

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 32,—. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Anticiperen op de behandeling van x^*)

(x is een variabele over een gegeven verzameling leerstofdoelen)

J. VAN DORMOLEN en M. KINDT

De aanleiding tot dit artikel is de regelmatig gehoorde klacht over overlading van het programma Wiskunde I, die op de jaarvergadering van 1976 zelfs leidde tot een voorstel er bij de inspectie op aan te dringen de differentiaalvergelijkingen (althans voorlopig) niet te examineren.

We willen hier niet proberen die overlading weg te praten als die er is. Waar het ons nu om gaat, is de stelling, dat de tijd die het kost om een bepaald leerprogramma te doorlopen niet alléén afhangt van de hoeveelheid leerstof of de intellectuele capaciteiten van de leerlingen. Het is mogelijk tijdswinst te krijgen door verstandige onderwijskundige maatregelen. In vele gevallen eist dat nogal wat voorbereidingstijd van de leraar en ervaring met andere werkvormen, dan men gewend is. Dit artikel gaat echter over een maatregel die nog wel wat voorbereidingstijd vergt, maar geen problemen behoeft te geven met het organiseren van andere werkvormen, het verzinnen van motiverende projecten (eventueel in samenwerking met leraren van andere vakken) of het compleet overnieuw schrijven van het gebruikte leerboek.

We willen die maatregel noemen: het *anticiperen*.

Verderop in dit artikel zal dat in verband met bovenvermeld voorstel worden toegespitst op het onderwerp differentiaalvergelijkingen. We zullen nu eerst een paar voorbeelden geven om duidelijk te maken wat we met anticiperen bedoelen en om aannemelijk te maken, dat anticiperen mogelijk is op vrijwel elk onderwerp uit het leerplan (vandaar de titel van dit stuk).

Ontbinding in factoren

In de meeste gevallen wordt het ontbinden van veeltermen in factoren voorafgegaan door een hoofdstuk over het zgn. herleiden (wegwerken van haakjes). Welnu, als men al direct bij het begin van het oefenen met opgaven als:

$$\text{Herleid: } (a+3)(a-5)$$

*) Dit is een bewerking van een gezamenlijke voordracht door de schrijvers op een ledenvergadering van de Ned. Ver. v. Wiskundeleraren in januari 1977 te Utrecht.

opgaven geeft als:

Vul de open plaatsen in: $(b + \dots)(b + \dots) = b^2 + 9b + 18$

dan anticipeert men op het ontbinden in factoren.

Dit soort variaties moeten dan niet incidenteel voorkomen, maar regelmatig en goed gemengd met standaard oefensommetjes.

Desgewenst kan men gebruik maken van schema's als:

$\bullet$	a	-5
a	a^2	$-5a$
3	$3a$	-15

en

$\bullet$	b	$?$
b	b^2	$9b$
$?$	samen	18

Ongelijkheden

Bij het oplossen van ongelijkheden zijn er (minstens) twee problemen:

- *Leerlingen moeten leren begrijpen, dat het er bij ongelijkheden om gaat de getallen te vinden, die de ongelijkheid waar maken. Dat wil zeggen: de getallen, die ingevuld voor de variabele(n), de ongelijkheid doen overgaan in een ware uitspraak.*

Voor dat probleem zijn sommetjes als

$$x+1 < 4 \ (x \in \mathbb{N})$$

$$x + 34 < 67 \quad (x \in \mathbb{N})$$

$$x^3 - x - 3 > 0 \ (x \in \mathbb{Z})$$

allemaal even geschikt.

- *Leerlingen moeten voor het oplossen van eerstegraadsongelijkheden een algoritme leren; ook voor het oplossen van tweedegraadsongelijkheden en soms ook voor hogeregraadsongelijkheden.*

Nu is voor het eerste probleem het eerste sommetje best een goed sommetje. Het nadeel ervan is echter, dat het te eenvoudig is. Dit is niet paradoxaal. De getallen zijn zo gekozen, dat menige leerling de oplossing ziet zonder te hoeven rekenen. Dat is op zichzelf niet erg, maar het is daarom ongeschikt om een algoritme te leren: het tweede probleem. Daarvoor is het tweede sommetje veel geschikter: om het antwoord te weten te komen moet de leerling iets doen. Op welke manier hij het vraagstuk aanpakt is hier minder belangrijk. (Dat kan door de wisselgeldmethode: tel bij 34 eerst eenheden tot je 7 als eenheid krijgt en tel dan tientallen er bij. Het kan ook zijn dat de leerling ontdekt dat je de getallen van elkaar kan aftrekken.) Hoofdzaak is dat hij een strategietje moet bedenken, zodat met de tweede opgave geanticipeerd wordt op het leren van een algoritme voor het oplossen van ongelijkheden.

Hetzelfde geldt trouwens voor

$$2x > 9 (x \in \mathbb{Q})$$

$$\text{resp. } 23x > 184 (x \in \mathbb{Q})$$

In het eerste geval kun je de oplossing direct zien zonder bewust na te denken; in het tweede geval moet je een strategie bedenken, al was het maar een probeerstrategie.

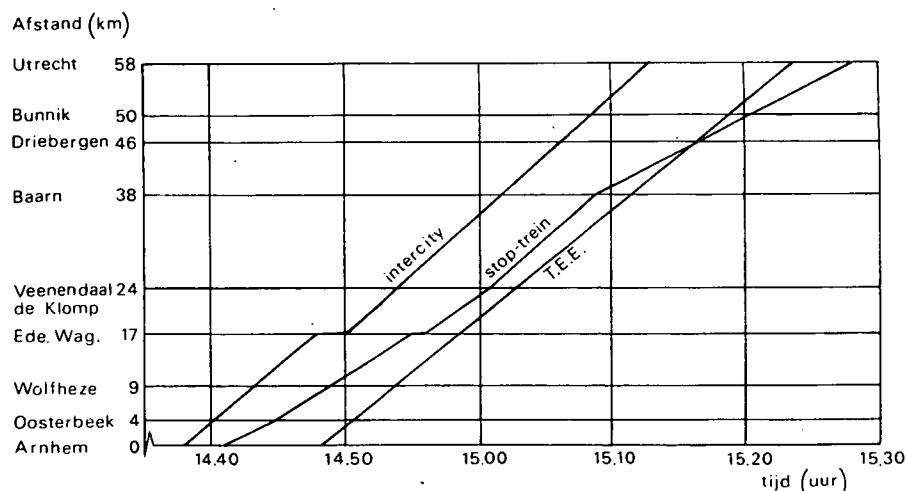
Aanzet tot differentiaalrekening

Voordat we toekomen aan het derde, wat verder uitgewerkte voorbeeld van anticiperen (op differentiaalvergelijkingen) willen we hier een paar opmerkingen kwijt met betrekking tot het aanvangsonderwijs in de analyse.

Het IOWO heeft in zijn leerstofpakketjes laten zien dat het goed mogelijk is om bij allerlei hoofdstukken uit de huidige schoolwiskunde een aangrijpingspunt te vinden in het dagelijks leven. Voor het onderwerp differentiaal- en integraalrekening ligt er zo'n niet-wiskundige context voor het oprapen. De leerlingen kennen intuïtief de begrippen *snelheid* en *versnelling*. En zoals deze begrippen historisch gezien aanleiding hebben gegeven tot het ontwikkelen van de differentiaalrekening, zo lijkt het ons zonneklaar dat ze niet gemist kunnen worden bij de aanzet van de analyse op school (zoals die volgens het leerplan in VWO 4 dient plaats te hebben).

Hier volgen een paar suggesties voor zo'n aanzet.

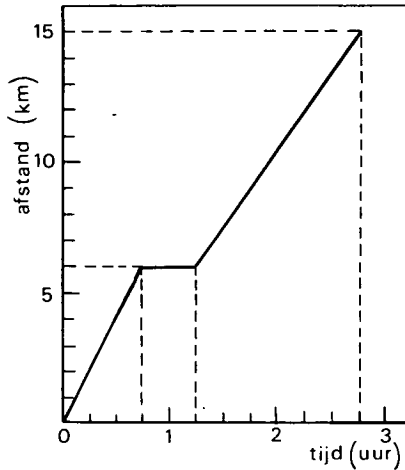
- 1 Blader met uw leerlingen in het spoorboekje en laat hen eens een paar treinferafieken maken.



Vragen die hierbij zouden kunnen worden gesteld:

- Rijdt de stoptrein overall langzamer dan de Intercity en de TEE? Hoe zie je dat in de grafiek?
- Maak een tijd-snelheid-grafiek voor elk van de drie treinen met behulp van deze gegevens.
- Veronderstel dat de Intercity 5 minuten te laat uit Arnhem vertrekt. Heeft dat consequenties voor de andere treinen?
- In de grafieken is geen rekening gehouden met afremmen en optrekken van treinen. Hoe zou je dat wel kunnen doen?
- ...

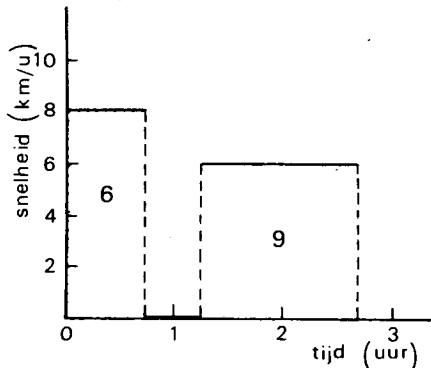
2 Mocht u enige moeite hebben met de hoekigheid van de treingrafieken, dan is hier een simpeler voorbeeld.



De grafiek illustreert de mars van een peloton infanteristen. Die mannen zijn goed gedrild en lopen werkelijk met constante snelheid. Na een mars van drie kwartier met geforceerd hoge loopsnelheid (zgn. speed-mars) staan ze op commando erg abrupt stil; een half uur later komen ze op commando abrupt weer op snelheid.

Vragen:

- Maak een tijd-snelheids-grafiek van deze mars.



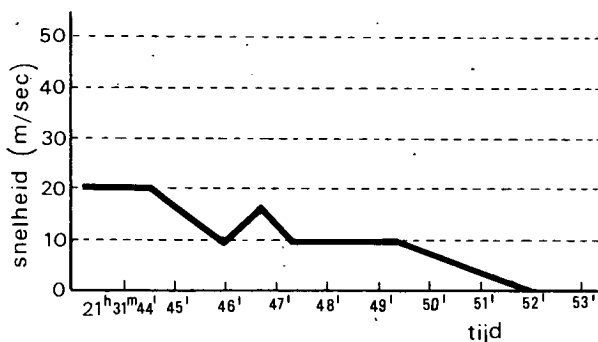
- Hoe kan uit de tijd-snelheids-grafiek de afgelegde weg worden teruggevonden? (Anticiperen op het verband tussen integraal en oppervlakte!)

Natuurlijk beantwoordt ook hier het gekozen wiskundige model niet helemaal aan de realiteit. Hoe goed ons peloton de bevelen ook opvolgt, de snelheid kan niet discontinu veranderen. Wie hier zwaar aan tilt kan natuurlijk best al in dit stadium iets dieper op deze zaak ingaan: hoe zien de hoeken er uit als we de gekozen eenheden $100 \times$ zo groot maken?

En zo kan men tal van voorbeelden bedenken. Hierbij hoeft men zich niet te beperken tot eenparige bewegingen.

De grafiek van een autorit in Amsterdam (spitsuur) heeft een grillig verloop. Aardig is het om op de verticale as de stand van een km-teller uit te zetten, die bij achteruitrijden terugloopt, zodat het idee van negatieve snelheid kan worden meegenomen. Ook de begrippen versnelling en vertraging (als negatieve versnelling) kunnen in deze beginfase worden aangeroerd:

- 3 De politie vindt deze automatisch geregistreerde snelheidsgrafiek in de kabine van de verongelukte vrachtwagen. Een nader onderzoek naar het verloop van het laatste deel van de rit lijkt gewenst.



We zouden niet graag zien dat men zich bij deze voorbeelden liet verleiden tot een strikt natuurkundig taalgebruik. Vooral de zgn. A-leerlingen (alfa's) zouden hierdoor wel eens kunnen worden afgeschrikt en juist zij hebben dit soort inleidende problemen het hardst nodig!

Het belang van dit soort voorbeelden is tweëerlei:

- a De operatie differentiëren vindt plaats in een context en wordt als het ware grafisch uitgevoerd (in ieder geval zonder limietbeschouwingen of formule-apparaat). Deze fase wordt o.i. ten onrechte vaak verwaarloosd bij de ontwikkeling van het begrip.
- b De voorbeelden kunnen later bij uitbreiding van de theorie weer worden opgeroepen om nieuwe zaken te verduidelijken.

We geven nog zo'n voorbeeld: twee race-auto's die het circuit met dezelfde snelheid rondrazen dus onderling steeds dezelfde afstand bewaren, illustreren de stelling dat functies met dezelfde afgeleide (op een interval) een constante verschillen (op dat interval.)

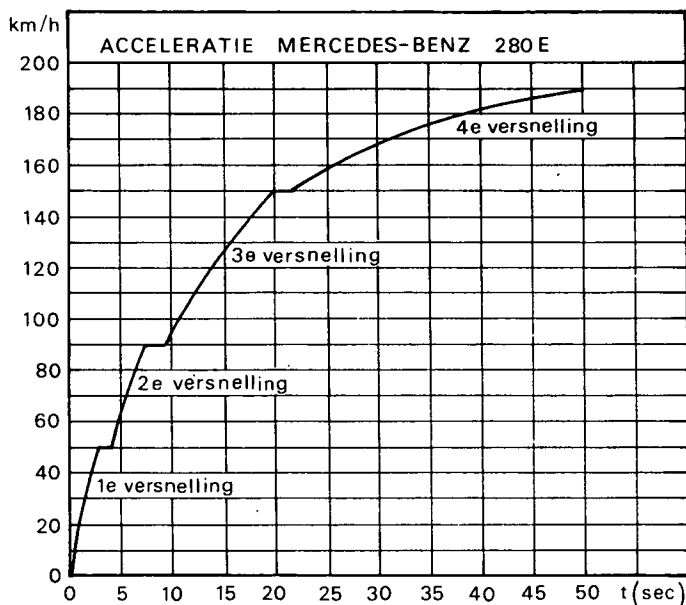
Differentiaalvergelijkingen

Het is gebleken bijzonder zinvol te zijn om al bij het begin van de differentiaalrekening leerlingen te laten zoeken naar primitieve functies, zonder dat het nodig is dat dat woord al gebruikt wordt.

