EUCLIDES

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 7
maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ 21,—; contributie zonder Euclides ƒ 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ 32,–. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement ƒ 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers ƒ 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

9 De eerste les

Regelmatig komen er op het IOWO mensen bijeen om problemen aangaande het wiskundeonderwijs te bespreken. Het zijn soms studenten, die nadere inspiratie zoeken voor didaktische werkstukken, soms docenten aan heroriënteringskursussen, die ter kadervorming komen, nu eens schoolboekenauteurs, die hun materiaal willen verrijken, dan weer schoolboekgebruikers, die hun mening erover willen toetsen, vandaag medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten en morgen een groep atheneum-leerlingen met hun docent, op zoek naar het 'onderwijs computercentrum'.
De groep, die mij inspireerde tot deze notitie, bestaat uit docenten aan de Nieuwe Leraren Opleidingen. Ubbo Emmius (Groningen, Leeuwarden), D' Witte Lelie (Amsterdam), Het Moller instituut (Tilburg), De V.L.V.U. (Amsterdam), De ZUIDWEST Nederland (Delft), De S.O.L. (Utrecht) en De Gelderse Leergangen (Nijmegen) zijn vertegenwoordigd. Men heeft zich gedurende de laatste bijeenkomsten bezig gehouden met het basisonderwijs. Hoe zit dat nu eigenlijk precies met het rekenonderwijs van tegenwoordig, wat doet Wiskobas momenteel, is het mogelijk om een standpunt in te nemen ten opzichte van beide aanpakken, en zou het gewenst zijn de studenten van de NLO – toekomstige wiskundeleraren in LBO, MAVO, e.d. – ook in de gelegenheid te stellen om tot een eigen standpuntbepaling te komen? De kennis van het basisonderwijs, hiervoor nodig, kan bovendien uitgangspunt zijn voor kollegiale diskussies over dit vakgebied geïnitieerd door toekomstige leraren met onderwijzers.
Wat is nu het verschil tussen die wiskundeleraar en de onderwijzer, die op basisschoolnivo wiskunde onderwijzen? Deze vraag komt als vanzelfsprekend in zo'n diskussie naar voren. Tenslotte onderwijzen beiden aan kinderen, die – denk aan zesde klas en brugklas – in vele opzichten nauwelijks te onderscheiden zijn. Niettemin hebben wiskundeleraren, vooral zij die van de NLO komen, een totaal verschillende kennis van de wiskunde als de onderwijzer, die binnen zijn P.A.-opleiding een zeer klein gedeelte van de tijd aan dit vakgebied heeft kunnen besteden.
Hoe dat laatste momenteel gebeurt, is voor een deel beschreven in het artikel 'Johan doet wiskunde & didaktiek.*). De kollega's van de NLO hebben dit

*) Educational Studies in Mathematics aug. 1977, vol. 8 no 2.

bestudeerd. Met enige bezorgdheid over de ongunstige situatie, waarin docenten en studenten moeten werken, hebben ze kennis genomen van de matematisch didaktische aktiviteiten van Johan, in het eerste jaar van zijn studie. Tot op zekere hoogte is ook duidelijk geworden wat kan worden verwacht van een onderwijzer, die aldus in zijn opleidingstijd is bezig geweest.
Dan richten we onze aandacht op de NLO-student. Wat willen we nu van hem verwachten, als hij na het beëindigen van zijn studie het (wiskunde)onderwijs ingaat? Een konkrete situatie kan misschien opheldering geven. We nemen de eerste pagina uit Moderne Wiskunde*) en stellen ons voor dat de jonge leraar zijn eerste les in de brugklas van een LBO-school gaat voorbereiden.
Wat verwacht je dan?

1 Natuurlijke getallen

1.1 Veelvouden en delers

natuurlijke getallen

De getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... enzovoort noemen we de *natuurlijke getallen.*
We gaan nu eerst eens rekenen met de eerste zes getallen van deze rij, dus met 0, 1, 2, 3, 4 en 5.
Met deze getallen kunnen we 36 vermenigvuldigingen maken, bijvoorbeeld:

$2 \cdot 0 = 0 \qquad 2 \cdot 2 = 4 \qquad 2 \cdot 4 = 8$

$2 \cdot 1 = 2 \qquad 2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot 5 = 10$

De uitkomsten van de 36 vermenigvuldigingen vind je in de onderstaande tabel:

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	12	15
4	0	4	8	12	16	20
5	0	5	10	15	20	25

De uitkomst van de vermenigvuldiging $2 \cdot 4$ vind je in de tabel in *horizontale rij* met een rode 2 ervoor en in de *vertikale kolom* met een rode 4 erboven.

De eerste opmerkingen worden wat aarzelend naar voren gebracht:
Hij moet weten wat 'enzovoort' betekent. Hij moet de verzameling $\mathbb{N}$ in groter verband kennen. Eigenlijk moet hij de aksioma's van Peano eveneens kennen. Een globaal overzicht van de betekenis van $\mathbb{N}$ in het hele programma is zeer wenselijk.
Je moet je afvragen of de leraar alleen maar naar die eerste pagina's zou kijken. Een analyse van de hele leergang vooraf is zeer nodig. Misschien wil hij dit boek wel helemaal niet gebruiken. Of wil hij alleen maar heel anders beginnen dan op pagina 1 is aangegeven.
We realiseren ons dan ineens de grote afstand die we nu kreëren tot de bedoelde konkrete situatie. Met een herformulering van de gestelde vraag blijken we deze

*) Niet meer dan een willekeurige greep.

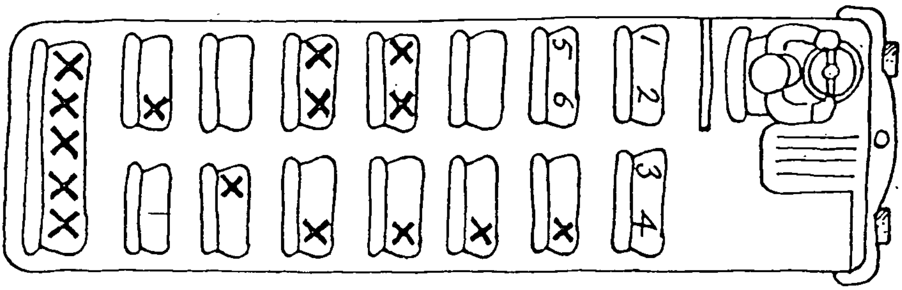
afstand wat kleiner te kunnen maken: 'Hoe gaat de leraar zich nu voorbereiden. Morgen moet die eerste les, met dit boek, gegeven worden'. Opmerkingen over te gebruiken didaktische werkvormen, uitleg, ofening, kunnen ze deze tekst lezen, zal ik ze die bladzijde wel laten lezen e.d. worden naar voren gebracht. Dan opeens komt er een stem uit de LBO-praktijk: 'eigenlijk interesseert dit de leerlingen in 't geheel niet'. Ze zullen het niet lezen, ze zullen niet echt luisteren als je het vertelt... Met het woord motivatie, dat begrijpen we allemaal wel, is slechts het didaktische probleem geïdentificeerd. Een oplossing zal nu nog gevonden moeten worden.
Hoe komen we aan een instap, die de leerlingen wèl motiveert en aktief laat worden? Iemand heeft een suggestie: begin met een honderdveld en laat de kinderen een begin maken met de invulling. Dat er 100 getallen op kunnen, is in een eerste gesprekje naar voren gekomen. Op het bord staat ook een 10 × 10 rooster. Dit wordt ook voor een deel ingevuld. Dan komen een aantal gerichte vragen, zoals: waar komt straks 100? En waar 50? En waar 65? En hoe weet je dat? Wat staat er boven 34? En eronder? En rechts ervan? Na het vòlledig invullen gaan we eens met kleur een aantal patronen ontdekken. De tafel van 4, hoe ziet die eruit op het veld? En hoe komt dat? Wie begrijpt dat de tafel van negen juist dit patroon geeft? Negenvouden, viervouden, zesvouden + 1 e.d. komen ook aan de orde...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14						

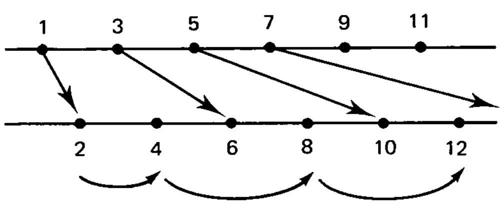
Na een dergelijke verkenning van de natuurlijke getallen onder de 100 zou je kunnen proberen verder te komen, voor sommige leerlingen helemaal op mentaal nivo, anderen zullen wellicht willen blijven tekenen: 'Neem eens een rooster van 1000 × 1000. Hoeveel getallen erop? Waar staat 1 miljoen? Waar de tafel van 999? Zie je iets bizonders aan die 999-vouden? Hoe zou dat komen?'
Bij een toelichting op het woordje 'enzovoort', dat hiervoor een der kollega's naar Peano deed wijzen, wordt het 'miljoenveld' uitgebreid tot 'het hotel met oneindig veel kamers'*). U kent dat wel; het hotel is vol en toch kunnen u, alle leerlingen van de school, zelfs oneindig veel vertegenwoordigers van alle mogelijke zonnestelsels nog een kamer krijgen. Een karakteristiek onderscheid tussen de steeds groter wordende 'x-velden' en de oneindigheid van $\mathbb{N}$.
De voorgaande honderdveldenkontekst inspireert een kollega tot een andere aanpak. Neem de plattegrond van een autobus en kijk naar de nummers van de zitplaatsen. Welke nummers, hoe is genummerd? Op welke nummers zitten de

*) Zie: N. Ya. Vilenkin, *Stories about sets*, Ac. Press 1968.

met een kruisje aangegeven personen? Als de plaatsen op 'die' manier genummerd zouden zijn, welke plaatsen zijn dan aan het raam. En wie ziet direkt of nr. 17 een plaats aan het raam is? Hoe zie je dat? . . .



De autobus kan een trein worden (zoals het honderdveld een miljoenenveld werd), de trein steeds langer. Huisnummers in een (straks oneindig) lange straat laten ook nogal wat mogelijkheden toe. Het onderscheid tussen even en oneven, het feit dat alle viervouden even zijn en alle viervouden + 1 aan de overkant liggen zijn nu konkrete zaken, die wellicht in een probleemsituatie naar voren kunnen komen. Overigens kan de eerder genoemde 'hotelproblematiek' gevisualiseerd worden in de oneindig lange straat: 'alle mensen aan de "oneven kant" verhuizen naar de overkant (n → 2n) en de mensen aan de "even kant" schuiven op (n → 2n), waardoor oneindig veel woningen vrij komen'. Maar dat kan alleen in die oneindig lange straat!



De stroom van ideetjes moet onderbroken worden, we wilden tenslotte iets opmerken over het kunnen van de jonge brugklasleraar.
Het laatste stukje wiskundig didaktische fantasie zou je ieder leraar willen toedichten, maar wie durft dat? En wie besteedt in de opleiding aandacht aan dit soort didaktiek op de vierkante meter?
Achteraf, in mijn geval bij het uitwerken van deze notitie, wordt pas duidelijk dat er met de fantasie rond 'de eerste les' een essentieel onderscheid tussen wiskundeleraren en onderwijzer (die wiskunde geeft) naar voren is gekomen. En tevens dat dit verschil duidelijkheid verschaft over de mogelijke samenwerking tussen beiden. De onderwijzer is meester op het gebied van de konteksten en instapproblemen, de leraar is deskundig op het terrein van de belangrijke wiskundige leerstofgebieden en strukturen. Anders gezegd: 'de onderwijzer vindt de "kontekst van de autobus" uit en de leraar voegt er een oneindig lange straat aan toe.
Vindt u dit ook geen rijk gebied voor een vakdidaktisch gesprek tussen kollega's.

