

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang

1977/1978

no 2

oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 32,—. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 85,—.

Toetsing en evaluatie in het onderwijs¹⁾

J. TIMMER

1 Inleiding

De aandacht voor toetsing en evaluatie is de laatste tien jaar in het onderwijs sterk toegenomen. Dit geldt zowel nationaal als internationaal. Deze vergrote aandacht voor evaluatie zien we niet alleen binnen de school, maar eveneens er buiten bij o.a. instituten als het I.O.W.O. Tegelijkertijd worden de doelstellingen van ons onderwijs eveneens sterker ter discussie gesteld. Dit roept de belangrijke vraag op of en hoe het onderwijs de nieuw geformuleerde doelen van de leerlingen bereikbaar kan maken. Hierbij komen eveneens evaluatieve aspecten naar voren, omdat we zichtbaar willen maken in hoeverre de nagestreefde doelen ook werkelijk bereikt zijn.

De sterkere aandacht voor evaluatie roept ook allerlei vragen op. Sommige van deze vragen zijn oude vragen die in de veranderde situatie opnieuw naar voren komen. Ik denk hierbij bijvoorbeeld aan de functie en de inrichting van de eindexamens. Daarnaast zijn er ook nieuwe vragen opgeroepen, zoals bijvoorbeeld over de functie en de rol van objectieve toetsingsmethoden. De vragen zijn allerm minst eenduidig beantwoordbaar.

Bij de beantwoording van de naar voren komende vragen kunnen allerlei overwegingen een rol spelen die, afhankelijk van de opvattingen die men heeft, op verschillende wijzen tegen elkaar afgewogen kunnen worden. In het volgende zal ik enkele grove lijnen schetsen waarbinnen deze vragen geplaatst kunnen worden.

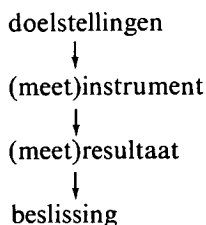
Dit kader is bedoeld om een stuk structurering aan te dragen t.a.v. de factoren en de overwegingen die bij de vraagpunten een rol spelen. Wat betreft de toetsing en de evaluatie in het wiskundeonderwijs, zal ik mij hierbij beperken tot de vakgerichte cognitieve doelen.

2 Van doelstelling tot doelstellingsmeting . . . en verder

In onderstaand schema is aangegeven hoe men uitgaande van de doelstellingen een (meet)instrument kan ontwerpen om na te gaan in hoeverre de doelstellingen bereikt zijn. Het gebruik van het (meet)instrument geeft een (meet)resultaat, waarop vervolgens een beslissing gebaseerd kan worden.

1) Bewerking van een lezing op 30 oktober 1976 te Utrecht op de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Schema 1:



We spreken van 'meten' wanneer het resultaat op eenduidige wijze verkregen wordt. Deze eenduidigheid houdt bijvoorbeeld in dat het niet mogelijk is dat twee onafhankelijke beoordelaars aan dezelfde prestatie op een studietoets verschillende scores toekennen. Bij objectieve studietoetsen wordt het meetresultaat gevormd door de scores die, hetzij op een ééndimensionale schaal hetzij op een multidimensionale schaal geplaatst, geïnterpreteerd worden. Bij een dergelijke objectieve scoring kan men inderdaad spreken van meten.

Het schema is ook te gebruiken als er half objectief gescoord wordt, zoals het geval is bij 'open vragen'. Eveneens is het schema toepasbaar bij subjectieve waarnemingen, bij interviews of bij observaties als instrument. Zowel bij half-objectieve scoring als bij subjectieve waarneming kan de objectiviteit vergroot worden door meerdere onafhankelijke beoordelaars of waarnemers in te schakelen.

3 De te nemen beslissingen

De beslissingen die op grond van de (meet)resultaten worden genomen, kunnen worden onderscheiden in drie soorten:²⁾

- a) selectie-beslissingen
- b) diagnostische beslissingen
- c) evaluatieve beslissingen.

Onder *selectie-beslissingen* worden toelatings- en overgangsbepalingen (slagen/zakken) gerekend. Ook plaatsingsbepalingen (bijvoorbeeld MAVO of HAVO) reken ik hieronder. Deze beslissingen hebben een voorspellend karakter op de lange termijn.

Bij *diagnostische beslissingen* gaat het erom of een leerling een steunprogramma nodig heeft, en zo ja, welk steunprogramma. In het algemeen zijn hier beslissingen aan de orde omtrent de richting waarin de leerling het onderwijs het beste kan voortzetten (welk vervolprogramma). Deze beslissingen hebben een voorspellend karakter op de zeer korte termijn.

Bij *evaluatieve beslissingen* gaat het er bijvoorbeeld om te beslissen welke delen van de leerstof nog eens opnieuw behandeld dienen te worden, omdat ze niet zijn overgekomen in de gehele klas. Ook beslissingen t.a.v. het gebruik van hulpmiddelen (leerboek, toetsen, overheadmateriaal e.d.) vallen hieronder. Selectie-beslissingen en diagnostische beslissingen hebben een individueel

2) Deze indeling is ontleend aan Warries (Drie redenen om te toetsen in het onderwijs: Pedagogische Studiën 1971 (48)).

karakter in die zin dat het hier beslissingen betreft omtrent de individuele leerling.

Bij evaluatieve beslissingen gaat het vaak veel meer om de klas of groep als geheel.

Op een (meet)instrument kan men in principe alle drie de soorten beslissingen baseren. Het soort beslissingen dat men op het (meet)resultaat wil baseren heeft vaak consequenties voor de constructie van het (meet)instrument. Zo zou men een *selectietoets* kunnen definiëren als een toets die qua constructie geoptimaliseerd is voor selectie-beslissingen. Evenzo is een *diagnostische toets* een toets die qua constructie geoptimaliseerd is voor diagnostische beslissingen. In sommige gevallen zijn de verschillen in constructie echter niet zo groot. Het gaat dan meer om het gebruik als selectiemiddel of om het diagnostisch gebruik.

4 De constructie van het (meet)instrument

De belangrijkste factoren die bij de constructie van het (meet)instrument een rol spelen zijn:

- 1) doelstellingsgerichtheid
- 2) meetbetrouwbaarheid

Bij de *doelstellingsgerichtheid* gaat het om een zo nauw mogelijk aansluiting bij de doelstellingen die door het instrument geoperationaliseerd worden.

Bij de *meetbetrouwbaarheid* gaat het er om dat de gevonden score zo dicht mogelijk ligt bij de hypothetische ware score.³⁾

Over het algemeen geven vragen waarvan verwacht wordt dat 50% van de leerlingen de vraag goed zal beantwoorden, de beste bijdrage tot een hoge meetbetrouwbaarheid. Daarentegen is het mogelijk dat bij een diagnostische toets over de basisstof, in verband met de doelstellingsgerichtheid, juist veel vragen dienen te worden opgenomen waarvan verwacht wordt dat 80% van de leerlingen de vraag goed zal beantwoorden.

De factoren doelstellingsgerichtheid en meetbetrouwbaarheid kunnen, zoals uit bovenstaand voorbeeld blijkt, implicaties hebben voor het meetinstrument, zodanig dat keuzes dienen te worden gemaakt, waarbij aan de ene factor prioriteit verleend wordt boven de andere factor. Bij selectie-instrumenten valt deze hoogste prioriteit vaak bij de meetbetrouwbaarheid. Aan de doelstellingsgerichtheid worden echter ook de hoogste eisen gesteld. Dit geldt vooral bij examens, omdat hier anders een verkeerd richteffect vanuit kan gaan naar het onderwijs.

5 De procedures voor afname van het instrument

Bij een schriftelijk examen is precies voorgeschreven op welke wijze het examen dient te worden afgenomen. Bij een studietoets hoort een handleiding, waarin

- 3) De hypothese is dat elke leerling een *ware score* (de score die hij werkelijk verdient) en een *gevonden score* (de score die het meetinstrument aangeeft) heeft. Door 'pech' en 'geluk' kan de gevonden score afwijken van de ware score.

staat aangegeven hoe de afname plaats vindt. Deze procedures voor afname van het instrument zijn afhankelijk van de situatie, in meerdere of in mindere mate voorgeschreven. Soms is de toelichting die de docent bij de afname geeft, woorde-lijk voorgeschreven zodat de condities voor alle leerlingen op de verschillende scholen waar het instrument wordt afgenomen, precies dezelfde zijn. De procedures voor de afname staan dan beschreven in de vorm van een draaiboek dat precies gevolgd moet worden. De wijze waarop het instrument gehanteerd wordt, de aard van de procedures, is sterk afhankelijk van het soort beslissingen dat men op het (meet)resultaat wil baseren. Zo zal bij selectiebeslissingen veel aandacht worden besteed aan een goede spiekpreventie. Bij zuiver diagnostisch gebruik zal deze spiekpreventie in veel mindere mate een rol gaan spelen. Ook is het mogelijk dat de leerlingen bij zuiver diagnostisch gebruik het werk direct zelf nakijken, waardoor een onmiddellijke 'feed-back' wordt verkregen. Dit betekent dat er bij een diagnostische toets geheel andere procedures mogelijk zijn dan bij een selectietoets.

Over diagnose zijn er in de onderwijskunde uiteenlopende opvattingen. Sommige van deze opvattingen zijn duidelijk achter het bureau en niet in de praktijk van de klas ontstaan. Zo is de opvatting dat men met een centraal beschikbaar gestelde toets de individuele denkfouten van de leerling zou kunnen opsporen in mijn ogen een illusie. Ook in het onderwijs wordt vaak te instrumenteel gedacht, in die zin dat aangenomen wordt dat de diagnostische toets meer dan een eerste stap is waaruit blijkt in welke richtingen mogelijke tekorten liggen. Voor een nadere diagnose zijn volgende stappen nodig. Omdat deze denkfouten individueel zeer verschillend kunnen zijn, kan deze nadere diagnose het beste in gespreks-vorm of discussievorm plaatsvinden, hetzij met de leraar, hetzij in het kader van groepswork. De gehele diagnose bestaat dan uit een aantal achtereenvolgende stappen (de diagnostische procedure) waarvan de afname van de diagnostische toets de eerste stap is.

In deze opvatting is een diagnostische toets een doelstellingsgerichte toets die diagnostisch gebruikt wordt. De wijze waarop het instrument in de klas gehanteerd wordt volgens diagnostische procedures, is hierbij vaak belangrijker dan het instrument zelf.

Selectie-beslissingen hebben, zoals reeds gesteld, een voorspellend karakter op de lange termijn. Uit onderzoek⁴⁾ is gebleken dat deze voorspellingen voor deze leeftijdsgroepen moeilijk te maken zijn. Bij eindexamens en overgangsproefwerken dient er echter in het huidige schoolsysteem een beslissing te vallen: slagen of zakken, voldoende of onvoldoende. Elke leraar weet uit ervaring dat de gegevens niet of nauwelijks interpreteerbaar zijn als er vermoedens zijn over onregelmatigheden. Ook bij selectie-toetsen zijn de procedures voor de afname van essentieel belang.

Samenvattend kan gesteld worden dat de procedures voor de afname bij diagnostische toetsen en bij selectietoetsen zeer verschillend zijn. In beide gevallen zijn zij echter van groot belang. Het door elkaar halen van procedures of het veronachtzamen daarvan, kan tot gevolg hebben dat de resultaten minder goed interpreteerbaar zijn. Door velen worden deze procedures dan ook beschouwd

4) J. Timmer, E. Warries; Determinatie en selectie in de brugklas.

CITO-RITP informatiekatern V, CITO, Arnhem 1971.

als behorend tot de instrumentering, die dus niet beperkt is tot het blaadje waar de vragen op staan.

6 Het niveau waarop getoetst wordt

Voor onderwijsdoelen op cognitief gebied heeft Bloom⁵⁾ een classificatie naar niveau gegeven.

Hierin worden doelen in zes categorieën ingedeeld. In de praktijk is vaak een vereenvoudigde taxonomie bestaande uit drie categorieën voldoende. In onderstaande driedeling staan de overeenkomende categorieën van Bloom er tussen haakjes achter.

- a) kennis (knowledge)
- b) toepassing (comprehension, application)
- c) inzicht (analysis, synthesis, evaluation)

Bij operationalisatie van deze drie soorten doelen in de vorm van concrete vragen treden problemen op die het beste door het volgende voorbeeld kunnen worden aangegeven. De vraag '2 + 3 = . . .' zullen we allemaal vanzelfsprekend in de categorie 'kennis' classificeren. Een kind dat echter pas tellen geleerd heeft en de hoeveelheden twee en drie achter elkaar opnieuw aftelt is wel degelijk bezig met 'inzicht'. Dit betekent dat een bepaalde vraag slechts in afhankelijkheid van het voorafgaand onderwijs in een van de drie hierboven genoemde categorieën geplaatst kan worden.⁶⁾

We kunnen ook stellen dat uit het goed beantwoorden van een bepaalde vraag pas inzicht blijkt, wanneer deze vraag buiten het directe kennisterrein ligt. Dit kennisterrein dient dan nader onderzocht te worden. Dit betekent dat het voor het meten van inzicht nodig is de context mee te meten. Onder context wordt hier verstaan alle condities waaronder de betreffende vraag door de leerling wordt beantwoord. Het is duidelijk dat hierbij de aard van het voorafgaand onderwijs een van de belangrijkste condities is. De omvang van het kennisterrein van de betreffende leerling dient hierbij nader onderzocht te worden om na te gaan of de betreffende vraag voor deze leerling inderdaad een inzichtvraag is.

7 Het tegen elkaar afwegen van meetbetrouwbaarheid en doelstellingsgerichtheid

In paragraaf 4 (de constructie van het (meet)instrument) werd aangegeven hoe de factoren meetbetrouwbaarheid en doelstellingsgerichtheid voor verschillende soorten toetsen op andere wijze tegen elkaar kunnen worden afgewogen. Ook ten aanzien van het soort doelen (kennis, toepassing, inzicht) zijn verschillende afwegingen mogelijk.

In schema 2 zijn de soorten doelen afgezet tegen de wijze waarop het (meet)-resultaat verkregen is.

