomen van elementen van diverse andere verzamelingen: reële getallen, punten, lijnen, vlakken, hoeken, hoekgrootten enz. Om in de formulering duidelijk te maken dat een variabele betrokken is op uitsluitend de elementen van een bepaalde verzameling V , schrijft men:

$$\forall v \in V: U \text{ en } \exists v \in V: U.$$

Dit betekent dat men bij het nagaan of deze uitspraken waar of onwaar zijn, zich moet beperken tot het substitueren voor v in U van symbolen die elementen van V voorstellen.

¹⁾ Soortgelijke moeilijkheden treden ook op bij $\vee$. We zijn namelijk niet in staat tot uitdrukking te brengen het verschil tussen voor alle a : $(U_1 \vee U_2)$ en (voor alle a : U_1) $\vee$ (voor alle a : U_2). In de praktijk stuiten we echter niet zo gemakkelijk op deze moeilijkheid.

In onze taal komen nu twee soorten uitspraken voor.

- a. *Uitspraken waarin vrije variabelen voorkomen.* Aan deze uitspraken wordt niet het predikaat 'waar' of 'onwaar' toegekend. *We noemen deze uitspraken open uitspraken.*
- b. *Uitspraken waarin geen vrije variabelen voorkomen.* Deze uitspraken kunnen waar of onwaar zijn. *We noemen deze uitspraken gesloten uitspraken of beweringen.*

Sommigen noemen open uitspraken ook wel open beweringen. Deze term is misleidend en daarom af te raden.

Onze taal was een kunsttaal. We worden nieuwsgierig of in de natuurlijke taal ook bestanddelen optreden die de rol van een variabele hebben. Een volledige analyse zou te ver voeren en ik betwijfel of ik ertoe in staat ben. Enkele voorbeelden wil ik toch geven.

Als *je* een hond een worst voorhoudt, dan gaat *hij* harder lopen. Het onbepaalde lidwoord 'een' is hier een variabele. De eerste keer is deze variabele betrokken op de verzameling van de honden, de tweede keer op die van de worsten. Maar ook in 'hij' zit een variabele verstopt. Namelijk dezelfde variabele die voorkomt in 'een hond'. En ten slotte ook nog in 'je'.

Wie een kuil graaft voor een ander, valt *er zelf* in. Men ziet een variabele optreden in 'een kuil' en diezelfde variabele weer in 'er'. En een variabele in 'wie'. Deze variabele treedt opnieuw op in 'een ander' (iemand die van 'wie' verschilt) en in 'zelf'.

Alle koeien hebben horens. 'Alle' is een kwantor. De variabele waarop deze kwantor betrekking heeft, zit verstopt in de meervoudsvorm 'koeien'. In de meervoudsvorm 'horens' daarentegen zit een existentieel gebonden variabele verstopt.

Ter overdenking het volgende zinnetje afkomstig van een persoon die de huidige generatie niet al te beleefd vindt. Als je iemand iets geeft, bedankt hij tegenwoordig soms niet eens. Succes met de analyse.

Duidelijk wordt dat het ontdekken van de structuur van een uitspraak die in natuurlijke taal geformuleerd is, een moeilijke opgave is. Daarbij blijft het helaas niet. Vergelijk eens de volgende twee uitspraken:

een koe heeft vier magen

en

een koe kan twintig jaar worden.

In de eerste uitspraak zit in het onbepaalde lidwoord een alkwantor verscholen en in de tweede een existentiële kwantor. De betekenis van het onbepaalde lidwoord hangt dus van de context af.

Daar kunnen we in onze schoolwiskunde last van hebben. Als ik beweer:

een gelijkbenige driehoek heeft een symmetrieas.

dan bedoel ik dat er ten minste één dergelijke lijn is.

Maar als ik zeg:

een cirkel geeft, gespiegeld in een lijn door het middelpunt, zichzelf als beeld
dan bedoel ik dat elke lijn door het middelpunt symmetrieas is.

Nu vraag ik naar de definitie van een symmetrische figuur en krijg als antwoord: een figuur is symmetrisch als hij gespiegeld in *een* as zichzelf als beeld geeft.

Taalkundig is dit nog zo gek niet, maar de mathemaat krijgt hier beslist last van de dubbelzinnigheid van de natuurlijke taal. Men kan als bezwaar tegen de formulering aanvoeren, dat het onduidelijk is of in 'een' een existentiële of een alkwantor verstopt zit.

En wat te zeggen van de opdracht: stel de matrix van *een* lineaire gelijkvormigheidstransformatie op? Zijn we met één voorbeeld tevreden of is in 'een' een alkwantor verborgen? Slecht geformuleerde opdracht.

In het voorgaande zijn voorbeelden gegeven van uitspraken in de natuurlijke taal waarin variabelen voorkomen. Van al deze uitspraken was het mogelijk na te gaan of ze waar of onwaar zijn. En dus zijn de variabelen die in deze uitspraken voorkomen, allemaal gebonden variabelen. De kwantoren waren veelal onzichtbaar, maar bij nadere analyse moet men ze kunnen vinden. Komen in de omgangstaal ook open uitspraken voor, dus uitspraken waarin vrije variabelen voorkomen en die daarom noch waar noch **onwaar** zijn?

Een voor het onderwijs belangrijke vraag. Traditioneel treden de open uitspraken voor het eerst expliciet in ons onderwijs op, op het moment dat de vergelijkingen geïntroduceerd worden. Men schrijft op

$$3x - 7 = x + 5$$

en ontdekt dat men niet weet of dit waar of onwaar is. Dat 'hangt van x af'. Of het waar is, is nog een open vraag en daarom heet dit een open uitspraak. Aldus een schoolboek. In elk geval is dit een geestige woordspeling.

Om het probleem duidelijker te maken gaan we voorbeelden uit de natuurlijke taal zoeken. Hier volgen er een paar.

Hij is vandaag jarig. Een open uitspraak, want of dit waar is, hangt ervan af wie 'hij' is.

Een kilo appels kost f 1,50. Alweer open, want of het waar is, hangt ervan af over welke appels ik het heb.

Een reis om de wereld duurt tachtig dagen. Open.

Jan is woensdag te laat gekomen. Erg open. Welke Jan? Waar kwam hij te laat? Op welke woensdag?

Zijn dit nu inderdaad open uitspraken geput uit het natuurlijke taalgebruik? Wie zegt, dat 'hij' vandaag jarig is en niet weet wie met 'hij' bedoeld is, leutert maar wat.

Het is best mogelijk, dat iemand zegt: een kilo appels kost f 1,50. Maar als hij daarmee werkelijk iets bedoelt, zit er een kwantor in deze uitspraak verscholen. Zo niet, dan kunnen we hem moeilijk au sérieux nemen.

Met de reminiscentie aan Jules Verne is het net zo gesteld. En wie beweert dat Jan woensdag te laat gekomen is, maar niet weet over welke Jan het gaat, waar hij te laat kwam en op welke woensdag, verwacht ik binnen afzienbare tijd in de spreekkamer van een psychiater.

En deze voorbeelden worden onze jongeren voorgehouden om ze duidelijk te maken wat een open uitspraak en daarmee wat een vergelijking is.

Toch komen in de omgangstaal wel vrije variabelen voor, maar we moeten naar andere soorten voorbeelden zoeken.

Onlangs had ik een gesprek met een directeur van een supermarkt. Ik informeerde hoe hij zich opstelde ten aanzien van winkeldiefstallen. Aan de hand van

een voorbeeld wilde hij me dit duidelijk maken. Hieronder een fragment uit het gesprek.

Ik zie *iemand* een paar nylons pakken en in *haar* boodschappentas laten verdwijnen.

Ik ga naar de uitgang en wacht, totdat *ze* de kassa is gepasseerd.

Ik houd *haar* staande en neem *haar* mee naar mijn kantoor.

Daar bespreek ik de situatie met *haar*.

De eerste van deze uitspraken (ik zie iemand een paar nylons pakken) heeft een hypothetisch karakter. Het heeft geen zin er het predikaat 'waar' of 'onwaar' aan toe te kennen. De variabele 'iemand' is een open variabele. Deze open variabele vindt men terug in de verdere gecursiveerde woorden uit het betoog. Een methode om in de omgangstaal het open karakter van een variabele te accentueren, is te spreken van 'een of ander'.

Dit is nu juist de manier waarop open variabelen ook in de wiskunde voorkomen.

Onderstel we willen oplossen de vergelijking

$$3x - 7 = x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$$

We redeneren dan als volgt.

x is een of ander reëel getal waarvoor $3x - 7 = x + 5$

komt op hetzelfde neer als (is ekwivalent met)

voor dat getal geldt $3x = x + 12$

en dit komt op hetzelfde neer als

voor dat getal geldt $2x = 12$

wat weer op hetzelfde neerkomt als

voor dat getal geldt $x = 6$.

Uit dit voorbeeld zien we hoe uit een open uitspraak door deductie een andere open uitspraak verkregen kan worden. Men hoeft hierover niet verbaasd te zijn.

Als uit p gededuceerd wordt q , dan is daarbij irrelevant of p al of niet waar is, maar is slechts de logische structuur van p en q van belang. Dat dergelijke structurele omvormingen ook mogelijk zijn met open uitspraken, ligt voor de hand. Dat ze noch waar noch onwaar zijn, is geen beletsel voor het deduceren. Voordeel van bovengenoemde methode van deduceren is, dat het proces parallel loopt met het proces van het natuurlijke denken. Toch zullen velen opponeren en zeggen, dat het anders moet. Zij redeneren als volgt, of liever gezegd, zij formaliseren hun denkproces als volgt.

$$\forall x \in \mathbb{R}: 3x - 7 = x + 5 \Leftrightarrow 3x = x + 12$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: 3x = x + 12 \Leftrightarrow 2x = 12$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$$

dus

$$\forall x \in \mathbb{R}: 3x - 7 = x + 5 \Leftrightarrow x = 6$$

Formeel is hier natuurlijk geen spel tussens te krijgen.