Relaties tussen computer en voortgezet onderwijs

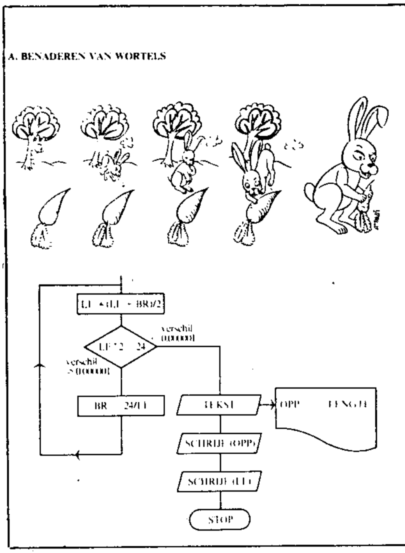
GUUS VONK

Het 'waarom niet' van dit artikel

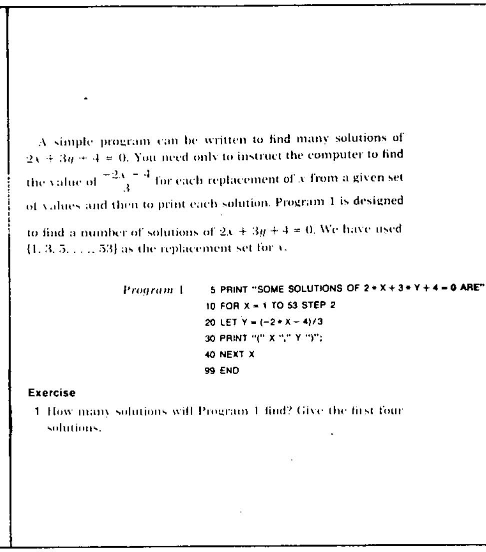
Zaterdag 12 maart 1977 organiseerden de Nederlandse en Vlaamse verenigingen van wiskundeleraren een gemeenschappelijke studiedag over 'zakrekenmachientjes en computer met betrekking tot het onderwijs'.
In de ochtenduren onderhield de Vlaamse spreker Frank Laforce de aanwezigen op zijn zo eigen wijze over het gebruik van het 'rekendoosje' in de wiskundeles. Na aperitief en lunch vervolgde schrijver dezes met een verkenning op de verschillende terreinen waar computers en onderwijs elkaar ontmoeten.
Na afloop werd hem gevraagd schriftelijk verslag te geven van de middagzitting en, opgelucht als hij was na twee uur achtereen in touw geweest te zijn, zei hij 'ja' tegen degene die hem op zo'n zwak moment de hand schudde. Achteraf pas realiserend dat er helemaal geen lezing op papier stond. Geen betoog waarin het hoe en waarom van enige zaken haarscherp wordt uiteengezet. Het was een demonstratie van verschillende toepassingen van computers in het onderwijs en voor velen van de aanwezigen was het een eerste kennismaking.
Juist de gevoelens en de reacties die een dergelijke confrontatie oproept zouden in dit verslag naar voren moeten komen. Maar die zijn de schrijver niet met zekerheid bekend. Hij was te druk met het starten van apparatuur en het verwisselen van overhead-transparanten. De demonstraties zijn bovendien moeilijk op papier te krijgen. Het komt overeen met het geven van een paar foto's, waar alleen een film de beweging tot zijn recht kan laten komen.
Tenslotte kan het beschrijven van de ontspannen sfeer in de zaal gemakkelijk de indruk geven dat er sprake was van een briljant redenaar. Het was daarentegen juist het publiek dat de voorstelling maakte: spontane opmerkingen uit de zaal op het juiste moment, welwillend stappen in uitgezette valkuiltjes en wat gespeelde verbazing als men er zelf weer uitgeklommen was.
Kortom, een aantal redenen waarom dit verslag beter niet geschreven had kunnen worden, vooral niet door de inleider. Toch verschijnt het nu op papier. Vat u het bij voorkeur op als eerbewijs aan het gemengd Vlaams-Nederlands gehoor, dat in het getal van rond de honderd in een te kleine zaal zijn vrije zaterdag opofferde.

Hulpmiddelen in het onderwijs

In de presentatie van deze morgen is de electronische rekenmachine ons getoond als hulpmiddel in ons onderwijs. Een van de vele hulpmiddelen, want we kennen er zoveel: cijferboekje, rekenliniaal, lesrooster, klaslokaal, schoolbibliotheek, krijt, schooladministratie, logaritmetafel, leerboeken, schooltelevisie, pen, papier, woordenboeken, schoolbord, schoolgebouw, enzovoort. In deze sfeer wordt de laatste jaren de computer ook veelvuldig genoemd. We realiseren ons dat soms plotseling bij het ontmoeten in sommige leerboeken van pagina's als in de figuren 1 en 2.



1



A simple program can be written to find many solutions of $2x + 3y + 4 = 0$. You need only to instruct the computer to find the value of $\frac{-2x - 4}{3}$ for each replacement of x from a given set of values and then to print each solution. Program 1 is designed to find a number of solutions of $2x + 3y + 4 = 0$. We have used $\{1, 3, 5, \ldots, 53\}$ as the replacement set for x.

Program 1

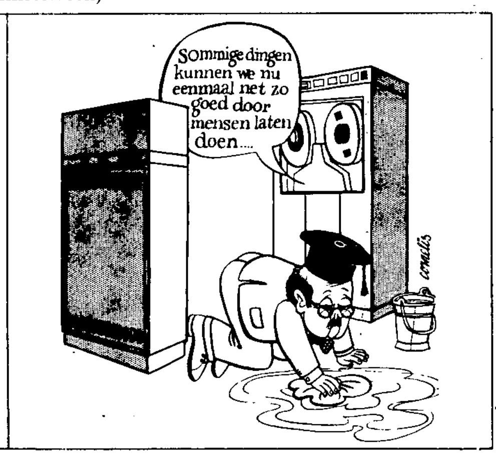
```
 5 PRINT "SOME SOLUTIONS OF 2 * X + 3 * Y + 4 = 0 ARE"
10 FOR X = 1 TO 53 STEP 2
20 LET Y = (-2 * X - 4)/3
30 PRINT "(" X "," Y ")";
40 NEXT X
99 END
```

Exercise

1 How many solutions will Program 1 find? Give the first four solutions.

2

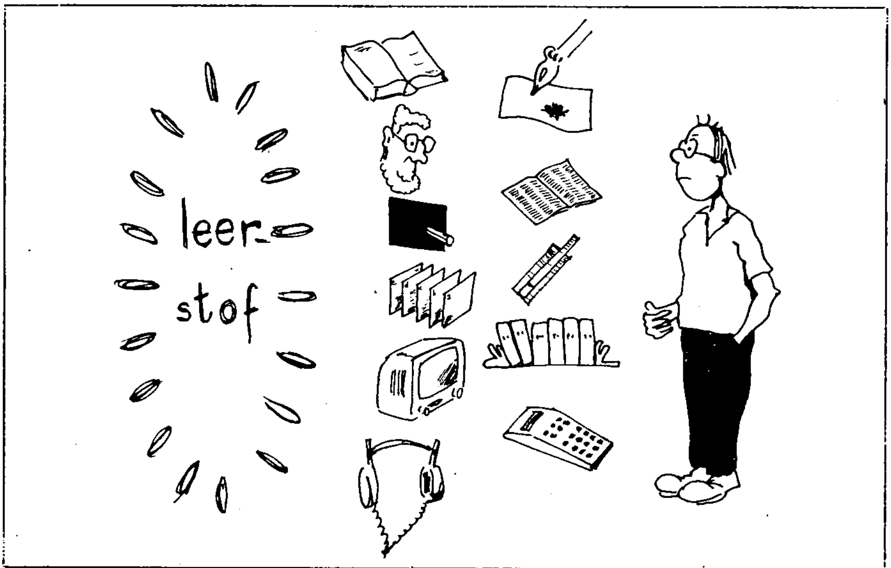
3



4

Spotprenten als de plaatjes 3 en 4 geven toch iets weer van de verborgen angst die ook leerlingen en leraren voelen als machines bepaalde taken gaan overnemen.

En over welke machines hebben we het? Miljoenen kostende en grote zalen vullende configuraties of mini-computers van rond de *f* 100.000?
Het voorvoegsel 'mini' wordt hierbij duidelijk anders bedoeld dan in de mini-programmering van de Vlaamse voordracht van vanmorgen. Hollanders zijn blijkbaar wat preutser.
Het valt buiten de orde van deze lezing om de verschillende soorten apparatuur hier te definiëren. Wel zal ik trachten het terrein van de onderwijshulpmiddelen te structureren, volgens de ideeën van de praxeologie van Kotarbinski, om daarna computertoepassingen en automatiseringsaspecten in deze structuur te plaatsen. We nemen de minst agressieve leerling van plaatje 3 en willen hem zekere parate kennis, vaardigheden, inzichten en gedragslijnen bijbrengen. Dit laatste samen te vatten in één woord 'leerstof'.

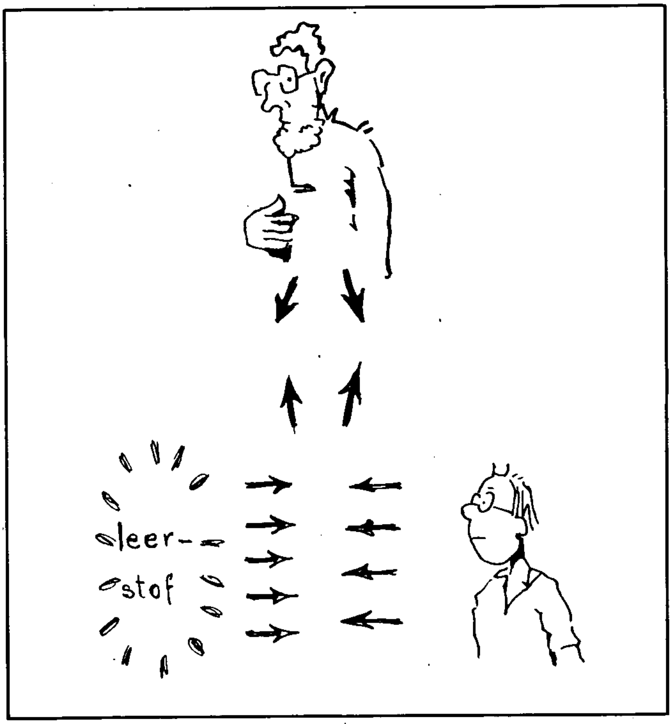


5

Er is in plaatje 5 geen poging gedaan om dit abstracte begrip te concretiseren, maar u kunt het zich wel voorstellen: de leerling en zijn leerstof. Maar moeilijker is het in te denken dat er iets gebeurt tussen die twee als er op het plaatje niet meer aanwezig was. Met andere woorden, een leerproces is slechts mogelijk als er hulpmiddelen zijn. Deze hulpmiddelen kan men onderscheiden in media door middel waarvan de leerstof zich 'vertoont' aan de leerling en de zaken die de leerling gebruikt om van zijn kant greep te krijgen op de leerstof of die greep te versterken. In de eerste categorie kunt u zich indenken: het leerboek, de leraar in de rol van overbrenger van leerstof, schoolbord en krijt, werkboeken, werkkaarten, schooltelevisie en talenpracticum. Van de tweede soort zijn hulpmiddelen als: pen en papier, logaritmetafel, rekenliniaal, woordenboeken en zakrekenmachine.

En hiermee komt, als alles goed gaat, het leerproces op gang. Het leerproces van de individuele leerling; het microniveau (plaatje 5).

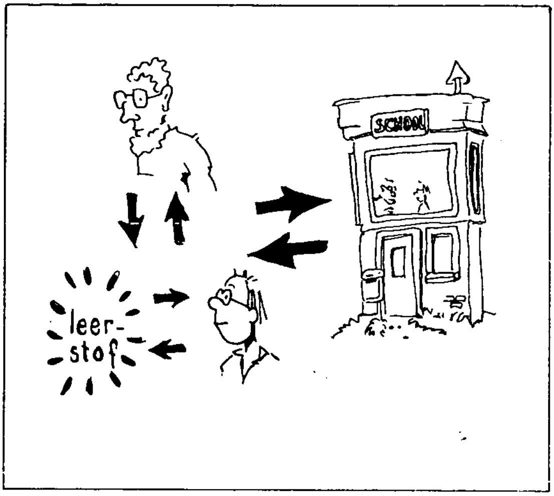
Het leerproces behoeft in het algemeen begeleiding. Hier treedt de leraar op in een andere rol: de bestuurder van enkele tientallen leerprocessen; het mesoniveau van de klas of de groep. Ook de interactie tussen leerprocessen en bestuurder zou slecht op gang komen als er geen hulpmiddelen waren. De leraar neemt schriftelijke of mondelinge vorderingentoetsen af. Hij noteert resultaten in een cijferboekje. Hij beschikt over aanwijzingen en materialen om geconstateerde gebreken van het proces op te heffen. Ook het leerproces, dat wil zeggen de leerling als bestuurder van zijn eigen leren, heeft hulpmiddelen als: zelfdiagnostische toetsen, aanwijzingen voor herhalingsstof, e.d. Plaatje 6 hoopt dit onderwijsproces symbolisch weer te geven.



6

De onderwijsprocessen die wij hier op het oog hebben komen tot stand binnen een onderwijsorganisatie. Voor het huidige betoog is het niet nodig om het begrip onderwijsorganisatie nader uit te splitsen. School, bevoegd gezag en ministerie van onderwijs beschouwen we nu maar als één laag: het macroniveau. Het onderwijsproces staan 'hulpmiddelen' ter beschikking om greep op de organisatie te te houden: verslaggeving, schriftelijk of mondeling, bijvoorbeeld in de leraarsvergadering, rapportcijfers, e.d. De onderwijsorganisatie heeft weer hulpmiddelen om het onderwijsproces te ondersteunen: lesrooster, groeps- of klasseindelingen, schoolwerkplan, lokalen en andere ruimten, salarissen, enzovoort (plaatje 7).

7



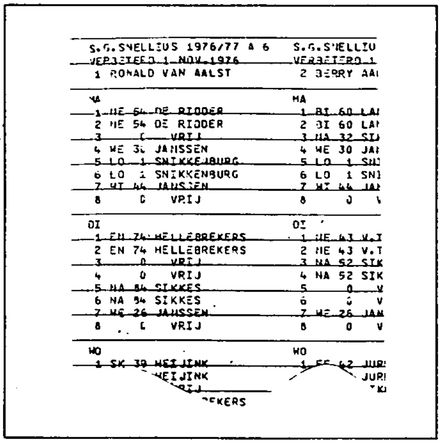
De bovengeschetste structuur zal niet een ieder treffen als het einde der wijsheid. Zo is het ook niet bedoeld. Door dit eenvoudige schema te hanteren bij ons onderzoek naar computers in het onderwijs, zal het gemakkelijker zijn verschillende toepassingen te onderscheiden en te plaatsen in het onderwijsgebeuren. Waar mogelijk zullen de voorbeelden gekozen worden uit het wiskunde-onderwijs, ten gerieve van de aanwezigen.