Nog voordat leerlingen algoritmen kennen om afgeleiden te berekenen (en dus aangewezen zijn op de definitie van afgeleide) kan men al vragen naar een oorspronkelijke functie. Tenslotte is integreren niets anders dan verstandig raden en waarom zou men daar al niet vroeg mee beginnen.

In de krant vonden we een advertentie waarin de dynamiek van Mercedes wordt opgehemeld.

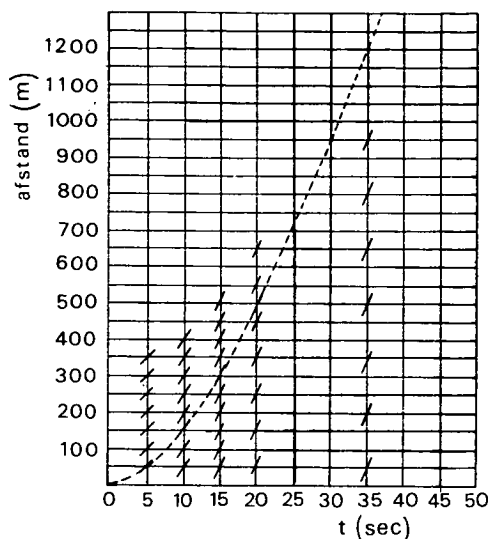
Ter illustratie van de veilige inhaalreserve was deze grafiek afgedrukt:



Probleem: kan de tijd-afstand-grafiek van een optrekkende Mercedes-Benz hieruit worden afgeleid?

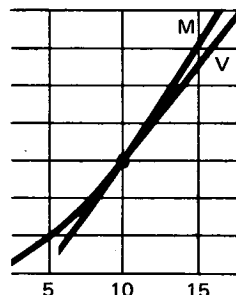
Na bijv. 20 sec is de snelheid ongeveer 40 m/sec en met dit gegeven kunnen we een aantal lijnelementen in de punten van de lijn $t = 20$ tekenen. Zo voortgaande komen we tot een stukje van het lijnelementenveld (zie figuur).

Uitgaande van $s(0) = 0$ kunnen we de tijd-afstand-grafiek aardig goed schetsen



Nu kan ook het begrip inhaalreserve ter discussie worden gebracht en grafisch worden geïnterpreteerd.

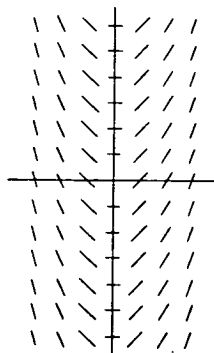
Voorbeeld: Tien seconden na zijn start passeert de Mercedes een 90 km/u rijdende vrachtauto. Hoeveel seconden heeft de Mercedes nodig om een voorsprong van 25 m te nemen? En hoe zit dat bij hogere snelheden?



De tijd is nu rijp voor een meer wiskundige aanpak.

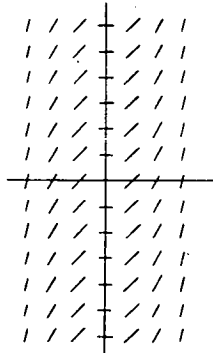
$$s'(t) = t$$

Gevraagd s



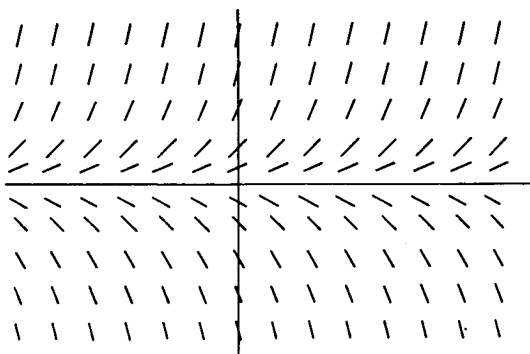
$$f'(x) = x^2$$

Gevraagd f .



De lijnelementen geven een globaal beeld van de grafieken van de oplossingsfuncties. De regels voor het differentiëren bevestigen dit beeld.

Aardig is het ook om in dit prille stadium (we denken nog steeds aan 4 VWO) het probleem: „van welke f geldt: $f' = f$?” te bekijken. Via het lijnelementenveld komen de leerlingen wellicht op het idee dat de oplossingsfuncties exponentieel zijn.



Als er later algoritmen geleerd zijn (kettingregel!) kunnen meer van dit soort oefeningen ingeschakeld worden.

Bijv.: $f \cdot f' = 1$, $f' = f^2$, enz.

Dergelijke problemen kunnen eventueel meetkundig of natuurkundig worden ingekleed en zijn goede verwerkingsopdrachten bij de kettingregel. Natuurlijk moeten de lijnelementen niet uit het oog worden verloren.

Voorbeeld van zo'n ingeklede opgave:

Een boot nadert met een snelheid van 9 m/sec de kust.

Op een gegeven moment worden de motoren afgezet.

Na t seconden is de snelheid $v(t)$ m/sec; de vertraging op dat moment is $2 \cdot \sqrt{v(t)}$ m/sec².

a Druk $v(t)$ uit in t .

b Hoeveel meter drijft de boot uit?

Later, bij de behandeling van exponentiële en logaritmische functies, wordt het pas echt leuk. Nu kunnen differentiaalvergelijkingen van het type $f' = c \cdot f$ gemakkelijk worden opgelost en . . . gepresenteerd in de context van bekende toepassingen: groei van een bacteriekolonie, radio-actief verval, afkoelingswet van Newton, enz.

Als men dan tenslotte aan het hoofdstuk Differentiaalvergelijkingen toe is, valt er begripmatig niet zoveel op te bouwen. Begrippen als lijnelementenveld en oplossingsfunctie zijn er al helemaal. Rest nog het werken met differentialen. Overigens: als men zich in de schoolwiskunde zou beperken tot functie-oplossingen van differentiaalvergelijkingen, dan zouden de differentialen heel goed gemist kunnen worden. Hetgeen misschien niet onverstandig zou zijn.

Samenvatting

Samenvattend zouden we anticiperen op een later komend begrip willen omschrijven als:

- vroegtijdig en waar mogelijk in de begripsvorming van voorafgaande leerstofonderdelen al oefeningen opgeven waarin, eventueel op een laag niveau, het later te leren begrip al verstopt zit.

Behalve de voorbereiding op het latere begrip heeft deze werkwijze nog het voordeel, dat het nu behandelde begrip beter geïntegreerd wordt met andere kennis, waardoor het wendbaarder en beter toepasbaar wordt.

Een paar voorwaarden moeten aan het anticiperen wel gesteld worden:

- de problemen mogen er niet zo ingewikkeld door worden dat het nu te leren begrip niet goed verwerkt wordt;
- het anticiperen moet regelmatig gebeuren: als er tussen het anticiperen van nu en het behandelen van het begrip straks veel tijd zit, dan heeft het anticiperen weinig zin.

Men denkt wel eens, dat anticipeeroefeningen tijd kosten en men bedoelt dan: overbodig veel tijd. Uit eigen ervaring weten we, dat wat we in het begin aan tijd „verliezen”, we later met rente terugkrijgen. Dat is ook logisch: In het begin bereikt men grotere wendbaarheid bij de leerlingen, doordat de oefeningen gevarieerd zijn en integratie beogen met andere kennis. Juist die wendbaarheid maakt, dat er later minder tijd nodig zal zijn, nog afgezien van het feit dat door het anticiperen de leerlingen niet meer aan een totaal nieuw begrip behoeven te wennen.

Over de auteurs:

Joop van Dormolen is docent voor de didactiek van de wiskunde aan de Rijksuniversiteit van Utrecht en is daar, samen met anderen, belast met de beroepsvoorbereiding van aanstaande eerste- en tweedegraadsleraren wiskunde.

Martin Kindt is medewerker van de afdeling Wiskivon van het I.O.W.O. en heeft als taak het ontwikkelen van leerstofpakketjes voor de leeftijdsgroep 12-18.

Differentiaalvergelijkingen, maar geen differentiaal

P. G. J. VREDENDUIN

1 Voorgeschiedenis

Voordat het nieuwe programma ingevoerd is, is uitgebreid geëxperimenteerd met het onderwerp differentiaalvergelijkingen. Het experiment werd begeleid door onder meer de hoogleraren Van der Blij en Visser.

De vraag rees: wat is essentieel:

- a. het aanleren van technieken om een differentiaalvergelijking op te lossen;
- b. inzicht in de betekenis van een differentiaalvergelijking en van het oplossingsproces?

Men vond b essentieel.

Het oplossen van een differentiaalvergelijking bestaat uit het zoeken van het lijnelementenveld dat aan de vergelijking voldoet en het aaneenrijgen van deze lijnelementen tot integraalkrommen. Inzicht in dit lijnelementenveld werd primair geacht. Dat men niet bij dit inzicht blijft staan, maar uiteindelijk ook de differentiaalvergelijking expliciet wil oplossen, dus de vergelijkingen van de integraalkrommen wil opsporen, spreekt vanzelf.

Dit standpunt bracht met zich mee de differentiaalvergelijkingen te schrijven in de vorm

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$$

De verhouding van dx en dy bepaalt dan de richting van het lijnelement.

Blijft over de vraag naar de betekenis van dx en dy . Dit zijn differentiaal. Over de betekenis van differentiaal is tijdens het experiment veelvuldig van gedachten gewisseld. Ze zijn in ons onderwijs verschenen. M.i. is dit te betreuren. Mijn ervaring is bij het schrijven van een leerboek, dat het grote moeite kost in redelijk begrijpbare taal deze differentiaal tot zijn recht te doen komen. Maar, wat erger is, de leerlingen leren wel feilloos met deze differentiaal te werken, zonder de betekenis ervan echter te doorgronden. Althans dat is mijn persoonlijke ervaring. Ten gevolge van deze ervaring is mijn aanvankelijk enthousiasme voor differentiaal geheel verdwenen.

Hoe kunnen we enerzijds een op inzicht gebaseerde behandeling van de differentiaalvergelijkingen handhaven en anderzijds vermijden over differentiaal te spreken? Ik wil een poging daartoe wagen.

2 Richtingsverhouding

De richting van een lijn kunnen we als volgt bepalen. Kies twee verschillende punten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) op de lijn. De verhouding van $y_2 - y_1$ en $x_2 - x_1$ bepaalt de richting van de lijn. We schrijven deze verhouding $dy : dx$. Deze verhouding heet de richtingsverhouding van de lijn.

Zowel dx als dy (echter niet beide tegelijk) mogen 0 zijn. Vandaar dat we spreken moeten van een richtingsverhouding en deze verhouding niet door een quotiënt mogen vervangen.

3 Afgeleide

Gegeven een differentieerbare functie f en een punt (x, y) op de grafiek. De afgeleide van f in dit punt is $f'(x)$. De richtingsverhouding van de raaklijn in dit punt aan de grafiek is $dy : dx$. Omdat de raaklijn niet verticaal loopt, is $dx \neq 0$. We mogen de verhouding dus door een quotiënt vervangen. Zodat

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Het quotiënt $\frac{dy}{dx}$ wordt wel richtingscoëfficiënt van de raaklijn en differentiaal-quotiënt van de functie genoemd. Om het contact met de gangbare terminologie niet te verliezen, is het verstandig deze benamingen aan te houden.

Omdat $\frac{dy}{dx}$ nu echt een quotiënt is, verdient het wel aanbeveling dit uit te spreken: dy gedeeld door dx .

4 Raaklijn aan een kromme

Gegeven de kromme

$$x^2 + 4y^2 = 8$$

met daarop het punt $(2, 1)$. Gevraagd de raaklijn in dit punt aan de kromme. Bekijken we de kromme als geheel, dan is y geen functie van x . Echter lokaal wel. Dit wettigt differentiatie. Met behulp van de kettingregel vinden we

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

Niet in elk punt van de kromme is y lokaal een functie van x . Bijv. niet in het punt $(2\sqrt{2}, 0)$. Maar nu is wel x lokaal een functie van y . Dit wettigt differentiatie naar y . We vinden

$$2x \frac{dx}{dy} + 8y = 0 \quad (2)$$

Gelukkig volgt zowel uit (1) als uit (2):

$$2x \, dx + 8y \, dy = 0 \quad (3)$$

Omgekeerd geldt (3) $\Rightarrow$ (1) als $dx \neq 0$

en (3) $\Rightarrow$ (2) als $dy \neq 0$.

In elk punt levert (3) dus de richtingsverhouding van de raaklijn. Deze wordt

$$dy : dx = -2x : 8y$$

Ik kan mij voorstellen dat een leerling het differentiëren van $x^2 + 4y^2$ naar y en naar x een aardig trucje vindt, maar dat hij niet precies snapt wat er gebeurt. Een tweede voorbeeld maakt dit hopelijk voor hem duidelijker.

Gegeven de kromme

$$xy = x + y$$

met daarop het punt (2, 2). Gevraagd de raaklijn in dit punt aan de kromme.

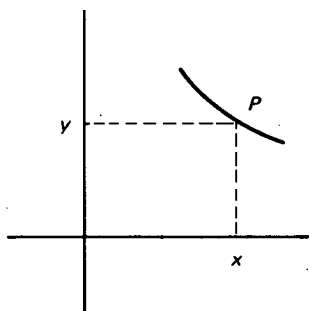


Fig. 1

Teken een deel van de kromme waartoe $P(2, 2)$ behoort en waarop y een functie van x is, zoals in figuur 1 gedaan is. Bij elke x (binnen het domein van de functie) behoort nu één y en dus ook een bepaalde xy en een bepaalde $x + y$. Op de kromme zijn zowel xy als $x + y$ dus functies van x . De functiewaarden van deze functies zijn voor elke x aan elkaar gelijk. Dan zijn ook de afgeleiden van deze functies gelijk. Dus is

$$x \frac{dy}{dx} + y = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$x \, dy + y \, dx = dx + dy$$

Als op het gekozen deel van de kromme x een functie van y is, wordt hetzelfde resultaat verkregen.