- 5) B. S. Bloom (ed.) Taxonomy of educational objectives. Handbook I: Cognitive Domain; Longmans, New York 1966.
- 6) J. Timmer, Studietoetsen en doelstellingen CITO-RITP informatiekatern IV, CITO, Arnhem, 1971.

Schema 2:

resultaat doelstelling		wijze waarop het (meet)resultaat verkregen is		
		objectief	semi-objectief	subjectief
soorten doelen	kennis			
	toepassing	←	①	
	inzicht		←	②

← hogere meetbetrouwbaarheid

↓ doelstellingsgerichtheid i.v.m. verschuiving van de doelstellingen

De reeks 'subjectief, semi-objectief, objectief' is bedoeld als een opklimmende reeks waarbij vanaf subjectieve waarnemingen in de klas via mondelinge beurten, proefwerken met open vragen (semi-objectief) steeds meer van meten kan worden gesproken zoals bij studietoetsen met meerkeuzevragen (objectief). Wanneer een (meet)resultaat op objectieve wijze verkregen wordt, draagt dit bij tot een verhoogde meetbetrouwbaarheid (zie pijl onderaan schema 2). In verband met het belang van deze factor proberen we dus zoveel mogelijk in de linker kolom terecht te komen.

Bij de soorten doelen is er in verband met de vernieuwing van het onderwijs een sterkere aandacht voor de inzichtelijke doelstellingen. Deze verschuiving van doelstellingen maakt dat de doelstellingsgerichtheid andere accenten dient te krijgen en anders komt te liggen (zie de pijl rechts van schema 2). In verband met het belang van de factor doelstellingsgerichtheid proberen we dus zoveel mogelijk in de onderste rij terecht te komen. In verband met de meetbetrouwbaarheid en de verschuiving van doelstellingen is de cel links onderaan, waarbij inzicht objectief gemeten wordt, ons eerste aandachtspunt.

Het is mogelijk inzicht objectief meetbaar te maken met behulp van bijvoorbeeld vier-keuzevragen. Dit is echter geen eenvoudige zaak. Er zijn de volgende drie bezwaren⁷⁾ aan verbonden.

- 1 Om zeker te weten dat er werkelijk inzicht gemeten wordt, dient de context te worden meegemeten. De vraag is hier of een bepaalde vraag misschien voor sommige leerlingen een inzichtvraag is en voor andere leerlingen een kennisvraag. Het meemeten van de context is een heel werk.

7) A. D. de Groot, R. F. van Naerssen: Studietoetsen construeren, afnemen en analyseren, blz. 156, Den Haag, Mouton, 1969.

- 2 Bij het meten van inzicht kan vaak de vraag gesteld worden, of er nog wel effecten van gegeven onderwijs gemeten worden.
Sommige inzichtvragen zijn onder bepaalde omstandigheden beter op hun plaats in een toets waarin de aanleg voor het vak gemeten wordt ('ability test').
- 3 Omdat een inzichtvraag betrekking heeft op stof die net even buiten het kennisterrein van de leerling ligt, kunnen er trainingseffecten optreden. Bij examens kan dit tot gevolg hebben dat leraren hun leerlingen op dergelijke opgaven gaan trainen, zodat het kennisopgaven worden. Zo is het mogelijk dat de volgende keer een opgavenserie gegeven wordt, waarin nieuwe moeilijkheden aan de oude toegevoegd worden. Het gevolg hiervan is dat er een ongewenste uitbouw van de leerstof optreedt. Een voorbeeld hiervan is de serie examenopgaven over het onderwerp reeksen op het vroegere VHMO: Dergelijke effecten kunnen in opeenvolgende jaren steeds zwaarder de school gaan belasten en de scholen dwingen om mee te doen aan deze training.

De hierboven beschreven drie bezwaren spelen bij selectietoetsen (vooral bij examens) een grote rol. Om deze redenen vraag ik mij af of het wel zo aanbevelenswaardig is om bij examens inzicht objectief te willen toetsen. Hierbij weegt bij mij het eerste bezwaar het zwaarste in verband met het billijkheids-aspect t.o.v. de kandidaten.

Omdat de drie genoemde bezwaren in zekere zin ook gelden voor het semi-objectief toetsen van inzicht en ook voor het objectief toetsen van toepassing (de beide aangrenzende cellen) vraag ik mij af of, alles tegen elkaar afwegend, bij examens het optimum niet gevormd wordt door de grijs gemaakte cellen in de diagonaal.

Mijn voorstel komt erop neer dat kennis in de vorm van meerkeuzevragen objectief getoetst wordt en dat toepassingen met open vragen semi-objectief getoetst wordt. Het schriftelijk examen heeft dan betrekking op kennis en toepassing. Daarnaast zou een mondeling examen gehouden kunnen worden dat vooral dient om het inzicht van de kandidaat te toetsen. Een argument daarvoor is dat datgene wat geëxamineerd wordt, vaak ook het beste wordt onderwezen. Om verkeerde richteffecten te voorkomen dienen dus zowel kennis, toepassing als inzicht geëxamineerd te worden.

Bij een examen dient, om het percentage verkeerd genomen beslissingen zo gering mogelijk te houden, de meetbetrouwbaarheid zo hoog mogelijk opgevoerd te worden. Op het ogenblik is op het CITO een project gestart om de mogelijkheden daartoe bij open vragen te onderzoeken (zie gestippelde pijl 1). Daarnaast zou onderzocht dienen te worden in hoeverre het mogelijk is het mondeling examen door het aanreiken van criteria voor de beoordeling wat meer te objectiveren (zie pijl 2).

Bij diagnostische toetsen vervallen de bezwaren genoemd onder 1) en onder 3). Het meeten van de context kan plaatsvinden in de volgende stappen van de diagnostische procedure. Wat betreft het laatste bezwaar kan opgemerkt worden dat hier alvast enkele vragen uit de vervolgleerstof kunnen worden opgenomen. Dit betekent dat bij diagnostische toetsen, waarbij de doelstellingsgerichtheid zwaarder weegt dan de meetbetrouwbaarheid, de zaak anders kan komen te

liggen dan bij de selectie-instrumenten. Doordat de eerder genoemde bezwaren bij diagnostische toetsing wat minder zwaar wegen en het accent op de doelstellingsgerichtheid ligt, zijn de mogelijkheden hier wat ruimer; mogelijkheden die afhankelijk van de omstandigheden op verschillende wijze tegen elkaar afgewogen kunnen worden.

8 Door wie wordt het instrumentarium opgesteld?

Eindexamens kunnen als centraal examen (CE) of als schoolonderzoek (SO) worden afgenomen. In Nederland wordt meestal een combinatie van beide toegepast.

Schema 3:

school- type \ vorm van examen	objectief (vierkeuze vraag)	semi-objectief (open vraag)	subjectief (‘mondeling’)
LBO – A/B	– –	– SO	– (SO)
LBO – C	CE SO	CE SO	– (SO)
MAVO	CE SO	CE SO	– (SO)
HAVO	– –	CE SO	– SO
VWO	– –	CE SO	– SO

In schema 3 is aangegeven op welke schooltypen in welke vorm en op welke wijze eindexamens in de wiskunde worden afgenomen. Wat betreft schoolonderzoek heb ik meer op mogelijkheden en vermoedens ingevuld dan op zekerheden. Het schoolonderzoek wordt ook op alle scholen lang niet op dezelfde wijze opgezet. De grote vraag voor mij hierbij is in hoeverre dit schoolonderzoek een bijdrage geeft tot een hogere meetbetrouwbaarheid van het gehele examen. Ik vraag me dit af. Gegevens hierover heb ik niet.

Op het ogenblik komt ‘mondeling’ op het centraal examen niet voor. In verband met de toenemende belangrijkheid van de inzichtelijke doelen vraag ik me af of het mondeling examen dat ik hierboven voorstelde, niet het beste centraal

georganiseerd kan worden, waarbij leraren van andere scholen als gecommitteerden optreden.

Wat betreft de eindexamens wiskunde wordt het instrumentarium gedeeltelijk door de school en gedeeltelijk centraal opgesteld. Voor tussentijdse selectiebeslissingen (overgangsbepalingen) wordt het instrumentarium door de school opgesteld. Hierbij kan de school uiteraard gebruik maken van door het CITO of door educatieve uitgevers geconstrueerd toetsmateriaal.

Het instrumentarium voor diagnostische bepalingen wordt geheel opgesteld door de school. De doelstellingen die hierbij een rol spelen zijn vaak heel sterk didactisch gebonden. Centraal geconstrueerd toetsmateriaal heeft dan ook een status van 'halfprodukt'. Dit betekent dat het noodzakelijk is dat de leraar vóór de afname bekijkt in hoeverre het materiaal aansluit bij zijn eigen doelstellingen. Pas na eventuele aanpassingen ontstaat een voor hem bruikbaar eindprodukt.

9 Door wie worden de bepalingen genomen?

Schema 4:

soort beslissingen			
door wie worden de beslissingen genomen	selectie	diagnose evaluatie	
door de leerling in de klas			mikro
door de leraar (leraren-vergadering) in de school			meso
door centrale overheden buiten de school			makro

In schema 4 is de soort bepaling afgezet tegen het niveau waarop de bepaling wordt genomen. De mogelijkheden centraal examen en/of schoolonderzoek waarover ik hiervoor sprak passen in dit schema. Door invoering van het schoolonderzoek is er een tendens om bepalingen n.a.v. het eindexamen meer binnen de school te nemen (pijl 1). Hoewel de indruk bestaat dat het selectieve klimaat in de school eerder toe- dan afneemt, is er in ieder geval een grotere aandacht voor diagnostisch gebruik te constateren, wat een verbreding geeft t.o.v. de vroegere situatie (pijl 2). Eveneens is er een tendens om diagnostische bepalingen meer door de leerlingen zelf te laten nemen (pijl 3). Daarnaast zou het naar mijn mening wenselijk zijn als het examen tegelijkertijd wat meer evaluatief gebruikt zou worden (pijl 4). De evaluatieve bepalingen die hierbij aan de orde komen, zouden dan door de scholen genomen dienen te worden

(pijl 5). Heel in het algemeen vraag ik mij af of diagnostische en evaluatieve beslissingen niet het beste kunnen worden genomen door degenen die geëvalueerd worden. Dit geldt dan zowel bij evaluatie van scholen of leraren, als bij evaluatie van leerlingen.

10 Samenvatting en besluit

In paragraaf 1 heb ik gesteld dat het de bedoeling was een kader aan te dragen waarbinnen diverse vragen geplaatst kunnen worden. Het basisschema hiervoor is schema 1 (doelstellingen – (meet)instrument – (meet)resultaat – beslissing). Hierbij zijn de volgende dimensies gegeven:

- soort doelen (kennis, toepassing, inzicht)
- soort instrument (doelstellingsgerichtheid, meetbetrouwbaarheid)
- resultaat (objectief, half-objectief, subjectief)
- soort beslissingen (selectief, diagnostisch, evaluatief)
- wie stelt het instrument op (centraal geregeld, door de school geregeld)
- wie neemt de beslissing (degene die geëvalueerd wordt, iemand anders)

In de voorafgaande paragrafen is gebleken dat niet alle combinatiemogelijkheden even optimaal zijn. Welke mogelijkheid in een gegeven situatie gekozen wordt is tevens afhankelijk van de wijze waarop de verschillende aspecten tegen elkaar afgewogen worden. Bij toetsing en evaluatie heeft het instrument een centrale plaats. Dit instrument dient niet al te beperkt gezien te worden. De procedures volgens welke het instrument (in bepaalde zin) gehanteerd wordt zijn zeer belangrijk. Zij worden dan ook meestal tot de instrumentering gerekend. De vragen die er bestaan rondom toetsing en evaluatie, kunnen in het aangegeven kader geplaatst worden. Dit houdt in dat, bij meestal vrij algemeen gestelde vragen, diverse gevallen en mogelijkheden onderscheiden kunnen worden.

Het is denkbaar dat de vraag in het ene geval anders beantwoord wordt dan in het andere geval.

Voorbeelden van dergelijke vragen zijn de volgende:

- Moet er bij de constructie van evaluatie-instrumenten in de eerste plaats aangesloten worden bij de doelstellingen, of moet er in de eerste plaats op meetbetrouwbaarheid worden gelet? In welke gevallen wel? In welke gevallen niet?
- Moeten de beslissingen (op grond van evaluatiegegevens) genomen worden door degenen die geëvalueerd worden of door anderen? In welke gevallen wel? In welke gevallen niet?
- In welke gevallen is het nodig na te gaan in hoeverre doelstellingen bereikt zijn?
- In welke gevallen is het nodig objectief te toetsen?
- In hoeverre zijn mondelinge examens nodig? Moeten ze niet weer als centraal examen ingevoerd worden?

Tot besluit zou ik nog een opmerking willen maken over toetsing en evaluatie als element in het onderwijs als geheel. Toetsing en evaluatie staan primair ten

dienste van dit onderwijs. In verband hiermee zou ik willen eindigen met een vraag over de hoeveelheid tijd die aan toetsing en evaluatie besteed wordt. Evaluatie dient efficiënt en doelmatig plaats te vinden. Op sommige scholen wordt echter voortdurend geëvalueerd hetzij in de vorm van selectietoetsing hetzij in de vorm van diagnostische toetsing. De tijd besteed aan al deze toetsingen gaat dan ten koste van de tijd die besteed kan worden aan het onderwijs geven zelf. De evaluatie krijgt dan een te grote aandacht. Dit geldt vaak met name voor het laatste schooljaar, waarin de neiging bestaat om in het kader van het schoolonderzoek aan vrijwel alles wat de leerling doet of laat beoordelingen te koppelen. Daardoor lijkt het op sommige scholen wel alsof dit laatste schooljaar één lang groot examen is. Bij deze ontwikkeling dient naar mijn mening een groot aantal vraagtekens geplaatst te worden.

Uit de jaarrede 1976 van de voorzitter van de N.V.v.W.

... 'Het I.O.W.O..