Computers in de onderwijsorganisatie

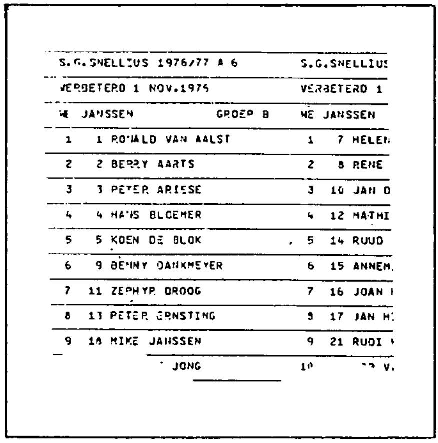
We lopen nog een keer door het schema, voor de verandering nu in omgekeerde richting; van onderwijsorganisatie naar leerling.
Geautomatiseerde salarisadministratie kennen wij als leraren al.
Verder zien velen van hen die kostbare zomerdagen besteden aan het opstellen van lesroosters uit naar de dag waarop computers dit werk op perfecte wijze kunnen overnemen. Die perfectie is helaas nog niet bereikt, maar de ontwikkelingen zijn hoopvol.
Wel al volledig ontwikkeld en op sommige scholen in gebruik, zijn programma's voor het samenstellen van leerlingengroepen, lessenclusters, zoeken van blokuren, reproduceren van rooster- of leerlinggegevens. In de volgende voorbeelden zien we achtereenvolgens: een persoonlijk lesrooster voor een leerling, een groepslijst voor het leervak wiskunde 1 (WE) en een opgave aan een basisschool van de resultaten na een jaar van de door die school geleverde leerlingen met het oorspronkelijke advies (hoeveel scholen van voortgezet onderwijs verlenen zo'n dienst?). (Plaatjes 8, 9 en 10.)

De computer en het onderwijsproces

Het besturen van leerprocessen kan ook, althans tot zekere hoogte, geautomati-

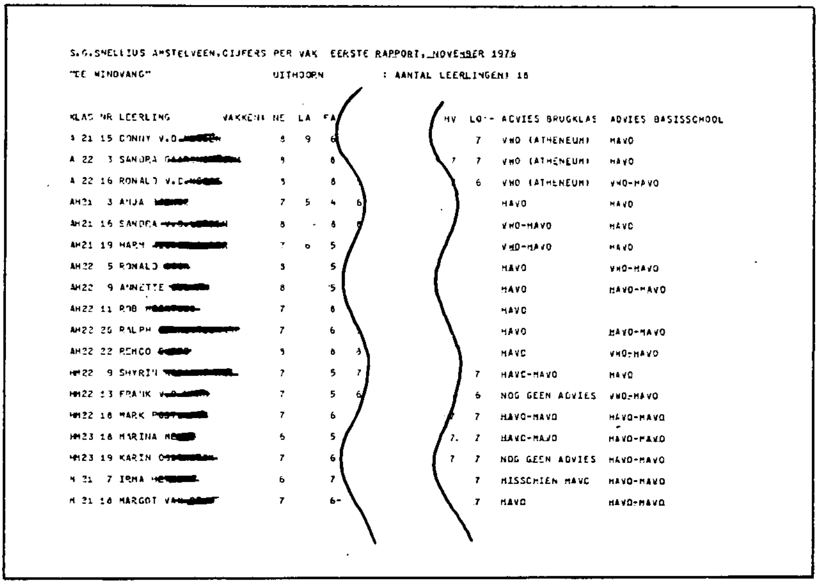


8



9

10

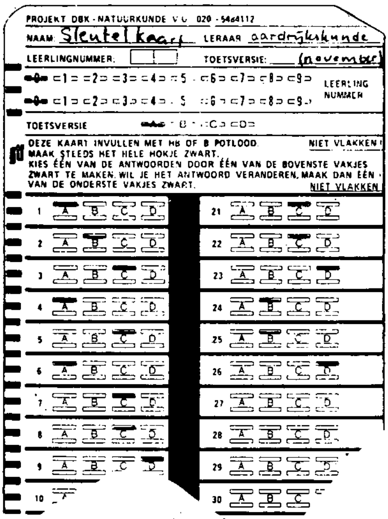


seerd worden. Tot nu toe blijkt dit alleen 'lonend' bij een groot aantal leerlingen met een grote overeenkomst in studiepakket. Bijvoorbeeld eerste- en tweede-jaars studenten van colleges en universiteiten in Noord Amerika. Men spreekt daar van Computer Managed Instruction (CMI) wat vertaald zou kunnen worden in 'computer gestuurd onderwijs'. Hierbij wordt de computer ingeschakeld voor

- selectie van het meest geschikte cursusprogramma
- meten van de voortgang van het leerproces
- selectie van herhalingsstof en extra oefeningen.

Als voorbeeld kan helaas hier slechts getoond worden het aspect van de vorderingen – vierkeuzentoets. U ziet een kaart waarop leerlingen per vraag hun keuze kunnen aangeven met nog de mogelijkheid een keer van gedachten te veranderen. Het computercentrum verwerkt deze kaarten en geeft

- opgave per leerling van resultaten (onjuiste antwoorden, versie-aanduiding en aantal juiste antwoorden)
- overzicht per klas van de antwoorden per vraag (item) en het percentage goede antwoorden
- overzicht per toets (mogelijk meer dan één klas) waarbij bovendien per item een aanduiding voor de discriminerende waarde: de mate waarin de resultaten van een item overeenkomen met die van de gehele toets
- een frequentieverdeling van de aantallen goede antwoorden.



11

Totaaloverzicht:

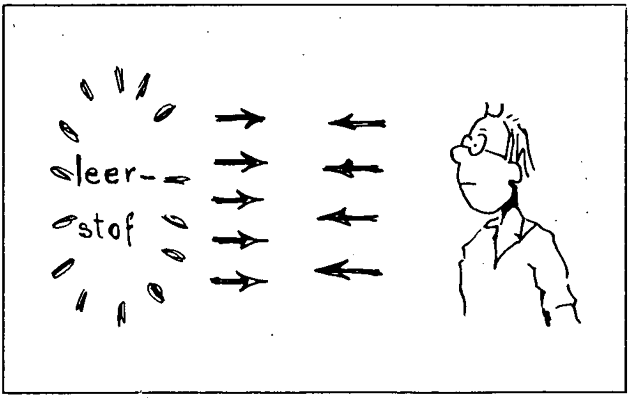
SPREIDING 3.27 GEM 19.41
AANTAL LEERLINGEN 237

CURSUSJAAR 1976/1977

ITEM	A	B	C	D	LEEG	P	D
1	152*	42	18	25	0	64.1	+.478
2	3	227*	3	4	0	95.8	+.315
3	7	0	228*	1	1	96.2	+.302
4	216*	2	4	15	0	91.1	+.289
5	34	14	169*	19	1	71.3	+.367
6	205*	2	8	22	0	86.5	+.329
7	2	10	220*	5	0	92.8	+.355
8	37	4	118*	78	0	49.8	+.283
9	45	3	66	120*	3	50.6	+.394
10	3	26	18	190*	0	80.2	+.350
11	13	125*	52	47	0	52.7	+.410
12	23	2	211*	1	0	89.0	+.246
13	2	1	232*	2	0	97.9	+.261
14	16	32	184*	5	0	77.6	+.402
15	15	179*	42	0	1	75.5	+.326
16							
17	32	7	6	190*	2	80.2	+.175
18	14	173*	39	10	1	73.0	+.216
19	30	2	6	199*	0	84.0	+.339
20	1[illegible]	212*	5	9	1		+.295
21		[illegible]	178*	18	0		[illegible].463
22			171*	24	[illegible]		[illegible]80
2[illegible]			53	122*			
			8	9			
				30			
				18[illegible]			

12

We zijn inmiddels weer afgedaald tot het microniveau van de leerling en zijn leerstof.



13

Computer en automatisering zullen in dit plaatje op drie plaatsen worden ingevuld:

– computer en automatisering als onderwerp van het leren
– computer als hulpmiddel van de leerstof
– computer als hulpmiddel voor de leerling.

De vierde mogelijkheid, 'de computer als leerling', laten we in dit verhaal buiten beschouwing. Aan de drie invullingen wijden we evenzovele paragrafen.

Computers als 'leerstof'

Eerst een voorbeeld om aan de hand daarvan enkele begrippen te kunnen toelichten. Een opgave uit het boek 'Computerkunde', Görts c.s.

> Iemand wil een uitkijktoren bouwen. Een liftenfabrikant raadt hem een bepaald type lift aan, met een kooi die 20 mensen kan bevatten. De snelheid is zo, dat bij de voorgenomen hoogte van de toren de lift per minuut precies één maal op èn neer kan. De vraag van de bouwer is nu hoe groot de bovenetage gebouwd moet worden. M.a.w. is er enig inzicht te krijgen in de aantallen kijkers boven in de toren bij een wisselende bezetting van de lift.
>
> Omdat de toren nog niet bestaat, kunnen we niet in de werkelijkheid gaan kijken. We simuleren nu de situatie met behulp van een computer, in de verwachting dat de lift bij elke op- of neergang een willekeurig aantal, maar niet meer dan twintig, personen bevat.

14

Leerlingen geven in eerste instantie een oplossing die er ongeveer als volgt uitziet:

```
START
boven      ⇐  0
tijd       ⇐  1 T.E.M. 60
op         ⇐  GOK (0,20)
neer       ⇐  GOK (0,20)
boven      ⇐  boven + op − neer
SCHRIJF    ⇐  tijd, op, neer, boven
HERHAAL
KLAAR
```

Het hier getoonde programmeertaaltje is niet helemaal de in werkelijkheid ge-

bruikte taal. Oninteressante details zijn weggelaten.
Variabelen zijn aangeduid met woorden in kleine letters.
Een hoofdletterwoord heeft een vaste betekenis die bekend is aan de automaat.
Voor degenen onder u die iets dergelijks voor het eerst onder ogen krijgen een korte verklaring. De variabele *boven* begint met de waarde nul, de variabele *tijd* doorloopt de gehele waarden 1, 2, . . ., 60. Voor elk van deze *tijd*stippen wordt het aantal *op*- en *neer*gaande mensen bepaald door een toevalsgetal (GOK) uit {0, 1, . . ., 20} en daaruit het aantal kijkers *boven*. Dit lijkt een redelijke weergave van de situatie totdat de leerling de resultaten ziet van zijn denkarbeid.

tyd	op	neer	boven
1	12	0	12
2	17	19	10
3	15	15	10
4	10	14	6
5	10	0	16
6	4	19	1
7	15	2	14
8	14	15	13
9	1	11	3
10	9	13	-1
11	19	17	1
12	20	3	18
13	16	9	25
14	17	16	26
15	3	19	10
16	8	20	-2
17	12	15	-5
18	6	5	-4

Natuurlijk bedoelt de leerling het niet zo en hij verbetert het programma bijvoorbeeld als volgt:

```
    START
    boven    ⇐  0
┌─► tijd     ⇐  1 T.E.M. 60
│   op       ⇐  GOK (0,20)
│   neer     ⇐  GOK (0,20)
│   boven    ⇐  boven + op − neer
│   ALS boven <0 DAN boven ⇐ 0
│   SCHRIJF  ⇐  tijd, op neer, boven
└── HERHAAL
    KLAAR
```

De toegevoegde regel zal ALS *boven* negatief mocht uitvallen daaraan de waarde 0 geven. Het resultaat is:

16

tyd	op	neer	boven
1	12	0	12
2	17	19	10
3	15	15	10
4	10	14	6
5	10	0	16
6	4	19	1
7	15	2	14
8	14	15	13
9	1	11	3
10	9	13	0
11	19	17	2
12	20	3	19
13	16	9	26
14	17	16	27
15	3	19	11
16	8	20	0
17	12	15	0
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1

Als onze opdrachtgever erg oplettend is, zal hij ontdekken dat de rekenkundige relatie tussen de kolommen niet meer klopt, bijvoorbeeld op tijdstip 10. Maar dat is gemakkelijk in orde te krijgen door bijvoorbeeld de kolom *neer* hier en daar aan te passen. Maar onze opdrachtgever kan meer fundamentele bezwaren aanvoeren. Ziet u het ook?
(Uit de zaal kwam al snel de oplossing:) Op tijdstip 2 gaan er 19 mensen naar naar beneden terwijl er even te voren maar 12 boven waren. Dat betekent dat er 7 bezoekers direkt na aankomst boven weer naar beneden zijn gegaan. (Uit de zaal: die waren in het verkeerde gebouw!; Ze hebben hun portemonnaies naar beneden laten vallen!) En dat geldt niet alleen voor tijdstip 2 maar voor vrijwel de totale lijst. En zoveel portemonnaies is wel erg onwaarschijnlijk. Ook leerlingen zien dit in en verbeteren het programma door nooit meer mensen naar beneden te laten dan er even te voren aanwezig waren.

