

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang

1977/1978

no 9

mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2343 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 8912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, 2242 CD Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 32,—. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-16 2189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Proficiat!

Op 29, 30 en 31 maart werd in Amsterdam het 200-jarig bestaan van het Wiskundig Genootschap gevierd.

Ter gelegenheid van dit jubileum werden door het bestuur van het Wiskundig Genootschap drie Nederlanders tot erelid benoemd.

Dit waren:

Prof. Dr. O. Bottema

Prof. Dr. B. L. van der Waerden

Dr. Joh. H. Wansink.

De redactie van Euclides feliciteert hen van harte met deze eervolle onderscheiding.

Waarom de eerste bladzijde van dit nummer van Euclides voor deze gelukwensen vrijgehouden is, zal ieder duidelijk zijn die de namen van de nieuwe ereleden leest. Twee van hen zijn immers ook erelid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Prof. Bottema is als erelid van het W.G. benoemd wegens zijn grote verdiensten voor dit genootschap en meer algemeen voor de wiskunde. Sinds 1959 is hij lid van verdienste van het Wiskundig Genootschap. Lange tijd was hij lid van de prijsvragencommissie. Veel van de opgaven die jaarlijks door het W.G. aan zijn leden voorgezet worden, zijn van zijn hand, met name op het gebied van de meetkunde en de mechanica. Zijn wetenschappelijke belangstelling was vooral op de meetkunde in al zijn facetten gericht en in het bijzonder op de synthetische meetkunde van de driehoek. Vanaf 1940 was hij hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft.

Dr. Wansink is zijn hele leven onderwijsman in hart en nieren geweest. De NVvW stelt het op hoge prijs dat het W.G. ook iemand met zo grote verdiensten voor het onderwijs als erelid heeft willen benoemen. Juist één dag na zijn 84e verjaardag viel deze onderscheiding hem ten deel. Voor de ouderen onder ons hoef ik daar nauwelijks meer iets aan toe te voegen. De jongeren weten misschien niet voldoende welke grote verdiensten Johan Wansink voor het wiskunde-onderwijs in Nederland gehad heeft. Jarenlang heeft hij de toon aangegeven in de wereld van de wiskundeleraren. Onder zijn leiding kwam het nieuwe programma, het zogenaamde Wimecos-programma, in 1958 tot stand. Hij nam de leiding bij het ontwerpen van een serie opgaven, de 250 Opgaven die moesten dienen om het nieuwe programma vaste vorm te geven.

Hij was een van degenen die belast waren met het ontwerpen van voorstellen voor de eindexamens wiskunde van de HBS. Ook na zijn pensionering heeft hij nog grote verdiensten gehad voor de vernieuwing van het programma voor de LO-akte wiskunde.

Een zeer speciale gelukwens daarom aan hem voor het verwerven van dit erelidmaatschap.

Piet Vredenduin

Uit de jaarrede van de voorzitter van de N.V.v.W.

... 'Bij het inwerking treden van het besluit LBO/LAVO op 1 augustus 1973 is het vak wiskunde ingevoerd voor alle vormen van LBO, te weten het lager economisch- en administratief onderwijs, het lager huishoud- en nijverheidsonderwijs, het lager landbouwonderwijs, het lager middenstandsonderwijs en het lager technisch onderwijs.

Dit leidde tot moeilijkheden omdat het vak rekenen vervangen moest worden door het vak wiskunde. De docenten die rekenen gaven waren in de meeste gevallen niet bevoegd om wiskunde te geven. Op korte termijn moest hulp geboden worden om zoveel mogelijk docenten bekwaam te maken het vak wiskunde te onderwijzen.

Verschillende instanties hebben zich hiermee beziggehouden o.a. de pedagogische centra, de SDBW en enkele uitgevers. Een groot aandeel is geleverd door het IOWO met de HOLBO-cursus. Het effect is jammer genoeg beperkt gebleven, enerzijds omdat niet alle docenten bereikt werden, anderzijds doordat het IOWO geen overeenstemming met het departement kon bereiken over de rechtspositionele consequenties voor de cursisten.

Te vrezen is nu dat het wiskundeonderwijs in het LBO niet is wat het zou kunnen zijn. Daar hebben we grote zorg over en we vinden dat de minister maatregelen dient te nemen opdat alle daarvoor in aanmerking komende docenten de bekwaamheid kunnen verwerven het vak wiskunde optimaal te onderwijzen.

De invoering van het eindexamen besluit LBO (verschenen op 10 februari 1976 met terugwerkende kracht tot 1 augustus 1975) opende voor de leerlingen in het LBO de mogelijkheid eindexamen wiskunde af te leggen volgens een A-, B- of C-programma. Het onderscheid naar A-, B- en C-programma's is een onderscheid naar inhoud en oplopende graad van moeilijkheid. De minister kan richtlijnen geven voor het A-programma, geeft richtlijnen voor het B-programma en stelt het C-programma vast.

Voor wiskunde fungeren momenteel drie (door de minister vastgestelde) C-programma's, te weten één voor het LEAO/LHNO, één voor het LBO en één

voor het LTO. De open vragen en ten dele de meerkeuzevragen van het wiskunde-examen voor elk van deze typen zijn verschillend naar inhoud en niveau. Dit vinden wij een ongewenste situatie. Wij vinden dat er één C-examenprogramma wiskunde moet komen voor het hele LBO, dat doorstroming naar het MBO mogelijk maakt en niet helemaal los gezien wordt van het AVO. Het eigene van de school kan tot uiting komen in het schoolonderzoek.

De invoering van methoden die de nadruk leggen op grote toepasbaarheid van de wiskunde en die langs andere wegen komen tot een meer formele wiskunde dan de traditionele methoden roept problemen op, speciaal voor diegenen die het centraal schriftelijk C-examen doen. Wij vinden dan ook, dat er bij het samenstellen van het centraal schriftelijk C-examen met deze groter wordende groep rekening gehouden moet worden. Onze wens, dat er één C-examenprogramma voor het LBO moet komen, impliceert naar onze mening niet dat er één schriftelijk C-examen moet worden samengesteld. Op basis van het ene programma kunnen twee schriftelijke C-examens worden gemaakt, te noemen C_1 en C_2 .

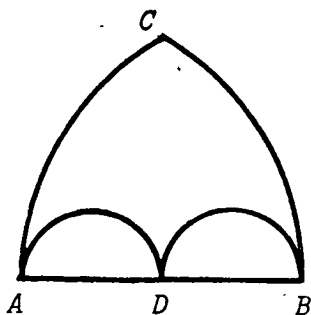
Onder het C_1 -examen willen we verstaan het huidige C-examen dat identiek is met het MAVO-drie-examen. Het C_2 -examen zou tegemoet moeten komen aan leerlingen die anders zijn opgeleid. Het belangrijkste uitgangspunt hierbij is, dat de gelijkwaardigheid van de C_1 - en C_2 -examens gegarandeerd moet zijn. De CMLW heeft aan de minister een rapport over deze materie uitgebracht.'...

Dr. Th. J. Korthagen, voorzitter.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978

Eerste ronde: donderdag 16 maart 1978, 14.00 – 17.00 uur.

- A1 In een treincoupé met twee vierpersoonsbanken tegenover elkaar, gaan vier echtparen zo zitten, dat alle vrouwen vooruit rijden, terwijl geen vrouw tegenover haar eigen man zit. Op hoeveel manieren kan dit gerealiseerd worden?
- A2 $ABCD$ is een trapezium met AB en CD als evenwijdige zijden. De lengte van AB is a , de lengte van CD is b en $b > a$. P is het midden van de diagonaal AC , Q is het midden van de diagonaal BD . Bereken de lengte van PQ .
- A3 Bepaal een natuurlijk getal van 4 cijfers, dat na deling door 117 rest 55, en na deling door 118 rest 107 geeft.
- B1 Gegeven is een regelmatige n -hoek. Het aantal diagonalen ligt tussen 3100 en 3200. Bereken n .
- B2 Een wiskundelerares is jarig op de datum, die boven deze opgaven staat. Op de vraag: 'Hoe oud wordt u vandaag?' antwoordt zij: 'Mijn leeftijd is nu viermaal de som van de cijfers van mijn geboortjaar.'
Hoe oud is zij?
- B3 Het lijnstuk AB heeft de lengte 1. De cirkelbogen AC en BC zijn delen van cirkels met middelpunt B , respectievelijk A en straal 1. D is het midden van AB . Op AD en DB zijn halve cirkels met straal $\frac{1}{4}$ opgericht naar dezelfde kant als C .
Bepaal de straal van de cirkel, die ligt in het door de vier cirkelbogen omsloten gebied en die de vier cirkelbogen raakt.



B4 Bepaal alle paren natuurlijke getallen (x, y) met $x \geq y$, die voldoen aan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

B5 Bepaal een getal n van vier cijfers met de volgende eigenschappen:

n is de derdemacht van een natuurlijk getal, en

het tweede cijfer is het kwadraat van het vierde cijfer, en

het tweede cijfer is de som van het derde cijfer en twee maal het eerste cijfer.

C1 Bepaal alle natuurlijke getallen n kleiner dan 20 met de eigenschap, dat

$$n^{n+1} + (n+1)^n$$

deelbaar is door 3.

C2 De getallen a , b en c voldoen aan de drie voorwaarden:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 25,$$

$$a + b + c = 2,$$

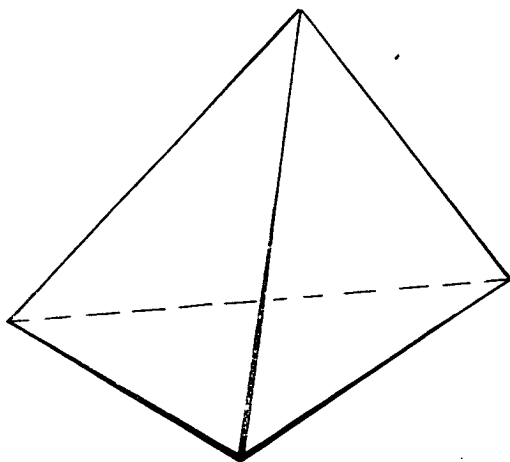
$$ab + bc + ca = -3.$$

Bepaal het product abc .