Ernstige bezorgdheid bestaat er over de toekomst van het I.O.W.O.. In de memorie van toelichting van de Rijksbegroting 1977 wordt meegedeeld, dat het de bedoeling is over te gaan tot de geleidelijke opheffing van het I.O.W.O. als instituut voor leerplanontwikkeling en her- en bijscholing. Het instituut zal eventueel gehandhaafd worden als interuniversitair instituut. Welke opdrachten het dan krijgt wordt niet vermeld.

Door de minister is de Stichting Leerplan Ontwikkeling (de S.L.O.) in het leven geroepen. Over de taak die deze stichting heeft, bestaat grote onduidelijkheid.

Het vermoeden bestaat, dat het de mening van de minister is, dat het ontwikkelen van concrete leerstofinhouden dient te geschieden door de onderwijsgevenen. Over de begeleiding, de ondersteuning en de evaluatie van deze experimenten door externe instituten wordt niet gesproken.

Het komt er dus op neer, dat een uitstekend werkend instituut, dat door ons, de mensen uit de praktijk, als onmisbaar wordt gezien, en dat voor de N.V.v.W. enorm veel betekent, doordat het méde het gehele klimaat bepaalt, wordt opgeheven zonder dat onze mening is gevraagd en zonder dat een begin is gemaakt met het uitwerken van verantwoorde alternatieven en zelfs zonder de zekerheid dat er ooit alternatieven zullen worden uitgewerkt.

Ik weet dat ik namens u allen spreek, als ik zeg dat het onze mening is, dat door het opheffen van het I.O.W.O. een ernstige slag wordt toegebracht aan de leerplanontwikkeling en aan het gehele onderwijs in de wiskunde.

Tegen het voornemen het I.O.W.O. op te heffen kan niet fel genoeg geprotesteerd worden.' ...

Verslag van discussie op de jaarvergadering 1976

MEVROUW G. W. FOKKENS

Op verzoek van een aantal aanwezigen, en op grond van suggesties tijdens de rondvraag, wil ik trachten weer te geven wat er tijdens de discussies op de jaarvergadering – waarbij ik aanwezig was – gezegd is. Ik heb hierbij steeds geprobeerd zo objectief mogelijk weer te geven wat er ter sprake kwam.

's-Ochtends speelde de discussie zich af rond een aantal vragen, aan ons voorgelegd door de heer Timmer die de eerste inleiding hield. We gingen uit van de vraag wanneer het nodig is na te gaan in hoeverre inzichtelijke doelstellingen bereikt zijn, en hoe dit is na te gaan. De discussie die zich ontspon ging vooral om het hoe en waarom van inzicht. Uitgaand van zeer absolute uitspraken als: 'Inzicht toetsen moet altijd', 'Je hele les is met inzicht doorspekt', kwam er wat meer reliëf. Als voorbeeld werd aangehaald dat een jonge lagere-schoolleerling die moet uitrekenen wat $2 + 3$ is, daarmee wel degelijk inzichtelijk en analyserend aan het werk kan zijn. Daaruit blijkt dat je steeds moet aansluiten bij het kennisniveau van de leerling voor je over inzicht kunt gaan praten. Want een inzichtelijke vraag is niet voor elke leerling inzichtelijk. Daarbij werd de vraag opgeworpen of je wel altijd moet kiezen voor inzichtelijk leren. In bepaalde gevallen kan het inzicht later toch komen zonder dat het storend is? Waarmee je met de vraag blijft zitten of je inzicht nodig hebt om verder te gaan, en als je vindt van wel, moet je het dan ook toetsen? Want inzicht zonder kennis bestaat niet. Daarop definieerde iemand het begrip 'inzicht in bepaalde dingen' als het kennen en bekend zijn met de omliggende structuren. Dit stuitte op weerstand, want het letterlijk kennen en kunnen reproduceren van een structuur betekent nog niet dat inzicht aanwezig is. Bij inzicht is iets van eigen initiatief nodig. Daarna werd de discussie meer toegespitst op het eindexamen. Gesteld werd dat het kiezen voor het stellen van inzichtelijke vragen afhangt van de rol van het examen. Het is echter niet duidelijk of de leerling daarbij gebaat is. Daarom bestaat er een zekere angst om zulke vragen te stellen. Ook speelt mee dat het beantwoorden van zo'n inzichtelijke vraag voor de leerling al een vaardigheid geworden kan zijn. Wat de rol van het examen betreft werd opgemerkt dat het vroegere mondelinge examen – door het bestaan van vrijstellingen – al gezien werd als correctiemiddel – om een behaalde onvoldoende op te halen. En vaak misten diegenen waarvoor het bestemd was al het nodige inzicht. Omdat tegenwoordig correctie achteraf niet mogelijk is heeft het schoolonderzoek deze correctiefunctie een beetje overgenomen – als correctie vooraf.

Eigenlijk is een examensituatie niet geschikt om inzicht te toetsen want daarvoor is een ontspannen sfeer nodig. Op een schriftelijk examen kan men daarbij vastlopen op vaardigheden of op een onderdeel zonder dat je kunt zeggen dat inzicht ontbreekt want zelfs een zwakke leerling kan inzicht tonen. Daarmee blijft wel de vraag of en hoe je 'aangevoeld' inzicht kunt laten meerekenen bij een examen. Daarbij speelt ook mee dat je bij je latere functie vaak inzicht nodig hebt, bijvoorbeeld voor het begrijpen en interpreteren van een opdracht. En dat geldt niet alleen voor een VWO-leerling – ook van een MAVO-leerling kan dat gevraagd worden. Je zou dan kunnen gaan praten over inzicht op niveau. Dan is inzicht geen absolute maatstaf meer, en de vraag is dan of je dat inzicht al bij het examen moet verlangen.

Je kunt je nu af gaan vragen hoe je een examen af wilt nemen: schriftelijk of mondeling en centraal of per school, en wat dan de meetbetrouwbaarheid wordt. Dan moet je je gaan afvragen wat je met het examen wilt meten en of er sprake is van selectie. Als je wilt dat er sprake is van niveaubewaking dan moet je kiezen voor een centraal examen maar het examen is daar eigenlijk niet geschikt voor al is je programma daarop afgestemd. Op het ogenblik bestaat bij velen het idee dat een SO-cijfer beduidend hoger mag zijn dan het CS-cijfer. Daarbij gaat nog een ander aspect spelen want als je de leraar het examen af laat nemen, dan lever je de leerling aan hem over, hoe zijn vraagstelling ook is (inzichtelijk of oppervlakkig) maar neem je het examen centraal af dan is de leerling ook weer de dupe van een 'slechte' leraar. Bij niveaubewaking zou je je dan ook moeten afvragen of je het hebt over het niveau van de leerling of over het niveau van de leraar, en of het niveau naar de leerling toe is of naar de maatschappij toe. Eigenlijk zou niveaubewaking dan ook moeten geschieden via een nauwere bewaking van de leraar, bijvoorbeeld via de inspectie.

Gezien de beschikbare tijd moest de discussie hier afgebroken worden. Ik ben niet in staat om te vertellen of hierop in de middagdiscussie terug is gekomen omdat ik toen in een speciale groep ben gaan zitten.

Tijdens de middagdiscussie was er nl. één groep die zou gaan praten over het in Euclides 2 (blz. 69–70, jaargang '76/'77) gepubliceerde bestuursvoorstel betreffende het definitieve examenprogramma statistiek. Deze discussie werd geleid door Dr. Vredenduin. (Tevens waren enkele leden van het bestuur en van de inspectie aanwezig).

De voorzitter opende met een inleiding waarin hij uiteenzette waarom hij een deel van het bestuursvoorstel gewijzigd wilde zien in de toevoeging van de begrippen toetsingstheorie en verwachting i.p.v. toetsingstheorie en betrouwbaarheidsintervallen. Bij dit voorstel tot wijziging was rekening gehouden met mogelijke wensen van de academische raad t.a.v. eisen – te stellen aan een VWO-leerling – betreffende kansrekening en statistiek. Een belangrijk deel van de argumentatie diende voor de uit het voorstel volgende loskoppeling van de begrippen verwachting en spreiding. Het kwam erop neer dat het zeker zinvol is alleen de verwachting te behandelen als je daarbij betreft in hoeverre de werkelijkheid zich conform de verwachting gedraagt. Je hebt het begrip spreiding pas nodig als je over variantie gaat praten. De spreiding is te zien als een correctie op de verwachting.

Toen de voorzitter daarna het gewijzigde voorstel ter discussie aanbood kwam uit de groep de kritiek dat het eigenlijk niet reëel was het huidige wiskunde I-pakket uit te breiden en te verzwaren met 40 uur statistiek, terwijl de huidige resultaten bij het examen wiskunde I, ook als we de A-kandidaten buiten beschouwing laten, een zeer zorgwekkende toestand laten zien. Hoewel hier een zeer essentiële vraag opgeworpen werd, werd deze zeer snel afgekap met de opmerking dat er een onderzoek komt naar het percentage onvoldoendes en dat gekeken zal worden of dit tegen te gaan is door de zwaarte van het examen of de aard van de leerlingen te beperken. We kunnen echter niet aan het programma wiskunde I en de daaraan gekoppelde verdere invoering van statistiek tornen. Daarna werd overgegaan tot de stemming waarbij het gewijzigde bestuursvoorstel werd aangenomen.

Daarna spitste de discussie zich toe op de vraag hoe een tijdelijke verlichting van het programma verkregen zou kunnen worden – zie punt 2.3 van het voorstel. Dit zou mogelijk zijn gezien het feit dat je mensen opleidt voor het W.O. Door onderdelen weg te laten kun je de stof overzichtelijker en inzichtelijker brengen en om een bepaalde houding bij de leerling aan te kweken is niet zoveel leerstof nodig.

Besloten werd een aanbeveling te doen om de goniometrie alleen te vragen, verwerkt in vraagstukken over functies. Een voorstel om tijdelijk geen vragen te laten geven over differentiaalvergelijkingen werd met 6 voor, 6 blanco en ± 8 tegen verworpen. Tenslotte werd opgemerkt dat de indruk bestaat dat er bij de mensen die het examen opstellen geen examenvisie bestaat – zoals het geval was toen gewerkt werd aan de hand van de 250 opgaven van de ‘Wimecos’-commissie, dáár zat een groot stuk visie in over hoe een examenvraagstuk eruit moest zien. Het zou erg goed zijn als er weer zo’n visie zou komen, misschien nadat ‘Groeneveld’ herzien is.

Algemeen gevoel aan het eind van de discussie was dat de groep die aanwezig was niet representatief was, vooral gezien de stemmen – b.v. over het tijdelijk laten vallen van het onderwerp differentiaalvergelijkingen.

Misschien dat vele reacties uit het veld duidelijker kunnen maken hoe over de hierboven aangestipte vragen wordt gedacht.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

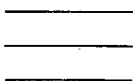
5 Oplossingsmodellen en fundamenteel inzicht.

De aanleiding tot deze notitie ligt in de tweede klas van de basisschool. Daar doet de juffrouw momenteel de tafels van vermenigvuldiging, en Doris, mijn jongste dochter, heeft daarmee zojuist een medaille verdiend. Daarvoor moest ze de tafel van twee foutloos opzeggen. Om misverstanden te voorkomen moet ik zeggen dat de juf haar leerlingen sterk weet te motiveren om tot dit soort prestaties te komen. Ik heb daar wel bewondering voor!

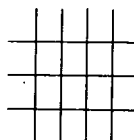
We gaan nog even een paar maanden terug. Doris zat destijds in de eerste klas. Van andere kinderen had ze al eens iets over het bestaan van 'tafels' en 'maal-sommen' gehoord. En toen ze op een keer achterin de auto zat, op weg naar Oma – een rit van ruim een uur – vroeg ze me naar de betekenis van 'maal-sommen'.

Daar zit je dan, achter het stuur. Leg maar eens uit wat vermenigvuldigen is. Gelukkig had ze een schriftje met viltstiften bij zich. De 'les' verliep ongeveer zo*:

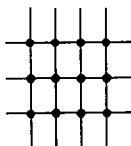
Wil je weten wat 3×4 is? Teken dan maar drie lijntjes zo (ik kan nog net met m'n ene hand op de voorruit tekenen):



en dan 4 lijntjes er doorheen:



Zie je de kruispunten?



Steeds 4 naast elkaar!

* Wiskobas Bulletin: leerplanpublikatie 2: pag. 138.

Hoe vaak? Kijk, dat is nu drie keer vier. Kun je tellen wat er uitkomt? Doris kon toen, achter in de auto gezeten, uitrekenen wat 3×4 , 5×2 , 2×5 (iets anders!), en zelfs 8×8 is. Ze was, vond ik, zeer entoesiast en heeft het een hele tijd volgehouden.

En nu dan die tafels. Na het trotse verhaal over het behalen van de medaille vroeg ik haar of ze me kan laten *zien* wat 5×2 was. Ze begreep 't niet. Ik probeerde verder: denk nu eens aan 5 kinderen, ze staan voor de klas. Zie je het sommetje 5×2 ? Nog niets. Hoeveel ogen hebben die kinderen samen? Doris begreep het, en na enige stilte: 10! Hoe kom je aan tien, vroeg ik. Gewoon, zei Doris, geteld

Wat betekent dit soort leren voor kinderen, vraag je je af. De tafel van twee wordt – puur getalsmatig – beheerst, maar heeft verder geen *betekenis*. Zonder nu kritiek te hebben op deze aanpak – ik ben ervan overtuigd, dat juf haar kinderen alle gelegenheid zal geven om de tafelkennis toe te passen – wil ik graag weten hoe dit leren bij kinderen overkomt. Als wiskundeleraar heb je daar tenslotte, ook verder in de leerstof dan de tafel van twee, wel mee te maken. Zonder al te diep na te denken herinner ik me: ‘halve substitutie’, ‘kwadraat afsplitsen’, ‘de machtstelling toepassen’, ‘overgaan op de sinus van de halve hoek’, ‘afgeleide = 0’, ‘inprodukt = 0’ en ‘Pythagoras toepassen’. Als je er even voor gaat zitten kun je er wel een boek mee volschrijven. Mijn vraag luidt ook hier: hoe werkt deze ‘kennis’ op kinderen, die moeite hebben met de betekenis ervan? Een leerling die ‘inprodukt = 0’ op dezelfde manier weet als Doris momenteel de tafel van twee, mist een fundamenteel inzicht. Dat kan, maar behoeft niet altijd, in het toepassen tot uitdrukking komen.