. . . . .

op ⇇ GOK (0,20)

neer ⇇ GOK (0,20)

ALS *neer* > *boven* DAN *neer* ⇇ *boven*

boven ⇇ *boven* + *op* − *neer*

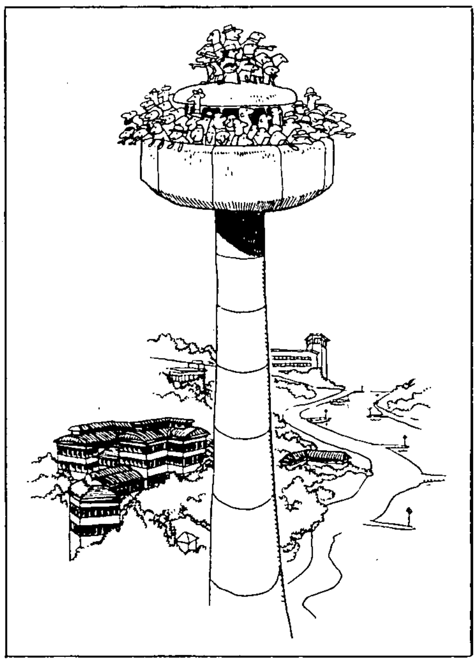
SCHRIJF ⇇ *tijd*, *op*, *neer*, *boven*

. . . . .

met als resultaat:

tyd	op	neer	boven
1	12	0	12
2	17	12	17
3	15	15	17
4	10	14	13
5	10	0	23
6	4	19	8
7	15	2	21
8	14	15	20
9	1	11	10
10	9	10	9
11	19	9	19
12	20	3	36
13	16	9	43
14	17	16	44
15	3	19	28
16	8	20	16
17	12	15	13
18	6	5	14

17



18

(© Wolters Noordhoff bv, Postbus 58, Groningen. ISBN 90 01 341527)

We zien nu dat het grootste aantal kijkers door deze ingrepen is gestegen van 26, naar 27, naar 44. Als de opdrachtgever op dit resultaat af gaat, en een toren bouwt voor zeg 50 bezoekers is het resultaat waarschijnlijk plaatje 18.
Ons programma mag dan de uitkijktoren simuleren, maar beslist niet voor een heldere zonnige tweede Pinksterdag. Effecten van het weer, of van reclame zijn

nog helemaal niet in de beschouwing betrokken. Bovendien komt het ook in de laatste oplossing nog voor dat bezoekers maar één minuut boven blijven. Dat is een onwaarschijnlijk kort bezoek. Dat komt omdat we alleen rekening hebben gehouden met het bevattingsvermogen van de lift en niet met de tijd die een bezoeker gemiddeld van het uitzicht wil genieten.

Het verschijnsel automatisering speelt een grote rol in onze maatschappij. Of wij daarvan nu voor- of tegenstander zijn, het is een noodzakelijk deel van de maatschappijvoorbereiding van onze leerlingen om enig gevoel op te doen voor een zo'n belangrijk verschijnsel. Brengen we de leerstof met de praktische aanpak die uit ons voorbeeld blijkt, dan is de vormende waarde nog veel groter.

Er ontstond een negatief aantal kijkers in de eerste oplossing.

De leerling reageert met: 'Dat bedoel ik natuurlijk niet'. Maar bij deze leerstof kan jij niet met een breedsprakig betoog verduidelijken of versluieren wat dan wèl de bedoeling was. Hij zal zijn gedachten moeten uitdrukken in ondubbelzinnige werkbare eenheden. Men spreekt wel van *operationele instelling*.

Het 60-maal achtereen uitvoeren van het afhandelen van op- en neergang van de lift is een kwestie van routine, maar het opstellen van zo'n oplossing allerminst. Het streven om routineaspecten te ontdekken en deze weer te geven in eenduidige voorschriften (algoritmen) noemen we een *algoritmische instelling*. Deze algoritmiek is waarschijnlijk de belangrijkste algemene vorming die van computerkunde uitgaat.

Het aanpakken van problemen zoals hier geschetst, taakverdeling onder leerlingen, afspraken onderling over de contactvlakken van de deeloplossingen, alle mogelijke gevallen onderscheiden en het kiezen van beschikbare middelen, dit alles kweekt *organisatievermogen* bij de leerlingen aan.

Uit het voorbeeld bleek ook hoe leerlingen in programma's een soort afbeelding van de werkelijkheid maken, een rekenkundige representatie die voor herhaalde verbetering vatbaar was, maar waarvan ook de beste versie nog resultaten opleverde die met veel voorzichtigheid naar de werkelijkheid terugvertaald moeten worden. Men spreekt van een *model* van de werkelijkheid.

De leerstof geeft algoritmisch inzicht en inzicht in het modelbegrip, kweekt organisatievermogen aan en stimuleert een operationele instelling.

(Naar aanleiding van opmerkingen uit de zaal:) De hier getoonde oplossingen van het torenprobleem zijn echt gecreëerd door 15-jarige leerlingen en niet door een leraar voorgeschoteld. Het is een genot om te zien hoe de resultaten verkregen door middel van de computer de kritische zin van jonge leerlingen tegenover hun eigen werk stimuleert.

De computer als hulpmiddel van de leerstof

In de groep van leerboek, schoolbord en krijt, schooltelevisie en talenprakticum, wordt ook de computer gebruikt als medium om leerstof toegankelijk te maken voor de leerling.

In het algemeen ziet men deze toepassing als
- vervangend klassikaal onderwijs
- inhaallessen voor leerlingen die afwezig zijn geweest

– herhalingsonderwijs voor leerlingen die de reeds behandelde stof zijn vergeten
– gedeeltelijk als toetsing.

Als Nederlandstalig voorbeeld uit het wiskunde-onderwijs heeft Professor dr. L. de Klerk van het Pedagogisch Instituut van de Rijksuniversiteit Leiden een werkstuk ter beschikking gesteld.

Het gaat hier uitdrukkelijk om door leraren geschreven ontwerp-lessen voor hun leerlingen van het lager technisch onderwijs. Dit voorbeeld van Computer Assisted Instruction (CAI) pretendeert dus zeker niet volmaakt te zijn maar geeft ons wel een aardige indruk van de toepassingsmogelijkheden.

```
Inleiding

Dit is je eerste les wiskunde.

Het onderwerp dat we behandelen is: ''origineel en beeld''.

Denk er om, dat je steeds goed leest wat er staat.
Kijk ook goed naar wat gevraagd wordt.
Vul antwoorden in achter de dubbelpunt.
Druk na het antwoord op de toets ''return''
     2      5
     7     10
     5      8
    11     ..
     4     ..
     6     ..
    10     ..
    ..     16
    ..     23
    ..      3
De getallen in de linker kolom noemen we het  o r i g i n e e l.
De getallen in de rechter kolom noemen we het  b e e l d.
Op de eerste regel is 2 het origineel en 5 het beeld.
Het beeld is hier dus 3 meer dan het origineel.

Dat is ook zo op de tweede regel.
Het beeld van 7 is 7+3 = 10.

Wat is het beeld van 5 op de derde regel?  :
(Het apparaat wacht nu totdat het antwoord
is ingetikt)                              8

Juist. Het beeld van 5 is 8.
```

19

Het televisiescherm houdt het bovenstaande beeld enkele seconden vast, waarna het wordt uitgewist. Een nieuw beeld verschijnt:

20

```
      2        5
      7       10
      5        8
     11       ..
      4       ..
      6       ..
     10       ..
     ..       16
     ..       23
     ..        3
Wat is het beeld van 11?  : 13

Fout. Het beeld is 3 meer, dus ...: 14

In orde.
Wat is het beeld van 4 ?  : 7

Goed gedaan.

Wat is het beeld van 6 in bovenstaand overzicht?  : 9

Dat is goed.
```

We slaan nu een stukje van de les over.

21

```
Het beeld is 3 meer.
Het origineel is dus 3 minder.
Onthoud dit goed.

Wat is het origineel van 16?  : 13

Juist.
      2        5
      7       10
      5        8
     11       ..
      4       ..
      6       ..
     10       ..
     ..       16
     ..       23
     ..        3
Wat is het origineel van 8?  : 11

Nee. Het beeld is 8. Het origineel is 3 minder.
Antwoord opnieuw.  : 3

Toe nou,  8-3 = 5.
Wat is het origineel van 23?  : 20

Juist.
Wat is het origineel van 3 op de laatste regel?  :1

Nee toch. Het origineel is 3 minder,
dus 3-3 =...  : O
(N.B. Dit is een hoofdletter O i.p.v. een nul)
Nee. De 0 zit op de bovenste rij van je toetsenbord.
```

Er volgt nu een gedeelte waarin de gegeven antwoorden met de juiste worden vergeleken. Er wordt een waardering voor het werk gegeven en bij een lage waardering moet de oefening worden herhaald. Dan volgt een toets.

```
Het is voldoende. Je krijgt de volgende oefening.
Hiernaast staan twee kolommen.               origineel   beeld
In de eerste kolom:de originelen,               8         15
in de tweede kolom: de beelden.                41         ...
Het beeld is telkens 7 groter dan              19         ...
het origineel.                                  8,5       ...
Vul de ontbrekende beelden en                  ...        67
originelen hieronder in achter                 ...        51
de dubbele punt.                               ...        26,5

Het beeld van 41 is          : 48

Het beeld van 19 is          : 25

Het beeld van 8,5 is         : 16,5

Het origineel van 67 is      : 60

Het origineel van 51 is      : 44

Het origineel van 26,5 is    : 20,5


Hieronder vind je in de eerste kolom de antwoorden die je zelf
hebt gegeven. Daarnaast staan de goede antwoorden op de vragen.

1.      48        48
2.      25        26
3.     16,5        15,5
4.      60        60
5.      44        44
6.     20,5      19,5
Het aantal fouten is     3

Het cijfer voor deze oefening is een   5
```

22

De computer als hulpmiddel voor de leerling

Twee voorbeelden van opgaven waarin computergebruik de leerling helpt bij het vinden van oplossingen.
Opgave.
In een klas blijkt 57% van de jongens en 41% van de meisjes een muziekinstrument te bespelen. Hoeveel procent van de leerlingen in die klas speelt muziek?
(Helaas kan de lezer nu niet gedwongen worden om het tijdschrift te sluiten en eerst eens zelf te worstelen met het vraagstuk, zoals de toehoorders in de zaal wel een denkpauze opgedrongen kregen.)
Wat betekent 57% van de jongens? Ja, 57 van de 100, maar een klas met 100 leerlingen hebben we niet. En de breuk $\frac{57}{100}$ is niet te vereenvoudigen tot een breuk met een kleinere noemer, dus kleinere klas. Wat nu? We realiseren ons dat de uitdrukking 57% wordt gebruikt voor elk getal uit [0,565 ; 0,575⟩. Het probleem is dus nu: welke breuken met noemers niet groter dan bijvoorbeeld 32 geven *na afronding* de waarde 57%. Een computer kan het vervelende zoekwerk voor ons verrichten volgens het volgende programma.

START
noemer ⇇ 1 T.E.M. 32
teller ⇇ 1 T.E.M. *noemer*
breuk ⇇ *teller*/*noemer*
ALS 0,565 ≦ *breuk* < 0,575 DAN SCHRIJF *teller*, *noemer*, *breuk*
HERHAAL
HERHAAL
KLAAR

Het resultaat ziet u, met het analogon voor 41%, in plaatje 23.

```
57 procent
 4/ 7 = 0.571428
 8/14 = 0.571428
12/21 = 0.571429
13/23 = 0.565217
16/28 = 0.571428
17/30 = 0.566667

41 procent
 7/17 = 0.411765
 9/22 = 0.409091
11/27 = 0.407407
12/29 = 0.413793
13/32 = 0.406250
```

23

Aangenomen dat de klas uit niet meer dan 32 leerlingen (van gemengde kunne) bestaat, komen we tot de volgende oplossingen.

$$\frac{4 + 7}{7 + 17} = \frac{11}{24} \approx 46\%$$

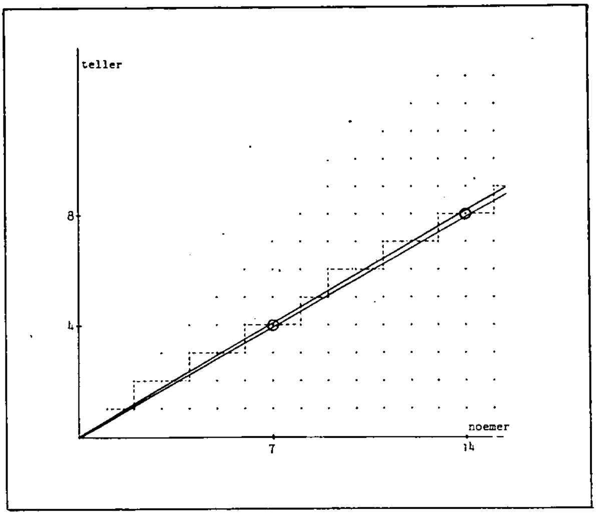
$$\frac{4 + 9}{7 + 22} = \frac{13}{29} \approx 45\%$$

$$\frac{8 + 7}{14 + 17} = \frac{15}{31} \approx 48\%$$

Enkele didactische aantekeningen in telegramstijl.

- Let u eens op de operatie met de breuken $\frac{4}{7}$ en $\frac{7}{17}$. Leuk tegenvoorbeeld van de normale optelling.
- Gelukkig zijn we zo langzamerhand de stijl ontgroeid waarin wiskundevraagstukken altijd precies één oplossing hebben.
- Hoeveel breuken worden er 'bekeken' in de algoritme van het laatste programma? Kan er een zuiniger algoritme ontworpen worden, d.w.z. een algoritme dat veel minder breuken berekent en vergelijkt met 57%?

Een antwoord op deze vragen kan bijvoorbeeld gevonden worden door de breuken af te beelden op het cartesisch vlak door $\frac{a}{b} \rightarrow (b, a)$ (figuur 24).



24

Gezocht worden alleen de roosterpunten in het vlakdeel $y \geq 0{,}565\ x \wedge y < 0{,}575\ x$ (voor 57%).