Wat doen 'erkende' logici? Dat verschilt. Sommigen werken in hun deducties alleen met gesloten uitspraken, anderen laten ook open uitspraken in deducties toe. Tot de laatste categorie behoort Quine¹⁾.

Ieder moet natuurlijk zelf kiezen. Maar ik mag wel een advies geven. Dat is heel

¹⁾ W. V. Quine, Mathematical Logic.

eenvoudig: praat tegen uw leerlingen niet over verschil tussen open en gesloten uitspraken, laat open uitspraken toe en behandel die in deducties precies zo als gesloten uitspraken. Het taalgebruik loopt dan het beste parallel met het natuurlijke denken. U schept voor de leerling niet kunstmatig problemen die u dan nog oplossen moet ook.

We maken nu een sprong van onze primitieve taal naar de volgroeide taal van de schoolwiskunde. Ook daar treden vrije en gebonden variabelen op. Hoe onderscheiden we daar de vrije van de gebonden variabelen?

We gaan daartoe nog even terug naar onze primitieve taal. De variabele $x (x \in \mathbb{R})$ is vrij in

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1)$$

en gebonden in

$$\exists x : x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

Immers (2) is waar en (1) is noch waar noch onwaar. We kunnen het onderscheid ook anders formuleren. Substitueer in (1) voor x een element van $\mathbb{R}$, bijv. 4. Er komt dan

$$4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 0$$

en dit is een uitspraak.

Substitueer daarentegen 4 voor x in (2) en er komt

$$\exists 4 : 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = 0$$

en dit is geen uitspraak.

Hiermee hebben we een algemeen criterium gevonden om vrije en gebonden variabelen te onderscheiden.

Gewapend met dit criterium onderzoeken we een serie uitspraken waarin variabelen voorkomen.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 5 = 0\} = \emptyset$$

Substitueer voor x een reëel getal. Er staat dan geen uitspraak meer. De variabele x is dus gebonden.

We kunnen ook zeggen, dat x in

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 5 = 0\}$$

gebonden is, omdat na substitutie van een reëel getal voor x hier geen verzameling meer staat, maar een ongedefinieerde tekencombinatie.

De functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

$$f : x \rightarrow x^3 - x \quad (3)$$

Substitueer voor x een reëel getal, bijv. 2. Er komt

$$f : 2 \rightarrow 2^3 - 2$$

Hier ontstaat twijfel. Men zou kunnen zeggen, dat hier weer een functie staat, namelijk de functie met domein $\{2\}$ die aan 2 toevoegt de functiewaarde 6. We dienen ons nu te realiseren wat met (3) bedoeld wordt. Hier staat:

f is de toevoeging die aan elk reëel getal toevoegt het getal $x^3 - x$
of

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3 - x\}$$

Nu blijkt dat x inderdaad een gebonden variabele is.

Vergelijk hiermee:

de functie f_a met domein $\{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$f_a : a \rightarrow a^3 - a$$

Hierin is a een vrije variabele.

Of de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f_a : x \rightarrow ax^3 - 2x^2 + a \quad (a \in \mathbb{R})$$

Hierin is x gebonden en a vrij.

$$\sum_{i=1}^n i^2$$

Hierin is i gebonden en n vrij.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 3a$$

De variabele x is gebonden, a vrij.

$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 1) dx = 8$$

De variabele x is gebonden.

$$\int_0^a (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{3}(a - 1)^3 - 1$$

Nu is x gebonden en a vrij.

$$\left(\frac{dx^2}{dx} \right)_{x=a} = 2a$$

Weer x gebonden en a vrij.

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x \tag{4}$$

Volgens ons criterium is x gebonden. Toch stelt deze formule ons in staat de afgeleide van $x \rightarrow x^2$ te vinden in bijv. 5. We substitueren dan 5 voor x in het rechter lid en vinden 10. Het lijkt wel alsof x ook het karakter van een vrije variabele heeft. Als we (4) nader bekijken, merken we waar de schoen wringt. In het linker lid is x een gebonden variabele. In het rechter lid is x daarentegen vrij. Een ietwat wonderlijke notatie dus. Het is hier niet de plaats hier uitvoerig op in te gaan. Dit is al eens geschied door A. Nijenhuis.¹⁾

Wonderlijk is ook de definitie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df(x)}{dx}$$

Hierin is h gebonden en f vrij. Maar x ? In het linker lid is x vrij en in het rechter gebonden. En toch worden deze twee leden per definitie aan elkaar gelijk gesteld.

Moeilijkheden treden ook op bij het werken met differentiaal.

Bijv. bij de uitspraak

$$dx^2 = 2x dx$$

en bij de formulering van een differentiaalvergelijking als

$$x dx + y dy = 0$$

Zijn x en y hier vrij of gebonden?

In de cirkel C met vergelijking

$$x^2 + y^2 = 25$$

zijn x en y gebonden variabelen. Er staat immers

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

De vectorvoorstelling van lijn l

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

¹⁾ Prof. Dr. A. Nijenhuis, Een beschouwing over functienotatie, Euclides 40 (1964–65), p. 33–45.

stelt ons voor een analoog probleem. Wat voor soort variabele is λ ?

Hier staat eigenlijk

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda \\ 4 + 2\lambda \end{pmatrix} \right\}$$

en dus is de parameter λ een gebonden variabele.

Ook in de kromme K gedefinieerd door de parametervoorstelling

$$x = 3t^2 + t$$

$$y = t^2 - 3t$$

is t gebonden.

Wanneer we nu precies van een parameter spreken, is me nooit duidelijk geworden. Want ook in

$$f_a : x \rightarrow ax^3 - 2x^2 + a$$

noemt men wel a een parameter. Men zegt dat de functie afhangt van de parameter a . Maar nu is a een vrije variabele.

Tot zover het gebruik van variabelen. Nu nog enig *misbruik*. Sommigen stellen de wortels van een vierkantsvergelijking voor door x_1 en x_2 en schrijven dan

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = 3$$

of misschien wel

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 3$$

Ook ziet men wel

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als links en rechts van het implicatieteken verschillende vrije variabelen staan, moet men op zijn minst op zijn hoede zijn. Inderdaad staat hier onzin.

De differentienotatie met behulp van het symbool Δ . Met behulp van dat symbool kan men altijd heerlijk gedachtenloos rekenen. Dat is dan ook het enige voordeel ervan. Men schrijft:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

Rechts van het gelijktteken komt h voor. Naar ik meen vrij, maar dat weet ik niet zeker. Links zien we geen h . Dat geeft al te denken. Verder weet ik ook niet precies of x nu vrij of gebonden is. Ik heb echter een auteur van een schoolboek ontdekt die van mening was, dat x vrij was. Hij substitueerde voor x de x -coördinaat van een 'bepaald' punt (er stond een figuur, bij getekend) en kreeg

$$\Delta f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1)$$

Deze man had waarschijnlijk ook onvervroren opgeschreven

$$\Delta f(1) = f(1 + h) - f(1)$$

Dat stelt vermoedelijk de toename van $f(1)$ voor.

Moraal: graag geen gebruik maken van de Δ -notatie.

Heel raar is ook

$$\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

met een vrije variabele c in alleen het rechter lid.

Deze notatie geraakt gelukkig in onbruik.

Aardig is de volgende oplossing afkomstig van een student. Gevraagd het beeld l' van de lijn $l : 2x + 3y = 5$ bij de translatie $T(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix})$. Zijn antwoord was

$$l' = \{(x', y') \mid x' = x + 3 \wedge y' = y - 2 \wedge 2x + 3y = 5\}$$

Verleidelijk, maar de vrije variabelen x en y in het rechter lid doen hem de das om.

Een andere student gaf de volgende definitie van een omgeving. Een omgeving van p is een verzameling

$$\{x \mid d(x, p) < a \wedge a \in \mathbb{R}^+\}$$

De variabele a is hier vrij. Bij elke variabele moet men vermelden van welke verzameling elementen ervoor gesubstitueerd mogen worden. Dit is hier verzuimd. De bedoeling van de student was voor te schrijven, dat voor a alleen maar positieve reële getallen gesubstitueerd mogen worden. De toevoeging tussen de accoladen ' $a \in \mathbb{R}^+$ ' is hiertoe niet doeltreffend. In een boek over analyse is meestal gebruik aan te nemen dat, als niet anders vermeld is, de variabelen reële getallen voorstellen. Houdt men zich aan deze conventie, dan kan men voor a ook 0 substitueren en concluderen, dat p een lege omgeving heeft.

Correct is:

een omgeving van p is een verzameling

$$\{x \mid d(x, p) < a\}, \text{ waarin } a \in \mathbb{R}^+$$

of

$$V \text{ is een omgeving van } a \stackrel{\text{def}}{=} \exists a \in \mathbb{R}^+ : V = \{x \mid d(x, p) < a\}$$

Ten slotte opgave 2 voor mavo-4, 1977 eerste periode.

Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 10$, $BC = 4$ en $CG = 4$.

Op de ribbe EF ligt een punt P zo, dat $EP = 3$.

Op de ribbe AB ligt een variabel punt Q met $BQ = x$ voor elke $x \in [0, 10]$.

a. Neem $x = 4$ en bereken de omtrek van $\triangle PQC$.

b. Neem $x = 4$ en bereken in graden nauwkeurig $\angle PQC$.

c. Voor welke x geldt $CP = CQ$?