Dit voorbeeld is gemakkelijker te doorzien, doordat xy en $x + y$ geen constante functies zijn.

Voor de leraar is duidelijk dat de raaklijn aan de kromme

$$f(x, y) = 0$$

gevonden wordt uit

$$f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = 0$$

De leerling maken we dit aan de hand van een paar voorbeelden duidelijk zonder deze symboliek te gebruiken.

Mocht y lokaal wel een functie van x zijn, maar de grafiek ter plaatse een verticale raaklijn hebben, dan is lokaal x een differentieerbare functie van y . Ook hier dus geen moeilijkheden.

5 Het oplossen van een differentiaalvergelijking

Als voorbeeld kiezen we (gemakshalve) de differentiaalvergelijking

$$2x dx + 8y dy = 0$$

Aan deze differentiaalvergelijking voldoen geordende tripels $(x, y, dy : dx)$. Of met meetkundige terminologie: paren die bestaan uit een punt en een richting. Een dergelijk paar heet een lijnelement. Voor de leerling wordt het iets gemakkelijker, als we zeggen dat een lijnelement bestaat uit een punt met een lijn erdoor. Nu kunnen we naar hartelust lijnelementen zoeken die aan de vergelijking voldoen.

De volgende stap is het aaneenrijgen van deze lijnelementen tot krommen. Leuk gezegd, maar wat wordt bedoeld? Bedoeld wordt een kromme te vinden met de volgende eigenschap. Trek in een punt ervan de raaklijn aan de kromme. We noemen dit paar (bestaande uit raakpunt en raaklijn) een raaklijnelement van de kromme. Voldoen al deze raaklijnelementen aan de differentiaalvergelijking, dan heet de kromme een integraalkromme van de vergelijking.

Zoek dus functies van x en y die naar x gedifferentieerd $2x$ opleveren en naar y gedifferentieerd $8y$.

Dergelijke functies zijn

$$(x, y) \rightarrow x^2 + 4y^2 - c$$

De integraalkrommen zijn dus

$$x^2 + 4y^2 = c$$

Ik dacht dat het bovenstaande een wetenschappelijk houdbare behandeling van de differentiaalvergelijkingen is die niet te moeilijk is en niet te veel tijd en energie vergt. Voor eventuele vereenvoudigingen houd ik me aanbevolen.

Technisch is er niets veranderd. De interpretatie van wat we doen is echter simpeler geworden. De kryptische differentiaalvergelijkingen zijn vervangen door richtingsverhoudingen. Het verband tussen differentiaalvergelijking en lijnelementenveld is daardoor gemakkelijker te doorzien.

6 Dubbelpunten en keerpunten

Om het geheel af te ronden moeten we nog één kleinigheid onder de loep nemen:

de dubbelpunten en de keerpunten. Hier lijken onze bovengenoemde methoden schipbreuk te leiden.

Eerst de dubbelpunten. Onderstel $f(x, y) = 0$ is een integraalkromme van een differentiaalvergelijking die een dubbelpunt heeft in (a, b) . In het punt (a, b) voldoen dan twee lijnelementen aan de differentiaalvergelijking. Het punt (a, b) is dus een singulier punt.

De differentiaalvergelijking luidt

$$f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = 0 \text{ }^1)$$

en vanwege de singulariteit is

$$f'_x(a, b) = 0 \quad \text{en} \quad f'_y(a, b) = 0$$

Zoals bekend zijn deze twee betrekkingen ook juist in een keerpunt. Ook een keerpunt is dus singulier.¹⁾

Bij het oplossen van een differentiaalvergelijking laten we echter de singuliere punten buiten beschouwing. We zoeken de lijnelementen die in de niet-singuliere punten voldoen, weten dat in een singulier punt alle lijnelementen voldoen en zijn dan in staat de integraalkrommen te vinden.

Over de auteur:

De schrijver is docent in de didactiek van de wiskunde aan de T.H. te Delft. Hij is lid geweest van de commissie die het door de CMLW georganiseerde experiment analyse begeleidde en heeft later ook aan dit experiment deelgenomen. Hij is, voor zover het differentiaalvergelijkingen betreft, berouwvol auteur van een schoolboek over analyse.

¹⁾ Ik geef toe, dan vanuit Wetenschappelijk oogpunt hier een beperking opgelegd is. Met het oog op de schoolpraktijk is deze beperking aanvaardbaar.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

8 Beginsituatie

Mijn vorige notitie*) betrof een stukje meetkundeonderwijs in de derde klas van een basisschool. De juffrouw probeerde daarin met de leerlingen te komen tot een nadere specificering van de begrippen cirkel en middelpunt, en ze deed dat op een zeer bepaalde manier. De kinderen werden daarbij door gerichte vragen gedwongen hun intuïtieve kennis van 'rond' nader te doordenken. Vooral het onder woorden brengen van aanschouwelijke inzichten stelde hen nogal voor moeilijkheden.

Ik beschreef de les met behulp van de film, die ervan gemaakt is. U begrijpt dat dit geen gemakkelijke opgave was. Bij het maken van de film waren natuurlijk al wat fragmenten weggelaten. Van de les, die ruim een uur duurde, is een filmverslag van ongeveer 20 minuten overgebleven. In mijn beschrijving – die je in 10 minuten kunt lezen – zijn nog meer gebeurtenissen ongenoemd gelaten. Maar daarover wil ik het nu niet hebben. Geïnteresseerden zijn vanzelfsprekend van harte welkom op het I.O.W.O. om de film zelf te komen zien.

Op 19 augustus 1976 vertoonden we deze film aan de nieuwe eerstejaars studenten op de P.A. in Gorinchem. Het zijn voornamelijk leerlingen die het HAVO diploma, met of zonder wiskunde, enkele maanden geleden hebben behaald. Ze hebben allemaal tenminste een elfjarige onderwijs 'ervaring'. Maar ze hebben het onderwijs ervaren als leerling. Dankzij – of ondanks – dat hebben ze gekozen voor het onderwijzerschap.

Mijn belangstelling ging uit naar hun beginsituatie met betrekking tot het observeren van onderwijs. Ik weet heel goed dat het ondergaan van lessen op school heel wat anders is dan het beschouwen, analyseren, konstrueren en geven ervan. Het ondergaan geldt voornamelijk voor HAVO-leerlingen, het geven moet je als P.A.-student kunnen leren. Een belangrijke vraag – voor de opleiding – is nu: op basis waarvan kunnen de eerstejaars zich op dit aspect van deze nieuwe leeropdracht oriënteren. Het gaat daarbij niet om leerstof of leeractiviteiten, die door het gekozen vakkenpakket en de behaalde eksamencijfers worden aangeduid. We richten ons op heel wat minder grijpbare zaken. Zaken, die naar mijn mening voor het leren onderwijzen van eminent belang zijn, zaken die je kunt duiden met de term: (wiskundig) didaktische instelling.

*) Vakdidaktische Notities nr. 7: Kijken naar wiskunde onderwijs.

De vraagstelling aan de studenten, vóór de film gegeven, is zeer open: 'Schrijf achteraf op wat je in dit stukje onderwijs opvalt'. Daar ik me de moeilijkheidsgraad van deze opdracht goed bewust was, gaf ik ze bovendien de suggestie om desgewenst tijdens de film enige notities te maken.

Vanzelfsprekend zijn de studenten zeer gemotiveerd voor deze opdracht. Het zijn jonge mensen van omstreeks 19 jaar, en ze hebben in het algemeen grote belangstelling voor nog onbekende vakken. Bij navraag blijkt steeds weer dat van de vakken pedagogie, psychologie en didaktiek het meest verwacht wordt in de komende opleidingstijd. U kunt van mij aannemen dat ook deze studenten mijn vraag zeer serieus hebben genomen en dat ze met grote zorgvuldigheid hun opdracht vervulden.

En wat komt er dan uit?

Welnu, als ik de som van alle individuele observaties als uitgangspunt voor mijn beschouwingen neem, dan kan men gerust zijn. Samen weten deze jonge mensen waarop je bij het lesgeven kunt letten. De bloemlezing van alle notities tezamen bestrijkt een rijk geschakeerd gebied.

Men let op de *klasse-organisatie* en maakt op (en aan-)merkingen over de inrichting van het lokaal, de gedragsregels in de klas, de sfeer, de onderlinge relaties en de mogelijkheid tot kommunikatie.

Ook het *gedrag van de onderwijzeres* wordt geobserveerd. Men noemt haar ingrijpen, haar reacties op fouten van de leerlingen, het te snelle overgaan tot een volgend punt, de momenten dat ze met de leerlingen op een hoger nivo tracht te komen, haar pogingen om de kinderen erbij te betrekken, de opbouw van de les, haar inspanning om zich in de gedachtenwereld van het kind te verplaatsen, haar wijze van uitleggen, het geven van beurten, haar slordig bordgebruik en het aanwenden van andere hulpmiddelen zoals geldstukken en overheadprojektor. Men heeft eveneens *oog voor de kinderen*, hun aandacht bij de les, de wijze waarop ze de taal gebruiken, fouten die ze maken, hoe ze opletten, wanneer ze iets zelf ontdekken, dat ze fantasierijk zijn, hoe ze onderling overleggen en op elkaar reageren, dat ze in staat zijn naar elkaar te luisteren, dat ze elkaars 'stellingen' aanvallen, hoe ze een ander niet kunnen overtuigen, de wijze waarop de formuleren en dat ze entoesiast zijn.

Vanzelfsprekend noemt men ook de *leerstof*, maar uit de weinige notities op dit punt blijkt dat deze niet duidelijk naar voren komt. Er wordt gesproken over begrippen (cirkel, middelpunt, middellijn, omtrek), over inzicht en moeilijkheden.

Ook *wiskundige activiteiten* worden gesignaleerd: oplossingen zoeken, ontdekkingen doen, definiëren, meten, middelpunt 'konstrueren' en zelfs wordt 'het proces van het vinden van het middelpunt' naar voren gebracht.

Er zijn studenten die zich afvragen wat de *doelstelling* van deze les was, anderen proberen te vinden *wat er geleerd is*.

De aantekeningen van de studenten zijn zeer *persoonlijk*. Je kunt dat aflezen uit de gebruikte vorm: ik vind, ik denk, ik heb 't gevoel, ik kan me voorstellen, ik verbaas me, ik had verwacht, . . . Enkelen denken al verder, ze maken opmerkingen in de trant van: '*als ik de juf was . . .*' maar anderen reageren: '*als ik een leerling was geweest . . .*'.

In het bovenstaande heb ik trachten samen te vatten wat er door de studenten is genoteerd. Lees ik evenwel ook nog tussen de regels door, dan denk ik al wat *eigen theorie'tjes* te bespeuren. U kent ze wel, die schoolmeesterswijsheden als: 'Kinderen in de derde klas moet je wel drie keer uitleggen voordat ze het snappen' of 'cirkels zijn te moeilijk voor de basisschool' of 'groepswork is beter dan klassikaal onderwijs'.

Een analyse van het totaal moet je als opleider toch wel hoopvol stemmen. De didaktische oriënteringsbasis is vrij goed gevuld, zou je zo zeggen. Maar pas op, we hadden het over de som van alle waarnemingen. Hoe zit dat met de individuele studenten? Is het misschien mogelijk om ze op dit punt van didaktische instelling te onderscheiden? Ik denk van wel. En wat meer zij, ik vermoed dat we bij het opleiden van onderwijzers (en leraren?) er zo weinig aandacht aan besteed hebben, dat je dezelfde instellingen nog bij ervaren schoolmeesters kunt signaleren. Hier, eenzaam schrijvend op mijn studeerkamer, hoef ik niet ver te zoeken om er een voorbeeld van te vinden.

Misschien is het voor de lezers van dit tijdschrift ook wel leuk om zichzelf 'erin' te vinden. Daarom geef ik van een paar studenten de volledige beschrijving, voorzien van mijn 'etiket'.

Margo, belangstelling voor kinderen

Het viel me op, dat de onderwijzeres de kinderen erg ongedwongen benaderde, daardoor waren de kinderen erg vrij en durfden ze alles wat in ze opkwam te spuien. Ik vond wel, dat de onderwijzeres erg lang doorging met het de kinderen zelf te laten zeggen. Volgens mij waren het telkens dezelfde kinderen die opmerkingen hadden.

Aan het begin van de les waren alle kinderen erg geconcentreerd (natuurlijk ook door het bijzonder effectieve gebruik van de overheadprojektor) maar later zakte de concentratie bij de kinderen die niet elke keer met opmerkingen kwamen. Het verbaasde me wel met wat voor opmerkingen sommige kinderen kwamen. Ik had dat bij derde-klassers niet verwacht. Het leek erop, dat het zelf uitvoeren van de opdracht als moeilijk ervaren werd. Wat me als hinderlijk opviel was de manier van het plaatsen van de bankjes. Alle kinderen moesten gedraaid in hun stoel de les volgen. Ik vond het een leuke manier van verwerken van zo'n moeilijk begrip. Het viel me op, dat de kinderen er wel enthousiast voor waren.

Margreet, gevoelig voor interactie

De kinderen waren vol aandacht. De onderwijzeres had een goede sfeer opgebouwd en de kinderen voelen zich op hun gemak. De kinderen hebben aandacht voor elkaar en bekritisieren elkaar objectief, ook zonder tussenkomst van de juffrouw. Het wordt geen rommeltje, ondanks het geloop van en naar het bord. Kontakt met de kinderen blijft gehandhaafd. De juf gaat niet alleen verder. Kinderen hebben behoefte om bij het spreken de handen te gebruiken. De kinderen komen zelf tot ontdekkingen, het wordt hen niet in de mond gelegd. Kinderen willen zelf doen, zelf meten, enz.

Marianne, aandacht voor ontwikkeling

Het aanzien van de klas was gezellig. De kinderen zaten in groepjes dat is in tegenstelling met 'mijn' vroeger.

De onderwijzeres wist het tastgevoel erbij te betrekken door de kinderen de munten geblinddoekt te laten betasten en hiermee het onderscheid tussen de munten te laten vinden.