Een algoritme die niet alle punten van het octant bekijkt maar uitsluitend punten in de buurt van of in het vlakdeel (zie stippellijn) is bijvoorbeeld de volgende:

START
teller ⇄ *noemer* 1
3 *breuk* ⇄ *teller*/*noemer*
4 ALS 0,565 ≦ *breuk* < 0,575 DAN SCHRIJF ⇄ *teller*, *noemer*, *breuk*
5 ALS *breuk* < 0,565 DAN *teller* ⇄ *teller* + 1 ANDERS *noemer* ⇄ *noemer* + 1
6 ALS *noemer* ≦ 32 DAN NAAR 3
KLAAR

Deze algoritme is onjuist als we breuken met grotere noemers willen bekijken, ook als we regel 6 navenant wijzigen. Ziet u waarom?
Deze oplossing geeft overigens goede aansluitingen bij wiskundige onderwerpen als: richtingscoëfficiënt van een lijn, afbeeldingen, irrationale getallen, e.d.

Tweede opgave.

Bij een afvalcompetitie, die begonnen wordt met 47 ploegen, spelen in elke ronde zoveel mogelijk ploegen tegen elkaar.
Is het aantal ploegen oneven, dan wordt één ploeg uitgeloot die zondermeer naar de volgende ronde mag. Wie een wedstrijd verliest valt af en de winnaar gaat naar de volgende ronde. Zo blijft er tenslotte één winnaar over. Hoeveel wedstrijden

zijn er dan in het totaal gespeeld?

Oplossing

$$
\begin{array}{rl}
\underline{47} & \\
23 & \text{wedstr.} + 1 \text{ uitgeloot} \\
12 & \text{wedstr.} \\
6 & \text{wedstr.} \\
3 & \text{wedstr.} \\
1 & \text{wedstr.} + 1 \text{ uitgeloot} \\
1 & \text{wedstr.} \\
\hline
 & + \\
46 & \text{wedstrijden}
\end{array}
$$

(Er valt een stilte in de zaal, totdat iemand roept: Maar hoe is dat nu in het algemeen?) Hebt u een idee hoe dat is in het algemeen? Een leerling die gewend is over een computer te kunnen beschikken zal snel besluiten eerst een experiment op te zetten. Hierin wordt 47 vervangen door de variable *bap* (beginnend aantal ploegen), die bijvoorbeeld de gehele waarden 1 tot en met 50 doorloopt. We bepalen het totaal aantal wedstrijden (*taw*) voor elk van deze waarden. Het aantal wedstrijden van een zekere ronde (*awr*) wordt bepaald op de entier van het aantal overgebleven ploegen gedeeld door twee (*aop*/2). Het enige denkprobleem is: hoe bepalen we of er een ploeg is uitgeloot. Wij kijken nog even naar ons voorbeeld:

47
23 wedstr. 1 uitgeloot   24 overgebleven ploegen

Het aantal uitgelote ploegen kan bepaald worden op $47 - 2 \times 23$ ofwel $aop - 2 \times awr$. Het nieuwe aantal overblijvende ploegen op $awr + (aop - 2 \times awr) = aop - awr$.
Het programma kan dus als volgt luiden.

```
START
bap ⇇ 1 T.E.M. 50
aop ⇇ bap
taw ⇇ 0
5 ALS aop = 1 DAN NAAR 10
6 awr ⇇ ENTIER (aop/2)
7 taw ⇇ taw + awr
8 aop ⇇ aop − awr
9 NAAR 5
10 SCHRIJF bap, taw
HERHAAL
KLAAR
```

```
clubs  wedstrijden
    2   1
    3   2
    4   3
    5   4
    6   5
    7   6
    8   7
    9   8
   10   9
   11  10
   12  11
   13  12
   14  13
25 15  14
   16  15
   17  16
```

De leerling ontdekt aan de hand van de computerresultaten zijn stelling: bij n-ploegen zijn $n - 1$ wedstrijden nodig om op de voorgeschreven wijze een winnaar te krijgen.

Maar bewezen hebben we dat nog niet.

Ik wijs in dit verband nog even op regel 7 uit het programma *taw* ⇇ *taw* + *awr*.

Wat u kunt lezen als 'het nieuwe totaal aantal wedstrijden wordt gelijk genomen aan het totaal aantal wedstrijden dat we al hadden plus het aantal wedstrijden van deze ronde'.

In de wiskunde zijn we gewend om iets te noteren als:

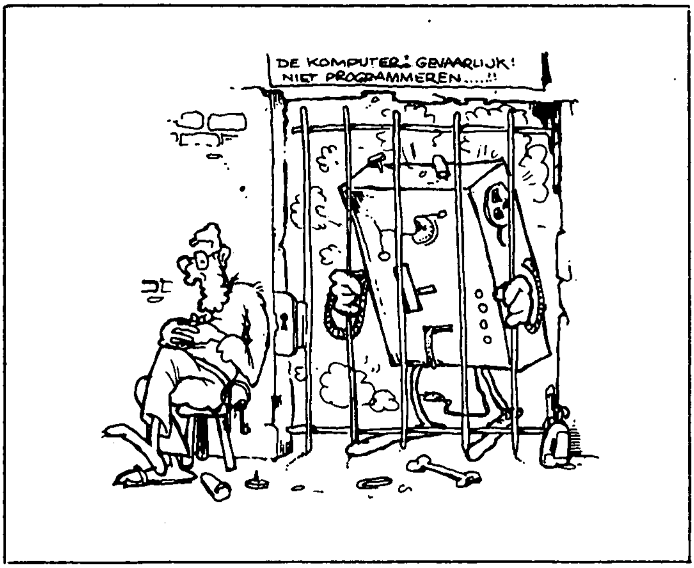
$$
\begin{array}{rrcl}
 & taw_{i+1} & = & taw_i + awr \\
\text{Evenzo} & aop_{i+1} & = & aop_i - awr \qquad \text{(regel 8)} \\
\hline
 & aop_{i+1} + taw_{i+1} & = & aop_i + taw_i
\end{array}
\; +
$$

Dus de som van het aantal overgebleven ploegen en het totaal aantal wedstrijden is constant. Vergelijken we de begin- en eindsituatie dan krijgen we $n + 0 = 1 + taw \Rightarrow taw = n - 1$.
Een leerling zal zich daarna misschien afvragen hoe het komt dat steeds het totaal aantal wedstrijden plus het aantal overgebleven ploegen gelijk is aan n. Totdat hij zich realiseert dat in iedere wedstrijd er één ploeg afvalt en dat het verschijnsel ook geformuleerd kan worden als 'aantal afgevallen ploegen + aantal overgebleven ploegen = beginnend aantal ploegen'. En dat is een trivialiteit. Ook de stelling is nu in één zin te bewijzen: om van n-ploegen 1 winnaar over te houden moeten er $n-1$ afvallen in $n-1$ wedstrijden.

Slot

Het is de bedoeling geweest van deze lezing om u kennis te laten maken met computergebruik in het onderwijs. Voorbeelden in een bepaalde structuur, maar zonder commentaar of aanbevelingen.
Het is de spreker niet altijd gelukt zijn enthousiasme te onderdrukken. Vooral hoopt hij in de laatste voorbeelden het 'wiskunde leren door wiskunde doen' een nieuwe dimensie te hebben gegeven: het experimentele aspect. Deze dynamische kant komt in ons onderwijs te weinig aan bod.
Dit is in de loop van de tijd zo gegroeid omdat het bijbehorende reken- en vaak ook tekenwerk te veel tijd vergde. Er is immers altijd dat eindexamen dat wacht. Nu hebben we de hulpmiddelen om onze leerlingen nog meer zelf wiskunde te laten ontdekken. Er is voor een leerling een grote stimulans in het zelf, aan de hand van resultaten, formuleren van stellingen om daarna in de bewijsvoering nog weer gesteund te worden door zijn experiment.
Natuurlijk schudt u de problemen die hiertoe aanleiding geven niet uit uw mouw, misschien omdat we in het wiskunde-onderwijs juist onze ogen voor deze mogelijkheden hebben leren sluiten.
Tot slot wenst uw inleider dat het laatste plaatje nu door u allen als volmaakt onjuist wordt ervaren: computers zijn niet gevaarlijk voor uw onderwijs, ze behoeven niet achter slot en grendel en de leraar slaapt niet, maar zijn interesse is gewekt voor zoveel mogelijkheden in zijn onderwijs.

26



(© Wim Stevenhagen, Vrijheidslaan 19 (IV-hoog), Amsterdam)

(Op vragen uit de zaal over realiseerbaarheid in het algemeen en leermiddelen in het bijzonder werd nogal uitvoerig ingegaan. Kortheidshalve verwijzen we hier naar het adres waár u dergelijke informatie kunt inwinnen:

Onderwijs Computercentrum van het IOWO,
Tiberdreef 4,
3561 GG Utrecht).

Over de auteur:

Guus Vonk vatte na zijn HBS-B examen in 1952 een architectuurstudie aan, maar schakelde over op wiskunde, ondermeer in 1961 resulterend in een MO-B akte.
Van 1958 tot 1972 leraar wiskunde in Den Haag.
Vanaf 1967 mederedakteur van Pythagoras, het jeugdtijdschrift voor wiskunde.
Vanaf de begin zestiger jaren gefascineerd door computers en automatisering en in 1967 een van de twee eersten die over dit onderwerp onderwezen in het voortgezet onderwijs.
Vanaf 1970 medewerker van de CMLW en later van het IOWO.
(Mede)auteur van een zestal boeken voor het onderwijs en sinds 1975 hoofd van het Onderwijs Computercentrum, de afdeling van het IOWO, die aan rond 6000 leerlingen in 160 scholen computerdiensten verleent, ondermeer met behulp van terminals.

Leerdoelgerichte toetsen wiskunde

GERT BAKKER en JOS VAN BERGEN

Voor de onderbouw van het gehele voortgezet onderwijs is het CITO gestart met een project dat tot doel heeft het ontwikkelen van leerdoelgerichte toetsen. Deze toetsen worden reeds ontwikkeld voor de vakken Nederlands, Engels, Frans, biologie, wiskunde en natuurkunde. Binnenkort hoopt men ook te beginnen met aardrijkskunde en Duits.
Leerdoelgerichte toetsen sluiten nauw aan bij de doelstellingen die impliciet of expliciet in de onderwijspraktijk worden nagestreefd. Deze leerdoelgerichte toetsseries kunnen derhalve beschouwd worden als hulpmiddelen om na te gaan in hoeverre nagestreefde doelen bereikt worden.
De op te nemen doelstellingen worden vastgesteld na grondige bestudering van de thans in de onderwijspraktijk nagestreefde doelstellingen en na adviezen te hebben ingewonnen bij ter zake kundige personen en instanties.
In deze leerdoelgerichte toetsseries worden zowel gemeenschappelijke, voor (praktisch) alle leerlingen geldende als differentiële, slechts voor een bepaalde (beperkte) groep leerlingen geldende doelen opgenomen.

Leerdoelgerichte toetsen zijn vooral bedoeld om aan docent en leerling tijdig informatie te verstrekken of bepaalde leerdoelen al dan niet bereikt zijn zodat – indien noodzakelijk – in een vroegtijdig stadium hulpmaatregelen genomen kunnen worden. Leerdoelgerichte toetsen zijn, in tegenstelling tot de traditionele toetsen, niet zozeer gericht op het differentiëren tussen leerlingen of het nemen van selectieve beslissingen over leerlingen.
Het doel van dit artikel is om informatie te geven over leerdoelgerichte toetsen wiskunde.

Leerdoelen

Doelstellingen die in het onderwijs worden nagestreefd kunnen beschreven worden in meer of minder abstracte uitspraken.
Een voorbeeld van een meer abstracte, algemene formulering is de volgende omschrijving van een algemeen doel van het wiskundeonderwijs: 'een logisch systeem van kwantitatieve aspecten en ruimtelijke structuren kunnen hanteren en formele operaties kunnen uitvoeren met kwantitatieve gegevens, ten dienste

van deelname aan het maatschappelijk verkeer en het technisch handelen'[1]).
Zo'n algemene doelstelling heeft een functie in zoverre ze een referentiekader vormt voor (de ontwikkeling van) leerplannen en het daarop aansluitende didactisch handelen.
Een dergelijke algemene doelstelling biedt echter geen eenduidig aanknopingspunt voor de opstelling van een konkreet leerplan, evaluatieinstrument of lesplan: men kan er veel kanten mee uit[2]).
Voor het construeren van toetsen hebben dergelijke algemene doelen slechts een beperkte waarde. Concrete doelstellingen oftewel 'leerdoelen' zijn hiervoor meer geschikt. Leerdoelen worden expliciet geformuleerd in termen van gewenst leerlingengedrag[3]).

Voorbeelden van dergelijke leerdoelen voor wiskunde:
- de leerling kan in een scherphoekige driehoek met behulp van zijn geodriehoek de hoogtelijnen tekenen;
- de leerling kan rationale getallen in volgorde van grootte plaatsen en tussen twee rationale getallen het teken $<$ of $>$ plaatsen zodat een juiste orde-relatie ontstaat;
- de leerling kan bij een eerstegraads functie* die door de pijltjesnotatie gegeven is bij elk origineel het beeld berekenen en bij elk beeld het origineel berekenen (*in $x \rightarrow ax + b$ moet $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{Z}$);
- de leerling kan bij gegeven waarden van de veranderlijken de waarde berekenen van tweetermen**, waarin ten hoogste 3 veranderlijken voorkomen. (**voorbeelden $2ab + b^2$, $ab - 2$, $a^2b - a^2c$).