Ik heb me de zaak proberen voor te stellen. Op de ribbe AB heb ik me een variabel punt Q voorgesteld. Zeker zo'n punt dat een beetje aan het bibberen is. Toen las ik verder en ontdekte dat er voor elke $x \in [0, 10]$ zo'n variabel punt Q op de ribbe AB lag. Zo'n soort krentenkoek van bibberpunten zeker. Toen heb ik $x = 4$ genomen. Waarmee de auteur bedoeld zal hebben dat ik dat ene bibberpunt dat bij 4 hoort, in de gaten moet houden. En nu de omtrek van $\triangle PQC$ uitrekenen. Maar dat gaat niet zo best met zo'n bibberpunt. De volgende vraag baarde me minder zorg. In graden nauwkeurig, dus bij benadering, uitrekenen hoe groot $\angle PQC$ is. Als het punt nu maar niet te erg bibbert, dan kan dat nog wel. En $CP = CQ$? Wel een heleboel van die bibberpunten gaven op een gegeven ogenblik nog wel $CP = CQ$. Welke, daar ben ik niet achter gekomen.

Deze ellende wordt veroorzaakt door het woord 'variabel'. Men heeft de opgave zo geredigeerd, dat x er gebonden in voorkomt. Als men volstaat met te vermelden, dat punt Q op de ribbe AB ligt en $BQ = x$ en het woord 'variabel' niet gebruikt, dan is er geen kou aan de lucht.

Vaak beleven we de variabele als iets dat varieert. Denk maar aan functies. De functie f is stijgend, wil zeggen dat $f(x)$ toeneemt als x toeneemt. Je ziet het gebeuren, vooral als er een grafiek bij getekend is. Maar als je het in officiële taal zwart op wit zet, dan staat er heel nuchter:

$$\forall x_1, x_2 : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \quad \text{En er varieert niets.}$$

Ook bij limieten ziet men h tot 0 naderen. Maar de facto nadert er niets; denk maar aan de limietdefinitie. En wie een limiet definieert als een continuumakende

waarde, komt zelfs niet eens in de verleiding om aan de naderen te denken.

Vaak ziet men dat in een gekozen functie $f: x \rightarrow f(x)$ voor x een bepaalde waarde gekozen wordt en dat deze dan x_1 genoemd wordt. In het midden wordt gelaten welke bepaalde waarde x_1 voorstelt, zodat x_1 op zijn beurt weer een variabele is. In feite wordt hier de variabele x door een andere variabele x_1 vervangen. Wat is de zin daarvan?

Laten we eens een voorbeeld nemen. Van de functie $f: x \rightarrow x^2$ willen we de afgeleide f' vinden.

Kies voor x een bepaalde waarde x_1 . Nu is

$$f(x_1) = x_1^2$$

En

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^2$$

Dus

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{(x_1 + h)^2 - x_1^2}{h} = \frac{2x_1h + h^2}{h}$$

Hieruit volgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_1h + h^2}{h} = 2x_1$$

Dus

$$f'(x_1) = 2x_1$$

Dit geldt voor iedere x_1 . Dus is de afgeleide functie

$$f': x \rightarrow 2x$$

Nu een nadere analyse. In $f: x \rightarrow x^2$ is x een gebonden variabele. Daarna is de redenering als volgt.

x_1 is een of ander reëel getal.

(1)

Voor dat getal geldt $f(x_1) = x_1^2$.

Enzovoorts.

Om ten slotte te besluiten tot:

voor dat getal geldt $f'(x_1) = 2x_1$.

(2)

In het hele deel van de redenering waarin van (1) uitgegaan wordt en hieruit (2) gededuceerd wordt, is de variabele x_1 vrij. Nu wordt duidelijk wat bedoeld wordt met: *kies voor x een bepaalde waarde x_1 . Dat betekent: maak de variabele x vrij en vervang hem door x_1 .* We gaan over van $\forall x: f(x) = x^2$ op $f(x_1) = x_1^2$. En deduceren hieruit $f'(x_1) = 2x_1$. Om ten slotte te besluiten dat $\forall x: f'(x) = 2x$. Verhelderend is dit proces in abstracto te bekijken. Daartoe eerst de volgende logische regel:

als uit

$$U_1(x_1) \quad (x_1 \text{ vrij})$$

deduceerbaar is

$$U_2(x_1) \quad (x_1 \text{ vrij})$$

dan is ook deduceerbaar

$$\forall x: U_1(x) \Rightarrow U_2(x) \quad ^1$$

Op deze regel berusten deductieprocessen van de volgende soort:

¹⁾ De gebonden variabele is hier x en de vrije x_1 . Dit verschil in notatie is wetenschappelijk niet nodig. Vanuit didactisch gezichtspunt is het echter wel nuttig.

- 1 $\forall x : U_1(x)$
- 2 $U_1(x_1)$
- 3 $U_2(x_1)$ (deduceerbaar uit 2)
- 4 $\forall x : U_1(x) \Rightarrow U_2(x)$ (omdat 3 deduceerbaar is uit 2)
- 5 $\forall x : U_2(x)$ (wegens 1 en 4)

Een dergelijk deductieproces is hierboven uitgevoerd.

Hopelijk is nu de theoretische achtergrond duidelijk geworden van de mysterieuze zegswijze: kies voor x een bepaalde waarde x_1 .

Een klassiek voorbeeld van een dergelijke redenering is het bewijs door middel van volledige inductie.

Voorbeeld. Bewijs met volledige inductie

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Men gaat als volgt te werk.

$$1^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1$$

is een ware uitspraak. (Dit bedoelt men, als men zegt: de eigenschap is juist voor $n = 1$.)

Onderstel dat

$$1^2 + 2^2 + \dots + n_1^2 = \frac{1}{3}n_1^3 + \frac{1}{2}n_1^2 + \frac{1}{6}n_1 \quad (1)$$

Meestal zegt men: onderstel dat n_1 een geheel positief getal is waarvoor de eigenschap waar is.

Door deductie wordt hieruit verkregen

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n_1 + 1)^2 = \frac{1}{3}(n_1 + 1)^3 + \frac{1}{2}(n_1 + 1)^2 + \frac{1}{6}(n_1 + 1)$$

Men constateert zo, dat dan ook $n_1 + 1$ een positief geheel getal is waarvoor de eigenschap waar is.

Waarmee het bewijs voltooid is.

De begripsmoeilijkheid in dit bewijs is de overgang van de gebonden variabele n op de vrije variabele n_1 . Degen die het niet door heeft, zegt: in (1) neemt u al aan dat datgene wat u bewijzen moet, waar is. Hij heeft niet in de gaten dat in (1) aangenomen wordt dat n_1 een of ander getal is waarvoor de eigenschap waar is (vrije variabele) en niet dat de eigenschap voor een willekeurig (d.w.z. elk) getal waar is (gebonden variabele).

In deze vorm moet men het zijn leerlingen niet uitleggen. Maar dieper inzicht in de structuur van het bewijs met volledige inductie kan wel als gevolg hebben, dat men de moeilijkheden van zijn leerlingen beter begrijpt en ze dus ook beter kan opvangen.

Ik heb me hierboven laten verleiden de term 'willekeurig' te gebruiken. In een artikel over variabelen mag een analyse van de betekenis van deze term niet ontbreken.

Enkele voorbeelden. Op de ribbe AB van kubus $ABCD.EFGH$ ligt een willekeurig punt P . Hier is sprake van een pleonasme. Het onbepaalde lidwoord 'een' en het woord 'willekeurig' hebben dezelfde betekenis. Als we zeggen: op de ribbe AB ligt een punt P , bedoelen we hetzelfde als wanneer we zeggen: op de ribbe AB ligt een willekeurig punt P .

Een leraar wil de stelling van De Ceva bewijzen. Hij tekent een driehoek ABC op het bord en zegt tegen een leerling: kies een willekeurig punt P . De leerling kiest punt A .

Leraar: dat is geen willekeurig punt. Dat is een hoekpunt.

Leerling kiest een punt op de ribbe AB .

Leraar: dat is ook geen willekeurig punt. Het is een punt op een zijde.

Leerling kiest een punt binnen de driehoek.

Leraar is tevreden, hoewel er buiten de driehoek aanmerkelijk meer plaats is.

Pientere leerling: als u een punt wilt hebben dat geen hoekpunt is en niet op een zijde ligt, dan wilt u geen willekeurig punt hebben, maar een punt dat aan bepaalde condities voldoet.

Commentaar overbodig. Maar als de leraar gezegd had: neem het punt liever niet op een zijde, want dan kom je misschien in moeilijkheden, of iets dergelijks, dan was er geen aanmerking op te maken. 'Willekeurig' in de zin van: heeft geen speciale eigenschappen, is slordig taalgebruik.

Wie zegt, dat een willekeurige driehoek een bepaalde eigenschap heeft, en daarmee bedoelt, dat elke driehoek die eigenschap heeft, kan doorgaans beter 'elke' zeggen. Er kunnen omstandigheden zijn waarin 'willekeurige' beter begrepen wordt dan 'elke' (zoals hierboven het geval was, althans m.i.).

Conclusie: de term 'willekeurig' kunnen we missen.

Nu we het zo lang over variabelen gehad hebben, kan ik me voorstellen dat iemand vraagt: wat zijn *constanten* nu eigenlijk? We gaan terug naar de primitieve taal waarmee we begonnen zijn. Symbolen waren daar onder meer:

$0, 1, 2, 3, \dots$ en a, b, c

De symbolen a, b, c zijn variabelen. De symbolen $0, 1, 2, 3, \dots$ zou ik constanten willen noemen.

Meer algemeen: *constanten zijn symbolen die zelf geen variabelen zijn, maar wel voor variabelen gesubstitueerd worden*. Door deze substitutie ontstaat uit een uitspraak weer een uitspraak, uit een term weer een term, uit een verzameling weer een verzameling enz.