Mijns inziens eist het vak 'wiskunde' een behoorlijk uitdrukingsvermogen in woorden en daar hadden de kinderen nogal moeite mee. De les begon met het logische denken. Daarna mochten de kinderen het zelf uitproberen met een rijksdaalder. De onderwijzeres ging mee in het denken van de kinderen. Elke nieuwe opdracht werd getest en aanvaard of verworpen.

Amel, lesgeven en sturen

Ik vond de les nogal langdradig worden, doordat de onderwijzeres niet snel genoeg to the point kwam, waardoor het voor de kinderen ietwat verwarrend werd. De onderwijzeres liet teveel kinderen hun idee kenbaar maken, die veel fout waren of naast het bedoelde onderwerp zaten. Natuurlijk wist ze dat niet vantevoren, maar als ze het probleem direkter had over laten komen, hadden de kinderen er beter op in kunnen haken.

Dick, inschatten van kinderlijk kunnen

Ik vond het al erg moeilijk voor kinderen uit een derde klas om met cirkels te werken. Slechts enkelen hadden dit peil bereikt. De term omtrek had wel gebruikt mogen worden, maar er direkt mee gaan werken, vond ik voor een dag te veel.

Teus, leerlingen erbij betrekken

Het viel mij op, dat er niet vanuit een boek gewerkt werd, maar vanuit een opdracht, die de onderwijzeres gegeven had. Hierdoor werd volgens mij de aandacht van de kinderen geconcentreerd tot alleen maar de onderwijzeres zelf en het gestelde probleem.

De kinderen waren veel meer aktiever, omdat ze zelf bezig waren met het oplossen van het vraagstuk. De manier van les geven viel mij ook op. De onderwijzeres gaf allereerst de vraag, daarna moesten de kinderen zelf (soms via omwegen) het probleem oplossen. Wanneer er een bepaald gedeelte opgelost was, ging ze steeds weer door, totdat de definitieve oplossing gevonden was. Wanneer iemand een fout antwoord gaf, werd hij/zij niet gestraft of beledigd, maar wachtte de onderwijzeres gewoon op een goede oplossing van waaruit zij dan weer verder ging. Het viel mij ook op, dat bijna alle kinderen er wezenlijk bij betrokken waren. De aandacht van de kinderen verslapt niet. De kinderen voelden zich volgens mij persoonlijk tot het probleem aangetrokken, zodat ze ook zelf naar de oplossing ervan wilden zoeken.

Wout, zichzelf betrokken voelen

Het materiaal in de school is modern en de opstelling van de kinderen door elkaar en bijelkaar, zodat kontakt en onderling overleg mogelijk gemaakt wordt. De les zelf werd zo gegeven, dat de kinderen zelf tot een goede oplossing kunnen komen. Zelf ontdekken, iets dat in mijn schooltijd 1959/1967 niet

mogelijk was (kop dicht, armen over elkaar). Je moet echter wel engelengeduld hebben om ze een en ander uit te leggen en niet met je eigen kennis bij te springen. Dat lijkt me het moeilijkst, namelijk om je in de gedachtenwereld van het kind te verplaatsen. Op het laatst wordt de juf, vind ik, een beetje ongeduldig. Daar steeds weer iets aan toevoegen. Zo wordt het idee van het vinden van het middelpunt bijvoorbeeld langzaam opgebouwd. De onderwijzeres vertelt niet direkt aan de kinderen. Zij moeten het zelf uitzoeken of uit komen leggen hoe zij aan hun idee komen.

Paul, zelf sommen maken

De oplossing voor het onderwerp was mijns inziens zonder goede leiding nooit gevonden. Wij, m'n linker en rechterbuurman en ik, vonden de oplossing maar enkele ogenblikken eerder.

De reacties van de kinderen werden door het maken van de film weinig beïnvloed. De klas blijft stil en actief meedenken als enkele leerlingen met oplossingen komen en hun aandacht verslapt niet (als gevolg van opname?).

Het werken met de gevonden oplossingen is mijns inziens zeer effectief, omdat op die manier de kennis meer doorwerkt en de mogelijkheden worden ontdekt. Het berekenen van de omtrek zonder hulp van het getal π lijkt me bijna onmogelijk.

Edwin, wiskunde is bewijzen

De kinderen kwamen door de beweringen van hunzelf en van hun klasgenootjes te bevestigen en andersom te bewijzen dat andere beweringen niet klopten, erachter hoe het middelpunt van de cirkel bepaald wordt.

Door te beginnen te bewijzen dat wanneer een cirkel rond is, kwamen ze erachter hoe nou het middelpunt wordt gevonden.

Tijdens een bewijs hoe het middelpunt gevonden wordt door middel van de langste koorden te meten, werd het bewijs volkomen in de war gebracht door een jongen, die opeens met een ander bewijs kwam, die heel snel gevonden werd en die ook gauw begrepen werd.

Bij het omtrek meten kwam men tot twee methodes:

- 1 het meten met een liniaal
- 2 met een touwtje het touwtje op de omtrek leggen en daarin uitleggen en dan meten.

Lia, onderwijzen is betogen

De onderwijzeres wilde de kinderen wat over de cirkel leren, dit deed zij door veel aan de kinderen te vragen. De kinderen kwamen op deze manier veel over de cirkel te weten. Ze kwamen hierachter door middel van hun eigen antwoorden. De onderwijzeres vertelde langzamerhand wat meer over de cirkel. Zij bouwde haar betoog op. Ze begon eerst met centen, om zo bij het eigenlijke probleem te belanden.

Marinus, kritisch oordelen

Ik vond, dat de onderwijzeres wat onnauwkeurig te werk ging. Dit bracht naar mijn mening de kinderen in de war. Toen een van de kinderen de juiste en een-

voudigste methode had gevonden, had zij niet meer met een andere methode verder moeten gaan. Hierdoor werd het volgens mij ietwat langdradig voor de kinderen.

Ad, wiskunde onderwijzen is risico durven nemen

Toch lijkt het mij vreselijk moeilijk om die kinderkes iets duidelijk te maken. Dat meisje had daar dacht ik ook wel problemen mee. Het leek wel of ze in een twistgesprek was met de klas en om meer te verduidelijken, ging ze steeds in op dingen die in de klas naar voren werden gebracht. Zo kun je dus nooit een les voorbereiden, omdat je niet van tevoren weet wat de klas gaat zeggen.

Ineke, konstruktief aanvullen

In de loop van de les werden zo goed als alle kinderen een keer individueel benaderd. Het begin om bij het begrip rond te komen, vond ik erg lang. Bovendien werd het verschil rond/cirkel op het bord geschreven, maar hier werd verder geen aandacht aan besteed, terwijl verder alleen de cirkel werd behandeld. Bovendien kenden de kinderen de begrippen horizontaal/vertikaal niet want ze hadden het telkens over strepen, die zus of zo liepen. Er werd lekker rustig gewerkt, zodat de juffrouw goed haar aandacht kon verdelen om hier en daar iets nader toe te lichten. Om de omtrek te meten, zaten de kinderen de hele cirkel na te meten met hun liniaal. Er was al over kwarten gepraat, dus was het misschien mogelijk de kinderen op het idee te brengen dat $\frac{1}{4}$ van de omtrek meten en dan met 4 vermenigvuldigen ook een goed resultaat zou geven. In het begin als er weinig respons is, lijkt het mij moeilijk zolang door te gaan tot de kinderen zelf tot de goede konklusie komen en niet te gaan helpen.

Ik heb ook nog reacties op de film van ervaren vakdidaktici. Misschien kom ik er nog eens toe die ook aan u door te geven. Maar eerst heeft u de gelegenheid zelf te reageren.

Enkele opmerkingen bij het eindexamen wiskunde II in 1977

W. GANZEVOORT

1 Bij opgave 1 is het toch wel wat verwarrend, dat in onderdeel *a* over concrete punten wordt gesproken, terwijl in onderdeel *b* dezelfde namen worden gebruikt voor punten, waarvan het nu niet de bedoeling is dat je de coördinaten kent. Veel leerlingen hebben de coördinaten uit *a* gebruikt in *b*; en dat terwijl het op die manier veel meer werk is. Als de volgorde anders geweest was, zou dit misverstand niet zijn gekweekt.

2 Bij opgave 3b ben ik in eerste instantie nogal geschrokken. Moeten de leerlingen erop komen dat

$$R_{M, \varphi} = T_{\vec{m}} \circ R_{O, \varphi} \circ T_{-\vec{m}}? \quad (\text{hier: } \vec{m} := \overrightarrow{OM})$$

Of moeten ze gebruiken

$$R_{M, \varphi} = T_a \circ R_{O, \varphi}$$

en het beeld $\bar{a}$ van $\bar{o}$ onder de rotatie uit de gegevens kunnen bepalen?

Een van mijn leerlingen, die wat teveel formules geleerd had, kwam met

$$R_{M, \varphi} \begin{cases} x_1' = c x_1 - s x_2 + a_1 \\ x_2' = s x_1 + c x_2 + a_2 \end{cases} \quad (c := \cos \varphi \text{ en } s := \sin \varphi)$$

en daarmee liep het verder vlot.

De vraag kwam wel terug, moeten de leerlingen dit beheersen? Als we de leerboeken op dit punt bekijken, dan lijkt dit vraagstuk een accentverschuiving aan te kondigen. Die indruk wordt nog versterkt door de nieuwe (3e) druk van deel 5/6 V3 van de serie Getal en Ruimte. Zie daarin bijv. opgaven op pag. 221. Het zal wel niet buiten het programma vallen, maar ik vermoed dat niet iedereen dit onderwerp de aandacht heeft gegeven die nu nodig blijkt. Ook het artikel over het eindexamen wiskunde II in Euclides 52, 7 (maart 1977) rept er niet van.

3 Bij herexamen 1977 opgave 1b is het niet duidelijk waarom dat ene geval uitgezonderd moet worden. Zie de normen. Het punt $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 3)$ is toch het midden van AB met $A(1\frac{1}{3}, -2\frac{2}{3}, 3)$ op l (voor $\lambda = -2\frac{2}{3}$) en $B(0, 0, 3)$ op de x_3 -as; en AB is toch evenwijdig met V ?

Internationale Wiskunde Olympiade 1977

Eerste dag, beschikbare tijd: 4 uren.

- 1 Men construeert gelijkzijdige driehoeken ABK , BCL , CDM en DAN binnen het vierkant $ABCD$.
Bewijs dat de middens van de vier lijnstukken KL , LM , MN en NK samen met de middens van de acht lijnstukken AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN en AN de hoekpunten zijn van een regelmatige twaalfhoek.
- 2 In een eindige rij reële getallen is de som van elke zeven op elkaar volgende termen negatief en de som van elke elf op elkaar volgende termen positief. Bepaal het maximale aantal termen van een dergelijke rij.
- 3 Gegeven is een geheel getal $n > 2$. V_n is de verzameling van alle getallen van de vorm $1 + kn$, waarbij $k = 1, 2, \dots$. Een getal $m \in V_n$ heet *onontbindbaar in V_n* als er geen getallen $p, q \in V_n$ bestaan zo, dat $pq = m$.
Bewijs dat er minstens één getal $r \in V_n$ bestaat dat op meer dan één manier geschreven kan worden als produkt van in V_n onontbindbare elementen. (Schrijfwijzen die slechts verschillen in de volgorde van de elementen van V_n worden als gelijk beschouwd.)

Tweede dag, beschikbare tijd: 4 uren.

- 4 Gegeven zijn de reële constanten a, b, A, B en de functie $f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$.
Bewijs dat, indien $f(x) \geq 0$ voor alle reële waarden van x , geldt $a^2 + b^2 \leq 2$ en $A^2 + B^2 \leq 1$.
- 5 Stel a en b zijn positieve gehele getallen. Indien men $a^2 + b^2$ deelt door $a + b$, krijgt men q als quotiënt en r als rest.
Bepaal alle paren (a, b) als $q^2 + r = 1977$.
- 6 De functie f is gedefinieerd op de verzameling van alle positieve gehele getallen. De functie-waarden van f zijn ook positieve gehele getallen. Voor alle n geldt $f(n+1) > f(f(n))$.
Bewijs dat $f(n) = n$ voor alle n .

Korrel

Meneer, maar $\sqrt{9}$ kan toch ook -3 zijn?

Een bekende vraag voor iedere wiskundeleraar.

Velen zijn gewend om in hun antwoord in te gaan op de afspraak die bepaalt dat weliswaar, naast 3×3 ook -3×-3 gelijk is aan 9, maar dat alleen 3 gelijk is aan $\sqrt{9}$, en -3 dus niet.

Ik denk dat dat niet zo moet; daarop wil ik in dit stukje ingaan.

Een leraar ergens in Nederland gaf dit antwoord:

O, dat is een wijd verbreid misverstand. In feite heb je gelijk, als je een getal opzoekt wat in het kwadraat 9 moet zijn, dan kan dat getal 3 zijn, of dan kan dat getal -3 zijn. Maar nou is er een afspraak bijgekomen. Omdat we graag onder $\sqrt{9}$ één getal verstaan en niet twee, spreken we af dat onder $\sqrt{9}$ dat getal verstaan, dat positief moet zijn en in het kwadraat 9 moet opleveren. Dat is een bijkomende afspraak, dat $\sqrt{9}$ positief moet zijn.

Hij redeneert, argumenteert, haalt (verkapt) de vergelijking $x^2 = 9$ er bij. Hij veronderstelt daarbij impliciet dat de leerling al op een hoger nivo (Van Hiele) over wortels kan denken. Ik denk dat die veronderstelling niet juist is. Ik signaleer dat de leerling nog niet zover is dat hij ziet dat $\sqrt{9}$ een getal is; hij herkent $\sqrt{9}$ niet als 'vermomming' van 3. Ik concludeer daaruit dat de leerling nog op basisnivo met wortels bezig is.

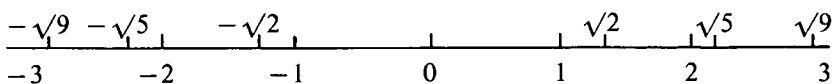
Ik stel me nu op de plaats van de leraar.