C3 Gegeven is een regelmatig viervlak met ribbenlengte 1.

(Een regelmatig viervlak is een driezijdige piramide, waarvan alle zijvlakken gelijkzijdige driehoeken zijn; zie figuur hieronder.)

Men snijdt aan de vier punten kleine regelmatige viervlakken af op zo'n manier, dat van elk van de oorspronkelijke zijvlakken een regelmatig zeshoek overblijft. Bereken de oppervlakte van het (door vier driehoeken en vier zeshoeken begrensde) lichaam, dat men overhoudt.



Correctiemodel

Antwoorden, die gelijkwaardig zijn aan de hieronder gegeven antwoorden worden natuurlijk goed gerekend.

<i>Opgave</i>	<i>Antwoord</i>	<i>Commentaar</i>
A1	216	
A2	$\frac{1}{2}(b - a)$	Voor het antwoord $\frac{1}{2}(a - b)$: 1 punt
A3	7777	
B1	81	
B2	56	
B3	0,3	
B4	(110, 11), (60, 12), (35, 14), (30, 15) en (20, 20)	4 goede paren: 2 punten 2 of 3 goede paren: 1 punt, 1 goed paar: geen punten. Verkeerde volgorde binnen een of meer van de paren geeft geen puntenaftrek. Voor elk ander fout paar 1 punt aftrek, echter mini- male score: 0 punten.
B5	4913	
C1	1, 7, 13 en 19	1 punt voor elke goede waarde; voor elke foutieve waarde 1 punt aftrek, echter minimale score: 0 punten.
C2	$-\frac{1}{3}$	Een oplossingsmethode is bijvoorbeeld: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 +$ $+ 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc.$
C3	$\frac{7}{9}\sqrt{3}$	Natuurlijk ook: $\frac{7}{3\sqrt{3}}$ e.d.

Deelname:

Aan deze eerste ronde hebben volgens ingezonden resultatenformulieren 293 scholen voor HAVO, VWO en nieuwe lerarenopleiding meegedaan met 478 deelnemers uit 4 HAVO, 1177 uit 4 VWO, 1765 uit 5 VWO en 14 uit NLO (eerstejaars); in totaal 3434.

Hiervan worden er 95 (1 + 22 + 71 + 1) met 22 punten of meer uitgenodigd om deel te nemen aan de tweede ronde.

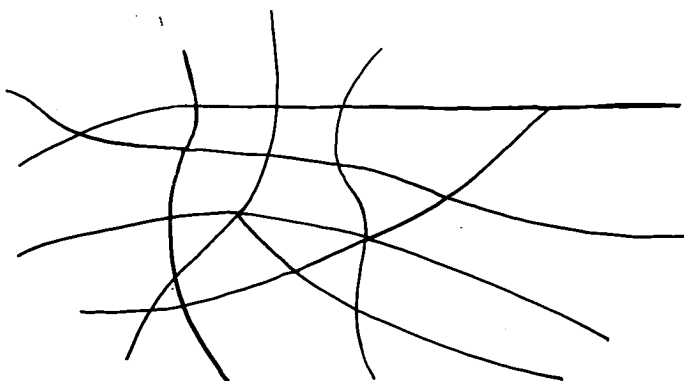
Inzicht, planning en het bijbrengen van routine*)

Prof. R. R. SKEMP

De moeilijkheden die men ondervindt, zowel bij het onderwijzen als bij het leren van wiskunde, worden veroorzaakt door de abstracte aard van deze wetenschap. Daarom is door Van Dormolen en zijn medewerkers de nadruk gelegd op het werken met concrete dingen, in het bijzonder bij het aansnijden van een nieuw wiskundig onderwerp. Is dit niet mogelijk, dan is het zinvol te beginnen met concrete denkniveaus, d.w.z. laten nadenken over materiële zaken en bezigheden. Zelfs als men vertrouwd is met hogere niveaus van abstractie en generalisatie, is het toch nuttig zo nu en dan eens af te dalen naar concrete voorbeelden. Dit geldt voor volwassenen én voor kinderen. Zelfs mensen (zoals wij) die bedreven zijn in het werken met breuken, zullen het prettig vinden om eens te praten over het verdelen van een taart.

Voor vandaag wil ik uw aandacht vragen voor het onderwijzen, leren en bedrijven van wiskunde. Het zullen abstracte ideeën zijn over abstracte ideeën, die zich afspelen in een gebied dat u wellicht minder bekend zal voorkomen dan de ideeën over de wiskunde zelf.

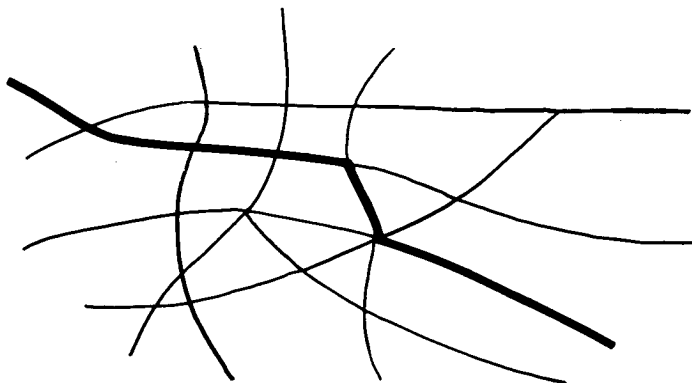
Om deze zo juist gegeven redenen is het voor ons van belang te beginnen met concrete denkniveaus door alledaagse voorbeelden te kiezen.



Figuur 1

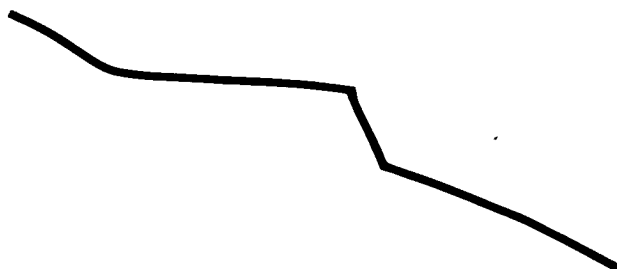
*)Voordracht voor de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren op 29 oktober 1977.

Het gegeven diagram is heel abstract. Laten we het terugbrengen op een meer concreet niveau, door het op te vatten als een plattegrond van een deel van een stad. Iemand komt in een voor hem vreemde stad om er als *buschauffeur* zijn dagelijks brood te verdienen. Het rijden met een bus is voor hem geen probleem, wel zijn dagelijkse route. En dat is alles wat hij moet leren.



Figuur 2

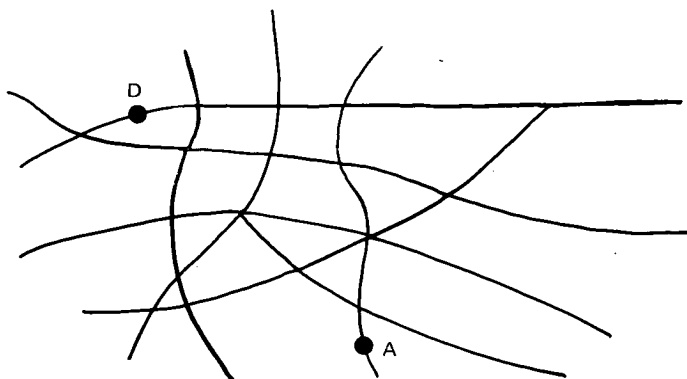
Hij krijgt nu een ervaren chauffeur mee (een leraar dus), net zolang, totdat hij zijn route kent. Zo heeft hij dan de eenvoudige gewoonte geleerd die nodig was om zijn taak te vervullen.



Figuur 3

Een ander die als *taxichauffeur* wil gaan werken in een voor hem vreemde stad heeft een meer gecompliceerde taak. Hij zal de plattegrond van de stad geheel in zich moeten opnemen. Hij streeft een ander doel na dan de eerstgenoemde en de manier waarop dat doel bereikt wordt is ook een geheel andere. Hij zal elke straat onderzoeken, misschien wel per fiets i.p.v. met een taxi, niet om geld uit te sparen, maar om zonodig af te kunnen stappen om b.v. straatnamen te lezen, typische kenmerken op te nemen en zo de plattegrond volledig en accuraat in zich op te nemen. Hij zou wel geholpen kunnen worden door een insider, maar zijn eigen activiteiten zouden toch de voornaamste factoren zijn bij zijn leerproces. Hij zal vermoedelijk wel een plattegrond kopen (een resultaat van andermans onderzoekingen) zodat hij niet zal verdwalen bij zijn exploratieritten. Hij kan echter pas als taxichauffeur functioneren als hij de plattegrond mentaal bezit. (Hij kan bezwaarlijk rijden met een plattegrond op de zitting naast zich, met één oog op de weg en het andere op de kaart gericht.)

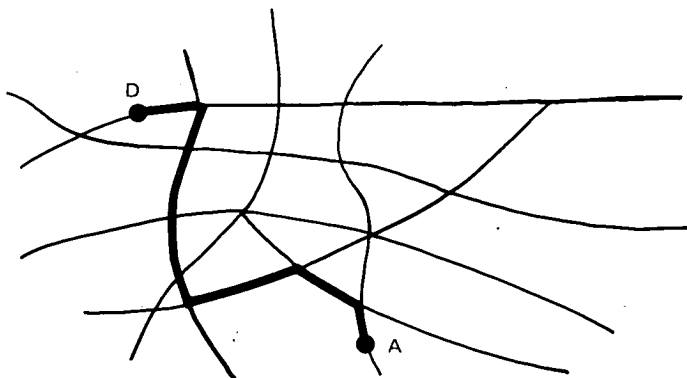
Voorop staan dus zijn eigen actieve naspeuringen. Maar dit is pas zijn eerste leerdoel.