De leerdoelen waarop de vragen in de toets gebaseerd worden zijn meestal geen einddoelstellingen van een bepaald leerjaar. Het zijn doelen die na een betrekkelijk korte periode (één of enkele lessen) door een leerling bereikt kunnen worden. De konsekwentie hiervan is dat voor een bepaald vak en leerjaar grotere aantallen leerdoelen – en daarbij behorend toetsmateriaal – geformuleerd resp. geconstrueerd moeten worden.
De docent kiest hieruit zelf het materiaal dat naar zijn mening het best past bij de door zijn leerlingen nagestreefde leerdoelen[4]).

[1]) Nederlands Genootschap tot opleiding van leraren in het beroepsonderwijs.
Opzet van een onderwijsleerplan voor gedifferentieerd onderwijs voor een aantal algemene vakken en de op het beroep gerichte vakken van de afdelingen mechanische techniek en bouwtechniek in het LBO Ede 1975, pag. 145.
[2]) Zie bijvoorbeeld E. de Corte, e.a., Beknopte didaxologie. Groningen 1974[3], pag. 38 e.v.
[3]) De Corte e.a. definiëren een leerdoelstelling als volgt: 'een waardevol en wenselijk geachte, realiseerbare, duurzame en in specifieke termen omschreven verandering in de gedragingen van de leerlingen, die hoofdzakelijk het resultaat is van het onderwijs in de school en waarvan verwacht wordt dat ze bijdraagt tot het realiseren bij deze leerlingen van de meer algemene onderwijsdoelen. De verandering kan zowel bestaan in het verwerven van nieuwe gedragingen als in het verbeteren van reeds aanwezige gedragingen.'
[4]) De leerdoelgerichte toetsen waarover het artikel handelt hebben betrekking op het cognitieve gebied (herinneren, kennen, weten en andere intellectuele processen). Met betrekking tot het affectieve gebied (plezier in wiskunde, angst voor wiskunde, interesse in wiskunde, enz.) wordt een literatuurstudie verricht. In het kader van deze voorstudie wordt tevens gewerkt aan de ontwikkeling van een toets op dit gebied.

Leerdoelgerichte toetsen

Bij leerdoelen, zoals hierboven genoemd, worden ongeveer 10 vragen geconstrueerd. Deze vragen moeten, zoals eerder vermeld, goed bij het leerdoel aansluiten. Elk moet een belangrijk aspect van het leerdoel vertegenwoordigen en met elkaar moeten ze een representatief geheel vormen.
Hier volgen een paar voorbeelden van leerdoelgerichte toetsen[5] (bij de leerdoelen zijn hier slechts twee of drie van de ongeveer tien items opgenomen):

De leerling kan machten van termen als 5^3, a^2, b^3, $2a$, $3c^2$, $5d^3e$, xyz herleiden.

$(3^3)^2 =$	$(abc)^3 =$	$(a^{\cdot\cdot})^4 = a^{64}$ Op de open plaats kan staan
A 3^5	A $3abc$	A 3
B 3^6	B abc^3	B 6
C 9^5	C $a^3b^3c^3$	C 16
D 9^6	D $3a^3b^3c^3$	D 60

De leerling kan de verdeeleigenschap (distributieve eigenschap) herkennen, in een produkt van een éénterm en een tweeterm de haakjes wegwerken en bij een tweeterm gemeenschappelijke factoren buiten haakjes halen.

$5 \cdot (a + 3) =$	$(2x + 3) \cdot 2 =$	$5pq - 2qr =$
A $5 \cdot a + 3$	A $4x + 5$	A $2q(3p - r)$
B $8 \cdot a$	B $4x + 6$	B $5q(p - 7r)$
C $5 \cdot a + 15$	C $2x + 6$	C $q(5p - 2r)$
D $15 \cdot a$	D $2x + 5$	D $q(4p - r)$

De leerling kan optellen en aftrekken in $\mathbb{Q}$.

$2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$	$-4\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$	$-2\frac{1}{3} - (-3\frac{2}{3}) =$
A $2\frac{4}{6}$	A $-4\frac{3}{4}$	
B $3\frac{1}{4}$	B $-4\frac{2}{6}$	
C $2\frac{1}{4}$	C $-4\frac{1}{6}$	
D $3\frac{4}{6}$	D $-4\frac{1}{4}$	

[5]) De opgenomen voorbeelden komen uit proeftoetsen die dit cursusjaar door het wiskundeconstructieteam ontwikkeld zijn. Het materiaal moet nog gepretest worden.

De leerling kan bij een gegeven origineel en beeld de translatievector $\binom{p}{q}$ geven; de leerling kan bij translatie over $\binom{p}{q}$ het beeld van een origineel vinden en ook het origineel van een beeld vinden. (p en q geheel)

Er is een translatie over $\binom{2}{-3}$ uitgevoerd.

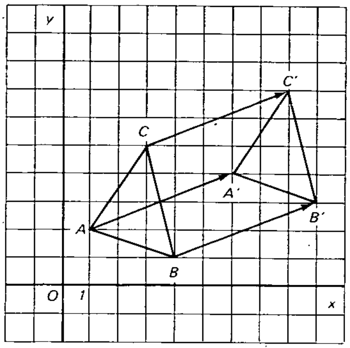
Het beeld van punt (3, 4) is

A (1, 7)
B (5, 1)
C (−1, −7)
D (5, 7)

Δ ABC is het origineel.
Δ $A'B'C'$ is het beeld.

Dit is de translatie over

A $\binom{2}{5}$
B $\binom{5}{2}$
C $\binom{-5}{2}$
D $\binom{-2}{5}$



Gebruiksmogelijkheden

Door z'n geringe omvang kan een leerdoelgerichte toets in veel gevallen in 10 à 15 minuten worden afgenomen.
Zo kan de leraar in betrekkelijk weinig tijd aan de weet komen welke leerlingen een leerdoel nog niet beheersen.
Ook kan de leraar als hij daar de voorkeur aan geeft een paar toetsen combineren. Met behulp van een overzicht van de score-resultaten krijgt hij inzicht welke fouten veel gemaakt zijn door een of meer leerlingen.
Zo'n score-overzicht, dat zowel informatie bevat over al dan niet beheersing als over de gemaakte fouten, kan er – in geval van vierkeuze-vragen – als volgt uitzien:

leerdoel	leerdoel 1						T	leerdoel 2							T	leerdoel 3						T
opgave nr.	1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12	13		14	15	16	17	18	19	
antw. sleutel	A	C	D	D	A	C		C	A	A	D	B	A	C		C	A	D	D	B	A	
Jan		B					5					D			6		D					5
Piet							6	B	B	D		A	D		2		B	A	B	A		2
Ellen							6								7						B	5
Sonja							6					D			6	A	B	C	A	C		1
Karel			A				5					D			6	B	B	B			C	2
Anja			C				5								7		D		A	C		3
Joop							6					D			6	D		A		C		3
fouten per opg.	–	1	2	–	–	–		1	1	1	–	5	1	–		3	5	4	3	4	2	

*T = aantal goede antwoorden per leerdoel.

In het overzicht zijn alleen de foute antwoorden aangegeven.
Wat betreft toets 1 kan geconstateerd worden dat elke leerling in de groep leerdoel 1 beheerst. (In dit voorbeeld is aangenomen dat een leerdoel beheerst wordt als minstens 80% van de opgaven goed gemaakt wordt.)

Bij toets 2 blijkt dat Piet leerdoel 2 niet beheerst; hij heeft op korte termijn op een of andere wijze extra hulp nodig. Opvallend is bij toets 2 dat item 11 bij veel leerlingen moeilijkheden oplevert. Gewenst is dat de leraar dit item eens grondig bestudeert en nagaat waardoor dit hoge aantal fouten veroorzaakt wordt (item te moeilijk, niet goed geformuleerd, geen aandacht aan besteed, . . .) en het in z'n klas bespreekt.
Toets 3 wordt door meer leerlingen slecht gemaakt. Hier is van belang dat de hele groep (eventueel minus Jan en Ellen) nogmaals tracht leerdoel 3 te bereiken. (Aannemend dat de docent dit leerdoel voldoende belangrijk vindt om door de gehele groep nagestreefd te worden.)
Wanneer bij één leerdoel twee parallelversies beschikbaar zijn, is het mogelijk om leerlingen die bij de eerste toetsafname het leerdoel nog niet bereikt hebben, na het doorwerken van steunstof de paralleltoets voor te leggen.
Voor de leraar kan een bij de toetsen ter beschikking gesteld overzicht van leergangen en leerdoelen een middel zijn om ideeën op te doen voor steunstof.
Zo'n overzicht kan er als volgt uitzien:

boek / leerdoel	MW	GR	S	AZ
leerd 11	dl II H12 § 1, 2, 3	dl I H5 § 1, 2, 3	dl I H5 § 5, 7	dl IB H38, 39
leerd 12	dl I H10 § 4	dl I H6 § 1, 4	dl I H5 § 12 H 10 § 8	dl IB H36, 39
leerd 13	dl I H 3 § 1, 2	dl I H7 § 1, 2		

Het overzicht wijst naar paragrafen in andere leergangen waar hetzelfde leerdoel behandeld wordt.
Naast gebruik van leerdoelgerichte toetsen in klassikaal onderwijs zijn er ook toepassingsmogelijkheden in meer individueel gericht onderwijs.

Samenvattend: de leerdoelgerichte toets is een instrument dat erop is gericht om in verschillende onderwijsleersituaties na te gaan welke leerlingen zich het leerdoel eigen gemaakt hebben.
Van de leerlingen die het leerdoel nog niet beheersen bezit de leraar, wanneer hij een score-overzicht maakt belangrijke informatie over de aard van de tekorten. Deze leerlingen kan hij, al naar gelang hun tekorten, op efficiënte wijze steun geven (het overzicht van leerboeken en leerdoelen kan hier bij een hulpmiddel zijn).

Toetsontwikkeling

De leerdoelgerichte toetsen worden ontwikkeld door een constructieteam van vijf wiskundeleraren, begeleid door een CITO-medewerker. Deze ontwikkeling wordt hier globaal door een aantal fasen aangegeven (in de praktijk lopen de eerste drie fasen wat door elkaar):

1 Het team selecteert een aantal leerdoelen. Hierbij wordt onder meer gebruik gemaakt van de gegevens van een door het CITO uitgevoerd onderzoek naar het gebruik van leerboeken[6]). Ook vindt overleg met externe deskundigen plaats. Na de keuze van leerdoelen wordt veel aandacht besteed aan een goede formulering hiervan.
2 Bij elk leerdoel worden door het constructieteam een aantal items geconstrueerd. Deze items moeten aan een aantal eisen voldoen, zoals relevantie, objectiviteit, specificiteit en efficiëntie[7]).
3 Uit deze items kiest het constructieteam in onderling overleg ongeveer 10 items die samen goed aansluiten bij het leerdoel.
4 De leerdoelgerichte toets wordt in enkele klassen (liefst van verschillende schooltypen) gepretest: de docent vult een enquêteformulier in, de leerlingen maken de opgaven.
5 De resultaten van de leerlingen en de meningen van de docenten stellen het constructieteam in staat om de leerdoelgerichte toetsen te verbeteren (formulering, lay-out, moeilijkheidsgraad, relevantie, etc.).
6 Nogmaals pretesten, enquêteren en verbeteren.
7 Samenstelling van definitieve(re) versies, die door de scholen voor het voortgezet onderwijs bij het CITO besteld kunnen worden.

Thans worden de leerdoelgerichte toetsen ontwikkeld voor het eerste leerjaar van het voortgezet onderwijs. Over enige tijd zal ook het tweede en derde leerjaar erbij betrokken worden. Gezien de grote diversiteit van leerdoelen in het LEAO, LHNO, LLO en LMO hebben de activiteiten van dit project zich voor wiskunde in de eerste plaats gericht op AVO en VWO en ook wel op LTO. Toch zijn er ook reeds een aantal toetsen ontwikkeld die bruikbaar lijken voor het huidige onderwijs op veel scholen voor LBO.
Voor het eerste leerjaar zullen ongeveer 40 tot 60 leerdoelgerichte toetsen ontwikkeld worden. Voor het tweede leerjaar en voor het derde leerjaar wordt gedacht aan eenzelfde aantal.
De tot nu toe ontwikkelde toetsen zijn in het algemeen te hanteren bij de meest gebruikte wiskundeboeken van AVO, VWO en incidenteel zijn de toetsen bruikbaar bij boeken die op LBO-scholen gebruikt worden. (Zie voor de meest gebruikte boeken het artikel 'leerboeken wiskunde in de brugklas in 1976/1977' dat onlangs in dit tijdschrift verscheen.)

De leerdoelgerichte toetsen sluiten aan bij het feitelijk gegeven onderwijs. Onderwijsveranderingen kunnen veroorzaken dat toetsen moeten worden herzien,

[6]) CITO-publikatie nr. 46: Inventarisatie van leerboeken. Verslag van een onderzoek naar het gebruik van leerboeken die gedurende het schooljaar 1976/1977 in de brugklas gebruikt worden.
Arnhem, 1976.
Het gedeelte van deze publikatie dat betrekking heeft op wiskunde leerboeken is samengevat in: G. Bakker, leerboeken wiskunde in de brugklas in 1976/1977.
Euclides jrg. 52, nr. 9, pag. 327.
[7]) A. D. de Groot, R. F. van Naerssen e.a., Studietoetsen construeren, afnemen, analyseren. Den Haag 1969[1], pag. 69–84, pag. 126 e.v.

moeten vervallen of dat geheel nieuwe toetsen ontwikkeld dienen te worden. Gehoopt wordt in de komende jaren een goed inzicht te krijgen in de eisen die aan leerdoelgerichte toetsen gesteld moeten worden evenals in de bruikbaarheid van deze voor Nederland nieuwe soort toetsen.