Ik vind het jammer dat de leerling met betrekking tot wortels nog niet verder is dan het basisnivo. Het kan een terugval zijn, het kan ook zijn dat er fundamenteel iets mis gegaan is in zijn leerproces. In elk geval moet ik op dit moment mijn hulp afstemmen op het basisnivo.

Op het basisnivo speelt herkenning, zo maar op het gezicht, een grote rol. Herkennen zoals iemand zijn moeder herkent, niet vanwege haar bijzondere kentekenen, maar gewoon doordat hij ziet dat het zijn moeder is. Ik weet dat iemand die een begrip op basisnivo hanteert, niet toegankelijk is voor redeneringen over dat begrip. Het herkennen wordt geleerd door aanwijzen, door voorbeelden. Met mijn antwoord wil ik in die richting werken; ik zeg:

Nee, je vergist je, -3 dat is $-\sqrt{9}$.

Kijk, zo zit het in elkaar:



Daar rechts aan de positieve kant heb je $\sqrt{9}$, dat is 3, en $\sqrt{5}$ (die zit in de buurt van 2,2, want $2,2^2$ zit in de buurt van 5), en $\sqrt{2}$. En hier links aan de negatieve kant zie je hetzelfde patroontje maar dan alles met een min-teken er voor. Kun jij nu aanwijzen waar $\sqrt{4}$ op deze getallenrechte thuishoort? En $\sqrt{1}$? En $-\sqrt{16}$? En kun je er nu zelf nog een paar andere bijschrijven?

En ik verbeeld me daarbij niet dat nu de moeilijkheden voorgoed uit de wereld zijn.

Bram Lagerwerf

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 29 oktober 1977 in het gebouw van de SOL te Utrecht

Om 10.05 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen, de vergadering.

Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden E. H. Schmidt en dr. Joh. H. Wansink, de inspecteurs drs. W. E. de Jong, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman, de vertegenwoordigers van Wolters-Noordhoff en Euclides, de heer F. Laforce en mejuffrouw L. Simons als vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars.

Hierna herdenkt de voorzitter het in mei overleden bestuurslid L. van Beek en spreekt vervolgens zijn jaarrede uit.

Hierna worden de notulen van de algemene vergadering op 30 oktober 1976 en de jaarverslagen goedgekeurd. Mevrouw A. Aukema-Schepel vraagt om bij het financieel jaarverslag in de toekomst ook een balans te verstrekken; de penningmeester wordt gedéchargeerd en in de kascommissie worden de heren H. J. Smid uit Katwijk aan Zee en H. Vink uit Leiderdorp gekozen. De heer Wansink vraagt om in de toekomst ook dames kandidaat te stellen.

De heer F. Mahieu wordt als bestuurslid herkozen. In de vakature, ontstaan door het overlijden van de heer Van Beek, wordt voorzien door verkiezing van de heer C. Hoogsteder. In de vakature, ontstaan door het zich niet meer herkiesbaar stellen van dr. P. G. J. Vredenduin, wordt niet voorzien; indien de contacten met het hoger beroeps onderwijs het komende jaar worden verstevigd, kan een kandidaat uit deze sector in de vakature voorzien.

De contributie voor het verenigingsjaar 1978/1979 wordt vastgesteld op f 35, —.

Hierna stelt de voorzitter voor dr. P. G. J. Vredenduin te benoemen tot erelid van de vereniging. De vergadering neemt dit voorstel met applaus over.

De voorzitter zet hierna de verdiensten van het nieuwe erelid uiteen. Hij wijst er op dat Vredenduin naast het werk in school kennis bleef nemen van de ontwikkeling van de wiskunde en in het bijzonder van de logica; ook wijst hij op de belangstelling van Vredenduin voor de didactiek van de wiskunde en het vele werk dat Vredenduin in commissies en privé heeft verricht. Helaas moet de voorzitter ook wijzen op een smet in de carrière van Vredenduin; hij was namelijk geen lid van Wimecos maar van Liwenagel, toch werd hij in 1954 lid van een Wimecos-commissie en in 1956 lid van Wimecos en onmiddellijk bestuurslid. In 1958 werd Vredenduin voorzitter van de nomenclatuurcommissie. Tot slot wijst de voorzitter nog op de boeken van Vredenduin en zijn redacteurschap van Euclides alsmede zijn vele commissiewerk.

De heer Vredenduin dankt voor het verleende erelidmaatschap. Hij heeft lang en met veel genoegen in het bestuur gezeten en vindt het jammer het bestuur te verlaten. Hij dankt voor de plezierige samenwerking. Hij vindt de vermelde smet zeer ernstig en legt de situatie uit. Volgens de statuten was Wimecos een vereniging van leraren aan HBS-en en werden gymnasiumleraren niet als lid aanvaard. Dit heeft hem altijd gespeten.

Hij heeft er voor geijverd dat Liwenagel haar eigen positie als vereniging voor gymnasiumleraren zou opgeven. De eis van Liwenagel was dat zij een bestuurslid van Wimecos mocht benoemen en zo werd hij bestuurslid.

Vervolgens geeft de heer B. Zwaneveld een overzicht van het verdere verloop van de jaarvergadering.

Bij het binnenkomen van het erelid prof. dr. O. Bottema wordt deze door de voorzitter begroet en krijgt de heer Vredenduin weer het woord om het eerste exemplaar van de bundel 'Verscheidenheden' aan de schrijver, prof. Bottema, te overhandigen. De heer Vredenduin ziet de 'Verscheidenheden' als band tussen prof. Bottema en het middelbaar onderwijs. Op voorstel van B. Zwaneveld werd na de 100e Verscheidenheden in Euclides deze bundel uitgegeven. Dr. J. T. Groenman heeft de 50 in deze bundel artikelen uitgezocht. Het boek getuigt van een speelse geest.

Prof. Bottema spreekt een dankwoord. Hij is erg gebonden aan de vereniging waarvan hij meer dan een halve eeuw lid is geweest en in de dertiger jaren bestuurslid. Hij memoreert dat in die tijd het tijdschrift Euclides, dat reeds bestond, het orgaan van de vereniging is geworden onder andere door het werk van Tekelenburg.

Hierna gaat de vergadering over tot het thema 'Handelen om te begrijpen'. Tot de lunchpauze krijgen alle leden gelegenheid om zich in groepjes bezig te houden met een serie vraagstukken die met handelen tot begrijpen leiden. Na de lunchpauze houdt prof. R. Skemp, van de Universiteit van Warwick, een voordracht in het kader van het centrale thema.

Hierna worden in diverse groepen de voordracht van prof Skemp, de uitgave 'Handelen om te begrijpen' van drs. B. Zwaneveld en drs. J. van Dormolen, de activiteiten van het I.O.W.O. en toepassingen van de computer besproken, terwijl ook nog gelegenheid bestaat door te gaan met de serie vraagstukken van voor de lunchpauze.

Na een korte theepauze eindigt de vergadering met de rondvraag. Deze wordt geleid door de heer Vredenduin als demissionair vice-voorzitter.

De heer H. N. Schuring vestigt de aandacht op de eindexamenverslagen van het CITO, waarna de heer Vredenduin vermeldt dat er in januari/februari een nummer van Euclides verschijnt dat geheel aan het eindexamen 1977 is gewijd. De heer F. Laforce dankt namens de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars voor de invitatie voor deze vergadering. Hij nodigt alle aanwezigen uit aanwezig te zijn op de algemene vergadering van de Vlaamse Vereniging op 25 februari 1978 te Brussel en op de gemeenschappelijke dag van de Vlaamse en de Nederlandse Vereniging op 18 maart te Breda. De afspraken die eerder gemaakt zijn om tot een vergelijkend onderzoek van rekenmachientjes te komen moet door de snelle wijziging in de diverse machientjes komen te vervallen.

De vice-voorzitter dankt voor de vriendelijke woorden. Hij heeft de indruk dat de evolutie van het wiskunde-onderwijs in België sneller is geweest dan in Nederland. De Belgen hebben invloed gehad op de ontwikkeling in Nederland. Drs. J. van Dormolen vestigt de aandacht op het tijdschrift Pythagoras. Voor de redactie van dit tijdschrift wordt de taak steeds zwaarder. Hij roept iedereen op deze taak te verlichten door ideeën voor artikelen aan te dragen.

De heer C. L. Houtman informeert naar de herindeling van wiskunde op het VWO tot wiskunde A en wiskunde B. Volgens de heer W. E. de Jong moeten we over vorderingen op dit terrein voor de korte termijn niet al te optimistisch zijn. Er komt wel een herindeling naar fundamentele wijzingen zijn om begrotings-technische redenen uitgesteld.

De heer J. W. Uiterdijk heeft zeer goede ervaringen met de inhoud van het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap, maar betreurt het dat de zalen altijd zo koud zijn dat de goede inleidingen hierdoor weinig belangstelling trekken.

De heer J. C. Mets dankt voor de goede voorbereiding van deze vergadering. De heer H. Wolf vraagt of er een datum bekend is waarop de rekenmachientjes op het eindexamen gebruikt mogen worden. De heer B. J. Westerhof kan nog geen datum noemen. Een inspectorale commissie werkt er aan om voor de diverse schooltypen één lijn aan te houden. De heer B. Knip vermeldt dat het gebruik van rekenmachientjes in Zwitserland bij referendum is toegestaan. Mogelijk kan men in Zwitserland adviezen inwinnen.

Om 16.43 uur sluit de vice-voorzitter de vergadering.

Boekbespreking

Gerhard Schmeisser, Horst Schirmeier, *Praktische Mathematik*, De Gruyter Lehrbuch, 314 blz., 27 figuren en 26 tabellen, 1976, gebonden, Walter de Gruyter & Co, DM 36,—.

Volgens het voorwoord is dit boek ontstaan als neerslag van colleges, die de schrijvers vanaf 1970 geven in de numerieke wiskunde. Het boek is bestemd voor studenten in de wiskunde, natuurkunde en ingenieurswetenschappen vanaf het derde semester. Zij behoeven slechts enige kennis van het begin van de analyse en de lineaire algebra te bezitten. De omvang van de stof is zodanig gehouden, dat een student deze in één semester kan doorwerken. De schrijvers hebben ervoor gezorgd, dat het behandelde een geheel vormt met overige wiskunde.

Achtereenvolgens komen ter sprake:

foutendiscussie, iteratie, nulwaarden van polynomen, stelsels lineaire vergelijkingen, lineaire programmering, eigenwaarde-problemen, interpolatie, numerieke integratie, sommatie en convergentie, gewone differentiaalvergelijkingen.

Dit ambitieuze programma wordt op een zeer degelijke wijze behandeld, waarbij ingehaakt wordt op moderne benaderingswijzen. Het boek wordt besloten met een literatuurlijst, een lijst van de gebruikte symbolen en een zaak- en naamregister.

Een zeer goed leerboek.

W. Kleijne

R. Lingenberg, *Einführung in die Lineare Algebra*, Mathematik für Physiker deel 4, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 237 blz., DM 24,—.

Een inleiding in de lineaire algebra, die de volgende onderwerpen behandelt: vectoren en elementaire twee- en driedimensionale meetkunde groepen, ringen en lichamen, vectorruimten, lineaire afbeeldingen, duale vectorruimten, matrices, stelsels vergelijkingen, determinanten, eigenwaarden en eigenvectoren, Euclidische en unitaire vectorruimten, kwadratische vormen, krommen en oppervlakken van de tweede graad, tensoralgebra.

In kort bestek wordt een vrij omvangrijk geheel besproken. Dit gebeurt op een grondige en nauwkeurige wijze. Het geheel ademt een moderne geest. Drukfouten heb ik vrijwel niet gevonden. Het boekje ziet er verzorgd uit. Vraagstukken zijn niet opgenomen.

Met uitzondering van het laatste hoofdstuk lijkt mij dit boek geschikt voor bijv. M.O.-A-kandidaten.

W. Kleijne

G. J. Rieger, *Zahlentheorie*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen/Zürich, deel XXIX van de serie *Studia Mathematica*, 220 blz.

Dit boek geeft een gedegen inleiding in de elementaire getallentheorie. Als zodanig dient de lezer over enige kennis van de reële analyse te beschikken.

De volgende onderwerpen komen aan de orde:

ontbinding in priemgetallen, congruenties, kwadraatresten, priemgetalverdeling, getaltheoretische functies, kwadraatsommen, zeefmethoden, p-adische getallen, diofantische vergelijkingen en benaderingen, kettingbreuken, algebraïsche en transcendente getallen, bilineaire vormen, priemgetalstelling, probleem van Waring.

Tot slot een bibliografie, symbolenlijst, zaak- en naamregister.

Er worden geen opgaven gegeven. Het geheel is een vrij diepgaande, zorgvuldige inleiding in de onderhavige gebieden. Een zeer verzorgd werk. Aanbevolen.

W. Kleijne

De bedoeling van dit werk is enerzijds een axiomatische fundering van de projectieve meetkunde te geven (in de moderne zeer algemene zin) en anderzijds ook al spoedig aandacht te schenken aan daarop berustende begrippen en theorema's van, zou men kunnen zeggen, toegepaste meetkunde. Vandaar dat het eerste hoofdstuk van I in het platte vlak op de gebruikelijke wijze met Desargues en Pappus de grondslag legt en reeds in het tweede vervolgd wordt met de beginselen der kegelsnedentheorie en de stelling van Pascal. Deze tendentie wordt ook door de titel van het boek min of meer aangegeven.

De twee hoofdstukken laten gemengde indrukken na, die karakteristiek blijken voor het gehele werk. Een neiging tot degelijkheid en zorgvuldigheid is onmisbaar, maar het betoog verloopt stroef, de lectuur is vermoeiend en wordt door de weinig aantrekkelijke typografie allesbehalve ondersteund.

Een gelukkige vondst lijkt de beschouwing van die vlakke systemen, door de auteur met 'klassiek' aangeduid, waarin Pappus (en dus Desargues) geldt en Fano-figuren zijn uitgesloten. De kegelsneden worden op de beproefde wijze met projectieve waaiers gedefinieerd en hoofdstuk 2 zou men kunnen beschouwen als een voorbeeld van hoever men het in de meetkunde kan brengen op een uiterst smalle basis van veronderstellingen.