Nog een slotopmerking. De taal die we, althans in Nederland, op school spreken, is de predikatenlogica van de eerste orde. Dat is een taal waarin individuenvariabelen gebonden voorkomen, maar predikatenvariabelen niet. Hetgeen erop neerkomt, dat variabelen voor verzamelingen, relaties, functies niet gebonden voorkomen. In een uitspraak kunnen variabelen voor verzameling relaties of functies wel vrij voorkomen. Zoals in:

$$V \cap (W \cup U) = (V \cap W) \cup (V \cap U)$$

$$(f \circ g)^{\text{inv}} = g^{\text{inv}} \circ f^{\text{inv}}$$

Met een dergelijke uitspraak is dan bedoeld dat hij van toepassing is op elk drietal verzamelingen resp. op elk tweetal functies. Het vrij zijn van V en W brengt met zich mee, dat we bijvoorbeeld niet mogen schrijven

$$V \times W \neq W \times V$$

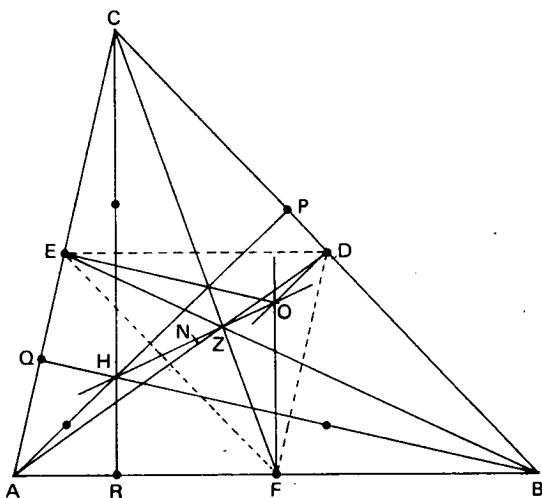
als we bedoelen dat $V \times W = W \times V$ geen uitspraak is die voor elk geordend paar verzamelingen waar is.

Ook implicaties moeten op adequate manier geformuleerd worden.

De rechte van Euler – een bewijs

A. W. BOON

Zinnend op een manier om de rechte van Euler en de negenpuntscirkel van Feuerbach op een voor derdeklassers (VWO) elementaire manier ter sprake te brengen, vond ik de volgende bewijsjes, die slechts gebruik maken van de afbeelding 'vermenigvuldigen'.



- 1 In een (niet-gelijkzijdige) driehoek liggen het zwaartepunt (Z), het hoogtepunt (H) en het middelpunt van de omschreven cirkel (O) op één rechte (de rechte van Euler) en wel zó, dat $HZ : ZO = 2 : 1$.
- 2 In een driehoek liggen de middens der zijden, de voetpunten der hoogtelijnen en de middens der lijnstukken begrensd door één der hoekpunten enerzijds en het hoogtepunt anderzijds op één cirkel (de negenpuntscirkel van Feuerbach).

Bewijs: Gegeven driehoek ABC . De middens der zijden zijn resp. D , E en F (zie figuur).

1 Er geldt: $V_{Z,-2}(\triangle DEF) = \triangle ABC$.

Daar O het hoogtepunt is van $\triangle DEF$ is $V_{Z,-2}(O)$ het hoogtepunt van $\triangle ABC$. $Q.E.D.$

2 A Zij $\odot(O, r)$ de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$, dan is $V_{Z,-\frac{1}{3}}(\odot(O, r)) = \odot(N, \frac{1}{2}r)$ de omgeschreven cirkel van $\triangle DEF$.

N is het midden van het lijnstuk HO .

$$(NO = NZ + ZO = \frac{1}{2}ZO + ZO = 1\frac{1}{2}ZO = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot HO = \frac{1}{2}HO)$$

B Zijn P , Q en R de voetpunten der hoogtelijnen (zie figuur) dan snijden de middelloodlijnen van de lijnstukken DP , QE en RF lijnstuk HO in N . Hieruit volgt: $PN = DN = \frac{1}{2}r$, $QN = EN = \frac{1}{2}r$ en $RN = FN = \frac{1}{2}r$.

C $\odot(N, \frac{1}{2}r) = V_{H,\frac{1}{3}}(\odot(O, r))$, dus ook de middens der lijnstukken HA , HB en HC liggen op de $\odot(N, \frac{1}{2}r)$.

Over de auteur:

Schrijver dezes is docent wiskunde aan het Christelijk Gymnasium 'Sorghvliet' te Den Haag.

De spoorwegen spreken

C. VAN SCHAGEN

De brugklas was met het zelfwerkzaamheidboek bij de taak aangeland, waarin de verwissel-eigenschap en de schakel-eigenschap worden behandeld (deze benamingen zijn puriteins voor commutatieve- en associatieve wet). Alles leek goed te gaan, totdat de volgende opdracht verscheen:

Schrijf op, hoe uit de schakel-eigenschap en de verwissel-eigenschap samen volgt, dat: $(8 + 5) + 6 = (6 + 5) + 8$.

Niemand wist wat je daar mee aan moest, de slimste leerling niet en zelfs de domste niet, die vaak nog wel eens goede ideeën hebben.

In een flits kwam bij mij een plan op. Het kernpunt van de kwestie leek mij de betekenis van het begrip 'herleiden' te zijn. Zou het niet mogelijk zijn met leerlingen, die nauwelijks twee weken ervaring met wiskunde hadden, het wezen van 'herleiden' te laten beleven aan een exemplarische benadering? Misschien zouden ze, voor de bijna 6 jaar wiskunde die ze nog tegoed hebben, daar voordeel van hebben. Herleiden pleegt nogal eens voor te komen.

De zelfwerkzaamheid dus maar even aan de kant. Boeken en schriften dicht. Wel een kladblaadje en een balpen paraat graag.

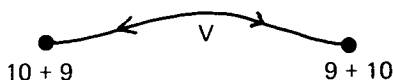
Hebben jullie wel eens een spoorboekje gezien? Wat staat daarin op de eerste bladzijde? Wat stelt dat voor? Wat kun je daarmee doen?

Iedereen begrijpt, dat je hiermee kunt zien, hoe je van Roodeschool naar Schin op Geul kunt reizen, met traject na traject, van plaats naar plaats, te beginnen met het beginpunt, en eindigend bij het eindpunt.

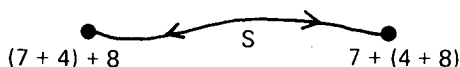
Zo'n spoorwegkaart gaan we nu ook maken voor onze opdracht. Verbazing. Nu let dan maar op.

De plaatsen (stations) zijn allemaal het getal 19, en de plaatsnamen zijn allemaal verschillende namen voor dit getal (namen voor = verschillende, min of meer ingewikkelde schrijfwijzen voor).

Hier heb je er twee, met daarbij meteen een traject. De letter V bij het traject betekent, dat we dit bereizen met een speciaal treinstel, dat 'verwissel-regel voor de optelling' heet. Je ziet, dat op dit traject retours worden verkocht.



Een ander tweetal ziet er zo uit, en dit traject wordt bereden met de 'schakel-regel voor de optelling'.



De verleiding blijkt groot er nog meer te maken. Allerlei voorstellen worden middels omhooggestoken vingers aangeboden. Maar onze tijd is beperkt. Soms moet men leerlingen afremmen in plaats van activeren.

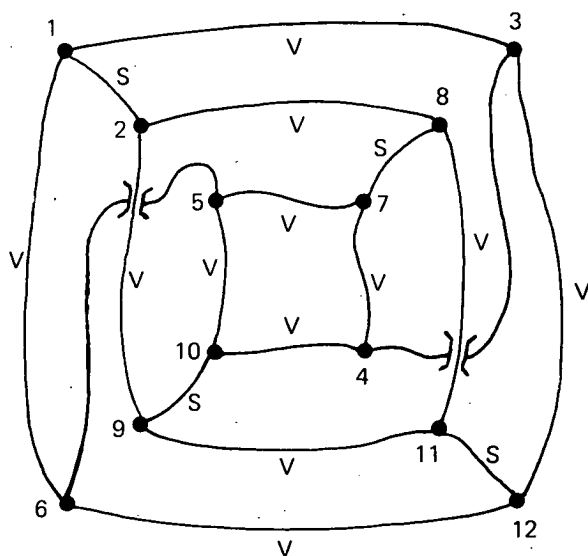
Het volledige spoorwegnet van 19 is erg uitgebreid, daar zijn de nederlandse spoorwegen niets bij, het wordt geëxploiteerd door talloze maatschappijen, net zoals in Zwitserland. Laten we ons beperken tot de spoorwegkaart van alleen de maatschappij '5, 6, 8, +'.

Hoeveel stations heeft die?

Het wordt een spelletje. Iedereen schrijft er zoveel op als hij vinden kan. Er komt er telkens één op het bord. Wie deze ook heeft streept hem door, en zo staan ze al gauw alle twaalf op het bord.

- 1 $(8 + 5) + 6$
- 2 $8 + (5 + 6)$
- 3 $(5 + 8) + 6$
- 4 $5 + (8 + 6)$
- 5 $(6 + 8) + 5$
- 6 $6 + (8 + 5)$
- 7 $(8 + 6) + 5$
- 8 $8 + (6 + 5)$
- 9 $(5 + 6) + 8$
- 10 $5 + (6 + 8)$
- 11 $(6 + 5) + 8$
- 12 $6 + (5 + 8)$

Twaalf stippen komen op het bord, met daarbij de nummers van de stations. Wie een traject weet mag deze op het bord tekenen, met de naam van het treinstel erbij. Met veel hilariteit komt de hele kaart op het bord. Er blijken zelfs tunnels gegraven te moeten worden. Het lijkt meer op een Metro-kaart (de kaart die hierbij staat is later ontworpen in een poging wat meer zichtbare regelmaat aan te brengen. De mooiste regelmaat ontstaat, wanneer men er een ruimtelijk steigerwerk van maakt).