Een manier om erachter te komen hoe mensen wiskunde leren, wiskunde bedrijven en wiskunde toepassen is via de methode van introspektie, of van retrospektie, of misschien zegt u: reflectie.

Pieter Vroon heeft van zijn ‘Bewustzijn, hersenen en gedrag*’ het laatste hoofdstuk gewijd aan dit ‘Naar binnen kijken’. En voordat je, als wiskundeleraar bij jezelf naar binnen gaat kijken om te zien hoe wiskunde leren gaat, moet je eerst zijn waarschuwing ter harte nemen. Bij het verslaan van de eigen aktiviteit door introspektie, zo wordt gesteld, komt het veelvuldig voor dat de mens slechts motieven zoekt om het vertoonde gedrag te rechtvaardigen. Men schept een schijnwereld, waarin men zelf als niet te dom naar voren komt. Ik vermoed dat juist wiskundeleraars, vooral zij die boeken over wiskunde hebben geschreven, aan dit euvel lijden. Het denkwerk wordt altijd achteraf in een prachtige volgorde en doorzichtige uitvoering naar voren gebracht. Zelden publiceert men iets van de foutieve aanpakken, de gemaakte blunders, de onbegrijpelijke blokkeringen**.

Je wilt natuurlijk niet voor dom versleten worden door je kollega's, en daarom vertel je dan ook de mooiste oplossingsmethoden die je kunt bedenken.

Ten behoeve van onze vraag over het leren van betekenisvolle leerstof wil ik

* Basisboeken, Ambo, Baarn – 1976.

** Ik denk dat het didaktisch gezien voordelen zou bieden om het vaker wel te doen.

proberen u een ervaring – via de methode van retrospektie – te beschrijven, zonder de zaak mooier voor te doen dan ze is.

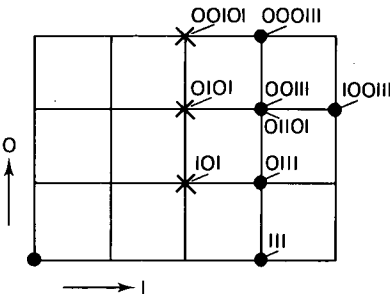
Het begon in Euclides, het eerste nummer van de 52ste jaargang. Piet Vredenduin zet me aan 't werk, 'recreatie' noemt hij dat – met het probleem van Arthur Engel, opgegeven op een konferentie in Echternach:

'Kaïn en Abel tossen met een eerlijke munt.

Kaïn wint als achtereen 111 uitkomen, Abel wint als achtereen 101 uitkomen. Wie heeft de meeste kans?

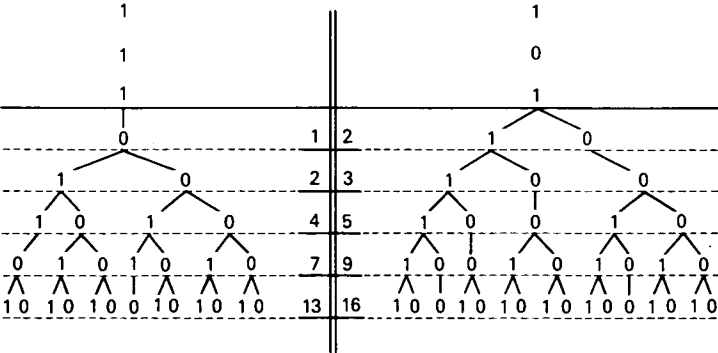
Hoe is de verdeling van de kansen?"

Ik begin te denken aan dit probleem in de wetenschap dat de kansrekening me steeds weer voor opgaven stelt, waarin ik geheel van voren af aan moet beginnen. Dat vind ik niet altijd prettig, een mens heeft tenslotte behoefte aan steunpunten. Daarom denk ik waarschijnlijk eerst aan een soortgelijke opgave* die ik eens oploste met behulp van een rooster. Zou dit probleem ook in hetzelfde roostermodel passen?



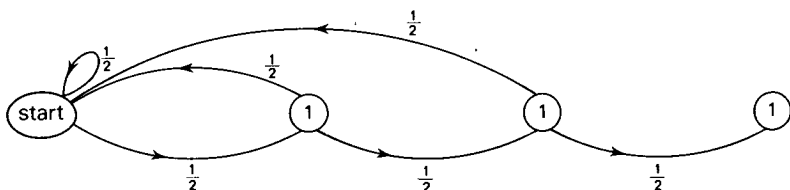
Je zet in het rooster die punten uit die je kunt bereiken met een weggetje (= rijtje nullen en enen) dat eindigt op 111 of 101.

De zaak wordt zo kompleks (er gaan punten samenvallen, d.w.z. je kunt één punt bereiken met een rijtje eindigend op 111 maar hetzelfde punt ook met een rijtje eindigend op 101). Dus verlaat ik deze aanpak maar. Het boomdiagram, een veelgevraagd model, is een volgende poging waard.



* Zie Wiskobas Bulletin jrg. 2, pag. 826.

Ineens gaan mijn gedachten naar Arthur Engel. Ik herinner me een artikel van hem over Markovketens*. Hoe zat dat ook weer. Ik pas mijn vrij vage kennis van de daar behandelde oplossingsstrategie direkt toe op het gegeven probleem. Engel kennende zal het wel in die richting gezocht moeten worden:

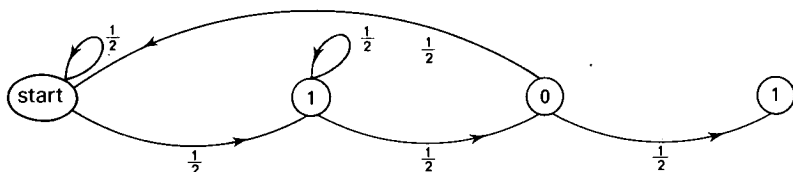


1 start, je gaat op weg naar 111

met kans $\frac{1}{2}$ kom je in 0, en moet overnieuw beginnen omdat je 111 wilt hebben

3 als je de eerste 1 hebt, dan

Voor het rijtje met 101 ziet dat er aldus uit:



Ik herinner me ook nog het vervolg. Je stelt de verwachtingswaarde van de spelduur (de lengte van het gemiddelde rijtje) op x .

$$\text{geval } 101: x = \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x-1+2) + \frac{1}{8}(x+3) \\ \Rightarrow x = 12$$

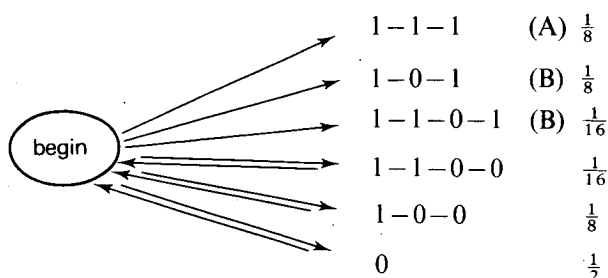
Onder het rekenen wordt ik me bewust van het feit dat in de verschillende plaatjes eigenlijk al iets van de oplossing zichtbaar wordt.

* Later, voor de lezer, opgezocht: L. Råde, *The teaching of probability and statistics*, Hfdst. 6. – Almquist, Stockholm 1970.

De algebraïsche rekenarij geeft me evenwel wat meer zekerheid. Maar, wat ik erger vind, ik denk nu pas aan het begrip 'verwachtingswaarde'. Tot nu toe had ik slechts gewerkt met kansen. Achteraf gezien kan ik me natuurlijk wel in termen van verwachtingswaarde rechtvaardigen (i.p.v. rijtjes moet ik dan de lengte van rijtjes noemen), maar Pieter Vroon behoedt me voor schijnheiligheid.

Ben ik er nu? Uit de getallen zou kunnen blijken dat het rijtje met 101 gauwer aan bod komt dan dat met 111. Dus 101 heeft meer kans Toch ben ik nog niet zeker. Waar zit 'm dat nu in? Het is niet alleen het feit dat ik over de verdeling van de kansen nog niets zeggen kan. Het is waarschijnlijk meer het gebrek aan inzicht in de gebruikte (Markov)-ketens

Dan komt een kollega binnen. Aan tafel had hij het probleempje van een ander gehoord. Hij vertelt me dat hij geprobeerd heeft zonder enige basiskennis de opgave aan te vatten. Zijn schetsje ziet er aldus uit:



In de laatste gevallen (dubbele pijl) moet je steeds opnieuw beginnen. (in 11 van de 16 gevallen). Voorts $\frac{3}{16}$ voor B (101) en $\frac{2}{16}$ voor A (111). De verdeling van de kansen is dus 3 op 2

Verder komen in de wiskunde heeft te maken met het in toenemende mate gebruik kunnen maken van oplossingsmethoden en denkmodellen. Hierbij is het noodzakelijk dat deze 'modellen' betekenis hebben op het gevraagde nivo van toepassing. Vanzelfsprekend. Maar ook een open benadering van problemen moet mogelijk blijven, hetgeen specifieke eisen aan de didactiek stelt. Daarover zijn we nog lang niet uitgepraat, denkt u ook niet?

Onderwijsvernieuwing wiskunde op de basisschool in België

P. G. J. VREDENDUIN

Onlangs is verschenen de publikatie *Vernieuwde Wiskunde in de Basisschool*. Het is een stevig boekwerk van 280 bladzijden, uitgegeven door het Ministerie van Nationale Opvoeding en Nederlandse Cultuur van het Koninkrijk België. Het boek behelst een verslag van de pedagogische studieweek die gehouden is op 5-8 april 1976 in Brussel, Brugge en Hasselt voor het onderwijzend personeel van het kleuter- en lageronderwijs. Het aantal deelnemers bedroeg 2200.

De huidige stand van zaken is als volgt. Er is

1. een experimenteel Rijksleerplan Vlaanderen gegroeid uit experimenten, uitgewerkt voor zes leerjaren, maar nog niet algemeen verplicht;
2. een Rijksleerplan Wallonië, uitgewerkt voor zes leerjaren, dat in de toekomst verplicht wordt;
3. een leerplan Vrij Onderwijs Vlaanderen (Vrij = r.k.), uitgewerkt tot en met het derde leerjaar en nu (1975/76) verplicht voor het eerste leerjaar;
4. een leerplan Vrij Onderwijs Wallonië, uitgewerkt voor zes leerjaren en verplicht vanaf 1971.

De vier leerplannen komen in grote lijnen met elkaar overeen, maar vertonen in de details veel verschillen.

De gemeenschappelijke onderwerpen zijn:

verzamelingen (deelverzameling, doorsnede, vereniging, verschil);
relaties (relatie, omgekeerde relatie, samengestelde van twee relaties);
getallen (natuurlijke getallen, negatieve gehele getallen, talstelsels, positieve rationale getallen);
bewerkingen met getallen;
meetkunde en vormleer;
metend rekenen (decimale stelsel).

Ik wil deze ietwat droge opsomming verlevendigen door de richting weer te geven waarin men deze vernieuwing wil realiseren.

F. Van Lauwe (onderwijzer) doet hiervan verslag.

Bij verzamelingen wordt een dankbaar gebruik gemaakt van venn-diagrammen. Een voorbeeld uit het tweede leerjaar.

A = de verzameling van de delers van 10

B = de verzameling van de delers van 12

C = de verzameling van de delers van 15

De leerlingen tekenen een venn-diagram van drie verzamelingen en vullen daarin de getallen in. Zo ontstaat onderstaande figuur.

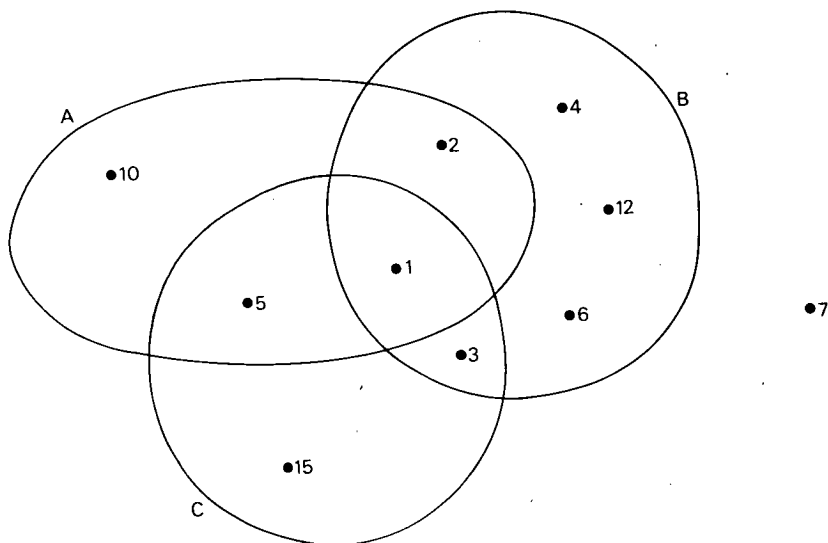


fig. 1

Een ander voorbeeld uit het vijfde leerjaar, nu uit de meetkunde.

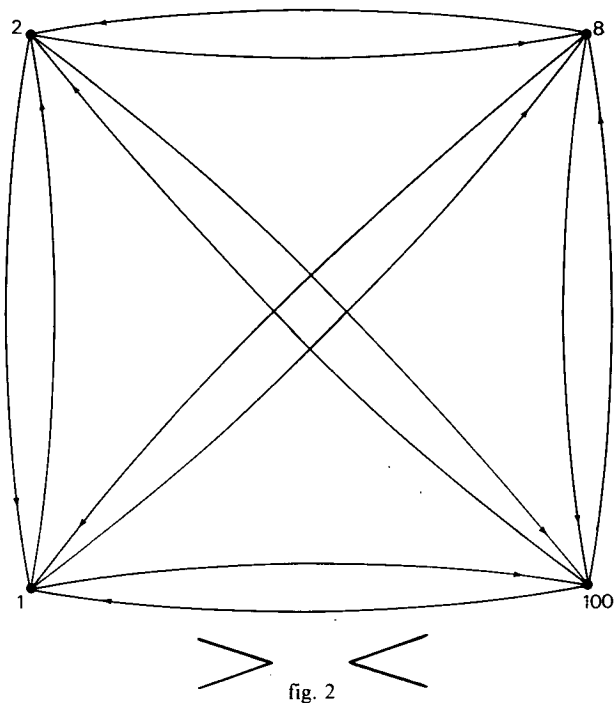
A = de verzameling van de vierhoeken met ten minste één paar even lange zijden

B = de verzameling van de vierhoeken met ten minste één paar evenwijdige zijden

C = de verzameling van de vierhoeken met ten minste één rechte hoek

Teken weer het venn-diagram en zoek bij elk van de acht gebieden vierhoeken die erin thuis horen. Een fraaie opgave!