De hoofdstukken 3, 4, 5 (pag. 84*188) ontwikkelen de projectieve meetkunde in de ruimte van n afmetingen; ook hier is de tekst moeizaam en al lijkt alles formeel correct, het is toch wel onoverzichtelijk als axioma's in de definities worden ondergebracht. Aan de orde komen uiteraard dualiteit, bases, dimensie en collineaties. Een belangrijke ontwikkeling betreft de algebraïsering der meetkunde, die hier met behulp van centrale homologiën wordt verricht en die de bekende correspondentie levert tussen een meetkunde waarin Desargues geldt en een getallenlichaam, dat dan nog commutatief blijkt als ook Pappus wordt verondersteld. Zeer uitvoerig worden de correlaties behandeld waarbij voor $n = 3$ de ontwikkeling tot en met het lineaire lijncomplex wordt voortgezet. Deel I wordt besloten met de studie der kwadratische variëteiten, gedefinieerd door middel van een poolcorrelatie en voor $n = 3$ nader uitgewerkt waarbij het gelukt het 'ovale' en het 'ringartige' te onderscheiden; het laatste bevat twee stelsels rechte lijnen.

Deel II begint met de behandeling van twee, door de schrijver als 'hoofdstellingen' aangeduide uitspraken, die men merkwaardigerwijze niet zonder enige moeite uit de tekst opdiept en die er op neer komen dat een algebraïsch gedefinieerde meetkunde over een vectorruimte (met een willekeurig getallenlichaam) met een axiomatisch ontwikkelde geometrie isomorf is.

Er volgen twee hoofdstukken over respectievelijk de affiene en de Euclidische meetkunde, door specialisatie binnen de projectieve gedefinieerd. Van de hierbij opgenomen interessante, maar weinig systematische toepassingen noemen wij de concurrentie der hoogtelijnen van een driehoek, de brandpunten (en zelfs de kromtestralen) van een kegelsnede, het Laguerrebeeld van een puntenpaar en de bewegingen in het Euclidisch vlak.

Het slothoofdstuk behandelt dan opnieuw projectieve (driedimensionale) objecten zoals regelscharen, lineaire lijncongruenties en kubische ruimtekrommen; het eindigt met enige ruimtelijke Euclidische beschouwingen. Bij al deze 'toepassingen' moet uiteraard bedacht worden dat zij weliswaar betrekking hebben op bekende zaken maar dat deze ontwikkeld worden in meetkunden van meer algemene structuur dan de gebruikelijke die met het lichaam der reële of complexe getallen correspondeert. Het boek legt daar weinig nadruk op en het verwondert b.v. dat projectieve meetkunden met een eindig aantal punten niet of nauwelijks aan de orde komen.

Wij merken nog op dat de literatuurverwijzingen soms een onjuiste indruk zouden kunnen geven van de historische ontwikkeling. Als I, pag. 58 voor het hexagramma mysticum naar een publicatie van 1879 verwijst bedenke men dat de betreffende onderzoeken van Steiner e.a. veel vroeger plaats vonden en dat het in I, pag. 85 beschouwde axioma in wezen reeds bij Pascal (1882) voorkomt.

Samenvattend zou men willen zeggen dat het werk van Brauner een rijke inhoud heeft en dat de idee om axiomatische opbouw met talrijke toepassingen te vervolgen aantrekkelijk is. Daar staat tegenover dat wij de presentatie zeer matig achten en de compositie brokkelig en ondoorzichtig. Als een leerboek voor het gebied lijkt het weinig geschikt. De huidige fundering

der projectieve meetkunde, een relatief eenvoudig geometrisch systeem, is een ideaal voorbeeld van de axiomatische methode. Wie er kennis van wil nemen kan heel wat beter bij Heijting (Axiomatic projective geometry, Groningen-Amsterdam 1963) terecht.

O. Bottema

Hermann Röhrs, *Die progressive Erziehungsbewegung*, 178 p. geb., Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Dit boek verschijnt als tweede deel van een werk over 'Die Reformpädagogik als internationale Bewegung' en draagt als ondertitel 'Verlauf und Auswirkung der Reformpädagogik in den U.S.A.'. Hoewel in het boeiend betoog dat geboden wordt de wiskunde slechts uiterst sporadisch ter sprake komt en ook de modernisering van het 'voortgezet onderwijs' geen afzonderlijk onderwerp van behandeling is geworden, is het toch ook voor de Nederlandse wiskundeleraar die er behoefte aan heeft dat wat er in het eigen land gebeurt ook te beschouwen tegen de achtergrond van wat zich in het buitenland afspeelt en afgespeeld heeft, stellig van betekenis. Ter nadere oriëntering geven we een opsomming van de titels der opvolgende hoofdstukken.

- 1 Die Entstehung der progressiven Erziehungsbewegung.
- 2 Die Repräsentanten der progressiven Erziehungsbewegung
(met i.h.b. de betekenis van Dewey).
- 3 Die progressiven Bildungskonzepts
(met i.h.b. de individualisering van het onderwijs op de Daltonschole en de projectmethoden).
- 4 Der Progressivismus in der Bewährungsprobe.
- 5 Die gebrochene Tradition
(met i.h.b. het werk van Maria Montessori).
- 6 Die Vergangenheit in der Gegenwart
(met i.h.b. een waarschuwing tegen rethorische progressiviteit 'der sich radikal original geriert, aber mit der praktischen Schul- und Erziehungsgestaltung nicht einmal den Namen und die Sprache gemein hat').

Het thema van het boek, de reformpedagogiek in Amerika, bracht mee dat bijvoorbeeld de progressieve opvoeding in de Duitse Landerziehungsheime en in de Nederlandse 'Werkplaats' van Kees Boeke ongenoemd konden blijven, terwijl het Dalton-onderwijs in Nederland nog wel ter sprake komt. Hiervoor kon de auteur overigens verwijzen naar zijn eerder uitgekomen werk 'Schule und Bildung im internationalen Gespräch'.

Joh. H. Wansink

K. Kiesswetter/R. Rosenkranz, *Lösungshilfen für Aufgaben zur Reellen Analysis einer Veränderlichen*, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, Band 270.

Dit boek behoort bij band 269 uit dezelfde reeks Hochschultaschenbücher: Karl Kiesswetter, *Reelle Analysis einer Veränderlichen*, door mij besproken in 'Euclides' jaargang 52 nr 1 blz. 31. Beide boeken vormen een eenheid. Datgene wat in genoemde bespreking werd vermeld, geldt onverkort ook voor dit werk. Als doel hebben de schrijvers zich voor ogen gehouden de lezer tot zelfstandig denken aan te sporen in de opgaven en in de problemen. Daartoe wordt regelmatig gewezen op verschillende typen van opgaven, bewijsstructuren en oplossingsschemata. Alle in het tekstboek genoemde opgaven worden in dit boekje van een oplossing voorzien, vaak zelfs tot in alle bijzonderheden geanalyseerd. Het boekje wordt besloten met een aantal vragen van algemene aard, aan de hand waarvan de lezer het gehele tekstboek nog eens kan doorwerken.

Het komt mij voor, dat de lezer na grondige bestudering en verwerking van beide boekjes een gedegen inleiding tot de reële analyse heeft gekregen.

W. Kleijne

379. A zet een koning op een schaakbord op het veld $a1$, dat ik liever $(1, 1)$ noem. B zet een koning op veld $(8, 8)$. A begint zijn koning één veld te verzetten, B verzet daarna zijn koning één veld enz. A en B zijn gebonden aan de volgende regels:

A mag zijn koning alleen naar rechts, naar boven of naar rechts boven verzetten;

B mag zijn koning alleen naar links, naar beneden of naar links beneden verzetten;

A en B mogen hun koning nooit zo zetten, dat hij voor de ander onbereikbaar wordt (staat de koning van A op (a, b) en die van B op (c, d) , dan moet $a \leq c$ en $b \leq d$ zijn).

Degene die met zijn koning een veld bereikt waar de vijandelijke koning zich bevindt (de vijandelijke koning slaat), is winnaar.

Wie wint bij optimale strategie?

380. A en B spelen hetzelfde spel, maar nu op een driedimensionaal 'schaakbord'. De afmetingen a , b en c van het bord zijn priemgetallen. De regels zijn analoog.

Bevindt de koning van A (B) zich in cel (p, q, r) , dan mag hij zo verschoven worden, dat van p , q en r één, twee of alle drie met 1 vermeerderd (verminderd) worden. Ontvluchttingspogingen zijn weer verboden.

A zet zijn koning in cel $(1, 1, 1)$, B in cel (a, b, c) . A begint en wint bij optimale strategie in minimaal 22 en maximaal 33 zetten.

Hoeveel cellen bevat het schaakbord?

Oplossingen

377. Construeer alle niet-isomorfe grafen met 8 punten en 12 lijnstukken waarbij in elk punt 3 lijnstukken samenkomen.

Welke kan men zo tekenen dat geen twee lijnstukken elkaar snijden?

Welke zijn isomorf met de hoekpunten en ribben van een veelvlak?

Ik geef de oplossing schematisch om niet te veel ruimte in beslag te nemen.

A Men kan beginnen met een zeshoek zonder diagonalen en nog 2 punten. Fig. 1.

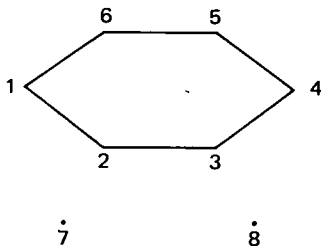


Fig. 1

We kunnen de graf op drie manieren afmaken.

A1 Verbind 7 met 1, 2 en 3; 8 met 4, 5 en 6.

A2 Verbind 7 met 1, 2 en 4; 8 met 3, 5 en 6.

A3 Verbind 7 met 1, 3 en 5; 8 met 2, 4 en 6.

B Men kan beginnen met een vijfhoek zonder diagonalen en nog 3 punten. Deze verbinden we door middel van 2 lijnstukken. Fig. 2.

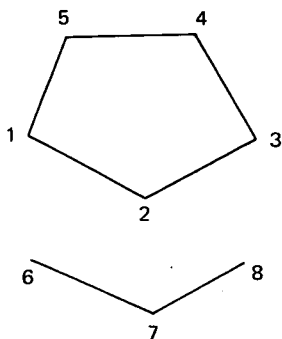


Fig. 2

We kunnen de graf op drie manieren afmaken.

B1 Verbind 6 met 1 en 2; 7 met 4 en 5; 8 met 3.

B2 Verbind 6 met 1 en 2; 7 met 3 en 5; 8 met 4.

B3 Verbind 6 met 1 en 3; 7 met 2 en 4; 8 met 5.

A1 bevat 4 driehoeken en 2 vierhoeken (met diagonalen).

A2 bevat 2 driehoeken en 2 vierhoeken.

A3 bevat 0 driehoeken en 6 vierhoeken.

B1 bevat 2 driehoeken en 2 vierhoeken.

B2 bevat 1 driehoek en 3 vierhoeken.

B3 bevat 0 driehoeken en 4 vierhoeken.

Isomorf kunnen dus alleen maar zijn A2 en B1. Men ziet gemakkelijk dat ze dit inderdaad zijn.

C Men zou nu nog kunnen proberen een vierhoek zonder diagonalen en nog 4 punten verbonden door 4 lijnstukken. Dit levert niets nieuws meer op.

In fig. 3-7 zijn de vijf grafen getekend, zo mogelijk zonder snijdende lijnstukken.

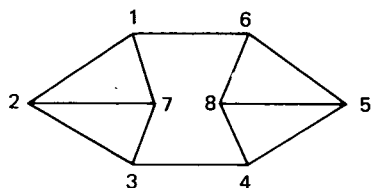


Fig. 3

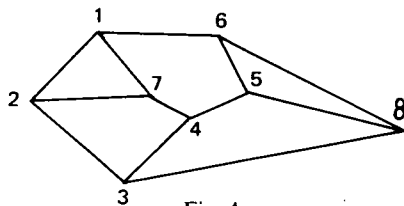


Fig. 4

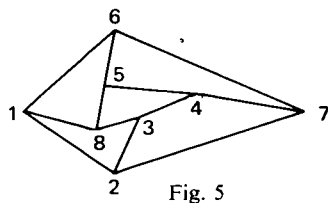


Fig. 5

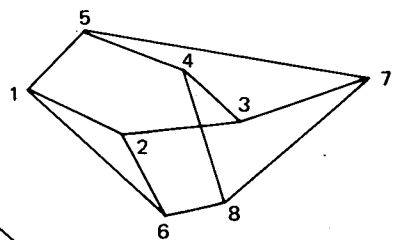


Fig. 6

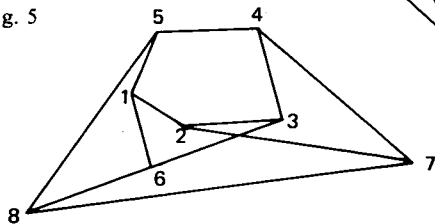


Fig. 7

Met fig. 4 correspondeert een veelvlak met zijvlakken 12386, 2347, 3854, 17456 en dan nog 127 en 865.

Met fig. 5 correspondeert de kubus.

Met de overige correspondeert geen veelvlak.

Dat in fig. 6 het snijpunt onvermijdelijk is, ziet men als volgt.

Teken eerst de vijfhoek 16845, daarna de vierhoek 8457 hetzij binnen, hetzij buiten de vijfhoek. Teken de punten 2 en 3 nu beide binnen/buiten 16845 en beide binnen/buiten 8457. Steeds ontstaat een snijpunt.

In fig. 7 is de redenering analoog.

Dat bijv. met fig. 6 geen veelvlak correspondeert, ziet men als volgt.

Begin met de drie zijvlakken die in punt 1 samenkomen. Dat zijn 126; 15648 of 15678; 12537 of 12534. Twee vlakken mogen slechts 2 hoekpunten gemeen hebben. De combinaties 15648 met 12534 en 15678 met 12537 vallen dus af. Probeer nu het derde zijvlak met hoekpunt 2 aan te brengen. Men loop dan al vast.