Reizen van I naar II blijkt nu op zijn kortst met drie trajecten te kunnen, en wel op vier verschillende manieren:

We schrijven dat eerst zo op:

$$1 \xrightarrow{V} 3 \xrightarrow{V} 12 \xrightarrow{S} 11$$

$$1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{V} 8 \xrightarrow{V} 11$$

$$1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{V} 9 \xrightarrow{V} 11$$

$$1 \xrightarrow{V} 6 \xrightarrow{V} 12 \xrightarrow{S} 11$$

en daarna vertalen we dit tot:

$$(8 + 5) + 6 \underset{V}{=} (5 + 8) + 6 \underset{V}{=} 6 + (5 + 8) \underset{S}{=} (6 + 5) + 8 \text{ enz.}$$

Antwoord van de opdracht.

Om te besluiten twee conclusies:

- 1 De opdracht in het boek was ongelukkig geformuleerd. Een betere zou zijn geweest: herleid $(8 + 5) + 6$ tot $(6 + 5) + 8$ met behulp van de verwissel-eigenschap en de schakel-eigenschap.
- 2 Wiskunde zou heel wat gemakkelijker zijn, als voor alle herleidingen spoor-wegkaarten beschikbaar zouden zijn. Omdat die er niet zijn, moeten we ons behelpen met vage richtingsgevoelens en de dienstregelingsborden op de perrons. Deze zijn door mij al eens eerder aangeduid met strategie en principe.

Over de auteur:

Wiskundedocent sinds januari 1945.

Didacticus in hart en nieren.

Publicaties over didactiek sinds oktober 1963.

Vindt dat het wiskundeleerboek nog geschreven moet worden.

Meent: Wiskunde is het antwoord op de vraag: 'Waarom moeilijk als het makkelijk kan?'

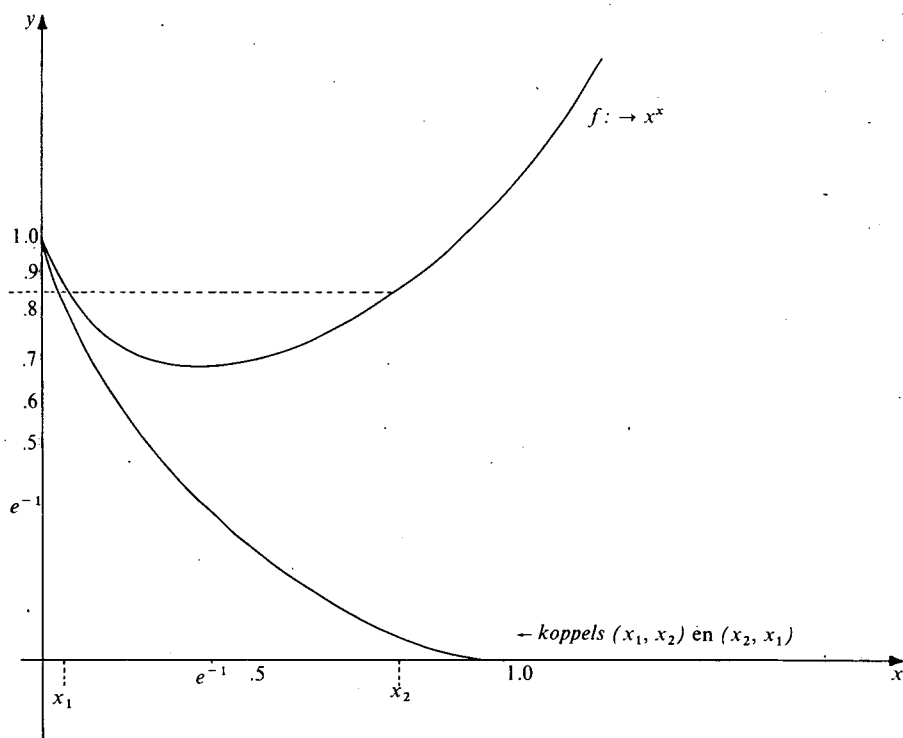
$$a^a = b^b$$

GILBERT RESPES

‘De vergelijking $x^x = a^a$ met $a \in \mathbb{R}^+$ heeft twee oplossingen als $a \in]0,1[\setminus e^{-1}$. De gemakkelijkste is $x = a$, maar hoe de andere te vinden?’ vraagt F. Laforce in Euclides 9 (1976–1977) p. 347–348.

Teken op millimeterpapier de grafiek van de functie $F_1 : x \rightarrow x^x$ voor $x > 0$.

Lees voor enkele functiewaarden de bijbehorende oplossingen x_1 en x_2 af en teken de verzameling van de koppels (x_1, x_2) en (x_2, x_1) .



*) $]0,1[$ betekent $<0,1>$.

De kromme bepaald door deze koppels kan benaderd worden door de grafiek van de functie

$$F_2 : x \rightarrow \frac{k}{x-d} + d$$

Opdat de kromme door (e^{-1}, e^{-1}) zou gaan, moet $k = (e^{-1} - d)^2$ en omdat ze door $(0,1)$ gedwongen wordt, is $d = e^{-1}(2 - e)^{-1}$.

Berekende functiewaarden worden gebruikt als startwaarde voor de methode van Newton-Raphson.

Uit $x^x = a^a$ volgt $x \cdot \ln x - a \cdot \ln a = 0$

Van $F : x \rightarrow x \cdot \ln x - a \cdot \ln a$ is de afgeleide functie

$$F' : x \rightarrow \ln x + 1$$

De iteratieformule $x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}$ wordt:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i \cdot \ln x_i - a \cdot \ln a}{\ln x_i + 1}$$

Convergentie is verzekerd in het interval $]0,1[$

Een paar resultaten (x_0 is de berekende startwaarde)

$$a = 0,2$$

$$x_0 = 0,575 \ 333 \ 239 \ 6$$

$$x_1 = 0,566 \ 746 \ 372 \ 2$$

$$x_2 = 0,566 \ 597 \ 350 \ 2$$

$$x_3 = 0,566 \ 597 \ 304 \ 8$$

$$a = 0,5$$

$$x_0 = 0,253 \ 004 \ 911 \ 4$$

$$x_1 = 0,249 \ 952 \ 141 \ 7$$

$$x_2 = 0,249 \ 999 \ 988 \ 1$$

$$x_3 = 0,25$$

Merk op dat na één Newton-stap reeds een nauwkeurigheid van drie decimalen bereikt wordt.

Het vak wiskunde II

H. STEUR

Ik wil graag een lans breken voor het vak wiskunde II. Daarbij moet ik vooropstellen dat ik, als eerstverantwoordelijke auteur van de wiskunde II-boeken van Getal en Ruimte, niet onpartijdig ben. Iedereen zal begrijpen, dat het je onberoerd laat, als je op het moment dat de boeken eindelijk redelijk naar je zin geschreven zijn, te horen krijgt dat het vak binnenkort misschien afgeschaft wordt. Vergeet die partijdigheid nu even en let op de argumenten.

De directe aanleiding tot dit stukje is het bericht, of liever het gerucht, dat alle kopstukken uit de Nederlandse wiskundewereld zijn samengevoegd tot een commissie, die binnen een half jaar rapport moet uitbrengen over de mogelijkheid tot verandering van de huidige VWO-wiskundeprogramma's in programma's wiskunde A en B. Als dit nummer van Euclides uitkomt, zou dat rapport er dus al moeten zijn. Ik ben bang, dat er overhaaste en onverstandige beslissingen genomen zullen worden, die het wiskundeonderwijs zeer zullen benadelen. Vandaar.

Het meestgehoorde argument tegen het vak wiskunde II is: Er is geen enkele studierichting, die dit vak eist.

Dit argument wordt met opgetrokken neus uitgesproken.

Ik kan daar ontzettend boos over worden. Het vak wiskunde II is daarin namelijk in het gezelschap van Engels, Duits, Frans, economie I, economie II, biologie, geschiedenis en aardrijkskunde. En deze vakken worden toch ook niet afgeschaft? Het belang van een vak moet je niet afmeten aan het aantal studierichtingen, waarvoor het vereist is. Je moet kijken naar de inhoud van het vak, naar de vormende waarde en naar het nut dat de leerlingen ervan hebben bij hun vervolgopleiding.

Wat het laatste betreft: het vak wiskunde II bevordert in hoge mate een goede aansluiting aan het WO. Vele collega's die contact hebben met oud-leerlingen, zullen dit kunnen beamen. De oud-leerlingen komen je spontaan vertellen hoe gelukkig ze zijn dat ze wiskunde II gehad hebben. Het betreft dan studies aan de TH (waar verreweg de meeste studenten wiskunde II hebben), in wiskunde en in natuurkunde, maar ook scheikunde-, landbouw-, geologie- en economiestudenten getuigen van het plezier dat ze van de wiskunde II hebben.

Wat de vormende waarde betreft: die is moeilijk te meten. Daar moet je in geloven. Ik geloof in de vormende waarde van de wiskunde II, mits de leraar

niet te veel op de rekentoer gaat. Ik geloof dat het 'probleem oplossen', het creatieve denken, sterk bevorderd wordt door de meetkunde. Als je het vak wiskunde II afschaft, schaf je de meetkunde op het examen af (althans voor een zeer groot deel, gezien de plannen die de al bestaande commissie A-B heeft gepubliceerd) en dat betekent dat de meetkunde vrij spoedig ook uit de onderbouw zal verdwijnen. Dat vind ik een ongelooflijke verarming van ons wiskundeonderwijs. En denk niet dat het niet zo'n vaart zal lopen, want dat loopt het wél.