Figuur 4

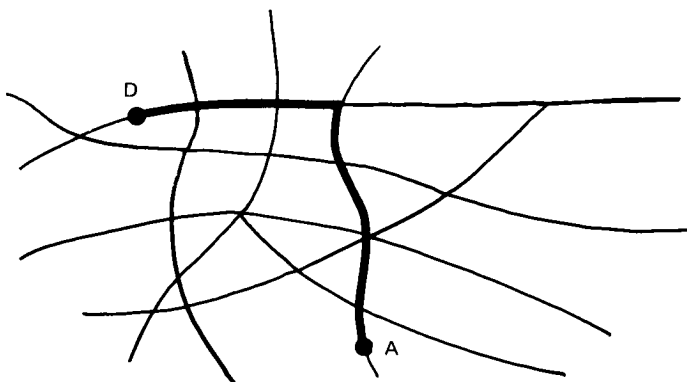
Nu moet hij er nog aan gewend raken om vanuit zijn geestelijke plattegrond een plan te maken om vanuit welk punt A dan ook naar elke gewenste bestemming D te rijden.

Dit is een mogelijke rit.



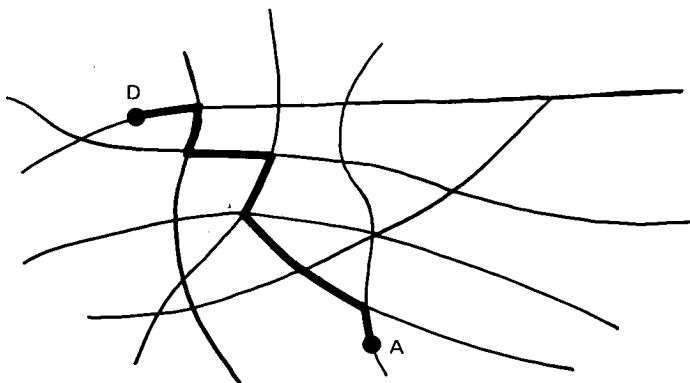
Figuur 5

Dit is er nog een.



Figuur 6

En nog een.



Figuur 7

Een kundig chauffeur zal uit een aantal mogelijke routes van A naar D de beste kiezen, maar op de meest directe route kan wel een opstopping zijn zodat een langere weg sneller tot de bestemming leidt, behalve dan misschien op zondagmorgen. Is eenmaal een route gekozen, dan is verder handelen nog routine. En hij moet dit vanuit elk startpunt naar elke mogelijke bestemming kunnen doen.

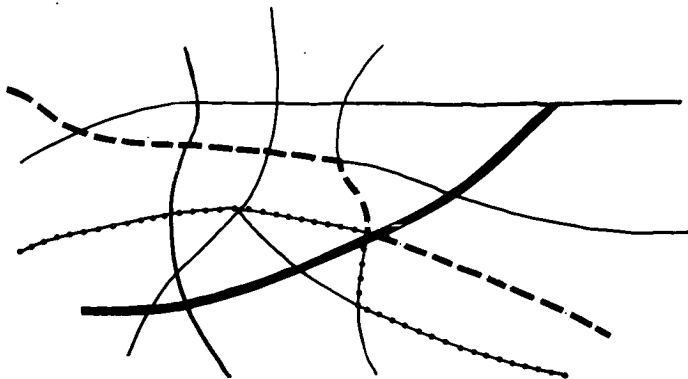
Het is dus wel een meer ingewikkeld leerproces dan dat van een buschauffeur (tenminste voorzover het de weg leren kennen betreft, ik laat in het midden de probleemverschillen met betrekking tot de verschillen in afmeting van bus en taxi).

Letten we even op ons wiskundeonderwijs, dan is het duidelijk dat de leerdoelen van onze leerlingen meer lijken op die van de taxi- dan op die van de buschauffeur. We willen dat ze in staat zijn een grote verscheidenheid van doelen te bereiken vanuit een grote verscheidenheid aan vooropleiding. Maar we zijn nog niet ver genoeg om naar de wiskunde over te stappen. We dienen nog meer te weten, waarbij de beide voorbeelden ons zullen kunnen helpen.

Wie plande de route van de bus? Niet de buschauffeur maar een hogere functionaris van de onderneming die niet te maken had met één, maar met alle buslijnen. Deze functionaris lijkt ten dele op de buschauffeur. Ook hij heeft de plattegrond beschikbaar, ook hij zou routes kunnen vaststellen van elke A naar elke D. Maar dat doet hij niet, hij kiest een geheel van buslijnen en elke chauffeur moet zijn eigen route leren. U zult zich herinneren: een route tezamen met de benodigde activiteiten vormt een plan. Elke buschauffeur leert een vastgesteld plan, alle buschauffeurs dus de verzameling plannen.

In figuur 8 stellen de dunne lijnen de ideeën van de functionaris voor, de dikke lijnen de vastgestelde buslijnen. Sommige leraren lijken op deze functionaris met dit verschil dat elke leerling niet precies één vastgesteld plan leert maar een deelverzameling van alle plannen. (De vergelijking is een oversimplificatie, als bewoner van de stad weet de buschauffeur wel meer dan is opgesomd, maar als chauffeur is de kennis van zijn eigen route toch de hoofdzaak.)

Keren we terug naar de taxichauffeur; hij heeft routineplannen nodig, een hele

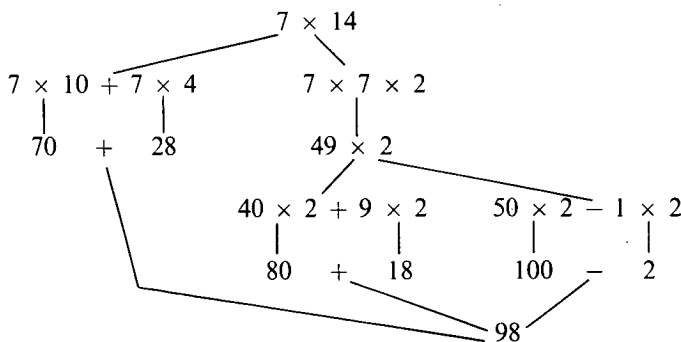


Figuur 8

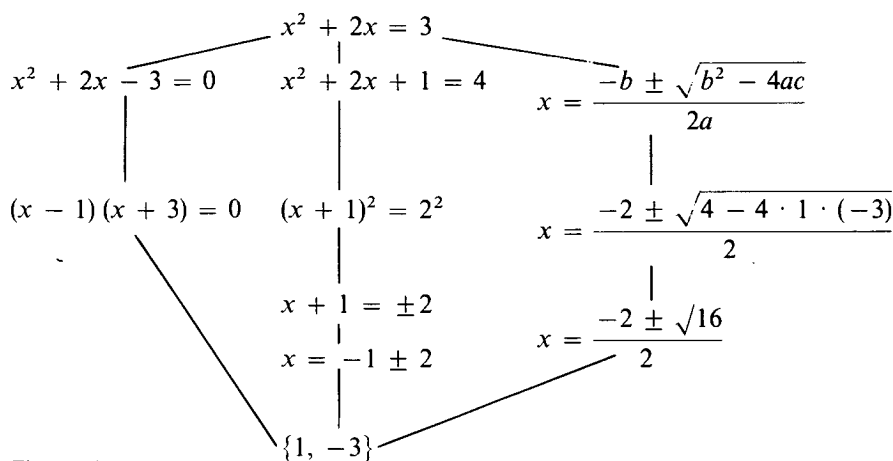
groep zelfs, om zijn werk goed te kunnen doen en hij zal zich bij onverwachte situaties snel moeten kunnen aanpassen. Hij zal op een andere versnelling moeten overschakelen, moeten remmen, goed moeten sturen etc. Deze handelingen vormen een verzameling routines die zijn aandacht niet mogen afleiden van handelingen nodig bij onverwachts optredende situaties. Zijn routine moet zover zijn opgevoerd dat hij ze automatisch en nauwkeurig uitvoert.

Tot dusver hebben we nagedacht op een laag niveau van abstractie, over handelingen nodig om mensen van de ene plaats naar de andere te vervoeren. Laten we deze ideeën toepassen op het leren en onderwijzen van wiskunde. Om te beginnen kan men de gegeven voorbeelden als analogie of als metafoor beschouwen. In feite is de analogie zeer vergaand en deze kan, als men er de tijd voor heeft, tot een theoretisch model ontwikkeld worden. Daar hebben we nu helaas geen tijd voor, maar ik wil u nog wel enkele aanwijzingen geven.

Wiskunde bedrijven bestaat uit geestelijke handelingen waarbij men van de ene mentale toestand overgaat tot een volgende. Nemen we 7×14 . We vinden 98 door in gedachten de vermenigvuldiging uit te voeren. $x^2 + 2x = 3$, we vinden de oplossingsverzameling $\{1, -3\}$ door een reeks van handelingen die we als totaliteit 'het oplossen van de vergelijking noemen'. Deze handelingen worden operaties genoemd, zodat we in de wiskunde over startpunt, doelstelling en operaties kunnen spreken. Dikwijls zijn verschillende wegen mogelijk.



Figuur 9



Figuur 10

Nemen we de vergelijking. Als de linker methode mogelijk is, dan is deze de kortste. Maar, zoals we weten, is deze niet altijd eenvoudig, zodat ook de rechter methode gekend moet worden. Maar hier zijn een aantal plannen nodig, worteltrekken, een operatie die sommigen van ons op school geleerd hebben (en die ik vergeten ben) logaritmen, kwadraattafels of een zakcomputer.

We gebruikten de termen: startpunt en doelstelling. Maar onze doelstelling was wat optimistisch. Sommige leerlingen zullen deze niet bereiken. De vergelijking heeft geen eenvoudige factoren, of hij heeft kwadraatplitsen niet gehad of hij ken geen complexe getallen. Het voorbeeld kan te ingewikkeld zijn of hij begrijpt de opgave niet. We kunnen dus beter spreken over een gewenst einddoel.

Deze speciale voorbeelden dienen alleen om meer algemene principes aan te tonen.