Relaties en omgekeerde relaties worden geoefend aan de hand van pijldiagrammen. Bijvoorbeeld 'groter' en 'kleiner' aan de hand van het volgende tweekleurige pijlendiagram (de kleuren kunt u er wel bijdenken).



En wordt gevraagd naar de omgekeerden van de relaties: is een deler van, is 3 meer dan, is even groot als, heeft tot vader, bemint, omvat.
 Ook worden deze pijldiagrammen in dienst gesteld van het rekenen.
Voorbeeld: Gegeven de relaties '+ 2' (in het rood) en '+ 3' (in het groen).
 Gevraagd:

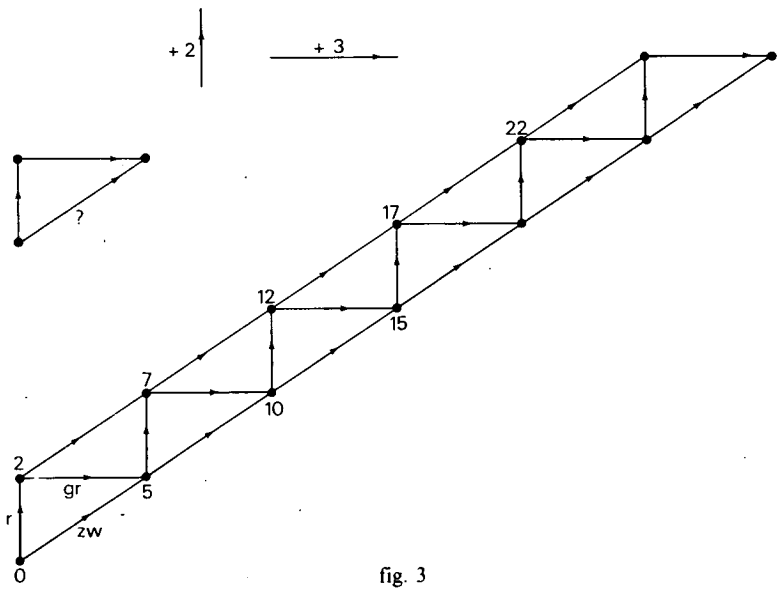


fig. 3

De kinderen vinden dat de zwarte pijlen '+5' zeggen.

Onderaan in het zwart: tellen per vijf, te beginnen met 0, dat is de verzameling van de veelvouden van 5.

2 zwarte pijlen na elkaar: +10.

De omgekeerde pijlen zeggen respectievelijk: -2, -3, -5.

Probleem: wie vindt een pijl '+7'? Wie vindt een pijl '+8'?

Bij het rekenen wordt de nadruk gelegd op het begrijpen van wat men eigenlijk doet. Aan enkele voorbeelden wil ik dit toelichten.

Een voorbeeld uit het eerste leerjaar. Jan had een bepaald aantal speelgoed-autootjes. Op nieuwjaarsdag kreeg hij er 5 bij. Nu heeft hij er 12. Hoeveel autootjes had Jan voor Nieuwjaar?

Oplossing 1, met verzamelingen:

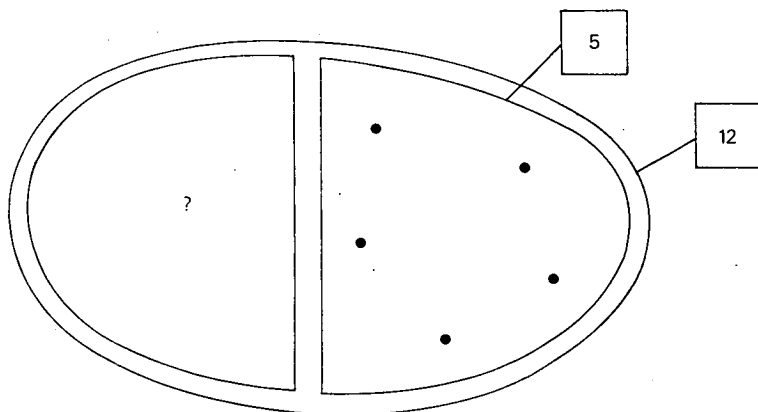


fig. 4

Oplossing 2, met staafjes:



fig. 5

Oplossing 3, met getallen:

$$\boxed{?} + 5 = 12$$

fig. 6

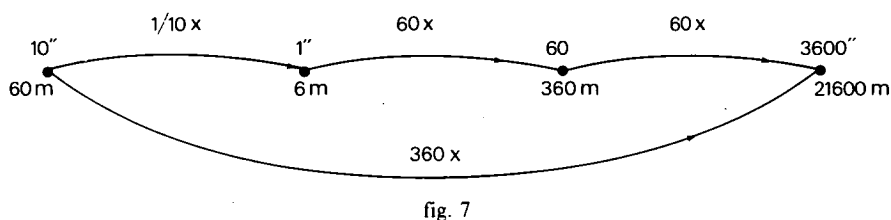
In latere stadia doen ook nog de pijlendiagrammen en de getallenlijn dienst om het antwoord te vinden.

De leerlingen krijgen zo meer soepelheid in het hanteren van getallen. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de manier, waarop in een klas 3×6 wordt uitgerekend. De uitleg van verschillende leerlingen, hoe ze aan het antwoord 18 kwamen, was:

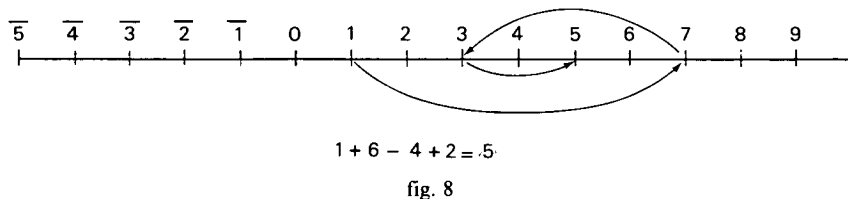
- a $3 \times 5 = 15$, ook $5 \times 3 = 15$
 $15 + 3 = 18$, dus heb ik $6 \times 3 = 18$
 maar $6 \times 3 = 3 \times 6$
 antwoord: $3 \times 6 = 18$
- b $2 \times 6 = 12$ en $12 + 6 = 18$, dus $3 \times 6 = 18$
- c $3 \times 6 = 3 \times 3 \times 2 = 9 \times 2 = 2 \times 9 = 18$
- d $3 \times 6 = (3 \times 5) + (3 \times 1) = 15 + 3 = 18$

Een ander voorbeeld, uit het vijfde leerjaar, van jongleren met getallen.
 Een leerling heeft de 60 m gelopen 10 seconden. Hoeveel zou hij in een uur lopen als hij dezelfde snelheid kon volhouden?

Oplossing:



Een voorbeeld van het gebruik van de getallenlijn om berekeningen uit te voeren:



De getallenlijn wordt ook gebruikt voor het rekenen met negatieve gehele getallen en voor het rekenen met (positieve) gebroken getallen.
 De modern opgevoede leerlingen zijn vergeleken met klassiek opgevoede leerlingen. Het is daarbij gebleken dat ze in rekenvaardigheid niet voor de ouderwets opgevoede leerlingen onderdeden.
 Men ziet uit het bovenstaande dat de invloed van Frédérique duidelijk doorwerkt, maar wel gemitigeerd.

Onwillekeurig vraagt men zich bij lezing van het artikel van Van Lauwe af, hoe de relatie van de Belgische methode tot Wiskobas is.
 Er zijn aanrakingspunten. Ik heb er een paar gevonden waarvan ik er hier één citeer. Het betreft een voorbeeld uit het vierde leerjaar.

In verband met *verkeersopvoeding* kregen de kinderen als opdracht gedurende een maand in kranten berichten op te sporen over dodelijke ongevallen met als slachtoffers kinderen uit het basisonderwijs.

Er werden 50 zulke dodelijke ongevallen gevonden. Deze werden ingedeeld naar hun oorzaak. B.v.: onverwacht op de rijweg lopen, per fiets onvoorzichtig een kruispunt oversteken, brand stichten, in het water vallen.

Er werden grafieken opgemaakt en getekend, er werd vergeleken, waaruit belangrijke conclusies konden worden afgeleid.

Rond het opgegeven thema werd er erg veel *gerekend*, het begrip *kans* dook op, er werd *geïnterpreteerd*, er werden *blokdigrammen* getekend, er werd *gediscussieerd*, er werd *getekend*, er werd gebruik gemaakt van *verhoudingen*, het begrip *percentage* werd aangeraakt, de kinderen kregen een beter idee van *verkeersovertredingen*, het *milieu* stond in het centrum van de belangstelling, uit het milieu werden *lees*-, *schrijf*- en *rekenstof* gehaald. de leerlingen leerden ook de *nieuwsmedia* beter kennen.

Men kan in deze publikatie nog veel andere wetenswaardigheden vinden. Ik noem: een verhelderend inleidend artikel van R. Holvoet over de zin van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs, een overzicht over het vernieuwd wiskundeonderwijs op de basisschool in andere landen (Frankrijk, Zwitserland, West-Duitsland, Engeland, Verenigde Staten, Nederland). een overzicht van de in de loop der jaren gehouden experimenten in België, verslagen van ervaringen die verschillende leerkrachten bij hun experimenten hebben opgedaan. Daaronder is ook een verslag van een kleuterleidster, mevrouw F. Van Lommel-Beuzelin. En omdat het idee 'wiskunde op de kleuterschool' voor velen van ons nieuw zal zijn, wil ik tot slot daar nog kort bij stilstaan. Het experiment gaat over de derde klas van een kleuterschool, die direct voorafgaat aan de eerste klas van het basisonderwijs. Men zal de invloed van Frédérique ook hier gewaarworden.

Op een koude dag kwamen sommige jongens en ook sommige meisjes met een lange broek op school. We gaan een spelletje doen met alle meisjes en alle kleuters die een lange broek aan hebben. Wie speelt er mee? De kleuters zeggen dat alle meisjes meespelen en ook alle jongens met een lange broek aan. De kleuters die niet meespelen worden zoveel mogelijk bij de opdrachten betrokken. Ze leggen een rood touw om alle meisjes. En een groen touw om alle kleuters met een lange broek aan. Zo ontdekken ze de doorsnede. Deze bestaat uit alle meisjes met een lange broek aan.

Venn-diagrammen van drie verzamelingen worden getekend. Alleen de gebruikte taal is nu wat naiever dan op de basisschool. De drie verzamelingen zijn bijvoorbeeld de kinderen die melk drinken, de kinderen die jogurt drinken en de kinderen die betterfood eten.

Ze worden gevangen in een rood, een groen en een blauw touw en op bord verschijnt het venn-diagram, dat uit een rode, een groene en een blauwe kring bestaat. Op het diagram wordt in een van de acht delen een stip gezet. Wat zegt dit kleutertje?

Met de logiblokken wordt gespeeld.

Pijldiagrammen worden getekend van kinderen die hun zusjes aanwijzen (rode pijlen) en hun broertjes (blauwe pijlen). Uit zo'n diagram kan men van alles opmaken, bijvoorbeeld wie de jongens en wie de meisjes zijn.

Leuk vond ik de volgende opdracht:

Dit zijn vier kindjes. Vertel er met groene en rode pijltjes een verhaaltje mee.

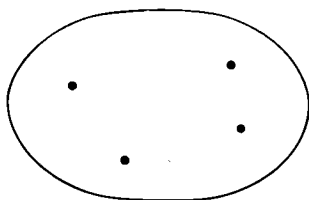


fig. 9

Het begint natuurlijk pas interessant te worden, als de kleuters spelenderwijs wat kennis opdoen en daarbij de gelegenheid krijgen hun eigen fantasie uit te leven. Prachtig vond ik dan ook de volgende opdracht.

In een huis zijn een heleboel muizen. Om de muizenplaag tegen te gaan heeft men wat poesen in huis genomen. Teken de poesen en de muizen. Teken een pijl, als een poes een muis opeet. (Alles natuurlijk in twee kleuren.) Als je de tekening af hebt, vertel er dan een verhaaltje bij.

Hieronder de tekening die door een van de kleuters gemaakt werd.

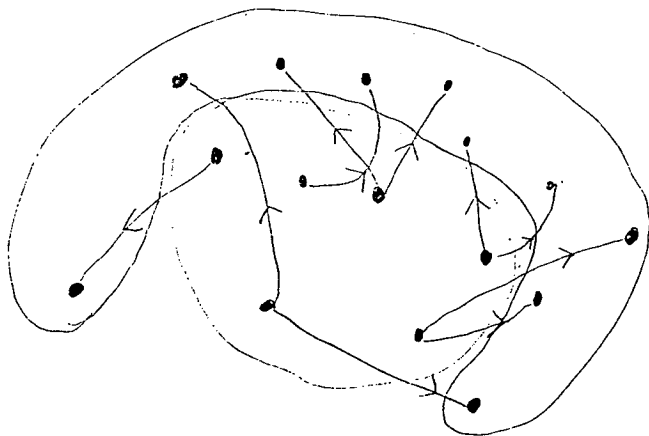


fig. 10

En hier een paar verhaaltjes die de kleuters bij hun tekeningen hielden.

Tina: Laat een viertal muisjes over en twee poesjes vangen geen muisjes.

Waarom niet? Ze hebben geen honger.