Over de auteurs:

Drs. G. Bakker (1945), Wis- en Natuurkunde te Utrecht (doctoraal studie wiskunde).
Was leraar wiskunde op een scholengemeenschap. Sinds 1975 werkzaam op het CITO te Arnhem bij de projecten leerdoelgerichte toetsen, onderwerptoetsen, vierkeuze-examens, begeleiding van examens in open-vraagvorm.

Drs. J. B. A. M. van Bergen (1939), Pedagogiekstudie te Nijmegen, (specialisatie onderzoeksmethoden).
Werkzaam geweest als medewerker aan het Instituut voor Onderwijskunde van de K.U. te Nijmegen en het Schoolpedagogisch Centrum 'Oostelijke Mijnstreek' c.a. te Heerlen.
Sinds 1976 verbonden aan het CITO als medewerker van het project leerdoelgerichte toetsen.
Publiceerde op het gebied van onderwijsevaluatie en studietoetsen (samen met M. J. M. Voeten en B. Th. Brus).

Korrel

Grafieken op het eindexamen

Met een examen wil je toetsen of je leerlingen sommige doelstellingen van het wiskunde-onderwijs bereikt hebben. Is het kunnen tekenen van de grafiek van een funktie een doelstelling? Het lijkt wel zo, want het wordt op het eindexamen gevraagd.
In deze redenering klopt iets niet. Het kan niet waar zijn dat doelstellingen van wiskunde-onderwijs bepaald worden door datgene wat op een examen gevraagd kan worden.
We moeten dus eerst eens analyseren waar grafieken voor dienen. Ik denk dat het is om eigenschappen van een funktie op het spoor te komen, die op een andere manier niet of veel lastiger te ontdekken zijn.
Door naar de grafiek te kijken (of naar punten van die grafiek) kan ik beslissingen nemen of vermoedens uiten over de funktie.
Het uiten van vermoedens of het nemen van beslissingen over de funktie op grond van het verloop van (delen van) de grafiek wordt op het eindexamen VWO en HAVO *niet* gevraagd. Op het MAVO-examen soms bij het meerkeuzegedeelte.
Wat wordt wel gevraagd?
De vraagstukken zijn steeds zo geconstrueerd, dat de leerling uit het funktievoorschrift allerlei eigenschappen van de funktie moet afleiden door berekeningen: nulwaarden, maxima en minima, stijgen en dalen, asymptoten, symmetrie, buigpunten, etc. Deze worden dan tenslotte vertaald in een grafiek en daarmee is de kous af. Uit de grafiek zelf behoeven geen conclusies getrokken te worden er behoeven geen vermoedens te worden geuit.
Daarmee is het kunnen tekenen van de grafiek gepromoveerd tot examendoel. Het kan echter geen doel van wiskunde-onderwijs zijn, want er wordt met de grafiek niets gedaan.
Wel mag je zeggen dat, om echt goed grafieken te leren lezen, je goed eigenschappen van de funktie moet kunnen vertalen in grafische beelden. Wat we op het examen dus vragen is een vaardigheid die helpen kan een bepaalde doelstelling te bereiken. Die doelstelling zelf toetsen we niet.
Waarom eigenlijk niet?

Joop van Dormolen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

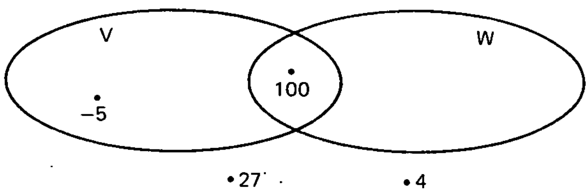
Op het 16e internationale jaarcongres van het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde te Lier (1977) heeft Burt Kaufman (U.S.A.) verslag uitgebracht van een spel dat hij met zijn leerlingen doet.
Gegeven zijn een verzameling gehele getallen (U)

45	7	0	1	18
20	6	10	40	2
8	12	−10	50	−1
−80	−100	5	105	9
−5	99	4	60	3
−55	27	100	−15	24

en een verzameling eigenschappen (E)

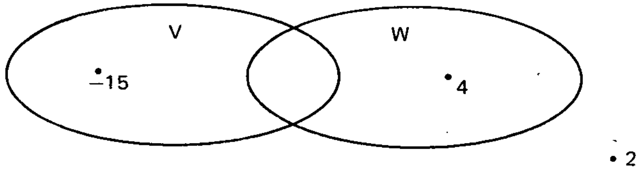
veelvoud van 2	kleiner dan 50
veelvoud van 3	groter dan −10
veelvoud van 4	kleiner dan −10
veelvoud van 5	positieve deler van 12
veelvoud van 10	positieve deler van 18
oneven	positieve deler van 20
positief priem	positieve deler van 24
groter dan 50	positieve deler van 27

De leraar tekent een venn-diagram op het bord:



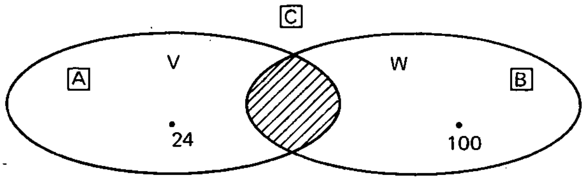
Hij neemt in gedachten voor V en W twee verzamelingen gehele getallen die door een van bovengenoemde eigenschappen gekarakteriseerd worden, bijv.
V = de verzameling van de veelvouden van 5
W = de verzameling van de gehele getallen groter dan 50.
Verder plaatst hij, om de start te versnellen, enkele getallen uit U op de juiste plaats in het venndiagram, zoals hierboven gedaan is.
(In afwijking van onze schoolgewoonten is met deelbaarheid hier deelbaarheid in $\mathbb{Z}$ bedoeld; −100 is dus een veelvoud van 10 en −15 is oneven.)
Twee leerlingen komen voor het bord. De een begint. Hij kiest een van de getallen uit U, bijv. 99. Hij zegt in welk deel van het venn-diagram dit getal volgens hem moet staan. Hij kiest: binnen W en buiten V. De leraar zegt dat dit goed is. De leerling mag nu nog eens kiezen. Zodra hij een foute keus doet, mag de ander doorgaan. Bovendien heeft ieder het recht om, nadat zijn antwoord goed of fout bevonden is, te zeggen welke verzamelingen V en W voorstellen. Degeen die dit goed zegt, heeft gewonnen.
Een interessant spel, dat geschikt is voor een laatste les voor de vakantie (of zelfs voor een normale les), mits aangepast aan onze situatie, dus met uitsluitend positieve gehele getallen.
Het spel geeft aanleiding tot allerlei opgaven. Hier volgen er een viertal.

381. Op het bord staat



Degeen die aan de beurt is, kan nu het spel winnen. Hoe?

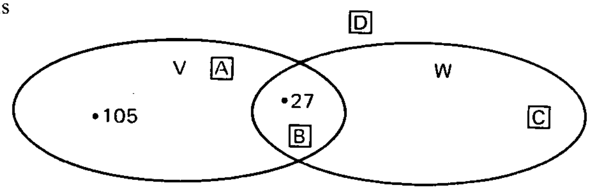
382. Gegeven is



Het gearceerde deel is leeg.
Zet achter elk van de volgende uitspraken een w als de uitspraak waar is, een o als de uitspraak onwaar is, en een vraagteken als men niet kan beslissen of de uitspraak waar of onwaar is.

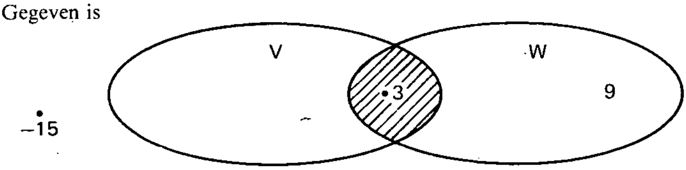
60 bevindt zich in A
6 bevindt zich in A
60 bevindt zich in B
−100 bevindt zich in B
12 bevindt zich in C
0 bevindt zich in C
20 bevindt zich in A
20 bevindt zich in B
1 bevindt zich in A
27 bevindt zich in B

383. Gegeven is



Wat is het kleinste aantal keuzen dat men doen moet om in elk geval vast te leggen wat V en W voorstellen?

384. Gegeven is



De arcering betekent dat 3 het enige element van dit deel is. Wat stellen V en W voor?

Oplossingen

379. A zet zijn koning op veld (1, 1) van een schaakbord, B op veld (8, 8). Om beurten mogen zij hun koning één veld verzetten. A mag zijn koning verzetten naar rechts, naar boven, naar rechts boven; B naar links, naar beneden, naar links beneden. Men mag zijn koning niet zo verzetten dat hij voor de ander onbereikbaar wordt. Wie de vijandelijke koning slaat, is winnaar. A begint. Wie wint bij optimale strategie?
A zet zijn koning op veld (2, 2). Wat B doet, is irrelevant.
A houdt zich aan de volgende regel:
staat de koning van B op veld (r, s), dan zet A zijn koning op een veld (p, q) waarvoor geldt: $r - p$ is even en $s - q$ is even.
A zal dan winnen.

380. Het schaakbord is driedimensionaal met afmetingen a, b, c. De afmetingen zijn priemgetallen. A zet zijn koning in cel (1, 1, 1), B in cel (a, b, c). De regels zijn analoog. A begint en wint bij optimale strategie in minimaal 22 en maximaal 33 zetten. Hoeveel cellen bevat het schaakbord?
Onderstel dat a, b en c alle drie oneven zijn. Dan zijn $a - 1$, $b - 1$ en $c - 1$ alle drie even. Doordat A begint, zal bij optimale strategie B winnen (vgl. de oplossing van de vorige opgave). Minstens één van de drie afmetingen is dus gelijk aan 2. Het is niet mogelijk dat meer dan één afmeting gelijk aan 2 is, want dan komen we in strijd met het gegeven dat de winst behaald wordt in minimaal 22 en maximaal 33 zetten.
Onderstel $c = 2$. A zet dan zijn koning in cel (1, 1, 2). Nu speelt het zetten zich verder af in de bovenste laag.
Als B zijn koning steeds parallel met een ribbe van het schaakbord verzet, dan zijn nog $\frac{1}{2}(a - 1 + b - 1)$ zetten nodig voor A om de koning van B te slaan.
Als B zijn koning zo vaak mogelijk in schuine richting verzet, dan is dit aantal $\frac{1}{2}(a - 1)$, als $a \geqslant b$.
Dus:
$1 + \frac{1}{2}(a - 1 + b - 1) = 33$
$1 + \frac{1}{2}(a - 1) = 22$
Waaruit volgt $a = 43$ en $b = 23$.
Het aantal cellen van het schaakbord bedraagt dus $2 \cdot 23 \cdot 43 = 1978$. Waarmee ik u een goed jaar toewens.
Mijn puzzelvriend Kootstra heeft mij een groot aantal opgaven doen toekomen, waarin het getal 1978 een rol speelde, veel meer dan ik heb kunnen opnemen. In één van zijn brieven schreef hij nieuwsgierig te zijn, wanneer ik er ook eens een zou bedenken. Die uitdaging heb ik natuurlijk moeten aannemen. Maar ik zou hem toch wel willen doorspelen aan de lezers van deze rubriek. Ik ben op mijn beurt nieuwsgierig wie de lezers van Euclides een gelukkig 1979 zal toewensen. U heeft de tijd. Graag krijg ik uw goede wensen.

Ad **372** en **373**. Deze beide fascinerende opgaven uit het nieuwe tijdschrift Pentamino hebben op velen inspirerend gewerkt. Ik heb dan ook veel brieven ontvangen. Inmiddels is me gebleken dat nog nooit iemand deze opgaven opgelost heeft.
Er werd gevraagd een natuurlijk getal van drie cijfers te nemen, de cijfervolgorde om te keren en het nieuwe getal op te tellen bij het oorspronkelijke, totdat een getal ontstaat met symmetrische cijferopeenvolging. Soms wordt noeste vlijt bekroond, zoals bij het getal 187, dat na 23 stappen 8813200023188 oplevert.

De getallen die totnogtoe verstek laten gaan, zijn:
196 en 691, 295 en 592, 394 en 493, 790 en 79, die twee aan twee als som 887 geven. Verder 887 en 788, 689 en 986, met als som 1675. En 879 en 978 met als som 1857. Vandaar dat het proces voortgezet is met 1675 en 1857. Na 585 resp. 416 stappen is nog steeds geen resultaat verkregen. De uitkomsten hadden toen al 254 resp. 184 cijfers.
Verdere literatuur: Martin Gardner, Scientific American, augustus 1970.
Het tweede probleem berustte op iteratie van de functie f, gedefinieerd door $f(2n) = n, f(2n + 1) = 3n + 1$. Dit probleem is afkomstig van Lothar Collatt die het vermoeden heeft uitgesproken dat $\forall n \exists k : f^k(n) = 1$, een vermoeden dat nimmer bewaarheid of weerlegd is.