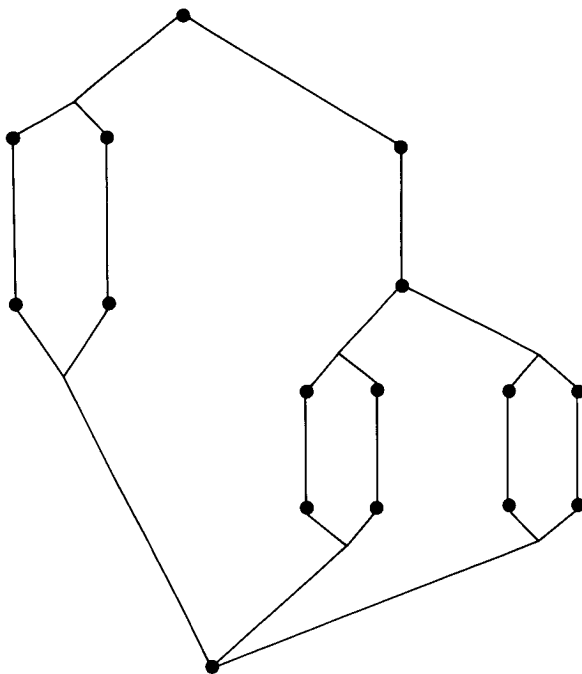
In het voorbeeld 7×14 zijn we niet in de getallen 7 en 14 geïnteresseerd, maar in de algemene ideeën van startpunt, doelstelling en operatie. Laten we daarom de getallen vervangen door stippen (zie figuur 11).

Dit lijkt meer op een gedeelte van het diagram waarmee we zijn begonnen. Toen hebben we het uitgelegd als een plattegrond. Dat is het nu niet, want de stippen stellen geen fysische plaatsen maar mentale toestanden voor. De overige ideeën blijven echter geldig. 'Hoe komt men van startpunt tot doel?' Een plan is nu een volgorde van toestanden tesamen met de operaties.

We kunnen dus figuur 1 opvatten als een of ander wiskundig probleem. We zullen het nu 'schema' noemen. Of als u dit te technisch vindt: een 'cognitieve kaart' (Tolman). Dit is wel minder algemeen dan schema, doch het helpt een brug te slaan over de kloof plattegrond en abstracte structuur.

In het laatste deel van mijn voordracht wil ik de eerder ontwikkelde ideeën toepassen op een concreet niveau voor het onderwijzen en leren van wiskunde. Wat beschouwen we als doelstelling van leren? Anders gezegd: Wat moeten

leerlingen weten en wat moeten ze er mee doen? De meesten van ons willen dat ze in een bepaald wiskunde-onderdeel die soort kennis opdoen die ze in



Figuur 11

staat moet stellen een grote verscheidenheid van problemen op te lossen. Niet dus een verzameling sleur-methoden, alleen toepasbaar op enkele specifieke problemen, nee, we willen inzicht bijbrengen.

Ik vestig uw aandacht op de criteria van Van Hiele (die ik onderschrijf). Ze zijn opgesomd in een artikel van Van Dormolen: *Vaardigheden*.

– Iemand toont inzicht als zijn handelen in overeenstemming is met de volgende voorwaarden:

- 1 Hij kan een nieuwe situatie aan,
- 2 Hij handelt adequaat,
- 3 Hij handelt gericht.

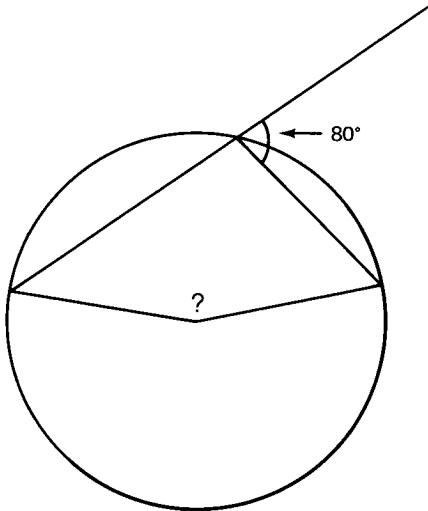
Met een nieuwe situatie bedoelen we: De speciale opdracht is nieuw voor de leerling, niet dat hij de daarvoor benodigde wiskunde niet kent. Wat ons als leraren bezorgd maakt is, dat leerlingen niet in staat zijn problemen op te lossen, waarvan we meenden dat ze er wel toe in staat waren omdat ze de benodigde wiskunde beheersten.

Er zijn twee hoofdkenmerken aan te wijzen waardoor een opdracht nieuw is voor een leerling: de vorm waarin deze gegoten is of de methode die vereist

wordt en die nog niet eerder gebruikt werd. Beide zijn belangrijk. Om tijd te sparen wil ik een kort voorbeeld geven van de eerste en dan wat dieper ingaan op de tweede.

Laten we uitgaan van: Ontbind $x^2 - 2xy + y^2 - k^2$ zo volledig mogelijk in factoren. Hij komt tot: $(x + y)^2 - k^2$ maar ziet dit niet als een vorm van de gedaante: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ zodat hij niet verder kan.

Voor het tweede geval nemen we een meetkundig voorbeeld

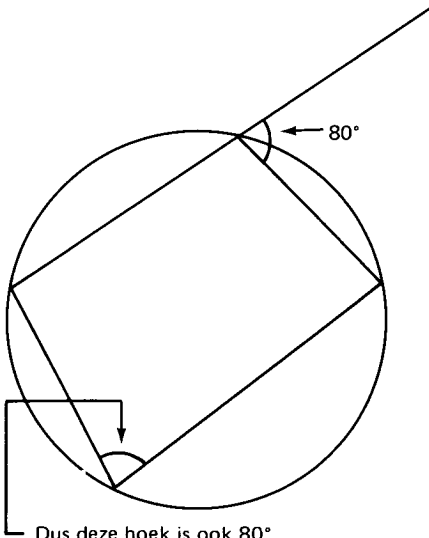


Gegeven is dat de grootte van de met een boogje gemarkeerde hoek 80° is.

Figuur 12

Bepaal de grootte van de hoek die met ? is aangegeven.

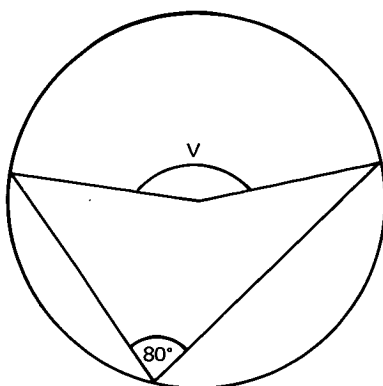
Een leerling kwam bij mij om geholpen te worden. Deze leerling beheerste zowel



Figuur 13

Dus deze hoek is ook 80°

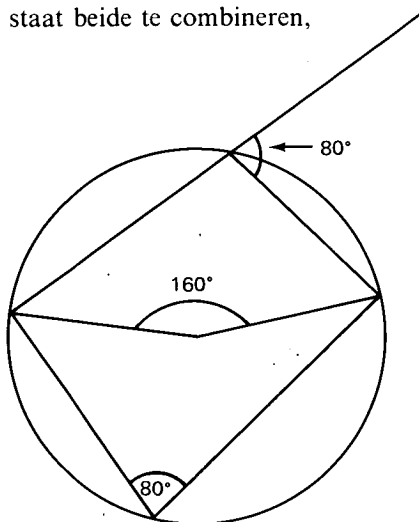
als



Figuur 14

Dus de met V aangegeven hoek is 160°

Maar hij was niet in staat beide te combineren,



Figuur 15

om van het startpunt tot het doel te komen.

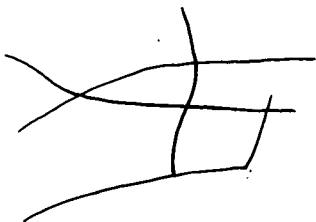
Dit is een abstract voorbeeld van wat het taxichauffeurprobleem genoemd kan worden.

Gegeven welk startpunt ook en gegeven welk doel ook in een gegeven onderdeel van de wiskunde (in het tweede voorbeeld: cirkels en hoeken), de opdracht is een plan te maken om van het eerste punt bij het tweede te komen.

In de nog resterende tijd wil ik dit algemeen behandelen. De benodigde kundigheden waarover leerlingen dienen te beschikken, in welk wiskundig gebied dan ook, zijn: *begrijpen, plannen en uitvoeren*. *Begrijpen* betekent de nieuwe opdracht

verwerken tot een geschikt schema. Op concreet niveau, te weten waar men staat in zijn mentale landkaart. Op abstract niveau, zijn standpunt herkennen binnen de geëigende kennisstructuur, in beide gevallen dus: weten waar je heen wil. *Plannen* betekent een weg bepalen van startpunt naar doel. *Handelen*, de benodigde operaties uitvoeren die naar het beoogde doel voeren.

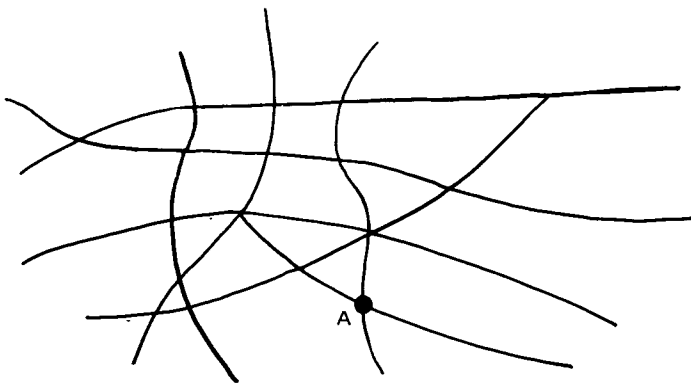
Deze eisen corresponderen met de tweede en derde criteria van Van Hiele voor inzicht, maar dan in omgekeerde volgorde: Hij handelt gericht betekent dat hij bewust kiest voor de meest geschikte methode om zijn doel te bereiken. Hij handelt adequaat d.w.z. zijn plan is succesvol en voert hem naar zijn doel. Al deze kundigheden zijn noodzakelijk en moeten in combinatie worden gebruikt. Maar de methoden waarop deze activiteiten zijn verworven, zijn verschillend en als we niet oppassen kunnen ze elkaar tegenwerken. Begrip vereist het kunnen opstellen van geëigende wiskundige schema's.



Figuur 16

● A

Als het schema van de leerling niet verder gaat dan dit, dan zal deze vanuit zijn startpunt zeker verdwalen.