: Bij een andere kleuter blijven twee muisjes en één poes zonder graf. Waarom? Het is een lieve poes, ze is muizendokter en eet geen muisjes – eet alleen kitekat.

Isabel: Eén poes eet zeer veel muisjes, ze heeft grote honger.

Filip: Heeft twee poesjes die geen enkel muisje vingen. Waarom niet? Het zijn trage poesjes, de anderen hebben alle muisjes al opgegeten. Zijn poes Leopold, een zeer vlugge, heeft er vijf gevangen.

Tot slot een prelude op het getalbegrip. Snoepjes worden verdeeld. Hieronder zien we wat drie kleuters gekregen hebben.

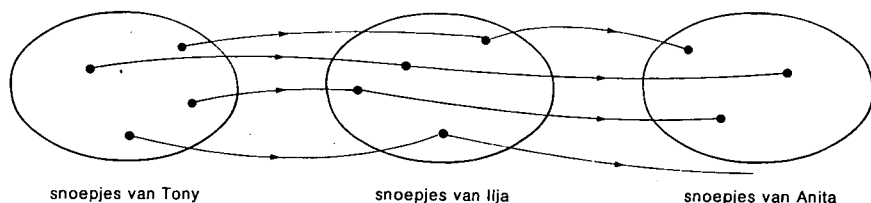


fig. 11

Hoeveel snoepjes hebben ze gekregen? Tony vier, Ilja vier, Anita drie. Is dit meer of minder? De pijlen wijzen het uit.

Er worden nog geen getsymbolen gebruikt; dit gebeurt eerst op de basisschool.

Het bovenstaande geeft enig idee van wat men op de kleuterschool kan doen. Het gebodene moet vooral niet kwantitatief van aard zijn. Het moet gepresenteerd worden in spelvorm. De kinderen moeten de gelegenheid hebben hun fantasie te laten werken.

Naar mijn smaak is het bovenstaande nog wat sterk intellectualistisch, maar dat kan liggen in de beknoptheid van de weergave door de kleuterleidster.

Het boek kan besteld worden bij het
Ministerie van Nationale Opvoeding en Nederlandse Cultuur
Dienst verkoop publikaties
Rijksadministratief Centrum
Arcadegebouw
B-1010 Brussel

De prijs bedraagt 150 fr. Men kan dit bedrag storten op giro 000-0009372-60 t.n.v. bovengenoemd adres onder vermelding van de titel van het boek dat men wenst te ontvangen.

Korrel

Min en mien

Tot mijn verbazing zie ik de laatste tijd in verschillende schoolboeken en ook in eindexamenopgaven twee soorten mintekens. Aan het begin van een formule staat $-a$, een kort minteken vast aan de a geklonken. En midden in een formule ziet men $a - b$, een lang minteken met ter weerszijden een spatie. Ik bewonder het wiskundig inzicht van de zetter. Hij heeft groot gelijk.

Het korte minteken in $-a$ is symbool voor een unaire operatie die aan a toevoegt het tegengestelde van a .

Het lange minteken in $a - b$ is symbool voor een binaire operatie die aan het geordende paar (a, b) het verschil van a en b toevoegt.

Voor twee zo verschillende operaties verschillende symbolen gebruiken getuigt van wijs inzicht.

Maar hiermee is het einde van de wijsheid bereikt. De leraar is minder wijs dan de zetter. Hij spreekt de beide tekens op dezelfde manier uit en zegt er domweg 'min' tegen. En bij het schrijven op bord maakt hij al evenmin onderscheid. En de leerling? Die zal zich allicht niet drukker maken dan zijn leermeester en zal waarschijnlijk niet eens merken dat de zetter zich zo uitgesloofd heeft. Maar de leraar begaat nog een tweede onachtzaamheid. Hij veronachtzaamt het verschil tussen de beide operatoren en onderwerpt ze klakkeloos aan dezelfde regels. Wat voor kortemin geldt, geldt voor langemin en omgekeerd. Laten we het nu eens goed doen. We mogen die zetter toch niet teleurstellen en zijn pogingen goede wiskunde te produceren ignoreren. Om te beginnen zullen we de beide tekens niet op dezelfde wijze uitspreken, want dan blijft verwarring niet te voorkomen. We zullen tegen kortemin 'min' blijven zeggen en tegen langemin 'mien'. En we formuleren onze rekenregels nu met zorg.

Het tegengestelde van $-a + b - c$ is $a - b + c$.

Vuistregel: min wordt niks, niks (aan het begin) wordt min, mien wordt plus en plus wordt mien.

$$a - (-b + c - d) = a + b - c + d$$

Vuistregel: min er aftrekken is hetzelfde als niks erbij tellen, mien er aftrekken is hetzelfde als plus erbij tellen, niks er aftrekken is hetzelfde als min erbij tellen en plus er aftrekken is hetzelfde als mien erbij tellen.

En voor de aardigheid nu nog de commutatieve eigenschap:

$$a + b = b + a$$

$$-a + b = b - a$$

$$-a - b = -b - a$$

Maar dat is helemaal de commutatieve eigenschap niet. De eerste regel wel, maar de andere twee zijn van heel andere aard. Ik geef toe, dat ze bewezen kunnen worden met behulp van de commutatieve eigenschap. Namelijk

$$-a + b = b + -a = b - a$$

$$-a - b = -a + -b = -b + -a = -b - a$$

Maar dat bij het commuteren min mien wordt en omgekeerd is even fraaie wiskunde als de bewering: als je een term naar de andere kant brengt, verandert zijn teken.

Ik kan mij voorstellen, dat de lezer het langzamerhand belachelijk gaat vinden, althans uit didactisch oogpunt. Hoe maken we een eind aan deze waanwijsheid op een verantwoorde manier? De oplossing is eenvoudig en trouwens al veel eerder gepubliceerd.

Twee getallen zijn elkaars tegengestelde wil zeggen: hun som is gelijk aan 0. Dus: $a +$ het tegengestelde van $a = 0$

het tegengestelde van $a = 0 - a$.

Afspraak: $-a$ is een verkorte schrijfwijze voor $0 - a$.

Er is nu maar één minteken, namelijk de binaire mien. Die we natuurlijk maar weer gewoon 'min' noemen.

Ter verduidelijking van de consequenties gaan we wat op de getallenlijn rekenen.

$3 + 6$: begin bij 0, ga eerst 3 naar rechts en dan 6 naar rechts;

$3 - 6$: begin bij 0, ga eerst 3 naar rechts en dan 6 naar links;

$0 - 3 + 6$: begin bij 0, ga eerst 3 naar links en dan 6 naar rechts.

Essentieel is hierbij: steeds bij 0 beginnen. Hiermee is een dubbel doel gediend.

Het minteken aan het begin is een aftrekteken en heeft dezelfde betekenis als het minteken middenin; voor beide tekens gelden dus automatisch dezelfde rekenregels.

Maar daarnaast een lange termijn doel. De hierboven op de getallenlijn uitgevoerde operaties corresponderen met de later te definiëren vectoroptelling. Vandaar dat het aanbeveling verdient dit naar rechts en naar links gaan in de figuur met pijlen weer te geven.

Wie dat graag wil, dan nu nog afspreken: $+a$ is een verkorte schrijfwijze voor $0 + a$; we laten het plusteken aan het begin van een formule meestal weg.

Nu is de zaak helemaal rond en kunnen we met een gerust geweten zeggen: vuistregel: bij het nemen van het tegengestelde wordt plus min en omgekeerd.

Conclusie: mogen die angstvallig kort gedrukte mintekens voortaan gewoon lang gedrukt worden? Dat is didactisch een vooruitgang en wetenschappelijk nog correct ook.

P. G. J. Vredenduin

Over een Eend met goede remmen

DR. J. T. GROENMAN

1 Het bijzonder aardige artikel van Ir. Mulder in Euclides 52-4-pag. 149 e.v. over filevorming laat een paar zaken onbesproken die wellicht de moeite waard zijn.

De minimale remvertraging van 4 m/s^2 die door de politie zou zijn voorgeschreven zal proefondervindelijk zijn vastgesteld. Men zou zich landen kunnen voorstellen waar zij hoger dan wel lager ligt. Wiskundig zou het interessant kunnen zijn haar te laten variëren.

2 We nemen die remvertraging $r \text{ m/s}^2$ en volgen de notaties van Ir. Mulder. Uit $v - rt = 0$ en $s = vt - \frac{1}{2}rt^2$ volgt dan

$$s = \frac{v^2}{2r}$$

$$T = \frac{a+s}{v} = \frac{2ar+v^2}{2rv}$$

$$f = \frac{2rv}{2ar+v^2}$$

$$\frac{dT}{dv} = \frac{v^2 - 2ar}{2rv^2}$$

De kleinste T - en dus de grootste f - treedt op voor $v = \sqrt{2ar}$.

Wij resumeren: $v_{\text{optimaal}} = v_{\text{op}} = \sqrt{2ar}$

$$\text{en } f_{\text{max}} = \sqrt{\frac{r}{2a}}$$

3 a Voor de waarden van Ir. Mulder ($a = 4$ en $r = 4$) komt er naar behoren

$$v_{\text{op}} = 4\sqrt{2} \text{ met } f_{\text{max}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Het aantal auto's (N) dat per minuut passeert bedraagt dan 43.

b Het is duidelijk dat $f_{\max}$ toeneemt bij groeiende r en bij afnemende a . D.w.z.: Als wij de minimumremvertraging hoger stellen en bovendien kortere auto's gebruiken bevorderen wij een vlottere doorstroming. *Speciaal de wagenlengte a is van invloed*. Misschien noemt men daarom een kleine wagen speciaal geschikt voor stadsverkeer.

Men vergelijke:

	v_{op}	$f_{\max}$	N
$a = 4; \quad r = 4$	5,7	0,71	43
$a = 3; \quad r = 4$	4,9	0,82	49
$a = 4; \quad r = 6$	6,9	0,87	52
$a = 3; \quad r = 6$	6,0	1,—	60

Voorals wij de voorbeelden (4;4) en (3;6) vergelijken zien wij een aanzienlijk verschil bij de waarde van N .

4 Wij mijmeren nog wat door en vragen ons af of het voordeel zou opleveren als alle bezoekers van het Feijenoordstadion zouden afspreken per bus te komen in groepen. Wij nemen aan dat elke bus 50 passagiers kan hebben en 8 m lang is. De r handhaven wij op 4 m/s^2 .

Dan is $v_{\text{op}} = 8 \text{ m/s}^2$ en $f_{\max} = 0,5$

$$N = 30.$$

Wij vergelijken nu de aantallen passagiers die kunnen worden afgevoerd. Bij het busidee zouden dat er 1500 zijn; bij verdelen over auto's zijn dat er hoogstens $43 \times 5 =$ ruim 200 per minuut.

5 Wij beginnen wat aan de uitkomsten te twijfelen en berekenen voor het algemene geval nog eens de waarde van s ; die wordt:

$$s = \frac{v^2}{2r} = \frac{2ar}{2r} = a.$$

Het door Ir. Mulder gevonden antwoord is dus onafhankelijk van de door de politie gehanteerde remvertraging omdat r in het antwoord niet meer voorkomt. Wij herinneren er aan dat s de onderlinge afstand van twee opeenvolgende wagens in de file is. Als Ir. Mulder spreekt van 'een merkwaardige conclusie' lijkt ons dat wat zwak uitgedrukt. Wij gaan ons afvragen of het allemaal wel klopt. Kan de – betrekkelijk subjectieve – aanname van de politie wel in wiskundige taal, d.w.z. in algemeen geldige formules worden uitgedrukt? Of zijn die formules slechts bruikbaar als de snelheden niet te veel van de gebruikelijke afwijken? Wij zien nog geen 30 bussen per minuut passeren met een snelheid van 8 m/s (d.i. ongeveer 29 km per uur) en dat met een onderlinge afstand van 8 m . Wij durven ons niet voorstellen dat alle bezoekers van het stadion per bus zouden komen en dan ook nog allen dezelfde richting zouden kiezen. 65000 mensen betekent 1300 bussen; die zouden in 1300:30 minuten (= 45) zijn verdwenen als alles naar wens loopt. En dat valt nog

wat mee. Gelukkig heb ik met het Feijenoordstadion niets van doen; de enkele malen dat ik de F.C. Groningen bezoek geeft het Oosterpark geen moeilijkheden. Tunnels hebben we ook niet en met de ruimte valt het echt wel mee; de P.T.T.ers kunnen er nog wel bij; ze doen echter goed ook hier op een Eend over te stappen; die moet dan goede remmen hebben.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

founded in 1826 by August Leopold Crelle continued by C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker, L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger
at present edited by Helmut Hasse and Hans Rohrbach with the cooperation of M. Deuring, P. R. Halmos, O. Haupt, F. Hirzebruch, M. Kneser, G. Köthe, K. Krickeberg, H. Leptin, R. Lingenberg, K. Prachar, H. Reichardt, P. Roquette, F. W. Schäfke, L. Schmetterer, E. Stiefel, B. Volkmann.

Frequency of publication: yearly approx. 8 volumes (1976: volume 280–288) Price per volume: DM 128,— ; \$ 53.50.

Back volumes: volume 1–250 bound complete DM 30.000,— ; \$ 12, 500.00. Single volume each DM 150,— ; \$ 62.50. Volumes 251 ff. stitched each DM 128,— ; \$ 53.50.

The Journal für die reine und angewandte Mathematik is the oldest mathematical periodical in Germany and this year, 1976, it is celebrating 150 years of continual service to mathematical research and instruction. The first volume, edited by August Leopold Crelle, was published in 1826; as it was customary at that time, the Journal took the editor's name as its unofficial title and has retained it ever since. In his preface of 1825 Crelle outlined the duties and goals of a scientific periodical and set the Journal on a path which was to lead it to ever-increasing international reputation:

'Since a magazine is a very effective means of promoting and propagating sciences, and indeed even to protect them from foreign influence and from the dictatorship of fashion, authority, schools and unnecessary discretion, keeping them in the domain of free thought, we consider it worthwhile to try and found one for mathematics and keep it alive. This journal must welcome, promote, propagate and cultivate the truth.'