378.

$$\begin{aligned} a & \quad a + b + c + d = 25 \\ & \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 195 \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Onderstel $a \geq b \geq c \geq d$,

Systematisch proberen leidt gemakkelijk tot resultaat. Probeer eerst $a = 13$. Dat lukt niet.

Ook $a = 12$ geeft geen oplossing.

$a = 11$ levert $b = 7, c = 4, d = 3$.

En verdere pogingen leiden schipbreuk (behoudens de triviale $a = 9$). Niet fraai, maar wel efficiënt.

$$\begin{aligned} b & \quad a + b + c = 1978 \\ & \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Onderstel dat a, b , en c geen factor gemeen hebben. Stel

$$a = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), b = uv \text{ en } c = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

We vinden hieruit

$$\begin{aligned} u^2 + uv &= 1978 \\ u(u + v) &= 2 \cdot 23 \cdot 43 \end{aligned}$$

Wegens $u > v > 0$ levert dit alleen $u = 43, v = 3$.

Dus $a = 920, b = 129, c = 929$.

Men kan nog de gevallen doorrekenen waarin a, b en c een factor 2, 23 resp. 43 gemeen hebben. Deze gevallen leveren geen oplossing.

$$\begin{aligned} c & \quad 197x^2 + 197y^2 + 1977z^2 = 197u^2 + 197v^2 + 1978^2 \\ & \quad x, y, u \text{ en } v \text{ stellen cijfers voor.} \end{aligned}$$

Triviale oplossingen van de vorm $x = u, y = 8, v = 7$ laten we buiten beschouwing.

Uitwerken van de kwadraten geeft

$$\begin{aligned} x + y + 7 &= u + v + 8 \\ x^2 + y^2 + 7^2 &= u^2 + v^2 + 8^2 \end{aligned}$$

Stel $x = u + 2$ en dus $y = v - 1$.

Dit geeft

$$\begin{aligned} 4u + 4 - 2v - 1 &= 15 \\ 2u - v &= 6 \\ u = 3, y = 0, x = 5, v &= 1 \\ u = 4, y = 2, x = 6, v &= 3 \\ u = 5, y = 4, x = 7, v &= 5 \end{aligned}$$

Stel $x = u + 3$ en dus $y = v - 2$.

Dit geeft

$$\begin{aligned} 6u + 9 - 4y - 4 &= 15 \\ 3u - 2y &= 5 \\ u = 3, y = 2, x = 6, v = 4 & \text{ hetgeen geen nieuwe oplossing is.} \end{aligned}$$

Verdere pogingen leveren geen resultaat.

Ad 368. C. A. M. van der Linden (Amsterdam) en A. W. Monster (Zeist) stuurden me de volgende formule voor het aantal manieren waarop de personen zich konden opstellen, als ze voor beide fotografen zichtbaar moesten zijn:

$$(ab)! \left(\prod_{i=1}^{a-1} i! \right) \left(\prod_{i=1}^{b-1} i! \right) / \left(\prod_{i=1}^{a+b-1} i! \right)$$

Waarbij de heer Monster nog opmerkt dat hij voor $a = 3$ en $b = 6$ vindt 87516 en niet 59100. Daar ook zijn computer dit vond, ben ik ogenblikkelijk bereid te capituleren.

Ad 368. Mevrouw B. C. Dijkstra-Kluyver (Zutphen) stuurde de volgende oplossing van het eerste deel. Men kan ab personen op $(ab)!$ manieren rangschikken. Elke kolom moet daarna naar grootte gerangschikt worden.

Van de $b!$ mogelijke permutaties van die kolom is er dan slechts één bruikbaar. Het antwoordt luidt dus $(ab)!/(b!)^a$.

In het oorspronkelijke antwoord stond inderdaad een factor $a!$ te veel.

Jubileum Congres Wiskundig Genootschap, 29, 30 en 31 maart 1978



DE GEHEELE
MATHESIS
OF
WISKONST,

Herstelt in zijn natuurlijke gedaante:

Door ABRAHAM de GRAAF.



AMSTERDAM,

Gedrukt, by JACOBUS de VEER,

Voor JAN ten HOORN, Boekverkooper over 't Oude Heeren Logement,
in de History Schryver, 1694.

De geheele Wiskonst

De tentoonstellingscommissie 200 jaar Wiskundig Genootschap werkt op twee fronten. Tijdens het congres zal rond de Aula van de Vrije Universiteit een tentoonstelling voor de deelnemers aan het congres worden ingericht. Wat zal er te zien zijn? Natuurlijk illustraties bij de verschillende gebeurtenissen en publicaties rond het 200-jarig bestaan. Iets van de geschiedenis van het Genootschap, al zal het eerste notulenboek niet getoond kunnen worden omdat een boze secretaris het eens verbrandde. Daarnaast boeken en tijdschriften in Nederland in de afgelopen eeuwen voor wiskundigen en door wiskundigen geschreven.

Iets van de schoolboeken uit verschillende perioden, iets van universitaire leerboeken, maar ook portretten, persoonlijke herinneringen en dergelijke. Verder zal er wel iets komen waar u echt met de handen aan mag zitten en waar u voorzichtig mee kunt spelen. (Nee, nu bedoel ik toch iets anders als een rekenmachientje!)

Maar tegelijkertijd zal gedurende enkele weken in de tentoonstellingsruimte van de Amsterdamse Universiteitsbibliotheek aandacht aan de wiskunde gegeven worden. Hier naar toe kunt u gerust niet-wiskundige vrienden en familieleden meenemen. Ook zouden hele schoolklassen op bezoek kunnen gaan.

Als je het Nederlandse Volk met wiskunde wilt confronteren, hoe kun je dat doen? We hebben toch niet durven kiezen voor een echt nationale tentoonstelling, zoals in de R.A.I. of in de Ahoy-hallen. De opzet is maar bescheiden gebleven. Misschien gaat de tentoonstelling nog een kleine reis door het land maken.

Wat willen we laten zien? In de eerste plaats dat wiskunde naast weten om te weten heel veel verschillende toepassingen omvat. En in de tweede plaats dat wiskunde springlevend is, dagelijks worden nog problemen gesteld en opgelost! Er zijn eerbiedwaardige en heel moderne toepassingen. In een bonte mengeling zullen twee concurrerende stromen de tentoonstelling in de U.B. opbouwen. *Een stroom* gaat uit van een 17-de eeuwse leerboek van Abraham de Graaf: De geheel mathesis of Wiskonst. Herstelt in zijn natuurlijke gedaante. Van de dertien boeken noemen we er enkele: Driehoeksmeting, Lant meetkonst, groote zeevaart, perspectief, spiegelkunde, algebra. Alle dertien hoofdstukken zullen geïllustreerd worden met boeken en/of manuscripten uit het verleden. Een aantal werktuigen, die de toenmalige wiskundige bij de uitoefening van zijn beroep gebruikte, zullen tentoongesteld worden. *De moderne stroom* zal iets laten zien van modern wiskunde onderwijs, van enkele onverwachte toepassingsgebieden, sommige beleven in onze tijd een nieuwe opbloei (zoals biologie), andere zijn echt van de laatste jaren (zoals sociologie en verkeerskunde). Maar we zullen ook proberen een recent in de zuivere wiskunde opgelost probleem te illustreren. Zouden we de bezoekers van de tentoonstelling er toe kunnen brengen zelf ook actief wiskundig op de tentoonstelling bezig te zijn? In ieder geval proberen we via enkele wiskunde films aandacht te vragen voor een iets andere benadering dan het klassieke potlood en papier. Duidelijk zou moeten worden dat wiskunde vroeger en nu levendig was en is, boeiend en nuttig!

De tentoonstellingscommissie is aan het werk en langzamerhand gaan de twee projecten vorm krijgen. Maar mocht u nog ideeën hebben of suggesties willen doen dan graag. Secretaris is drs. S. Engelsman, Mathematisch Instituut der R.U., Budapestlaan 6, de Uithof, Utrecht.

F. van der Blij

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Zoals in het 'Vademecum voor de wiskundeleraar' is vermeld worden jaarlijks in overleg met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren docenten uitgenodigd opgaven voor de eindexamens wiskunde in te zenden.

Daarom doet het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook dit jaar een

OPROEP

aan docenten, werkzaam bij het VWO, HAVO en MAVO zich aan te melden als inzender van examenopgaven voor de examens 1979.

AANMELDING dient te geschieden voor 1 maart 1978 bij de secretaris van de vereniging, drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag-2036, telefoon 070-68 79 98 of 070-68 76 70.

Bij de aanmelding gelieve u te vermelden of het MAVO-3, MAVO-4, HAVO, VWO-wiskunde I of VWO-wiskunde II betreft.

Als iemand na de aanmelding wordt uitgenodigd opgaven in te zenden ontvangt hij of zij tevens alle nodige aanwijzingen.

De inzending van een compleet stel examenopgaven (uiterlijk 15 augustus) wordt beloond met een bedrag gelijk aan drie vacaties (momenteel driemaal f 60, —).

Gezamenlijke studiedag van VVWL en NVvW

Op zaterdag 18 maart wordt te Breda in het Euromotel Breda de derde gemeenschappelijke studiedag gehouden voor leden van de Vlaamse en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars(aren). Het programma luidt:

10.30 ontvangst, koffie

11.00 lezing van Dr. P. G. J. Vredenduin over Variabelen

13.00 lunch

14.30 lezing van mevrouw Dr. Hilda Veraverbeke-Van Buggenhout over Kwantoren.

Mevrouw Veraverbeke-Van Buggenhout is lerares aan de Vrije Middelbare Normaalschool in Tongeren en verzorgt daar het wetenschappelijke en het didactische deel van de leraarsopleiding.

16.00 Sluiting.

Wie aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen wordt verzocht uiterlijk 4 maart a.s. f 12,50 te storten op giro 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars te Amsterdam.

Het Euromotel Breda is bereikbaar:

per auto uit de richting Utrecht of Tilburg: afslag Breda-Bavel nemen; men ziet dan het Euromotel liggen;

per auto uit de richting Rotterdam, Roosendaal of Antwerpen: richting Utrecht-Tilburg volgen, afslag Breda-Bavel nemen; onderaan linksaf onder de snelweg doorgaan; men ziet dan het Euromotel aan zijn rechterhand liggen;

per trein: om 10 uur zal een busje van het station vertrekken om de treinreizigers naar het motel te brengen.

Hieronder een kort résumé van beide voordrachten. U zal dan zien dat de voordrachten niet moeilijk te volgen zijn en speciaal ingesteld zijn op het gebruik van variabelen en kwantoren in het onderwijs.

1 Variabelen

Wat is een variabele? Ik heb wel eens gelezen: een variabele stelt soms een willekeurig getal voor, soms een vast bekend getal en soms een vast maar nog niet bekend getal. Is dit juist? Hoe komt men op dit idee?

Er zijn twee soorten variabelen: vrije en gebonden variabelen. Wat is het verschil?

Uitspraken waarin een vrije variabele voorkomt, worden wel open uitspraken genoemd. Moeten we open uitspraken tot de uitspraken rekenen of moeten we er een aparte plaats voor inruimen? Sommige logici doen dit wel, andere niet. Uit didactisch oogpunt verdient het geen aanbeveling over open uitspraken te spreken. Men werkt met open uitspraken net zo als met gesloten uitspraken en kan er op dezelfde wijze conclusies uit trekken. In de brugklas werken we lange tijd alleen met open uitspraken. We kunnen dit niet volhouden, zodra we negaties van uitspraken met vrije variabelen willen formuleren. We hebben kwantoren nodig om verschil te kunnen maken tussen altijd niet en niet altijd.

Een goede omschrijving van 'variabele' kunnen we eerst geven door analyse van het gebezigde wiskundige taalsysteem. Eerst dan kan men goed duidelijk maken wat substitueren is.

2 Kwantoren

Zoals reeds door Dr. Vredenduin gesuggereerd werd, kunnen we ook in de schoolwiskunde niet enkel blijven werken met vrije variabelen. In heel wat gevallen zijn we genoodzaakt variabelen

te binden; maar wanneer en hoe moeten we dit doen?

Eén van de vele manieren om variabelen te binden, is het gebruik van kwantoren. Wat betekenen deze kwantoren? Wat is hun onderlinge verhouding, speelt hun plaats een rol en hoe is hun gedrag t.o.v. negaties?

Geeft het gebruik van kwantoren al of niet een andere betekenis aan een bewering? Spelen ze een rol bij het elimineren of bij het oplossen van vergelijkingen?

Dit zijn allemaal vragen, waarmee zowel de leraar als de leerlingen geconfronteerd worden. Wellicht zijn ze de moeite waard om eens dichterbij bekeken te worden.

We hopen dat deze samenkomst met onze vlaamse vrienden weer een succes zal worden. Gaarne wekken we u dan ook op aanwezig te zijn.

Het bestuur

Cursus 'Grondslagen van de Operationele Research' (kwantitatieve methoden, hulpmiddel voor het nemen van beslissingen)

Het Centrum voor Postacademisch Technisch Onderwijs in de Werktuigbouwkunde – samenwerkingsverband tussen de TH Delft, TH Eindhoven en TH Twente alsmede het Koninklijk Instituut van Ingenieurs en de Onderwijscommissie VNO/NCW – organiseert van 20 t/m 22 maart 1978 en van 8 t/m 10 mei 1978 de cursus 'Operationele Research' (kwantitatieve methoden, hulpmiddel voor het nemen van beslissingen).

Deze cursus wordt *verzorgd* door de vakgroepen Produktieorganisatie van de Afdeling der Werktuigbouwkunde en Operationele Research van de onderafdeling der Toegepaste Wiskunde van de Technische Hogeschool Twente. De cursus wordt gehouden aan de TH Twente, campus Drienerlo, Gebouw voor Werktuigbouwkunde.

De *doelstelling* van de cursus is het kennis laten maken met de toepassingsmogelijkheden van Operationele Research, het introduceren van wiskundige modelbouw, het leren kennen en begrijpen van oplossings technieken voor standaardproblemen.

De cursus *bestaat* vooral uit hoorcolleges. Daarnaast worden enkele werkcolleges ingelast.