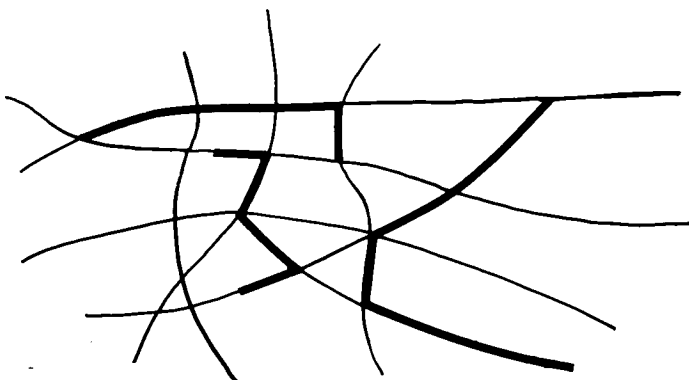
Figuur 17

Een ander kan het beschikbaar gestelde schema begrijpen, doordat hij het juiste startpunt kan lokaliseren.

Het opstellen van schema's sluit de vorming in van nieuwe wiskundige begrippen, verbonden met begrippen die hij al heeft. Dit vereist een soort leermateriaal waarop ik elders uitvoerig inging.

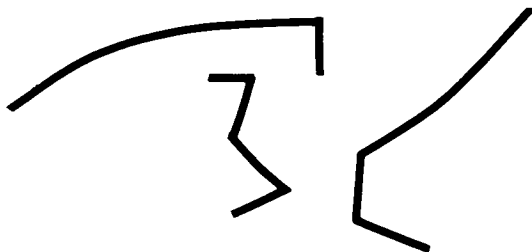
Aan het bijbrengen van planning hebben we naar ik meen tot nu toe te weinig aandacht besteed. De soort oefeningen, nodig om dit te ontwikkelen, zijn gebaseerd op reeds vergaarde kennis, die dan gebruikt wordt voor een verscheidenheid aan plannen. Eén soort oefening is: 'Op hoeveel manieren kun je van A naar D gaan?' of b.v.: 'Op hoeveel manieren kun je 7×14 uitrekenen?' Een andere manier bestaat uit het combineren van twee of meer verschillende methoden, b.v. substitueer in een formule voor alle optredende variabelen, op één na, bepaalde waarden en los dan de overgebleven variabele op.

Dit soort oefeningen zal de gevormde schema's bevestigen. Tot dusver dus geen conflict. Maar de leerlingen hebben ook oefeningen nodig voor een ander doel, n.l. routine-bewerkingen die geregeld nodig zijn, maar net zo min als de taxichauffeur zonder problemen zijn route kan volgen als het schakelen teveel aandacht vraagt, net zo min kan de wiskundige adequaat handelen, als hij moet nadenken over routinezaken zoals vermenigvuldigen, haakjes wegwerken of vereenvoudigen van veeltermen. Al deze zaken moeten eerst tot routine-handelingen zijn geworden. En dit nu brengt gevaren mee.



Figuur 18

Hier opnieuw het eerste diagram met een stel routineplannen. Als leerlingen deze te vaak volgen en deze alleen, dan zal de samenhang met het verwante verloren gaan, door gebrek aan oefening.



Figuur 19

En wat blijft is slechts een aantal vaste plannen. Onze leerlingen zijn dan geen taxichauffeurs maar buschauffeurs, die hoewel ze verschillende routes kennen,

verdwalen als ze een route kiezen die ze te weinig gebruikt hebben, waardoor deze niet meer in hun mentale plattegrond leeft.

Om effectief les te geven in wiskunde stel ik voor aandacht te schenken aan:

- 1 Het vormen van nieuwe begrippen en verbreding van bestaande schema's.
- 2 Het ontwikkelen van planning-vaardigheden, handigheid in het ontwikkelen van nieuwe plannen, nieuwe methoden binnen het kennisgebied.
- 3 Het ontwikkelen van routine-vaardigheid.

Het tweede bevestigt het eerste, het derde niet, eerder het tegendeel, zodat een nauwkeurige afweging nodig is.

Mijn laatste opmerking is eenvoudig een gevolg van het voorgaande. Als we onze leerlingen dit soort oefeningen geven moeten niet enkel wij het waarom weten, maar zij evengoed ook. D.w.z. ze moeten het doel van de oefeningen weten: Dienen ze om hun kennis te vergroten, of om hun vermogen van reeds bestaande kennis gebruik te maken, te vergroten, of zijn het oefeningen om routine op te voeren? Het zijn drie totaal verschillende leer-oefeningen en als ze niet weten wat ten *grondslag* ligt aan datgene wat we ze opdragen, dan kan men nauwelijks verwachten dat ze dat leren wat we ze wilden leren.

Het woord grondslag zou ik willen onderstrepen. Ogenschijnlijk is de leerling zich het meest bewust van het feit, dat hij een of andere opgave moet maken. Wat hen, nadat hun taak volbracht is, wordt medegedeeld is of ze het correct hebben uitgevoerd of hoeveel juiste antwoorden ze gegeven hebben. Maar wat voor de leraar van belang is, dat ze een bepaald doel bereiken en de juistheid van de antwoorden is een aanwijzing of dat doel ook bereikt is. En tenzij zowel leerling als leraar zich duidelijk richt op de minder voor de hand-liggende maar wel meer belangrijke doelstellingen, is er een voortdurend gevaar van een conflict tussen wat ze pogen te doen en wat wij ze graag wilden laten doen.

Aan het eind gekomen met mijn voordracht ben ik wel benieuwd naar uw reacties en opvattingen. Ondanks het feit dat ik u niet in uw eigen taal kon toespreken, meen ik toch een prettig samenzijn te hebben ondervonden bij het onderzoek naar wat voor sommigen onder u nieuwe gezichtspunten waren in het doceren van wiskunde.

Het blijvend uitwisselen van elkaars opvattingen moge tot voordeel strekken zowel voor leerlingen van uw land als voor die van mijn land.

Over een rotatie-vraagstuk

W. GANZEVOORT

Een rotatie R beeldt punt $A(1, 2)$ af op punt $B(4, 3)$. Verder gaat het R -beeld van lijn $m: \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ door het punt $P(5, 5)$. Bereken de coördinaten van het rotatiepunt en de hoek van de rotatie. (Opgave 27 op pag. 221 van Getal en Ruimte deel 5/6V3, 3de druk).

Hoe los je zoiets op?

Mijn *eerste aanzet* was: het middelpunt M van R ligt op de middelloodlijn l van AB : $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus we kunnen M voorstellen door $(2 - \lambda, 4 + 3\lambda)$. Dan zal R de vorm hebben

$$\begin{cases} x_1' = cx_1 - sx_2 + a_1 \\ x_2' = sx_1 + cx_2 + a_2 \end{cases}$$

waarbij $c := \cos\varphi$ en $s := \sin\varphi$, en φ de rotatiehoek aangeeft. Eisen we dat $R(A) = B$ en $R(M) = M$, dan krijgen we een stelsel van vier vergelijkingen, waaruit we eerst a_1 en a_2 kunnen halen, uitgedrukt in c en s , en waaruit vervolgens te halen valt een uitdrukking voor c en s in λ :

$$R(A) = B: \begin{cases} 4 = c - 2s + a_1 & \text{dus } a_1 = 2s - c + 4 \\ 3 = s + 2c + a_2 & \text{dus } a_2 = -s - 2c + 3 \end{cases}$$

$$R(M) = M: \begin{cases} 2 - \lambda = c(2 - \lambda) - s(4 + 3\lambda) + 2s - c + 4 \\ 4 + 3\lambda = s(2 - \lambda) + c(4 + 3\lambda) - s - 2c + 3 \end{cases}$$

$$\text{en dus } s \cdot (1 + 2\lambda + 2\lambda^2) = 1 + 2\lambda$$

$$\text{en } c \cdot (1 + 2\lambda + 2\lambda^2) = 2\lambda + 2\lambda^2.$$

Op dit punt eist het de nodige moed om door te gaan.

Druk $R(-1, 3)$ en $R(0, 5)$ uit in λ , bepaal daarmee een vectorvoorstelling van het R -beeld van m en eis dan dat $(5, 5)$ op die lijn ligt. Je krijgt na eliminatie van de parameter μ een vierdegraadsvergelijking in λ , die gelukkig oplosbaar is,

en dan is het karwei geklaard. Maar het kost wel veel te veel rekenwerk:

$$R(m) : \bar{x}(1 + 2\lambda + 2\lambda^2) = \begin{pmatrix} 3 + 2\lambda + 4\lambda^2 \\ 1 + 4\lambda + 8\lambda^2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 - 2\lambda + 2\lambda^2 \\ 1 + 6\lambda + 4\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$R(m)$ gaat door $(5, 5)$:

$$3 + 2\lambda + 4\lambda^2 + \mu(-2 - 2\lambda + 2\lambda^2) = 1 + 4\lambda + 8\lambda^2 + \mu(1 + 6\lambda + 4\lambda^2) = 5(1 + 2\lambda + 2\lambda^2)$$

en dat levert na uitwerking $2\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$.

Enig geprobeer levert dat -1 een dubbele wortel is, en dat we kunnen ontbinden: $(\lambda + 1)^2 \cdot (2\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$ zodat we zien dat -1 de enige oplossing

is. Vullen we dat in dan vinden we $s = -1$, $c = 0$ en dus $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, en

$a_1 = 4$, $a_2 = 3$, en $M(3, 1)$.

Een onbevredigende gang van zaken; en dus op zoek naar een betere methode.

Tweede aanzet: als $R(m)$ door P gaat, zal $R^{inv}(P)$ op m moeten liggen. Dat lijkt al wat gunstiger, want net als R is R^{inv} een draaiing om M , en het is heel wat simpeler met een punt te manoevreren dan met een lijn. Je bent op zijn minst die parameter μ kwijt.