Since then generations of mathematicians have shaped the Journal's character: Abel, Artin, Brouwer, Cantor, Cartan, Cayley, Dedekind, Dickson, Dirichlet, Eisenstein, Frobenius, Furtwängler, Gauß, Graßmann, Hardy, Hermite, Hilbert, Jacobi, Jordan, Kummer, Landau, Liouville, Lipschitz, Meissel, Minkowski, Möbius, Picard, Plücker, Schur, Schwarz, Steiner, Steinitz,

Stieltjes, Sylvester, Weyl to name just a few of the important figures from the first century of the Journal's existence. C. W. Borchardt, L. Kronecker, K. Weierstraß, L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger, H. Hasse and H. Rohrbach followed A. L. Crelle as editors.

Thanks to the cooperation of most of the world's outstanding mathematicians, Crelle's Journal has served the exact sciences with numerous studies during the past 150 years, studies which have been decisive in mathematical research and its development and which remain so even today. The publication of reprints has ensured that all volumes of the Journal since 1826 are at present available.

The studies which Crelle's Journal presents to its subscribers comprise all branches of pure and applied mathematics. They contain original investigations which are new and valuable either by virtue of the results or by establishing a basis for these results. To emphasize the importance of the periodical as a forum of international mathematical discussion, all articles are published in their original language.

Boekbespreking

J. van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde*, tweede, herziene druk; 276 blz.; ingen. f 42,50. Bohn, Scheltema & Holkema, Utrecht, 1976.

In 1973 en 1974 zijn er door Nederlandse auteurs enige werken over wiskunde-didactiek op de markt gebracht, die de Nederlandse wiskundeleraars informatie verschaffen die ze voorheen hadden moeten ontberen. Onder deze werken neemt Van Dormolen's *Didactiek van de Wiskunde*, destijds als Academische Paperback bij Oosthoek's Uitgeversmaatschappij verschenen, een bijzondere plaats in. Van Dormolen toch was de eerste auteur uit de laatste dertig jaar die het aandurfde zijn boek daadwerkelijk als een 'didactiek' van de wiskunde te bestempelen. Andere auteurs waren op begrijpelijke gronden voor zo'n naamgeving nog teruggedeinsd. Dit gold niet alleen voor ons land, maar ook bijvoorbeeld voor Duitsland. Freudenthal merkte in 1973 in het voorwoord van zijn 'Mathematik als pädagogische Aufgabe' in dit verband op, dat de beide door hem geschreven delen 'keine Didaktik der Mathematik (sind) in dem Sinne, dass systematisch angegeben wird, wie irgendein Stoff unterrichtet werden soll; es ist auch keine systematische Lehrstoffanalyse'.

Didactische handboeken uit het verleden hebben steeds stofproblemen centraal gesteld en niet het leerproces in het licht van de resultaten van ontwikkelingspsychologie en van leerpsychologie.

Dit betekent overigens niet dat de didactici uit het verleden voor de onderwijs- en leerproblematiek, ook vanuit het kind beschouwd, geen oog zouden hebben gehad. Jacob de Gelder (1765-1848) schreef in 1826 in zijn bijdrage 'Over de methodus docendi, in de studie der wiskundige wetenschappen te volgen':

'De leerling leert zich zelve, de onderwijzer bestuurt den loop der studiën . . . '.

Van Dormolen's 'Didactiek van de wiskunde', waarvan nu een tweede druk voor ons ligt, ditmaal uitgegeven door Bohn, Scheltema & Holkema, betekent een poging om in een leemte in onze vakliteratuur ontstaan te voorzien door systematische aanwijzingen te verstrekken over de wijze waarop de wiskunde in het licht van de voornaamste resultaten van de hulpwet-

schappen op verantwoorde wijze onderwezen worden kan. Niet hoe het moet, wel hoe het kan. We kunnen de auteur voor zijn poging niet anders dan dankbaar zijn. Van Dormolen heeft een handleiding voor de beginnende leraar geschreven waarin hij zijn kijk op dat leraarschap belicht op een wijze die van grote betekenis kan zijn voor de leraarsopleiding in de naaste toekomst.

Om de structuur van het werk aan te geven laten we een opsomming volgen van de titels van de opvolgende hoofdstukken.

(1). Algemene informatie	(22 p.)
(2). Doelstellingen	(30 p.)
(3). Begintoestand	(4 p.)
(4). Leerstof	(42 p.)
(5). Activiteiten van leerlingen	(24 p.)
(6). Werkvormen	(8 p.)
(7). Het schoolbord als hulpmiddel	(6 p.)
(8). Vragen en opdrachten	(26 p.)
(9). Voorbeelden van leerstofkeuze	(47 p.)
(10). Voorbeeld van een lesplan	(13 p.)
(11). Werkstukken	(49 p.)
(12). Literatuuroverzicht en register	(5 p.)

In de hoofdstukken 1-7 treedt de door de auteur verstrekte informatie op de voorgrond, in enige van de volgende hoofdstukken staan de opdrachten aan studerende centraal.

Van Dormolen schreef zijn boek vanuit de opvatting 'dat een beginnend leraar vóór alles belang heeft bij kennis, vaardigheden en houdingen in concrete onderwijssituaties', en daarom 'wil dit boek methoden en strategieën aanbieden op grond waarvan een wiskundeleraar verstandige beslissingen over zijn lesgeven kan nemen'.

Een prijzenswaardige doelstelling.

Om dit doel te bereiken maakt de auteur gebruik van het model 'Didactische analyse', dat uitgewerkt is door Van Gelder ten behoeve van de onderwijzersopleiding. De kernvragen die in dit model aan de leraar bij zijn lesvoorbereiding worden gesteld zijn:

- a. Wat zou ik graag willen dat mijn leerlingen bereiken?
- b. Waar kunnen mijn leerlingen beginnen?
- c. Hoe kan ik onderwijzen en hoe kunnen mijn leerlingen leren?
- d. Hoe worden de leerresultaten bepaald?

In zijn strategiemodel voor de ordening van onderwijs-leerresultaten onderscheidt Van Dormolen de volgende vijf fasen:

oriëntatie, sortering, abstrahering, explicitering, verwerking.

Een vergelijking met de leertrappen van Herbart en met de fasen die Van Hiele in het leerproces onderscheidt, wordt bij de aanbieding van het strategiemodel van Van Dormolen niet gegeven.

Ik laat deze zakelijke informatie volgen door enige punten van kritiek.

- a. Mijn voornaamste bezwaar tegen het boek betreft de wijze waarop de auteur de beschikbare ruimte heeft gemeend te moeten verdelen tussen te verstrekken informatie enerzijds en over aan de lezer gestelde vragen en opgaven anderzijds. Voor de informatie zag ik graag belangrijk meer, voor de vragen belangrijk minder plaats ingeruimd. Het zou de leesbaarheid van het boek ten goede zijn gekomen als de lectuur van bijna ieder hoofdstuk niet zo dikwijls was onderbroken door soms weliswaar belangrijke, maar vaak toch ook onbeduidende vragen.

Wat de verstrekte informatie betreft, deze is te vaak samengedrongen in schema's, opsommingen, overzichten. Hoe belangrijk de inhoud ervan vaak ook moge zijn, ze bevorderen in dit boek de leesbaarheid van de tekst allerm minst. Ze kunnen op doeltreffende wijze een gegeven betoog samenvatten, maar dreigen teleurstelling te geven als ze dat betoog vervangen.

Het boek zou de naam 'werkboek' mogen dragen, ook al ontbreekt deze naam op de titelpagina.

- b. Ik geef een enkel voorbeeld van een m.i. misplaatste opgave. In het hoofdstuk gewijd aan didactische hulpmiddelen beperkt de auteur zich tot commentaar over de rol van het schoolbord. Helaas laat hij een bespreking van het schoolboek achterwege. In de laatste vraag van dit hoofdstuk draagt de auteur nu echter aan de lezer op de verschillende schoolboeken te onderzoeken, hun verschillen aan te geven en na te gaan hoe ze gebruikt kunnen worden. Een onderwerp voor een scriptie! Naar mijn mening is dit op deze plaats duidelijk een ontoelaatbare opdracht, die hij zelf had dienen uit te voeren en niet had moeten afwentelen op de lezer, bijvoorbeeld een beginnend leraar.
- c. Naast drukfouten trof ik een enkele maal in het boek ook een feitelijke onjuistheid aan. Op bladzijde 105 wordt gesproken over de functie van Venn-diagrammen bij de beschouwing van enige verzamelingen. Venn-diagrammen behoren tot de visuele symbolen. Ik lees nu dat men bij drie verzamelingen wel, maar bij vier niet meer, het zonder verbaal-algebraïsche symbolen zou kunnen stellen. Dit is onjuist. Bij vier verzamelingen kan men hetzelfde bereiken als bij drie, indien men bijvoorbeeld rechthoeken in plaats van ovals gebruikt.
- d. Voor de paragrafen over taxonomie kan ik tot dusver nog maar weinig enthousiasme opbrengen. Het geheel lijkt me voor beginnende leraren nog maar weinig zinvol. Op p. 47 verdeelt de auteur de onderwijsdoelen in de volgende categorieën: theorie (*T*), algoritmen (*A*), problemen oplossen (*P*), logische samenhang (*L*), communicatie (*C*).
- Voor elk der categorieën volgt dan een onderverdeling in: kennis (*k*), begrip en toepassen (*b*), analyse en synthese (*a*).
- Deze onderscheidingen geven nu aanleiding tot een vijftiendelig schema, waarvan de delen worden aangegeven door een rij symbolen van T_k tot C_a .
- En de leraar kan er nu toe overgaan alle leerdoelen die hij kent over deze vijftien rubrieken te verdelen.
- Naar mijn mening is dit voor de beginnende leraar voorlopig nog een weinig zinvolle activiteit.
- e. Het twee bladzijden tellend register is door zijn beknoptheid en onvolledigheid naar mijn mening voor de gebruikers vrijwel waardeloos geworden.
- Het bevat persoonsnamen en zaaknamen. De enige auteur die vermeld wordt is Piaget, die overigens weer niet belangrijk genoeg geacht wordt om enig werk van hem in de literatuurlijst te doen opnemen. De namen Euclides en Pythagoras staan weliswaar ook in het register, maar ze verwijzen naar tijdschriften, niet naar personen.
- Het is me niet duidelijk waarom de auteur de talrijke auteurs van studieboeken en van schoolboeken geen plaats op het register heeft gegund. Het zou zinvol geweest zijn als daarbij telkens alle pagina's waren opgesomd, waar de desbetreffende naam wordt aangetroffen. Een analoge opmerking kunnen we maken voor de zakelijke termen. Onderwerpen als de stelling van Pythagoras, de middelloodlijn, termen als functie en relatie, verzamelingen komen herhaalde malen voor. Het register had zo kunnen worden ingericht dat de lezer zich ten aanzien van die vindplaatsen gemakkelijk zou kunnen oriënteren.
- f. Tenslotte een opmerking over het toenemend vakjargon. Misschien is het wel een gebrek mijnerzijds dat ik voor de voordelen ervan zo vaak nog onvoldoende oog schijn te hebben. Ik ben er de laatste jaren reeds aan gewend geraakt dat auteurs voor een didactische term als 'expliciteren' blijkbaar geen Nederlandse term beschikbaar weten te stellen. Nu weet ik, dat een 'schema' nieuwe leerstof zal moeten kunnen 'assimileren', en dat voor het geval het assimileren niet slaagt, dat schema eerst zal dienen te 'accommoderen'.
- Zou de Nederlandse taal werkelijk tekort schieten ten aanzien van de laatste twee begrippen? Een voordeel van termen als deze is uiteraard hun internationale klank. Toch wil ik niet verhele dat bij de lezing van de desbetreffende passage mijn sympathie uitging naar onze Vlaamse ambtsbroeders die hardnekkig van 'lidgeld' blijven spreken en de term 'contributie' die bij ons gangbaar is, vermijden.

Mijn punten van kritiek nemen niet weg dat ik de auteur van deze wiskundendidactiek succes blijf toewensen op de weg waarlangs hij de kennis van de didactiek hier te lande tracht te bevorderen. Ik wens hem toe dat er spoedig een opnieuw herziene druk van zijn werk zal kunnen verschijnen. En dat deze herdruk dan ook gebonden in de handel zal worden gebracht!

Joh. H. Wansink

Een nieuw tijdschrift

In februari 1976 is verschenen het eerste nummer van de eerste jaargang van het tijdschrift Pentamino. Dit tijdschrift is geheel gewijd aan de mathematische recreatie.

Ik citeer uit het voorbericht:

Vous trouverez dans 'pentamino': des jeux, des problèmes, des solutions, des articles relatifs à la mathématisation de certains jeux, une bibliographie et une rubrique 'vie des clubs'.

Het eerste nummer beslaat 96 blz. groot formaat. De hoofdstukken zijn getiteld: Algorithmes numériques, Jeux de Nim, Tangrams, A propos du nombre d'or, Jeux de pions, Jeux de cartes, Articles, Vie des clubs, Bibliothèque.

Het tijdschrift wordt uitgegeven door het Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques te Grenoble.

Hieronder vindt u de aanwijzingen die u gevraagd worden op te volgen voor het verkrijgen van een abonnement.

Conditions d'abonnement

L'abonnement porte sur une année civile et donne droit à 2 numéros.

Tarif pour 1976 (no. 1 et no. 2): 40 F.

Pour l'étranger un supplément pour frais de port pourra être demandé.

Pour vous abonner:

- 1) Indiquez vos Nom, prénom, profession, nom et adresse de votre établissement, adresse personnelle et le nombre d'abonnement(s) désiré.
- 2) Joindre un chèque du montant de votre abonnement à l'ordre du C.R.D.P. de Grenoble (G.C.P.: 5403 16 H Grenoble).
- 3) Envoyer le tout à l'adresse suivante: C.R.D.P. (Pentamino), 11, rue Général Champon, 38041 Grenoble Cédex.

Hieronder volgen een drietal problemen uit het tijdschrift.