Literatuur:
J. H. Conway, Unpredictable Iterations, Proceedings of the 1972 numbertheoretic conference, University of Colorado, Boulder, Colorado, August 14-18, 1972, pp. 49-52;
C. J. Everett, Iteration of the number-theoretic function $f(2n) = 2n, f(2n + 1) = 3n + 1$, Advances in Mathematics, *25*, 1977, pp. 42-45.
Everett bewijst dat voor asymptotisch 100% van alle natuurlijke getallen geldt, dat er een k bestaat waarvoor $f^k(m) < m$. Dat is wel een stap in de goede richting, maar het impliceert nog niet eens dat voor asymptotisch 100% van de natuurlijke getallen geldt: $\exists k : f^k(m) = 1$.
Veel dank aan H. W. Lenstra Sr. en Jr. die me bovenstaande gegevens verschaften.
Ten slotte heeft A. K. Lenstra, eveneens een zoon van ons oud-bestuurslid, de computer ingeschakeld om te onderzoeken of de functie f geïtereerd op den duur 1 levert. Hij heeft de getallen 1 tot en met 9600 onderzocht. Alle gaven ten slotte 1. Het hardnekkigst was 6171, dat 261 stappen nodig had om 1 te geven.

Boekbespreking

D. Dumke en H-J. Jürgen, *Der Mentor im Schulpraktikum*, 200 blz., 1977; Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Dit boekje verschaft ons uitvoerige documentatie over de praktijk-opleiding van aanstaande onderwijzers in Neder-Saksen. In het bijzonder worden we daarbij ingelicht over de scholing en de nascholing van de mentoren, dat zijn de leerkrachten die de praktijkstages van de studenten begeleiden. Naast de mentoren en de studenten komt dan de taak van de tutoren, dat zijn de academische docenten die bij de beroepsopleiding van de studenten zijn betrokken, ter sprake.
Het boekje geeft veel historische bijzonderheden over de Studientage van de laatste zeven jaar en bespreekt 'Die Stellung des groszen Realschulpraktikums im erziehungswissenschaftlichen Studiengang an der Pädagogischen Hochschule Niedersachsen'. De leesbaarheid van het boekje wordt bevorderd door het opnemen van les-analyses, die vergezeld gaan van woordelijke verslagen van het frontaal gegeven onderwijs. Hiertoe behoort het verslag van een les gegeven in het zevende schooljaar over procentrekenen. De plaats van dit onderwerp in een longitudonaal leerplan komt daarbij niet uit de verf, terwijl de nabeschouwingen aan diepgang zouden hebben gewonnen als naast enige dozijnen didactische vragen die er worden gesteld, meer acceptabele antwoorden zouden zijn opgenomen.
Het boekje is als nr 27 verschenen in de reeks 'Ergebnisse aus der Arbeit der Niedersächsischen Lehrerfortbildung.'

Joh. H. Wansink.

Wolf Deicke u.a., *Richtig oder falsch? Materialen für die Sekundarstufe*, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover Dortmund Darmstadt Berlin 1976, 100 blz.

De ondertitel van het boekje luidt: Philosophische Fragen zur Logik. Officieel hoort het boek dus thuis in de rubriek filosofie. Omdat het thema echter nauw contact met de wiskunde heeft, lijkt me een bespreking in Euclides verantwoord.
Door middel van een serie teksten van verschillende auteurs wordt de betekenis van de logica uiteengezet. Na de teksten volgen series vragen die betrekking hebben op de inhoud en de verwerking ervan.
Eerst wordt de methode van de tweewaardige propositielogica verklaard door middel van een

tekst van Frege. Men krijgt inzicht in het gebruik van waarheidstabellen. Een tekst van Steiner dient om te demonstreren hoe de propisitielogica axiomatisch gefundeerd en ontwikkeld kan worden.
Een viertal teksten van Waismann, Wittgenstein, Hempel en Kamlah dienen om het typische van de begripsvorming in en buiten de wiskunde te verduidelijken.
Teksten van Russell en Carnap en een tekst over Wittgenstein laten zien wat het wezenlijke van de logica is. In een tekst van Deicke wordt de dialogische methode uiteengezet. Dit is een soort aanval- en verdedigingsspel om de juistheid van uitspraken uit de propositielogica na te gaan. De methode heeft ruimere toepassingsmogelijkheden. Ze doet denken aan de semantische tableaus van onze landgenoot Beth. Ten slotte heeft een tekst van Ryle als functie het onderscheid tussen formele en informele logica te verklaren. Anders gezegd: het verschil tussen het gebruik van logische connectieven in deductieve systemen en daarbuiten.
Uit didactisch oogpunt is het boek zeer interessant. De leerling wordt verplicht in een voor hem moeilijke materie te duiken. De vragen helpen hem daarbij. M.i. kan deze methode alleen vruchtbaar zijn bij groepswerk, waarbij dan nog klassikale nabespreking nodig is. Het resultaat zal ook dan nog niet zijn, dat de leerling de materie beheerst, maar dat kan ook niet geëist worden. Het grote voordeel is, dat de leerling geen pasklare resultaten voorgeschoteld krijgt, maar dat hij zelf moeizaam inzichten moet veroveren. Hij wordt als het ware in het water gegooid en moet zich zwemmend zien te redden. De teksten dienen dan wel zo gekozen te zijn, dat hij een redelijke kans heeft om niet te verdrinken. Volgens mij zijn de teksten uitstekend gekozen met uitzondering van het drietal waarin het wezenlijke van de logica behandeld wordt (Russell, Carnap, Wittgenstein). Deze zijn te moeilijk. Wie de teksten doordacht heeft is een heel eind verder gekomen in de richting van het hebben van logisch inzicht.
Het is de moeite waard kennis te nemen van dit staaltje van moderne didactiek.

P. G. J. Vredenduin

Prof. Dr. Gerhard Holland, *Geometrie für Lehrer und Studenten*, Band 2, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, Dortmund, Darmstadt, Berlin, 1977, 177 blz., DM 9,90.

Dit deel, op dezelfde leest geschoeid als deel 1, (zie de bespreking in nummer 1 van jaargang 52) is een onmiddellijk vervolg op deel 1. De hoofdstukken zijn dan ook doorgenummerd.
Korte bespreking van de inhoud:
hoofdstuk 8: vectorruimte van de verschuivingen; een nauwkeurige inleiding tot de lineaire vectorruimte, t/m inwendig produkt, met meetkundige toepassingen, w.o. de stelling van Thales en van Pythagoras.
hoofdstuk 9: hoekfuncties; goniometrische functies worden ingevoerd als coördinaten van een vector op orthonormale basis. Bij de bespreking van deze functies bespeuren we naar mijn smaak enige oneffenheden, waar de schrijver stelt:

$$`1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{', also } 180^\circ = \pi\text{' en '}\frac{180^\circ}{\pi} = 1\text{, also } 1 \approx 57{,}3^\circ\text{ '}$$

Het ware beter geweest duidelijk te stellen,dat het hier om een afbeelding handelt van graden naar radialen naar $\mathbb{R}$. Aardig is het stukje, waarin aangetoond wordt, dat de verzameling functies van de vorm $x \to a \sin(x + u)$ een lineaire ruimte vormt isomorf met de lineaire vectorruimte. In het stukje trigonometrie komen de sinus- en de cosinusregel ter sprake.
hoofdstuk 10: groep van de gelijkvormigheidsafbeeldingen.
hoofdstuk 11: groep van de affiene afbeeldingen.
Twee hoofdstukken, die van groot belang zijn voor een juist inzicht in het wezen van de meetkunde.Heel nauwkeurig wordt de groepsstructuur bestudeerd in beide gevallen, hetgeen aanleiding geeft tot zuiver meetkundige beschouwingen speciaal wat betreft het gesloten zijn der verzamelingen.
hoofdstuk 12: oppervlaktemeting, een gedegen inleiding tot oppervlaktemeting d.m.v. de verdeling van een figuur. Bij het invoeren van een oppervlaktefunctie kan de schrijver m.i. de

'maat' beter weglaten en deze functies definiëren naar $\mathbb{R}$. Uitspraken als 'Für alle x, y $\in \mathbb{R}_0^+$: x cm · y cm = (x · y)cm^2' worden dan vermeden.
Over het geheel genomen maakt het boek een gedegen en goede indruk. Speciaal gezien de hoofdstukken 10 en 11 wens ik het boek in handen van al diegenen, die studeren voor een bevoegdheid van de tweede graad. Een gedegen kennis van de achtergronden van de schoolmeetkunde is immers onontbeerlijk.
De opzet van het boek is uitstekend. De uiteenzettingen zijn helder. Na ieder gedeelte volgen enige didaktische opmerkingen en een stukje, waarin de leerdoelen worden aangegeven. De tekeningen zijn zeer goed verzorgd.

W. Kleijne

Erich Martensen, *Analysis I*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, Hochschultaschenbücher, Band 832.
W. Poguntke, R. Wille, *Testfragen zur Analysis I*, idem, Band 781.

Het leerboekje geeft een vrij elementaire inleiding tot de 'Grundlagen der Infinitesimalrechnung für Mathematiker, Physiker, Ingenieure.' Hierbij wordt in kort bestek iets gedaan aan een vrij uitgebreid stofgebied:
getallenrijen en limieten, functies en limieten, reeksen en convergentiecriteria, enige vectorrekening, determinanten, complexe getallen, enige topologische opmerkingen over begrensde en compacte verzamelingen, iets over waarschijnlijkheidsrekening. Dit alles in 192 pagina's. Daar bovendien niets gezegd wordt over differentiaal- en integraalrekening is het begrijpelijk, dat e.e.a. niet diep graaft.
Het opgavenboekje geeft vele opgaven over gebieden die in het leerboekje niet behandeld zijn. Al met al een vrij teleurstellend geheel, waaraan we in Nederland totaal geen behoefte hebben.

W. Kleijne

Romulus Cristescu, *Ordered Vector Spaces and Linear Operators*, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, Engeland, 1976, 339 blz., £14,85.

Dit boek geeft een goed overzicht van hedendaagse onderzoekingen over de theorie van de geordende verzamelingen, elementaire theorie van topologische vectorruimten, vectorlattice, reguliere en (o)-continue operatoren, topologisch geordende vectorruimten, vectorintegralen, toepassingen.
Enige bibliografische aantekeningen, uitvoerige literatuurverwijzingen (21 blz.) en een zaakregister besluiten het boek.
Op een voortreffelijke wijze wordt vrij veel stof met een behoorlijke diepgang gepresenteerd. De uitvoering van het werk is goed.

W. Kleijne

Mededelingen

Examenbesprekingen VWO, HAVO, MAVO en LBO

De jaarlijkse bijeenkomsten waarop de wiskunde-examens besproken worden blijken door veel leden op prijs gesteld te worden. In het bijzonder de regionale besprekingen voor de MAVO-examens. Ook de leraren bij het VWO blijken belangstelling te hebben voor een regionale bijeenkomst vlak na het examen.
Het bestuur heeft daarom voor 1978 de volgende regionale bijeenkomsten vastgesteld:
MAVO-3/LTO op vrijdag 26 mei;
MAVO-4 op vrijdag 2 juni;
HAVO en wiskunde I op maandag 29 mei.

Alle bijeenkomsten beginnen om 4 uur en duren tot ongeveer 6 uur. In het aprilnummer hopen we een lijst met adressen bekend te maken, waar de besprekingen gehouden zullen worden.
Voor wiskunde II is er één centrale bijeenkomst gepland op vrijdag 2 juni om half acht.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren.

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brengt ter kennis van belanghebbenden, dat bij de staatsexamens wiskunde m.o. A volgens het nieuwe programma het volgende van toepassing is:

a bij het schriftelijk examen is het gebruik van 'rekentuig' in de vorm van een zakrekenmachine of rekenliniaal toegestaan. Met nadruk wordt erop gewezen dat het tijdens het examen niet mogelijk is elektronische apparatuur op te laden.

b bij het examen waarschijnlijkheidsrekening en statistiek zullen de benodigde tabellen ter beschikking van de kandidaten worden gesteld.

c de examencommissie geeft geen voorschriften voor het gebruik van symbolen bij het onderdeel waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, maar zal er zorg voor dragen dat er over de symbolen die in de opgaven voorkomen, geen misverstand kan bestaan.

Namens de minister, A. Th. Eijsenring

Grafentheorie als keuzeonderwerp bij wiskunde II

Naar aanleiding van een lerarencursus Grafentheorie van het Mathematisch Centrum te Amsterdam zijn degenen die de cursus geleid hebben en een aantal deelnemers begonnen een boekje over grafentheorie samen te stellen dat gebruikt zou kunnen worden bij het wiskundeonderricht in het voortgezet onderwijs.
In de eerste plaats is dit boekje opgezet als een soort syllabus voor grafentheorie als keuze-onderwerp bij wiskunde II.
In de tweede plaats zou het boekje gezien de opzet ook dienst kunnen doen bij het onderwijs van die wiskundeleraren die hun leerlingen (of sommige van hun leerlingen) behalve met de voorgeschreven stof ook nog met enkele aardige onderwerpjes uit de grafentheorie willen laten kennismaken.
Het is de bedoeling dat de experimentele vorm van dit boekje gereed is vóór het begin van de cursus 1978/1979 en dat het dan voor eventuele gebruikers beschikbaar is als een uitgave van het Mathematisch Centrum te Amsterdam.
Diegenen die in de cursus 1978/1979 bij wijze van experiment grafentheorie als keuze-onderwerp voor wiskunde II op het programma willen zetten of zij die anderzins belangstelling hebben, kunnen zich voor verdere inlichtingen wenden tot de heer A. Schrijver of de heer M. Best, Mathematisch Centrum, 2de Boerhaavestraat 49 te Amsterdam, tel. (020)-94 72 72, toestel 74 of 77.

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

Gert Bakker en Jos van Bergen, Cito, Oeverstraat 65, Arnhem.

Joop van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest.

Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.

Guus Vonk, Wagnerlaan 18, Naarden.