Het blijkt bovendien slim te zijn om niet met λ als parameter te werken maar met c en s :

$$R^{inv} \text{ is van de vorm } \begin{cases} x_1' = cx_1 + sx_2 + b_1 \\ x_2' = -sx_1 + cx_2 + b_2 \end{cases}$$

$$R^{inv}(B) = A : \begin{cases} 1 = 4c + 3s + b_1 & \text{dus } b_1 = -4c - 3s + 1 \\ 2 = -4s + 3c + b_2 & \text{dus } b_2 = -3c + 4s + 2 \end{cases}$$

$$R^{inv}(P) \text{ wordt dan: } x_1' = 5c + 5s - 4c - 3s + 1 = c + 2s + 1$$

$$\text{en: } x_2' = -5s + 5c - 3c + 4s + 2 = 2c - s + 2$$

Dit punt $(c + 2s + 1, 2c - s + 2)$ moet op m liggen; een vergelijking van m is

$$2x_1 - x_2 + 5 = 0, \text{ dus: } 2(c + 2s + 1) - (2c - s + 2) + 5 = 0 \Leftrightarrow 5s + 5 = 0 \Leftrightarrow s = -1.$$

$$\text{Dus } \varphi = -\frac{\pi}{2}, c = 0, b_1 = 4 \text{ en } b_2 = -2.$$

$$R^{inv} \text{ wordt dus: } \begin{cases} x_1' = -x_2 + 4 \\ x_2' = x_1 - 2 \end{cases} \text{ en we zien dat}$$

$$R : \begin{cases} x_1' = x_2 + 2 \\ x_2' = -x_1 + 4 \end{cases}$$

R heeft één dekpunt, en dat is $M(3, 1)$.

Deze acceptabele oplossing van het vraagstuk roept een volgende vraag op: Gegeven een drietal punten A , B en P . Dan zal een draaiing $R_{M,\varphi}$ die A op B afbeeldt, haar middelpunt M op de middelloodlijn l van AB hebben. Wat is nu de verzameling van beeldpunten van P onder $R_{M,\varphi}$, als je eist dat A op B wordt afgebeeld, en dus M over l loopt?

Bovendien ben ik niet tevreden met de veel te rekentechnische aanpak, ik wil er wat meer meetkundig mee aan de gang.

Noem de plaatsvector van A : $\vec{a}$, en die van B : $\vec{b}$.

We bekijken nu draaiingen over een hoek $\varphi \neq 0$.

Dat zijn isometrieën. We kunnen isometrieën indelen naar hun dekpunten:

- geen dekpunten: een translatie of een schuifspiegeling
- één dekpunt : een rotatie om dat punt
- een lijn van dekpunten: spiegeling in die lijn
- het hele vlak bestaat uit dekpunten: de identieke afbeelding.

$$1 \quad R_{A,\varphi} = T_{\vec{a}} \circ R_{0,\varphi} \circ T_{-\vec{a}}$$

$$2 \quad \text{Voor elke lineaire afbeelding } A \text{ geldt: } A \circ T_{\vec{a}} = T_{A\vec{a}} \circ A, \text{ immers } A(\vec{x} + \vec{a}) = A\vec{x} + A\vec{a}$$

$$3 \quad \text{Dus } T_{\vec{a}} \circ R_{0,\varphi} = R_{M,\varphi} \Leftrightarrow T_{\vec{a}} = T_{\vec{m}} \circ T_{-R\vec{m}} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{m} - R_{0,\varphi}\vec{m} = (I - R)\vec{m}.$$

Nu is $I - R$ regulier als $\varphi \neq 0$, immers de matrix van R is $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$

$$\text{dus } \det(I - R) = \det \begin{pmatrix} 1 - c & s \\ -s & 1 - c \end{pmatrix} = (1 - c)^2 + s^2 = 2 - 2c \neq 0 \text{ als}$$

$$c \neq 1 \text{ als } \varphi \neq 0.$$

We kunnen dus $\vec{m}$ uit $\vec{a}$ bepalen.

$$4 \quad \text{Vragen we naar de dekpunten van } T_{\vec{a}} \circ R_{0,\varphi}, \text{ dan is dat er precies één; want } T_{\vec{a}} \circ R\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow R\vec{x} + \vec{a} = I\vec{x} \Leftrightarrow (I - R)\vec{x} = \vec{a} \text{ en we hebben net gezien dat deze vergelijking als enige oplossing } \vec{m} \text{ heeft.}$$

$$5 \quad \text{Het dekpunt van } T_{\vec{a}} \circ R_{0,\varphi} \text{ is } M \Leftrightarrow T_{\vec{a}} \circ R_{0,\varphi} = R_{M,\varphi}.$$

$$6 \quad \text{Nu naar de vraag. We eisen dat } A \text{ op } B \text{ wordt afgebeeld door } R_{M,\varphi}. \text{ Dat betekent dat } A \text{ een dekpunt is van } T_{\vec{a}-\vec{b}} \circ R_{M,\varphi}, \text{ dus } T_{\vec{a}-\vec{b}} \circ R_{M,\varphi} = R_{A,\varphi} \text{ dus } R_{M,\varphi} = T_{\vec{b}-\vec{a}} \circ R_{A,\varphi}.$$

$$7 \quad \text{Wat gebeurt dan met } P?$$

$$R_{M,\varphi}(P) = T_{\vec{b}-\vec{a}} \circ R_{A,\varphi}(P): \text{ de baan van } P \text{ is een cirkel om } A \text{ verschoven naar } B \text{ dus de cirkel om } B \text{ met straal } AP.$$

Hadden we dat geweten, dan hadden we dit toegepast op R^{inv} , want daarvan weten we dat B op A wordt afgebeeld; P loopt dus langs de cirkel met middelpunt A en straal BP . Deze cirkel heeft met m precies één punt gemeen, nl. $Q(-1, 3)$.

Van de gezochte R weten we dan dat A op B en dat Q op P wordt afgebeeld. De middelloodlijnen van AB en PQ vallen samen, dus we moeten M zoeken in het snijpunt van AQ en BP .

Het is nu ook gemakkelijk in te zien dat bij $R_{M,\varphi}$, als we M de middelloodlijn l van AB laten doorlopen, de beeldlijn $R(m)$ niet alle punten zal ontmoeten.

Voor punten die dichter bij B liggen dan P zien we dat ze nooit op $R(m)$ liggen. Voor punten P' die verder weg liggen, zullen er twee oplossingen zijn van het probleem: welke rotatie die A op B afbeeldt, beeldt m af op een lijn die door P' gaat?

De beelden van m onder de rotaties die A op B afbeelden, omhullen dus de cirkel met middelpunt B en als straal de afstand van A tot m .

/

Ontvangen boeken

Dr. P. M. van Hiele e.a., *Van A tot Z, wiskunde-werkboek voor HAVO/VWO*, HV-2a, f 18,25, HV-2b, f 18,25, zesde, geheel herziene, druk, 2a 235 blz., 2b 185 blz.

M 2a werkboek der wiskunde voor het 2de leerjaar MAVO, zesde, geheel herziene, druk, 167 blz., f 15,60.

M 2b, zesde, geheel herziene, druk, 136 blz. f 15,60.

Wiskunde-werkschrift voor de tweede klas, f 5,50.

Toelichting bij Van A tot Z wiskunde-werkboek voor MAVO 2a en 2b. Gratis. Muusses, Purmerend, 1977.

Rekenvaardigheid in het voortgezet onderwijs

ED DE MOOR

Over de rekenvaardigheid van de huidige brugklasleerlingen (van LBO tot VWO) hoort men veel klachten. Een kleine, door het IOWO ingestelde, enquête bevestigt dit nog eens.

Als we willen omschrijven wat rekenvaardigheid precies is, komen we op een ingewikkeld terrein terecht. De interpretatie van het begrip vaardigheid kan aanleiding zijn tot diepgaande leerpsychologische beschouwingen. Deze korte notitie wil nu niet deze richting inslaan, doch:

- a enkele knelpunten signaleren, die wellicht mede oorzaak kunnen zijn van de genoemde klachten;
- b een mogelijke bijdrage leveren tot praktische hulp binnen dit probleemgebied.

a Knelpunten

- a1 Rekenen in het voortgezet onderwijs komt ter sprake bij wiskunde, natuurkunde, bedrijfsrekenen en scheikunde. Het tijdstip dat er werkelijk weer een appèl gedaan wordt op de rekenvaardigheid ligt 1 à 2 jaar na afname van de CITO- (of andere) toets. Alleen bij natuurkunde in het LTO wordt direct enige aandacht aan rekenen besteed.
- a2 Het rekenaspect wordt plotseling in een geheel andere kontekst aangeboden (denk bijvoorbeeld aan lineaire vergelijkingen met gebroken coëfficiënten).
- a3 In het algemeen is men van beide 'kanten' (BO enerzijds, VO anderzijds) weinig op de hoogte van elkaars boeken, eisen, werkmethoden etc.
- a4 Het aanleren van vaardigheden wordt veelal los gezien van inzicht (zie hiertoe bijvoorbeeld: 'Vaardigheden' – Van Dormolen e.a.).

b Praktische wenken

- b1 Het zou aanbeveling verdienen om in de brugklas van meet af aan enkele malen per week (een minuut of tien) aandacht aan de rekenvaardigheid te besteden. Gevarieerde oefenvormen, zoals het werken met tabellen, som-

men met een verrassingskarakter, aktuele berichten uit de krant e.d. kunnen hierbij zeer motiverend zijn.

- b2 Het vormen van werkgroepen bestaande uit brugklasdocenten en hoogste klas basisschool onderwijzers, waarbij deze problematiek aan de orde komt, zou een zinvolle bezigheid kunnen zijn.

Grondige analyses van basisschool- en VO-leerboeken, diskussies over gehanteerde methodieken e.d. kunnen daarbij verhelderend zijn.

- b3 Verbanden tussen wiskunde en rekenen zouden veel vaker aangegrepen kunnen worden, opdat inzicht en vaardigheid elkaar ondersteunen.

$$(3 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ en } 3 \times \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ vs.})$$

$$n + \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1} \text{ en } n \times \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1}$$

- b4 (Her)bewustmaking van de principes van 'ingeslepen' vaardigheden kan heel verhelderend werken. (Wat doe je eigenlijk als je 'onder mekaar' vermenigvuldigt?).

- b5 Door in de brugklas regelmatig aandacht te besteden aan het eigenschapsrekenen kan de 'getalgevoeligheid' op peil c.q. vergroot worden.

Welke methode prefereren we:

$$\begin{array}{r} 250 \\ 3.600 \\ \hline \times \\ 000 \\ 0.000 \\ 150.000 \\ 750.000 \\ \hline 900.000 \end{array}$$

$$\text{of } 36 \times 25 = 18 \times 50 = 9 \times 100 = 900 \quad ?$$

$$\downarrow$$

$$900.000$$

('echt gezien!')