U hebt natuurlijk ook opgemerkt, dat leerlingen met wiskunde II in het pakket veel betere cijfers halen bij wiskunde I. U denkt dat dat komt doordat het de betere leerlingen zijn, die wiskunde II kiezen. Het zou ook best kunnen zijn, dat deze leerlingen veel beter wiskundig leren denken, doordat ze het wiskunde II-programma krijgen.

Een ander argument voor afschaffing is dat te weinig leerlingen het vak kiezen. Het is een beetje hard om te zeggen, maar dat komt voornamelijk door de houding van en de advisering door de schooldekanen en de wiskundeleraren. Als dezen tegen de leerlingen en hun ouders zeggen: 'Het vak wiskunde II wordt nergens geëist' en ze vertellen er niet bij dat wiskunde II bijna onmisbaar is voor studies in techniek, natuurkunde en wiskunde en zeer nuttig voor de studies scheikunde, landbouw, geologie en economie, dan kiest men het vak niet. De mening van de wiskundeleraar weerspiegelt zich in de keuze van de leerlingen. Daarom is het noodzakelijk dat wiskundeleraren luisteren naar ervaringen van hun oud-leerlingen. Verder moeten zij hierover spreken met de schooldekanen, die ook vaak onvoldoende op de hoogte zijn van de waarde van het vak wiskunde II. Zij gaan af op de mening van de hoogleraar aan de TH, maar horen niet de tegengestelde meningen van de praktikumbegeleiders en de studenten.

Een derde argument om wiskunde II af te schaffen is het feit dat een aantal leerlingen het vak wiskunde I kiezen, terwijl zij het niet aankunnen (ja, er staat echt wiskunde I).

Het vak wiskunde I wordt wél geëist door een aantal studierichtingen. Hieronder zijn richtingen die vaak door wiskundig zwakbegaafde leerlingen worden gekozen, zoals sociale wetenschappen. VWO-leerlingen, die zo'n studie overwegen, worden daarom sterk in de verleiding gebracht wiskunde I te kiezen, ook al is hun aanleg onvoldoende. Wordt er dan ook nog onvoldoende gezien op het feit dat verschillende sociale studierichtingen afzien van het voortentamen en op het feit dat een voortentamen vaak veel minder stof bevat dan het wiskunde I-programma, dan is het onheil geschied en kiest de leerling wiskunde I. Hij haalt slechte cijfers en dan zit (ook) de wiskundeleraar met de problemen.

Het is hierom dat men nu overweegt een gemakkelijker wiskunde A-programma met veel toepassingen (!) en een moeilijker, diepergaand, wiskunde B-programma waarin dezelfde stof plus nog andere stof op volwaardige wijze wordt behandeld, in te voeren. Deze programma's moeten echter wel gelijkwaardig zijn en elkaar niet overlappen, want wiskunde B moet ook alleen

gekozen kunnen worden. Ik ben dan ook erg nieuwsgierig naar het rapport van de commissie.

Overigens hebben de zwakke wiskunde I-leerlingen door de dit jaar ingevoerde relatieve normering (eufemistisch versnelde correctieprocedure genaamd) al een flinke steun in de rug gekregen bij het behalen van een redelijk examen-cijfer.

In de nieuwe opzet zal het huidige wiskunde II-programma voor een groot deel verdwenen zijn. Een enkel elementje zal er nog wel ingestopt kunnen worden, maar dat zal geen naam mogen hebben.

Kunnen we niet veel beter de wiskunde I- en -II-programma's in grote lijnen onveranderd laten voortbestaan en deze geleidelijk aanpassen aan onze veranderende ideeën omtrent het wiskundeonderwijs (bijv. toegepaste wiskunde in het programma) en anderzijds bij de minister en bij de universiteiten aandrigen op nog betere opleidingsmogelijkheden voor de voortentamens, op afschaffing van sommige voortentamens en op wiskundecolleges voor studenten zonder wiskunde I? De geweldige veldslag, die boekenschrijvers en leraren bij de invoering van het nieuwe programma in 1968 geleverd hebben, en die eigenlijk nog niet afgelopen is (denk aan de inproduktnotatie op het eind-examen) hoeven we dan niet nog eens te herhalen.

Nogmaals 'Over een rotatie-vraagstuk'

P. W. H. LEMMENS

Naar aanleiding van het artikel van W. Ganzevoort, *Over een rotatie-vraagstuk*, Euclides 53 (1977/1978), no. 9, pp. 409–412, heb ik een aantal opmerkingen.

1 In het betreffende artikel heb ik bij de concrete uitwerkingen de methode gemist, waarbij een beweging in het vlak geschreven wordt als $A \cdot T_{\bar{a}}$, met A een draaiing om $(0,0)$, dus een *lineaire* afbeelding.

Indien we $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ stellen, levert invullen van de gegevens op

$$A \begin{pmatrix} 1 + a_1 \\ 2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } A \begin{pmatrix} -1 + a_1 + r \\ 3 + a_2 + 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ voor zekere } r.$$

Uit de lineariteit van A volgt dan $A \begin{pmatrix} -2 + r \\ 1 + 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daar A normbehoudend is, moet gelden

$$(-2 + r)^2 + (1 + 2r)^2 = 1^2 + 2^2, \text{ dus } r = 0, \text{ en } A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Daar A een draaiing is om $(0,0)$, is de hoek waarover gedraaid wordt bijgevolg $-\frac{\pi}{2}$ en de matrix van A op de standaardbasis is dus

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu kan $\bar{a}$ opgelost worden en vervolgens wordt het rotatiepunt als dekpunt bepaald. Na controle is hiermee het vraagstuk opgelost!

2 In het laatste gedeelte van het artikel (p. 411, regels 9–7 v.o.) wordt op tamelijk abstracte wijze aangetoond dat het beeld van P onder R^{inv} moet liggen op de cirkel met middelpunt A en straal BP . Meetkundig is dat echter een trivialeit, want zoals alle bewegingen is ook R^{inv} lengtebehoudend. Als dus B en P afstand BP tot elkaar hebben, dan zullen ook A en $R^{\text{inv}}(P)$ afstand BP hebben tot elkaar.

3 Eveneens in het laatste gedeelte, op p. 412, lezen we

‘Voor punten P ’ die verder weg liggen, zullen twee oplossingen zijn van het probleem: welke rotatie die A op B afbeeldt; beeldt m af op een lijn die door P gaat?’

en

‘De beelden van m onder de rotaties die A op B afbeelden, omhullen dus de cirkel met middelpunt B en als straal de afstand van A tot m .’

Beide uitspraken zijn niet geheel juist: Laat nl. m' de lijn zijn die uit m ontstaat door de *translatie* die A op B afbeeldt. Indien P op m' ligt, kan er maar hoogstens één oplossing van het probleem zijn, aangezien een van ‘beide’ oplossingen een *translatie* is.

De beelden van m onder de rotaties die A op B afbeelden zijn dus wel raaklijnen van de bedoelde cirkel, maar ze omhullen de cirkel niet: Eén raaklijn komt niet voor, nl. juist die raaklijn welke uit de *translatie* ontstaat.

De situatie is een tikkeltje ingewikkelder als A op m ligt!

Opmerkingen van de heer Ganzevoort

Deze aanvulling van de kant van dr. Lemmens is de uitvoerigste reactie op mijn artikeltje. Daarnaast kreeg ik nog een reactie van de heer J. Dompeling in Heiloo, die ongeveer hetzelfde opmerkte als dr. Lemmens onder 1 en een reactie van de heer F. A. Verhoef uit Haarlem, die ook de opmerking onder 2 maakt en daaraan toevoegt dat een rotatie te schrijven is als het produkt van twee lijnspiegelingen. Hij geeft dan aan hoe twee lijnspiegelingen te vinden zijn die samen de bedoelde rotatie opleveren.

Noem het origineel van P : Q , dan $R(A) = B$ en $R(Q) = P$, dus $AQ = BP$, dus Q ligt op de cirkel om A met straal BP . Kies nu lijn l_1 : middelloodlijn AB , dan zal bij spiegelen in die lijn gelden: $S_1(A) = B$ en $S_1(Q) = Q'$. Kies nu het midden T van PQ' en als tweede lijn de lijn door B en T . Omdat $BP = AQ = BQ'$ is deze lijn middelloodlijn van PQ' , en bij spiegelen daarin geldt dus: $S_2(B) = B$ en $S_2(Q') = P$. De gevraagde afbeelding is dus $S_2 \circ S_1$; dit is een rotatie als de lijnen elkaar snijden, een *translatie* als ze evenwijdig zijn. Daarmee is over het vraagstuk nu wel voldoende gezegd.

Ik wil nog wel opmerken dat naar mijn smaak een van de charmes van het vak wiskunde twee is, dat er zo vaak verschillende wegen naar het doel leiden. Het is dan ook erg belangrijk, dat je een vraagstuk goed overweegt en van verschillende kanten bekijkt, voordat je een aanpak kiest. De hoeveelheid rekenwerk die je op de hals haalt, hangt daar nogal van af.

Het lijkt me een belangrijk onderwijsdoel de leerlingen juist dit goed te leren, om zich niet klakkeloos in het rekenen te storten, maar eerst naar een slimme manier te zoeken. Andere onderdelen van de wiskunde waar ze mee in aanraking komen, bieden wat dit doel betreft veel minder mogelijkheden.

Het is dan soms wel moeilijk voorspelbaar welke manier gekozen zal worden. En dat is iets waar ook bij het examen rekening mee dient te worden gehouden, met name bij het opstellen van de normen. Het zou goed zijn als werd aangegeven bij welke manier van oplossen de gegeven normen horen; dat zou bijvoorbeeld dit jaar bij opgave 1c veel verschil van mening hebben voorkomen.