Het derde is een spel en daarvan wordt uiteraard geen oplossing gepubliceerd. Wie een van de eerste twee opgaven tot een goed einde brengt, doet me een plezier me de oplossing te sturen. Ik zal deze gaarne publiceren. Zelf ben ik er niet in geslaagd een oplossing te vinden.

372. Algorithme: symétrie

	<i>Exemples</i>	
Choisir une nombre de trois chiffres	132	463
Le retourner	+ 231	+ 364
	363	827
Ajouter ces deux nombres		
Si le nombre lu de gauche à droite est le même que celui lu de droite à gauche on s'arrête	Arrêt	+ 728
Sinon on réitère l'algorithme		1555
		+ 5551
		7106
		+ 6017
		13123
		+ 32131
		45254
		Arrêt

Y-a-t-il toujours une fin?

373. Algorithme: pair ou impair?

Choisir un nombre n quelconque.

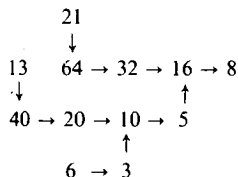
Si n est pair calculer $\frac{n}{2}$, ce qui est noté $n \rightarrow \frac{n}{2}$.

Si n est impair calculer $3n + 1$, ce qui est noté $n \rightarrow 3n + 1$.

Réitérer le calcul avec le nombre trouvé.

Exemple: $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \dots$

L'étude sur quelques nombres conduit à l'arbre suivant:



Qu'observe-t-on?

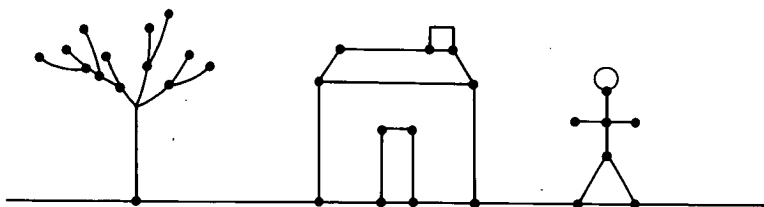
374. Le hackenbush

Se joue à deux joueurs (ou plus) sur un dessin.

Ce dessin comporte:

- un sol représenté par un trait horizontal
- un ensemble de points reliés par des lignes (c'est-à-dire un graphe avec ses sommets et ses arcs) de telle sorte que tout point soit en liaison (directe ou non) avec le sol.

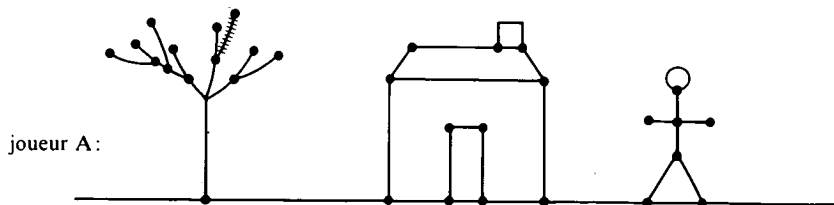
Exemple d'un dessin:



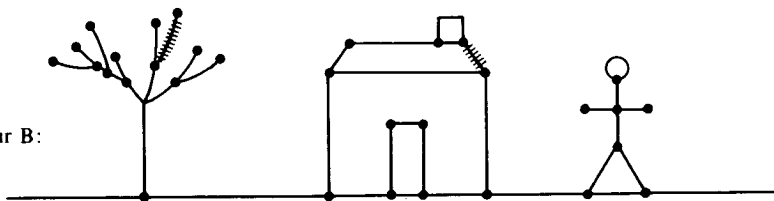
Chaque joueur supprime à son tour un arc (ligne joignant deux sommets).

Perd celui qui ne peut plus jouer.

Exemple d'un début de partie



joueur B:



Attention:

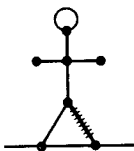
Il faut tenir compte de la pesanteur.

Si on supprime un arc qui était le seul lien d'une partie du graphe avec le sol, cette partie s'écroule.

Exemple d'une fin de partie

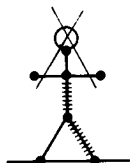
(on suppose qu'il n'y a plus d'arc à supprimer sur l'arbre ou la maison).

joueur A:



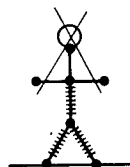
le corps du bonhomme est encore relié au sol par une jambe.

joueur B:



le joueur B en supprimant le tronc du bonhomme fait s'écrouler la tête, le cou et les bras.

joueur A:



le joueur A supprime la deuxième jambe.

Le joueur B ne peut plus jouer il a perdu.

Oplossingen

Voor de opgaven zie het vorige nummer.

370. 1000 opeenvolgende natuurlijke getallen die geen van alle priem zijn, zijn $1001! + 2, 1001! + 3, \dots, 1001! + 1001$

371. Hieronder is een gesloten kromme getekend die ineens doorlopen kan worden. De kromme snijdt zichzelf enkele keren; bij het doorlopen bereikt men elk snijpunt slechts twee keer. Men mag bij het doorlopen van de kromme niet bij een snijpunt plots van richting veranderen. Men passeert achtereenvolgens bij het doorlopen van de kromme de snijpunten 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 1. Elk van de snijpunten staat in deze serie op een even en op een oneven plaats. Bewijs dat dit bij elke dergelijke kromme het geval is.

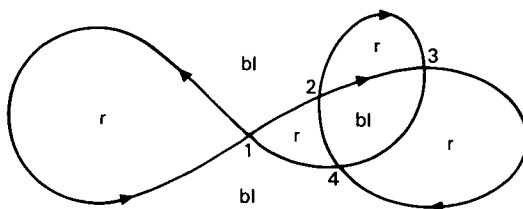


Fig. 1

Kleur de gebieden waarin het vlak door de kromme verdeeld wordt, rood en blauw en doe dat zo, dat aangrenzende vlakdelen verschillend gekleurd worden. Dat dit steeds mogelijk is, is een probleem op zichzelf, maar betrekkelijk gemakkelijk te bewijzen. In de figuur is een kleuring aangegeven.

Gaat men volgens de getekende pijlrichting van links naar punt 1 dan heeft men rood aan zijn linkerhand. Men passeert 1 en heeft dan rood aan zijn rechterhand. Daarna passeert men 2 en krijgt rood weer aan zijn linkerhand, enz. Na verloop van tijd komt men bij 1 terug. Er zijn nu in principe twee mogelijkheden, hieronder weergegeven.

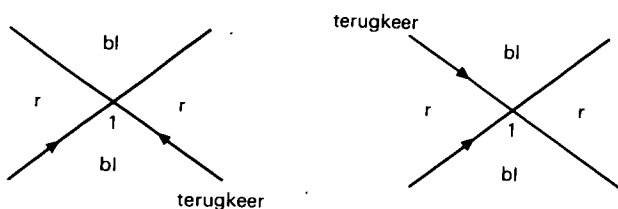


Fig. 2

In beide gevallen zal men bij het terugkeren rood aan zijn rechterhand hebben, voordat men in 1 komt en aan zijn linkerhand daarna. Van eerste tot tweede keer 1 is men dus een even aantal snijpunten gepasseerd. Hetgeen te bewijzen was.

Ontvangen boeken

L. Muskens e.a., *Passen en meten, deel 7, 8AB en 8BC*. Uitgave Wolters-Noordhoff.
Wiskunde voor het Lager Beroepsonderwijs, deel 1B, Docentenboek. Uitgave Educatieve Uitgeverij N.C.B.
P. M. van Hiele, *van A tot Z, wiskunde werkschriften voor het L.H.N.O., deel 2a en 2b*. Uitgave Muusses, Purmerend.

Mededelingen



Wiskunde voor brugklassen

Ter gelegenheid van het 200-jarig bestaan van het Wiskundig Genootschap organiseert een van haar commissies, de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, een activiteit voor brugklassen van alle schooltypen voor voortgezet onderwijs.

Het is de bedoeling, dat in de week van 2-6 januari 1978 kleine groepjes brugklasleerlingen uit het lbo, avo en vwo enige uren bezig zullen zijn met het ontwikkelen van een stukje wiskunde, dat aangepast is aan ieders niveau, waaraan ieder op zijn niveau mee kan doen en waaraan ieder plezier kan beleven. Leerlingen zullen er zowel handelend creatief, als intellectualistisch aan bezig kunnen zijn, terwijl het samenwerken van leerlingen onderling een belangrijke rol zal spelen.

Elke school zal met evenveel groepjes mee kunnen doen als men wil. Er zal geen competitielement aan verbonden zijn, maar het is wel de bedoeling, dat er een bloemlezing met uitwerkingen en beschrijvingen van werkwijzen komt. Bovendien zal er tijdens het jubileumcongres van het Wiskundig Genootschap verslag worden gedaan en zullen enkele werkstukken worden tentoongesteld. Hiertoe zullen scholen werkstukken kunnen inzenden en zullen van de leerlingenactiviteiten observaties kunnen worden uitgevoerd.

Elke school uit het voortgezet onderwijs, die hiervoor belangstelling heeft kan vóór 1 december 1977 een pakket opdrachten aanvragen aan onderstaand adres (liefst per briefkaart en met vermelding van een contactpersoon). Het pakket bevat een aantal verschillende opdrachten voor 2 aaneengesloten lesuren, of een gehele middag, of twee maal 2 aaneengesloten lessen. De leraar kan (eventueel samen met zijn leerlingen) een keus doen uit de verschillende opdrachten. De scholen, die meedoen zullen (in verband met de beperkte geldmiddelen van de Ned. Onderwijscommissie voor Wiskunde) zelf voor vermenigvuldiging van de opdrachten moeten zorgen.

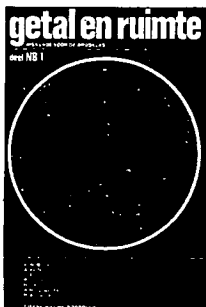
Deze actie, die WisbruG 200 is genoemd, kan worden uitgevoerd dank zij de medewerking van het Wiskundig Genootschap (dat is in Nederland de vereniging van mensen, die van wiskunde bedrijven hun beroep maken), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de wiskundesecties van instituten voor lerarenopleidingen en het I.O.W.O. (Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs). De organiserende Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde heeft tot doel het aankweken en bevorderen van belangstelling voor wiskunde bij jongeren. Zij doet dat onder meer door de instelling van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, de redactie van het wiskundetijdschrift voor jongeren Pythagoras en het mogelijk maken van deelname aan de jaarlijkse Internationale Wiskunde Olympiade.

De commissie hoopt, dat deze nieuwe activiteit aan zal slaan en in volgende jaren voortgezet zal kunnen worden. Zij hoopt, dat wiskundeleraren niet te snel zullen denken, dat hun leerlingen dit niet zullen kunnen.

J. van Dormolen, secretaris
Budapestlaan 6,
Utrecht

Tel.: 030-53 17 25 of 53 37 68 of 071-15 10 15

getal en ruimte



DE WISKUNDE SERIE DIE AF IS EN BIJ BLIJFT
VOOR MAVO HAVO EN VWO

Verschenen zijn de volgende herdrukken:

GETAL EN RUIMTE NB 1

wiskunde voor de brugklas

ISBN 90 11 81046 5/198 blz./100 fig./f. 13,75

GETAL EN RUIMTE 4/5H2

meetkunde en statistiek voor de 4e en 5e klas havo

ISBN 90 11 81096 1/4e druk/280 blz./130 fig./f. 20,50

GETAL EN RUIMTE 5/6V3

wiskunde II voor de 5e en 6e klas vwo

ISBN 90 11 81110 3/3e druk/260 blz./90 fig./f. 20,75

ANTWOORDEN BIJ 5/6V3

ISBN 90 11 81112 7/3e druk/40 blz./f. 2,90

Dit najaar verschijnen:

GETAL EN RUIMTE NB 2

wiskunde voor de brugklas

ISBN 90 11 81048 1/±200 blz./f. 13,75

ANTWOORDEN BIJ NB 1

ISBN 90 11 81047 3/±32 blz./±f. 3,90

HANDLEIDING EN TOETSEN BIJ NB 1

ISBN 90 11 81127 5/±80 blz./±f. 8,50

ANTWOORDEN BIJ NB 2

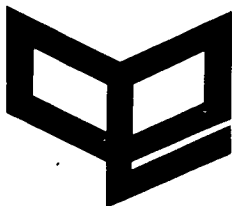
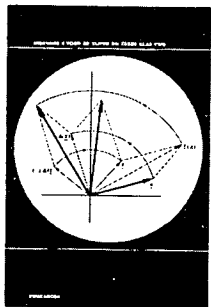
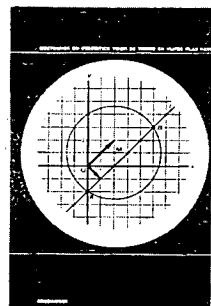
ISBN 90 11 81049 x/±32 blz./±f. 3,90

HANDLEIDING EN TOETSEN BIJ NB 2

ISBN 90 11 81134 8/±80 blz./±f. 8,50

ANTWOORDEN BIJ 4/5H2

ISBN 90 11 81104 6/48 blz./4e druk/±f. 2,60



educaboek bv
culemborg

INDUSTRIEWEG 1 TELEFOON 03450-3143

INHOUD:

J. Timmer: Toetsing en evaluatie in het onderwijs	43
Uit de jaarrede 1976 van de voorzitter van de N.V.v.W.	53
Mevrouw G. W. Fokkens: Verslag van discussie op de jaarvergadering 1976	54
Fred Goffree: Vakdidactische notities	57
P. G. J. Vredenduin: Onderwijsvernieuwing wiskunde op de basisschool in België	62
P. G. J. Vredenduin: Korrel	70
Dr. J. T. Groenman: Over een Eend met goede remmen	72
Journal für die reine und angewandte Mathematik	74
Boekbespreking	75
Recreatie	78
Ontvangen boeken	81
Mededelingen	82

ADRESSEN AUTEURS:

Mevrouw G. W. Fokkens, Uilenstede 226-1576, Amstelveen.
Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.
Dr. J. T. Groenman, Goeman Borgesiuslaan 8, Groningen.
J. Timmer, O.Z. Voorburgwal 12, Amsterdam-C.
P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.