Tenslotte

Deze praktische opmerkingen hebben weinig nut als geen 'stuff' bijgeleverd wordt. Daarom heeft het IOWO een verzameling vraagstukken ontworpen, welke de mogelijkheid biedt om de rekenvaardigheid op peil te houden. Daarbij kunnen de volgende categorieën onderscheiden worden:

- * eigenschapsrekenen;
- * hoofdbewerkingen;
- * verhoudingen;
- * breuken;
- * kommagetallen;
- * schatten en nauwkeurigheid;
- * positiestelsel;
- * samengestelde grootheden;
- * procenten;
- * grote getallen;
- * getalpatronen;
- * deelbaarheid;

- * tijd;
- * metriek stelsel; èn:
- * zakrekenmachine. (jawel!)

De verzameling heeft de vorm van een weekkalender, die in de klas hangt. Elke week een ander probleem, suggestie, sommenreeks etc., welke aanleiding kunnen zijn tot meermalige kortstondige rekenactiviteiten. De achterzijden van de kalenderblaadjes zijn van commentaar voor de docenten voorzien. Door de losse kalenderblaadjes te verzamelen, van aantekeningen en uitbreidingen te voorzien, kan een steeds groeiende kollektie rekenideeën ontstaan in de vorm van een 'eeuwigdurende' kalender.

De kalender loopt van augustus 1978 tot augustus 1979 en is te bestellen bij het IOWO.*)

Behalve voor de brugklas, achten wij de kalender ook geschikt voor de 6e klas van de basisschool.

We sluiten nu af met een voorbeeld:**)

November

zo ma di wo do vr za

19 20 21 22 23 24 25

Pijlentabel

	10	20		
	2	4		

$\times 5 \uparrow$

$\xrightarrow{\times 2}$

Vul de tabel verder in.

*Elke dag een rekenaardigheid,
verhoogt des leerlings vaardigheid.*

(drs. Matrix)

*) IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht, tel.: 030 - 611611.

**) Dit voorbeeld is al gebruikt in de Nieuwjaarswens (1978) van het IOWO, waarin al op deze kalender werd gepreludeerd.

De achterkant van dit kalenderblad ziet er als volgt uit :

Commentaar

Een heel eenvoudige pijlentabel om mee te beginnen. Ontdekken de leerlingen zelf handige manieren om de tabel in te vullen?

250	500	1000	2000
50	100	200	400
10	20	40	80
2	4	8	16

Variaties:

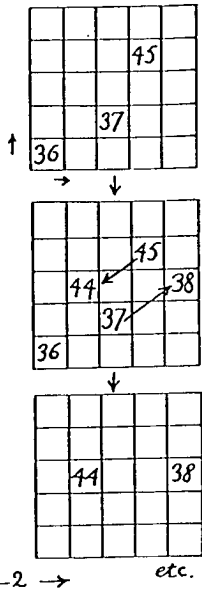
- Begingetal lastiger kiezen.
- Horizontale c.q. verticale vermenigvuldigingsfactor variëren. (Breuken, kommagetallen, negatieve getallen) Vermenigvuldigen en delen komen tegelijk aan de orde.
- Zelfde principe, maar dan met "optelpijlen" (bijv. $\nearrow$ 3 $\uparrow$ -2)

Optellen en aftrekken komen tegelijk aan de orde.

Verdiepingen:

- Laat de betekenissen van de aangegeven pijlen in de tabel verklaren.
- Kan de horizontale pijl optellen en de verticale pijl vermenigvuldigen betekenen?
- Geef de betekenis van de pijlen, maar begin met een getal ergens middenin.

- Geef 3 getallen, zeg dat de pijlen: optellen c.q. aftrekken betekenen. Maak de tabel af. Zie voorbeeld en merk op, dat de oplossing ook zonder algebra kan.



Over de auteurs:

Ed de Moor was 15 jaar leraar wiskunde bij het VWO. Sinds 1971 is hij medewerker van het IOWO, afdeling Wiskobas, welk team zich bezighoudt met het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool.

Examen 1978: wat nu weer?

Vier afleveringen geleden, het blauwe januarinummer, stond Euclides vol met examenopgaven, de resultaten hiervan, samenvattingen van examenbesprekingen en nog meer wetenswaardigheden. Maar dat is niet genoeg: uw mening, lezer, uw op- en aanmerkingen werden gemist.

De redactie wil de komende jaargang weer een *examennummer* uitbrengen. Wij vragen u daarom: heeft u op- en aanmerkingen, heeft u bij uw leerlingen leuke of bijzondere oplossingen van vraagstukken gevonden, of misschien karakteristieke fouten, wilt u uw verhaal dan aan een velletje papier toevertrouwen en sturen naar de redactie; *vóór 15 augustus 1978*.

De redactie.

Korrel

Reactie op: Over het opzoeken in goniometrische tabellen op het V.W.O. door R. Leentfaar (Euclides 53, nr. 1, blz. 17)

Het voorbeeld

$$2 \cos x + 3 \sin x = 1$$

kan ook zonder hulphoek opgelost worden.

Stel

$$\cos x = X \text{ en } \sin x = Y$$

met

$$-1 \leq X \leq 1 \text{ en } -1 \leq Y \leq 1$$

en

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Nu is

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{1 - 2X}{3} \\ X^2 + \left(\frac{1 - 2X}{3}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{1 - 2X}{3} \\ 13X^2 - 4X - 8 = 0 \end{cases}$$

Dit levert

$$X_1 = \frac{2 - 6\sqrt{3}}{13}, X_2 = \frac{2 + 6\sqrt{3}}{13}$$

$$x_1 = \text{Arccos } X_1 + k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = -\text{Arccos } X_2 + k \cdot 2\pi$$

Hierin is Arccos de afbeelding $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ die de inverse is van de afbeelding $x \rightarrow \cos x$ met domein $[0, \pi]$.

(Onder arccos verstaat men in Vlaanderen de inverse relatie van $x \rightarrow \cos x$.)

Algemeen:

$$aX + bY = c \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

is terug te brengen tot

$$aX + bY = 1 \quad (b \neq 0)$$

$$X^2 + \left(\frac{1 - aX}{b}\right)^2 = 1$$

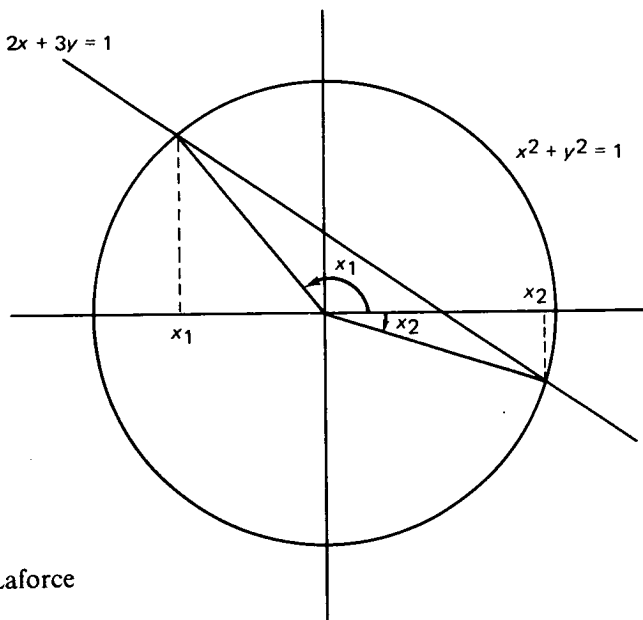
Dit geeft

$$(a^2 + b^2)X^2 - 2aX + (1 - b^2) = 0$$

Hierin is

$$D = 4b^2(a^2 + b^2 - 1) \geq 0 \text{ als } a^2 + b^2 - 1 \geq 0$$

Dus als punt (a, b) buiten of op de eenheidscirkel ligt, heeft men oplossingen.



Frank Laforce

Max Jeger. *Einführung in die Kombinatorik*. Band I, Klett Studienbücher, Stuttgart 1973. 219 blz., 20.30. DM.

Het boek behandelt een veelheid van combinatorische problemen te beginnen met de meest eenvoudige. Het is zeer helder geschreven.

Men ondervindt geregeld de stimulans zelf te gaan denken, waardoor men vaak de schrijver vooruit blijft bij het oplossen van de gestelde problemen. Op blz. 192 vermeldt de schrijver, dat het betreuwenswaardig is dat wiskundigen vaak hun resultaten heuristisch vinden en ze daarna zo op schrift stellen, dat de lezer de manier waarop het resultaat verkregen is, niet terug kan vinden. Hij vindt dit, vooral ook in schoolboeken, een groot tekort en heeft zich er daarom streng aan gehouden in dit boek de heuristiek aan de oplossing vooraf te laten gaan.

De boekbespreking heb ik onder de rubriek recreatie gerangschikt, omdat het boek 'eigenlijk' niet anders dan recreatieve problemen inhoudt. De oplossingen zijn vaak verrassend.

In dit nummer vindt men een tweetal aan dit werk ontleende problemen.

385. De entree voor een bioscoop is 1 DM. Voor het loket staat een rij van 100 personen die elk één kaartje willen kopen. Van hen hebben 60 een 1-DM geldstuk bij zich en de overige 40 alleen een 2-DM geldstuk. Bij het begin van de verkoop is de kas van de bioscoop leeg. Bij hoeveel verschillende rijen verloopt de kaartverkoop zonder dat een moment optreedt waarop de kassier geen 1-DM stuk wisselgeld kan teruggeven? (Twee rijen worden alleen dan voor verschillend gerekend, als de opvolging van de geldstukken erin verschillend is.)

386. Op een cirkel bevinden zich $2n$ punten. Op hoeveel manieren kan men ze twee aan twee door n koorden zo verbinden, dat geen twee koorden een punt gemeen hebben?

Oplossingen

381. V stelt voor:

de veelvouden van 3 of

de veelvouden van 5 of

de oneven getallen of

de getallen kleiner dan -10 .

W stelt voor: de veelvouden van 4.

Kies getallen binnen V en buiten W .