W. Ganzevoort

Opgaven

391. In een convexe n -hoek worden alle diagonalen getrokken. We willen de zijden en diagonalen zo kleuren, dat van elke driehoek (waarvan de hoekpunten hoekpunten van de veelhoek zijn) de zijden drie verschillende kleuren krijgen. Hoeveel kleuren zijn hiervoor minstens nodig?

392. In een plat vlak liggen n punten, niet allemaal op dezelfde lijn. Kies een van deze punten en noem dat A_1 . Verbind dit door een lijnstuk met een ander van de punten, A_2 . Ga zo door en verbind ten slotte A_n met A_1 . Is het mogelijk dit zo te doen, dat geen twee van de verbindingslijnstukken elkaar in een inwendig punt snijden?

Oplossingen

389. Van een schaakbord met 4×7 velden zijn de velden wit of zwart gekleurd. Bewijs dat er een rechthoek mogelijk is waarvan de vier hoekvelden dezelfde kleur hebben. Stel er zijn 14 of meer zwarte velden. We bewijzen dat er een rechthoek mogelijk is waarvan de vier hoekvelden zwart zijn.

Het bord bestaat uit 7 kolommen met elk 4 velden. Onderstel er is een kolom waarvan alle 4 velden zwart zijn. Dan is er nog minstens één kolom waarvan 2 of meer velden zwart zijn. Dus is er een rechthoek mogelijk waarvan alle 4 hoekvelden zwart zijn.

Onderstel er is een kolom waarvan 3 velden zwart zijn. Is er een tweede kolom waarvan 3 velden zwart zijn, dan zijn er minstens 2 rijen waarin van beide kolommen een zwart veld voorkomt. Dus is er weer een rechthoek met 4 zwarte hoekvelden.

Onderstel er is precies één kolom waarin 3 zwarte velden voorkomen. Dan zijn er 5 kolommen met 2 zwarte velden. Onderstel de kolom met de 3 zwarte velden heeft deze velden in rij 1, rij 2 en rij 3. Heeft een van de overige kolommen zwarte velden in twee van deze rijen, dan is er weer een rechthoek met 4 zwarte hoekvelden. Is dit niet het geval, dan hebben ze zwarte velden in rij 1 en 4 of 2 en 4 of 3 en 4. Van de 5 kolommen met 2 zwarte velden hebben er dus in elk geval 2 zwarte velden in dezelfde rijen. Waarmee de rechthoek met de 4 zwarte hoekvelden weer een feit is geworden.

Blijft over het geval dat er 7 kolommen zijn met elk 2 zwarte velden. Omdat $\binom{4}{2} = 6$, zijn er dan in elk geval twee kolommen met zwarte velden in dezelfde rijen. En dus is er weer een rechthoek met 4 zwarte hoekvelden.

390. Gevraagd alle oplossingen van

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2 \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

We gaan als volgt te werk.

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(b^2 - 1) = c^2 + 1$$

Omdat

$$a \text{ oneven} \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \pmod{4}$$

$$a \text{ even} \Rightarrow a^2 - 1 = -1 \pmod{4}$$

$$c \text{ oneven} \Rightarrow c^2 + 1 = 2 \pmod{4}$$

$$c \text{ even} \Rightarrow c^2 + 1 = 1 \pmod{4}$$

is de enige mogelijkheid: a, b en c even.

Stel $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$. We krijgen dan

$$(4a_1^2 - 1)(4b_1^2 - 1) = 4c_1^2 + 1$$

Omdat

$$a_1 \text{ oneven} \Rightarrow 4a_1^2 - 1 = 0 \pmod{16}$$

$$a_1 \text{ even} \Rightarrow 4a_1^2 - 1 = -1 \pmod{16}$$

$$c_1 \text{ oneven} \Rightarrow 4c_1^2 + 1 = 2 \pmod{16}$$

$$c_1 \text{ even} \Rightarrow 4c_1^2 + 1 = 1 \pmod{16}$$

is de enige mogelijkheid: a_1, b_1 en c_1 even.

Enzovoorts.

Waaruit volgt dat de enige oplossing is

$$a = 0, b = 0, c = 0$$

Boekbespreking

H. B. Griffiths, P. J. Hilton, *Klassische Mathematik in zeitgemässer Darstellung*, Band 2, Geometrie und Algebra, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen/Zürich.

Ook dit deel geeft klassieke stof in een modern jasje. Achtereenvolgens komt ter sprake: vectormeetkunde in $\mathbb{R}^3$, lineaire algebra, maatbegrip in $\mathbb{R}^3$, lengte- en oppervlaktetheorie, bewijzen in de meetkunde, projectieve meetkunde. Vervolgens komen enige algebraïsche onderwerpen aan de orde:

groepen, vectorruimten en lineaire vergelijkingen, inwendig produkt, Boolese algebra, polynomen en n -de graads vergelijkingen.

Er komen zo in ruim 240 blz. heel wat onderwerpen ter sprake. De behandeling is vrij nauwkeurig. Het boek is geschikt voor diegenen, die hun kennis eens willen opfrissen. Minder geschikt lijkt het mij om vanuit dit boek voor het eerst kennis te maken met de onderhavige onderwerpen. De uitvoering van het boek is keurig.

W. Kleijne

Differenzierung der Realschuloberstufe in Nordrhein-Westfalen, herausgegeben von Erich Geyer, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover-Dortmund-Darmstadt-Berlin, 1977, 240 blz., DM 19,80.

De Oberrealschule telt zes klassen, genummerd 5-10. Men begint bij 5, omdat de basisschool 4 klassen heeft. Na het 10e jaar kan men doorstromen naar de klassen 11 en 12 van het gymnasium. Ongeveer 30% van alle leerlingen bezoekt de Oberrealschule. Er is geen toelatingsprocedure en daardoor een heterogene schoolpopulatie. Dit maakte differentiatie wenselijk. Na jaren geëxperimenteerd te hebben, is men tot de volgende structuur gekomen.

Gedifferentieerd wordt in de bovenbouw (klassen 9 en 10); de differentiatie wordt echter reeds voorbereid in de klassen 7 en 8. (Zo kan een leerling in de bovenbouw geen Frans kiezen, als hij dit vak in de klassen 7 en 8 ook niet reeds gevolgd heeft.) Er zijn vier hoofdrichtingen:

1. de talenrichting, 2. de mathematisch-natuurwetenschappelijke richting, 3. de sociale richting, 4. de musische richting.

Ik beperk me verder tot datgene wat voor de lezers van Euclides van belang is. Elke leerling krijgt, ongeacht zijn richting, zes jaar lang 4 uur wiskunde en 3 à 4 uur natuurwetenschappen.

De specialisatie voor degenen die de mathematisch-natuurwetenschappelijke richting kiezen, bestaat uit zowel in de klasse 9 als in de klasse 10 1 uur extra wiskunde en 3 uur extra natuurwetenschappen.

Het voor allen verplichte programma in klasse 9 bestaat uit relaties en functies, reële getallen, gelijkvormigheidsmeetkunde en in klasse 10 uit tweedegraadsvergelijkingen en -functies, machten, trigonometrische functies.

De specialisatie bestaat uit minstens één van de volgende onderwerpen:

1. propositie- en schakelalgebra, 2. lineaire programmering, 3. waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, 4. algebraïsche structuren.

De keuze van de specialisatie geschiedt door de leerling. De leerling is bovendien verplicht in de klassen 9 en 10 elk 2 uur deel te nemen aan Arbeitsgemeinschaft. In deze tijd kan hij zich extra wijden aan de door hem gekozen specialisaties op wiskundig of natuurwetenschappelijk gebied. Zo is het bijv. voor hen die propositie- en schakelalgebra kiezen, mogelijk gedurende de uren Arbeitsgemeinschaft de toepassing hiervan in de computerorganen te bestuderen en enige oefening te verkrijgen in het opstellen van een programma.

Begrijpelijkwijrs wordt het onderwerp propositie- en schakelalgebra het meest gekozen. De minste belangstelling is er voor algebraïsche structuren, maar dit onderwerp wordt dan ook puur wiskundig behandeld.

De mathematisch-natuurwetenschappelijke richting wordt het meeste gekozen (36,6%). Dan volgen de talenrichting (29,4%), de sociale richting (28,9%) en de musische richting (3,5%). Cijfers uit 1975/1976.

P. G. J. Vredenduin

Drs. C. Bron, *Programmeren*; Deel 1: *Inleiding*, 173 blz. f 17,50; Deel 2: *Van analyse tot algoritme*, 194 blz., 1977, Academic Service, Den Haag.

De uitgeverij Academic Service heeft ons de laatste jaren verrast met een aantal uitgaven van syllabi behorende bij cursussen in het hoger onderwijs op het gebied van de informatica. Het betreft in de regel collegedictaten waarmee een aantal jaren ervaring is opgedaan, en waarvan de auteurs en uitgever meenden dat zij onder de aandacht gebracht konden worden van een breder publiek. Op deze manier werd tevens tegemoet gekomen aan een reeds lang levende wens bij docenten in het hoger onderwijs in de informatica om te kunnen beschikken over college materiaal aan andere instellingen ontwikkeld en daar eventueel gebruik van te maken. Bovendien krijgen studenten de gelegenheid tegen geringe kosten de beschikking te krijgen over gedrukte teksten van goede tot zeer goede kwaliteit over een breed gebied van de informatica. En tenslotte zijn de uitgaven van Academic Service in deze reeks ook van belang voor docenten in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs en hoger beroepsonderwijs, voor zover ze te maken hebben met de raakvlakken tussen de wiskunde en informatica.