De cursus is *bestemd* voor diegenen – op academisch of daarmee vergelijkbaar niveau – die in hun werk geconfronteerd worden met het nemen van beslissingen, waarbij kwantitatieve methoden een belangrijk hulpmiddel kunnen zijn. Deelname is in principe niet gebonden aan een bepaalde disciplinaire achtergrond, hoewel enige kennis van lineaire algebra en waarschijnlijkheidsrekening wenselijk is.

De *deelnamekosten* bedragen f 850, – per persoon (inclusief boek, 6 lunches en einddiner op 9 mei 1978, koffie/thee). Indien gewenst kan op de campus overnacht worden (kosten hiervoor f 22,50 per persoon per nacht incl. ontbijt).

Een *brochure* wordt op verzoek toegezonden.

Het secretariaat van het Centrum is gevestigd in het Gebouw van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs, Prinsessegracht 23, Postbus 30424, 2500 GK 's-Gravenhage, tel. 070-646800 tst. 53.



Jubileum congres Wiskundig Genootschap 29-30-31 maart 1978

In 1778 nam A. B. Strabbe, leermeester der Wis- en Sterrekunde te Amsterdam, het initiatief tot oprichting van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk 'Een onvermoeide arbeid komt als te boven'. Op een driedaags congres te Amsterdam in 1978 (29, 30 en 31 maart) zal dit feit feestelijk worden herdacht.

Vanaf zijn oprichting heeft het Wiskundig Genootschap zich actief ingezet voor het onderwijs in de wiskunde in Nederland (trouwens, een groot aantal van de eerste leden was Schoolmeester of Leermeester in de Wiskunde). Zo zijn op last van het W.G. verschillende leerboeken geschreven en uitgegeven voor het gebruik in de scholen (o.a. J. de Gelder's *Meetkundige Analyse* in 1811-1813; zie verder het uitvoerige artikel van Joh. Wansink over de Nederlandse Schoolboekenmarkt

1800–1900, dat zal verschijnen in het maaltijdschrift van het 'Nieuw Archief voor Wiskunde' (3 × per jaar verschijnend wetenschappelijk tijdschrift van het W.G., waarin ook vraagstukken ter oplossing worden opgenomen).

Uiteraard wordt op het jubileumcongres dan ook ruime aandacht geschonken aan thema's betreffende wiskunde in het onderwijs en didactiek van de wiskunde. Zo zal Prof. dr. J. J. Seidel een algemene voordracht houden, getiteld 'De Vijfhoek', die speciaal ook voor leraren bedoeld is; het I.O.W.O. in Utrecht heeft twee voordrachten toegezegd: één over een stuk leerstof voor de *brugklas* (M. Kindt, 'Autowegen') en een tweede onderwerp 'Functies van twee variabelen' door J. de Lange. Ook het C.I.T.O. in Arnhem verzorgt een bijdrage: H. N. Schuring zal spreken over 'Toetsen: toen en thans'. Verder is in het congresprogramma voorzien een sectie van de Wiskunde, waarvoor o.a. een voordracht is toegezegd door J. van Dormolen.

Ter gelegenheid van het Jubileumcongres wordt een expositie voorbereid; zie hierover het artikel van Prof. van der Blij.

Men hoeft geen lid van het Wiskundig Genootschap te zijn om deel te kunnen nemen aan dit Jubileumcongres. De congreskosten bedragen f 25, —; hiervoor ontvangt men o.a. de Proceedings van het congres (die de ruim 25 voordrachten op uitnodiging zullen bevatten) en de korte samenvattingen van de sectievoordrachten. Plaats van het congres is het Hoofdgebouw van de Vrije Universiteit, de Boelelaan, Amsterdam.

Indien men wil deelnemen aan dit congres kan een inschrijfformulier worden aangevraagd bij het secretariaat van het congres: Mw. S. J. Kuipers-Hoekstra, Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam; tel. 020-947272.

Diegenen, die nog niet lid zijn van het Wiskundig Genootschap en die geïnteresseerd zijn in het lidmaatschap zij meegedeeld, dat de kosten van het lidmaatschap f 45, — per jaar bedragen (prijs van 1977). Voor lidmaatschap dient men zich aan te melden bij Dr. E. M. J. Bertin, Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Utrecht, Budapestlaan 6, Utrecht.

P. C. Baayen

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brenkt ter kennis van belanghebbenden, dat

- I. zij, die zich in 1978 wensen te onderwerpen aan het examen *wiskunde m.o. A*, hetzij volgens het oude programma, hetzij volgens het nieuwe programma, zich uitsluitend kunnen aanmelden door het examengeld à f 60, — vóór 1 april 1978 over te maken op postrekening 172007 ten name van de voorzitter examencommissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 's-Gravenhage, met vermelding van *volledige* naam en adres van de kandidaat en de vermelding m.o. A;
- II. zij, die zich in 1978 wensen te onderwerpen aan het examen *wiskunde m.o. B*, hetzij volgens het oude programma, hetzij volgens het nieuwe programma, zich uitsluitend kunnen aanmelden door het examengeld à f 60, — vóór 1 april 1978 over te maken op postrekening 172007 ten name van de voorzitter van de examencommissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 's-Gravenhage, met vermelding van *volledige* naam en adres van de kandidaat en de mededeling m.o. B.

Na 1 april 1978 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie. Zij ontvangen dan tevens een formulier waarop zij kunnen aangeven of zij het examen volgens het oude programma, dan wel volgens het nieuwe programma wensen af te leggen.

De nieuwe programma's zijn omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde' Jrg. 63 aflevering 2, november 1975, blz. 86 t/m 93.

Men kan deze programma's verkrijgen door storting van f 2, — op postgiro 172007 ten name van voorzitter examencommissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 's-Gravenhage, met vermelding 'examenprogramma'. De overgangsregeling luidt als volgt:

OVERGANGSREGELING M.O.-A

Met ingang van 1 januari 1978 is aanmelding voor het examen volgens het nieuwe programma mogelijk. Na 1 januari 1981 is aanmelding voor het examen volgens het oude programma niet meer mogelijk, tenzij men over geldige vrijstellingen beschikt. In de periode 1 januari 1978 t/m

31 december 1980 kan men zich aanmelden voor het examen volgens het oude, dan wel volgens het nieuwe programma. Vrijstellingen, behaald in enig jaar, blijven 2 jaar geldig. Dit betekent in het bijzonder dat degene die zich in 1979 of 1980 opgegeven heeft voor het examen volgens het oude programma, in de gelegenheid is dit examen volgens het oude programma te voltooien in 1981, resp. 1982.

Indien men in de periode 1 januari 1978 t/m 31 december 1980 enige vrijstellingen behaalt bij het examen oude stijl, maar bij nader inzien het examen in nieuwe stijl wenst te voltooien, dan meldt men zich aan voor het examen nieuwe stijl (onder betaling van het verschuldigde examengeld). Vrijstellingen voor Algebra, Analyse of Analytische Meetkunde blijven in dat geval geldig met inachtneming van de gebruikelijke termijn. Uiteraard dient men dan het examen Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening zowel schriftelijk als mondeling af te leggen.

Tenslotte zij nog opgemerkt dat bij het examen nieuwe stijl de keuze van de vakken die een deel-examen vormen, aan de kandidaat wordt overgelaten, met dien verstande dat een deel-examen twee vakken dient te omvatten.

De samenstelling van een deel-examen oude stijl blijft ongewijzigd en is aldus voorgeschreven: of Algebra met Analyse of Analytische Meetkunde met Projectieve en Beschrijvende Meetkunde.

OVERGANGSREGELING M.O.-B

Met ingang van 1 januari 1978 is aanmelding voor het examen volgens het nieuwe programma mogelijk. Na 1 januari 1981 is aanmelding voor het examen volgens het oude programma niet meer mogelijk, tenzij men over geldige vrijstellingen beschikt. In de periode 1 januari 1978 t/m 31 december 1980 kan men zich aanmelden voor het examen volgens het oude, dan wel volgens het nieuwe programma. Vrijstellingen, behaald in enig jaar, blijven 2 jaar geldig. Dit betekent in het bijzonder dat degene die zich in 1979 of 1980 opgegeven heeft voor het examen volgens het oude programma, in de gelegenheid is dit examen volgens het oude programma te voltooien in 1981 resp. 1982.

Een deel-examen dient ofwel te bestaan uit Analyse met Functietheorie, ofwel uit de Meetkunde vakken. Dit geldt zowel bij de oude als bij de nieuwe regeling.

Namens de minister,
A. Th. Eijzenring

Het onderwijs, de eerste rijkdom van het land

Meer dan twee miljoen leerlingen slaan elke morgen opnieuw de weg naar de school in. Op hen rusten de toekomstige welvaart van hun gezinnen en de voorspoed van het hele land.

De opleiding van jongeren zal slagen dank zij de inspanning van de onderwijzers, maar ook dank zij de geperfectioneerde schooluitrustingen die goed zijn aangepast aan de behoeften van de Gemeenschap.

Op dat gebied werken de industrie, het onderwijs en de overheid nauw samen en bereiden zij onder andere de grootste pedagogische manifestatie van het jaar 1978 voor.

We hebben het hier over de 16e Europese Leermiddelen-vakbeurs DIDACTA, die zal plaatsvinden in het Tentoonstellingspark van Brussel, Eeuwfeestpaleizen van 10-14 april 1978. De Internationale Jaarbeurs van Brussel, die door Eurodidac werd belast met de organisatie van de komende Vakbeurs, heeft reeds de vaste inschrijving van 250 exposanten die 24 landen vertegenwoordigen: België en de meeste Europese landen, waar dan nog Japan en Australië moeten worden bijgerekend.

Deze gespecialiseerde fabrikanten zullen hun materieel in 8 sectoren verdelen:

- audio-visuele middelen en elektronische informatieverwerkende apparatuur (hardware en software)
- demonstratie- en experimenteel apparatuur
- schoolboeken, woordenboeken, atlassen, kinderboeken en vakliteratuur
- wandkaarten, klaspanelen, hechtpanelen en toebehoren
- programma's, cursussen en didactische spelen
- geografische, geologische en technologische kollekties en modellen, ook voor laboratoria

– schrijfwaren, materiaal voor handarbeid, voor technische werken en laboratoriumbenodigdheden

– algemene schooluitrusting en voorzieningen voor vaklokalen.

De 16 DIDACTA-Vakbeurs, die gewijd is aan de zaak van het onderwijs, zal nog aan belang winnen door meerdere studiedagen:

– School management in onderwijskundige en beheersmatige zin

– De vorming in de onderneming

– Een voorbeeld van een multi-media studie bestemd voor de lagere school (leeftijdsgroep: 8-11 jaar)

– Wederkerend onderwijs (open university).

De Vakbeurs zal bovendien onderdak verschaffen aan twee speciale tentoonstellingen, één gewijd aan geografische en historische atlanten en wereldbollen, het andere gewijd aan Bijbels en georganiseerd door de Wereld Bijbel Organisatie.

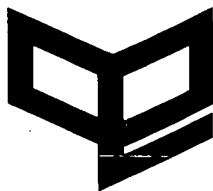
Zo zal de 16e Vakbeurs DIDACTA niet alleen een mogelijkheid zijn om vruchtbare contacten te leggen tussen de industrie en alle personen die geïnteresseerd zijn in pedagogische problemen, schooldirecties, onderwijzers en ouders, maar ze zal ook een weergave zijn van de kwaliteit van het onderwijs in België.

Wim Klein (Pascal)

Nederlands Rekenwonder, zou ook de leerlingen van uw school willen laten genieten van zijn voordracht.

Inlichtingen: WIM KLEIN

Brouwersgracht 32^I - Amsterdam (c) - Tel. 020-2628 10



getal en ruimte

De wiskundemethode voor m.a.v.o., h.a.v.o. en v.w.o. die 'àf' is en 'bij' blijft.



- Van de BRUGKLASDELEN verscheen al in 1977 een **volledig herziene versie**, met onderscheid in basisstof, herhalingsstof en verrijkingsstof. Inmiddels verschenen ook uitgebreide handleidingen met toetsen en antwoorden.

- Voor het tweede jaar m.a.v.o. verschijnt voor de zomervakantie het nieuwe deel 2M1. Proefkatern is in productie.

- Voor de BOVENBOUW h.a.v.o. en v.w.o. zijn de herziene delen 4/5H2 en 5/6V3 al verschenen, voor de zomer verschijnen de herziene edities van 4/5H1, 5/6V1 en 5/6V2.

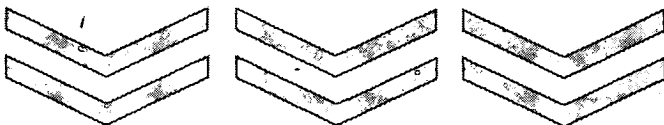
- Het jaarlijkse Informatiekatern is uit!
Nog niet ontvangen? Even een berichtje en binnen enkele dagen kunt u er zich volledig van op de hoogte stellen dat Getal en Ruimte de vernieuwingen brengt op het moment dat u ze nodig hebt.

- Kennismaken met Getal en Ruimte? Raadpleeg eerst onze Catalogus Exacte Vakken. Die is er ook al!

- Spelen de prijzen ook een belangrijke rol? En de degelijke uitvoering? Vergelijk u gerust...

Educaboek B.V. 4104 AP Culemborg Industrieweg 1
Tel: (03450) 3143

educaboek bv
culemborg



INHOUD:

J. van Dormolen en M. Kindt: Anticiperen op de behandeling van x

P. G. J. Vredenduin: Differentiaalvergelijkingen, maar geen differentiaal 262

Fred Goffree: Vakdidactische notities 267

W. Ganzevoort: Enkele opmerkingen bij het examen wiskunde II in 1977 273

Internationale Wiskunde Olympiade 1977 274

Bram Lagerwerf: Korrel 275

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 276

Boekbespreking 279

Recreatie 282

Mededelingen 286

ADRESSEN AUTEURS:

J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest.

W. Ganzevoort, Barbierstraat 93, Gorcum.

Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.

M. Kindt, Schuurhoven 7, Bennekom.

Bram Lagerwerf, Laan van Cattenbroeck 29, Zeist.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.