Eerste keus: 45. Antwoord: fout. Dan stelt V de getallen kleiner dan -10 voor. Antwoord: goed. Dan verder kiezen.

Tweede keus: 27. Antwoord: fout. Dan stelt V de veelvouden van 5 voor. Antwoord: goed. Dan verder kiezen.

Derde keus: 1. Antwoord: fout. Dan stelt V de veelvouden van 3 voor. Antwoord: goed. Dan stelt V de oneven getallen voor.

382. V stelt voor de positieve delers van 24 en W de veelvouden van 5 of de veelvouden van 10 of de getallen groter dan 50

of

V stelt voor de getallen kleiner dan 50 en W de getallen groter dan 50.

De antwoorden zijn dus resp. o, w, w, ?, o, ?, ?, ?, w, o.

383. V stelt voor de veelvouden van 3 of de oneven getallen of de getallen groter dan -10 .

W stelt voor de getallen kleiner dan 50 of de positieve delers van 27.

Er zijn zes mogelijkheden, zodat men niet in alle gevallen met minder dan drie keuzen tot een beslissing kan komen. Met drie keuzen komt men er als volgt in elk geval.

Eerste keus: -80 in C . Goed; dan stelt W de getallen kleiner dan 50 voor. Fout; dan stelt W de positieve delers van 27 voor.

Tweede keus: 1 in B . Fout; dan stelt V de veelvouden van 3 voor. Goed; dan derde keus: 100 in A .

384. V stelt voor de positieve priemgetallen en W de positieve delers van 27.

Boekbespreking

Dr. B. Meulenbeld, Dr. A. W. Grootendorst, *Analyse* deel 2 en 3, Stam Technische Boeken, resp. f 39,— en f 34,—, resp. 344 en 256 pag.

Deze beide delen kunnen beschouwd worden als heruitgave van het boek 'Analyse voor propaedeutische examens, deel 2' van Meulenbeld en Baart. Het totaal aantal pagina's wijst al direct op een forse uitbreiding van de stof. Deel 2 bevat de differentiaal- en integraalrekening van functies van meer dan een veranderlijke, terwijl deel 3 geheel gewijd is aan de differentiaalvergelijkingen.

Deel 2.

Functies van twee veranderlijken, impliciete functies, extreme waarden, vectoranalyse, vlakke krommen, ruimtekrommen, lijnintegralen, meervoudige integralen, integraalstellingen, massa, zwaartepunt, traagheidsmoment, gamma- en bètafunctie.

Deel 3.

Gewone differentiaalvergelijkingen, oplossing m.b.v. machtreksen, simultane differentiaalvergelijkingen, Laplace transformatie, numerieke methoden voor het oplossen van dv ., partiële dv .

De wijze waarop de stof wordt uitgelegd is uitermate goed en duidelijk. Het werk is zeer geschikt voor eerste kennismaking met de diverse onderwerpen. Als zodanig goed te gebruiken op bijvoorbeeld de lerarenopleidingen.

W. Kleijne

H. C. M. de Swart, H. G. Hubbeling, *Inleiding tot de symbolische logica*, Van Gorcum, Assen/Amsterdam, 1976, XII + 141 blz., ing. f 24,50.

Dit boekje is bedoeld als een eerste inleiding tot de symbolische logica. Als zodanig is het een voortreffelijk werk. Overzicht van de inhoud:

de uitspraakrekening: modeltheorie, waarheidstabellen, bewijstheorie;

de predicaaterekening: model- en bewijstheorie;

de onvolledigheidsstelling: formele getaltheorie, Gödel's onvolledigheidsstelling;

enkele bijzondere systemen die met name voor de wijsbegeerte van belang zijn: modale en deontische logica's.

De aanbidding van deze stof is uitermate helder en didaktisch goed doordacht. Een en ander is zodanig opgezet, dat het boekje zeker geschikt is voor zelfstudie. Vele voorbeelden verduidelijken de tekst en de lezer wordt aangespoord de opgenomen opgaven te maken. Aanwijzingen en de antwoorden zijn aan het eind van het boek toegevoegd.

Het komt mij voor, dat de lezer na nauwkeurige bestudering van dit boek een gedegen inleiding tot de logica heeft gekregen.

W. Kleijne

Mededelingen

Examenbespreking VWO wiskunde II

De bijeenkomst waarop de opgaven en de normen van het examen VWO wiskunde II zullen worden besproken, vindt plaats op *vrijdag 2 juni om 19.30 uur* in het Jaarbeurs Congrescentrum te Utrecht, Croeselaan (vlak achter het Centraal station).

De gespreksleider is de heer H. N. Schuring (CITO, Arnhem).

Het bestuur van de N.V.v.W.

De Vakantiecursus zal dit jaar plaatsvinden in

EINDHOVEN, op 16 en 17 augustus 1978

AMSTERDAM, op 17 en 18 augustus 1978

met als onderwerp:

MEETKUNDE:

'van kunst tot kunde, vroeger en nu'

Het programma ziet er als volgt uit:

1e dag:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| Prof. dr. G. R. Veldkamp | – 'Klassieke meetkunde' |
| Prof. dr. H. A. Lauwerier | – 'Symmetrie en meetkunde' |
| Prof. dr. J. H. van Lint | – 'Eindige meetkunde' |

2e dag:

- | | |
|--------------------------------|---|
| Drs. C. G. J. Nagtegaal | – 'Geschiedenis van de meetkunde' |
| Dr. J. H. M. Steenbrink | – 'Algebraïsche meetkunde' |
| Drs. J. C. S. P. van der Woude | – 'Toepassingen van meetkunde in differentiaalvergelijkingen' |

Nadere inlichtingen en aanmeldingsformulieren zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, 1091 AL Amsterdam, tel. 020 - 94 72 72, tst. 63.

De didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wil de wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs het volgende meedelen:

De afgelopen jaren zijn er ten behoeve van de wiskundeleraren door verschillende organisaties en instituten cursussen en conferenties over allerlei didactische onderwerpen georganiseerd. Om verwarring tussen allerlei activiteiten bij leraren, wiskundesecties en directies te vermijden is er in de afgelopen jaren steeds één staalkaart van activiteiten door de diverse organisaties gezamenlijk naar de scholen verstuurd.

Dat zal dit jaar niet gebeuren, niet omdat het aan die samenwerking zou schorten, maar omdat in het cursusjaar 1978-1979 minder cursussen georganiseerd zullen worden, waar een open inschrijving voor mogelijk is.

Daarom worden in deze mededeling alleen cursussen aangekondigd, die onder auspiciën van de NVvW in samenwerking met het IOWO gehouden zullen worden.

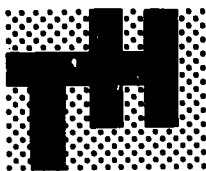
Het betreft hier didactiekcursussen:

- een A-cursus, **Leerstofordening en Doelstellingen**, op *14-16 september 1978*;
- een B-cursus, **Samenwerken**, op *12-14 oktober 1978*;
- nog een B-cursus op *18-20 januari 1979*;
- een C-cursus, **Verschillen tussen leerlingen**, op *1-3 maart 1979*.

Een nadere toelichting zal in augustus met de inschrijfformulieren naar de scholieren voor voortgezet onderwijs gezonden worden. Verzoeken van die formulieren gebruik te maken.

Verder zal er door de NVvW op zaterdag *28 oktober* a.s. een studiedag gehouden worden over het onderwerp **Instaproblemen en toepassingen wiskundeonderwijs**. Nadere mededelingen hierover komen in EUCLIDES.

De didactiekcommissie van de NVvW,
Correspondentieadres: PDI, Heidelberglaan 2,
Postbus 80.120, 3508 TC Utrecht.



Technische Hogeschool Delft

Bij de Onderafdeling der Wiskunde kan worden geplaatst een

VAKDIDACTICUS WISKUNDE (M/V)

ten behoeve van de opleiding tot 1e graads wiskundeleraar.

Taakomschrijving:

tot de taak van de vakdidacticus zal behoren het verzorgen van onderwijs en het verrichten van onderzoek op het gebied van de didactiek der wiskunde in het kader van de opleiding tot 1e graads leraar wiskunde. Tevens zal hij/zij – in samenwerking met andere vakdidactici en onderwijskundigen – een bijdrage moeten leveren aan de opbouw van de in te stellen lerarenvariant. In het kader van deze functie zal de te benoemen functionaris belast worden met enige uren propaedeutisch wiskunde onderwijs.

Vereisten

doctoraal examen wiskunde of hiermee overeenkomstige opleiding; ruime ondervinding bij het V.W.O.; praktische en theoretische kennis van de problematiek van de didactiek der wiskunde.

Nadere inlichtingen omtrent deze functie worden gaarne verstrekt door de voorzitter van de benoemingsadviescommissie: lector dr. A. W. Grootendorst, tel. 015-784572, of door de huidige functionaris dr. P. G. J. Vredenduin, tel. 085-33 38 07.

Aanstelling zal geschieden in het rangenstelsel voor wetenschappelijk medewerkers.

Direkte opnemng in welvaartsvast pensioenfonds.

Schriftelijke sollicitaties te richten aan het Hoofd van de Centrale Personeelsdienst, Julianalaan 134 te Delft, onder vermelding van nr. WI 7703 in de rechterbovenhoek van de brief.

INHOUD:

Piet Vredenduin: Proficiat! 391

Uit de jaarrede van de voorzitter van de N.V.v.W. 392

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1978 394

Prof. R. R. Skemp: Inzicht, planning en het bijbrengen van routine 397

W. Ganzevoort: Over een rotatie-vraagstuk 409

Ontvangen boeken 412

Ed de Moor: Rekenvaardigheid in het voortgezet onderwijs 413

Examen 1978: wat nu weer? 417

Frank Laforce: Korrel 417

Recreatie 419

Boekbespreking 420

Mededelingen 421

ADRESSEN AUTEURS:

W. Ganzevoort, Barbierstraat 93, 4204 TE Gorcum.

Frank Laforce, Elzenhoutstraat 2, 2610 Wilrijk, België.

Ed de Moor, Prinsengracht 701, 1017 LA Amsterdam.

Prof. R. R. Skemp, Dept. of Education, Warwick University, Coventry, Warwickshire CV4 7 AL.