In de boekjes van C. Bron wordt een inleiding in de kunde van het programmeren voor computers geboden. In het eerste deel dat de eigenlijke inleiding bevat worden in 24 korte hoofdstukken concepten uit de programmeertaal Algol 60 besproken. Dit is geen inleiding tot deze programmeertaal, en enige kennis van deze taal lijkt voor de gemiddelde lezer dan ook gewenst. Het eerste deel is echter wel gericht op het goed leren gebruik maken van de concepten uit Algol 60, en daartoe wordt vrijwel van het begin af de semantiek (betreffende betekenis) van programma's ingevoerd. Als middel hiervoor gebruikt de schrijver de zogenaamde beweringen over toestanden en bewijsregels en ook al wordt niet helemaal duidelijk wat men zich bij een toestand voor moet stellen, het middel is uitstekend bruikbaar. Dit blijkt vooral bij de opzet van de voorbeeld programma's die in grote getale te vinden zijn; de programma's worden systematisch opgebouwd gebruik makend van de bewijsregels zodat de correcte werking ervan gegarandeerd is.

Het laatste hoofdstuk van het eerste deel geeft een inleiding in de structuur van rekenautomaten en tast enigszins terzijde van de hoofdzaken.

In het tweede deel wordt aandacht geschonken aan het vinden van de weg van probleemstelling naar oplossing, of ook het ontwikkelen van algoritmen. Dit is na een inleiding in de kunde van het programmeren een logische tweede stap. Deze syllabus zou echter onafhankelijk van het eerste deel bestudeerd kunnen worden, ook al omdat een deel van de notatie uit het eerste deel niet wordt overgenomen. Van de lezer moet dan echter wel bekendheid worden verwacht met het gebruik van bijv. invariante relaties voor programma's. De algoritmen die aan bod komen zijn voor het merendeel niet numeriek van aard. Eén hoofdstuk wordt gewijd aan het voortbrengen van aselechte getallen in kansverdelingen, één hoofdstuk wordt besteed aan het meetkundige probleem van de perkencirkel; hiervoor zijn 18 blz. nodig, wellicht wat veel gezien het speciale karakter van dit probleem. Verder wordt ruimschoots aandacht besteed aan sorteer- en identificatie problemen en ook aan allerlei boomstructuren, die een belangrijke rol spelen in de informatica. Het tweede deel wordt besloten met een behandeling van bestanden en het probleem van de opslag ervan en de communicatie ermee. In dit hoofdstuk vooral (maar ook elders in de boekjes) wordt de PASCAL programmeertaal gebruikt.

Uw recensent heeft weinig moeite met deze uitgave van Academic Service: het is van goede kwaliteit, en behandelt een belangrijk onderwerp op een moderne en op het juist gebruik van concepten in de programmering gerichte wijze. De uitgave ontkomt niet aan onvolkomenheden eigen aan syllabi van colleges. Om enkele te noemen: in het eerste deel ontbreken literatuurverwijzingen vrijwel geheel (op een onvolledige op blz. 116 na), er zijn onduidelijkheden bij de invoering van de beweringen over toestanden, en er worden onnodig veel Engelse termen gebruikt. Dit doet echter niet af aan de bruikbaarheid van de uitgave, die zijn weg naar studenten en docenten in de wiskunde en informatica wel zal vinden.

A. Ollongren

C. van de Wijngaart, *Inleiding programmeren in PASCAL*, Academic Service, Den Haag 1977, 102 blz., f 12,50.

De titel van deze uitgave zegt precies wat het is: een inleiding in de PASCAL programmeertaal.

Het is als een eerste kennismaking bedoeld en veronderstelt generlei voorkennis in de computer programmering. Het is gebruikt ter ondersteuning van cursussen in de faculteit der sociale wetenschappen van de universiteit te Amsterdam, maar het kan ook dienen voor zelfstudie voor diegenen die van plan zijn PASCAL te gaan gebruiken. Daarbij is dan wel wenselijk dat men toegang heeft tot een PASCAL vertaler, zodat enige oefening in het gebruik van de taal ook tijdens de studie verkregen kan worden. Vele voorbeelden in de tekst verspreid stimuleren daartoe.

De meeste concepten van PASCAL komen aan de orde, maar gezien het bestek van het boekje worden ze niet uitgediept. Syntax diagrammen worden voor enkele concepten maar niet voor alle gegeven. Van sommige opdrachten (statements) wordt de algemene vorm gegeven, ook wel eens formele definitie genoemd. Goed uit elkaar gehouden zijn de type definities en de declaraties. Een index van gebruikte termen is toegevoegd.

Naast deze positieve aspecten zijn er ook enkele bedenkingen tegen de wijze van presentatie aan te voeren. Storend is het overmatig gebruik van anglicismen. Zo worden naast elkaar de termen logische operator en relational operator gebruikt; op pag. 69 wordt er geprint, er is sprake van Bollean expression (waarom niet Boolese expressies), blocks, structured types etc. etc. Veel van deze termen kunnen zonder enig bezwaar door Nederlandse vervangen worden. Als dit in een toekomstige tweede druk mocht gebeuren, dan zou ook de stijl verbeterd kunnen worden, bijv. op blz. 65 waar het hele (?) doel van wijzer wordt uitgelegd.

Zien we af van stijl en anglicismen dan hebben we hier een bruikbare tekst die de aandacht ook waard is van leraren in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs, die met het vak informatica te maken hebben. Tenslotte is PASCAL in zekere zin een opvolger van ALGOL 60, vanwege de aangebrachte verruiming in concepten en mogelijkheden.

A. Ollongren

Z.A. Melzak, *Mathematical Ideas, Modeling and Applications*; Volume II of Companion to Concrete Mathematics; John Wiley and sons, New York/London/Sidney/Toronto; 1976; 413 blz.; £ 21.25.

In dit boek wordt de nadruk gelegd op concrete toepassingen van uiteenlopende wiskundige theorieën. In zes hoofdstukken gaat de auteur in op toepassingen op gebieden van de meetkunde, analyse, numerieke wiskunde, combinatoriek, getaltheorie en algebra. Beginnend bij elementaire onderwerpen wordt in een aantal gevallen geleidelijk overgegaan op problemen die een behoorlijke voorkennis vereisen, in het bijzonder op het gebied van de analyse. Het boek is dan ook minder geschikt voor beginnende studenten. Daarentegen kan het sterk worden aanbevolen aan docenten die ten behoeve van hun onderwijs naar voorbeelden zoeken van toepasbaarheid van de wiskunde. Gemeenschappelijke bestudering van de tekst, met de theorieën die aan de uiteenzettingen van de auteur (hoogleraar aan de Universiteit van Brits Columbia) ten grondslag liggen, door groepjes van wiskunde-docenten zal voor de deelnemers een verrassende en inspirerende ervaring zijn.

W. J. Claas sr.

Mededelingen

Zakrekenmachientjes

The Mathematics Teacher volume 71, number 5 (May 1978) is geheel gewijd aan de zakrekenmachine en de computer in verband met het voortgezet onderwijs.

P. G. J. Vredenduin

Denkt u er nog aan uw ervaringen met rekenmachientjes op te sturen? (zie ook blz. 34)

Instappen en Toepassen

Laatste aankondiging

van de themadag van de Nederlandse vereniging van wiskundeleraren op *zaterdag 28 oktober a.s.*

Hieronder volgt het gedetailleerde programma van deze themadag.

- 9.30–10.00 uur ontvangst, koffie
- 10.00–10.30 uur huishoudelijk deel, waarin de jaarrede van de voorzitter
- 10.30–12.30 uur inleiding op de activiteiten rond het thema 'instappen en toepassen', gevolgd door deze activiteiten
- 12.30–13.30 uur lunch
- 13.30–14.30 uur lezing door Prof. dr. V.d. Blij
- 14.30–16.00 uur 'voor elck wat wils', de volgende activiteiten in kleine groepen
 - studie, n.a.v. de ochtendactiviteiten en de lezing van V.d. Blij
 - uitwisseling en produktie van instapproblemen en toepassingen
 - uitwisseling van klasseactiviteiten met het zakrekenmachien
- vanaf 16.00 uur huishoudelijk deel: rondvraag en sluiting

De themadag is voor alle belangstellenden toegankelijk. De twee huishoudelijke gedeelten zijn uiteraard voor de leden bestemd, maar ook daarbij mag ieder ander aanwezig zijn.

Eerder is aangekondigd, dat, als het zou lukken, alle leden vóór 28 oktober een brochure over het thema zouden ontvangen. Welnu, het is niet gelukt. De produktiegroep is niet op tijd klaar. Deze brochure wordt nu in de loop van dit kursusjaar, maar na 28 oktober, aan iedereen toegezonden. Deze themadag vindt net als vorig jaar plaats in het gebouw van de S.O.L., De Uithof, Utrecht. Degenen die van plan zijn te komen en van de eenvoudige lunch gebruik wensen te maken worden verzocht uiterlijk 14 oktober f 7,50 over te maken op girorekening 143917 van de NVWL te Amsterdam.

INHOUD:

P. G. J. Vredenduin: Gebruik en misbruik van variabelen	41
A. W. Boon: De rechte van Euler – een bewijs	56
C. van Schagen: De spoorwegen spreken	58
Gilbert Respes: $a^a = b^b$	61
H. Steur: Het vak wiskunde II	63
P. H. W. Lemmens: Nogmaals 'Over een rotatie-vraagstuk'	66
Recreatie	68
Boekbespreking	69
Mededelingen	72

ADRESSEN AUTEURS:

- A. W. Boon, Burg. Caen van Necklaan 263, 2262 GK Leidschendam.
- P. H. W. Lemmens, Math. Inst. RU Utrecht, Budapestlaan 6, 3584 CD Utrecht.
- Gilbert Respes, Houwikerstraat 2, B 3910 Herk-de-Stad, België.
- C. van Schagen, Rembrandtlaan 45, 1200 BB Hilversum.
- H. Steur, Laan van Avegoor 15, 6955 BG Ellecom.
- P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.