

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang

1976/1977

no 10

juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, Apeldoorn, tel. 055-250834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden f 30,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 85,—.

Euclides

Maandblad voor de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren

52ste jaargang 1976 | 1977

Wolters-Noordhoff bv Groningen

Inhoud van de 52ste jaargang 1976/1977

ARTIKELEN

- J. P. Aldershof*: Statistiek in het mavo? Ja, maar . . - dec. - 147
Gert Bakker: Leerboeken wiskunde in de brugklas in 1976/1977 - 327
H. J. M. Bos: Mathematisering en Maatschappij of Hoe loopt een succes-story af? - 82
H. Bosscher: Keuze en ordening van vraagstukken - 284
Prof. Dr. O. Bottema: Afbeeldingen zonder dekelement - 98
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden
XCIV Uit en thuis op de bol - 20
C Geen commentaar - 339
W. A. M. Burgers: De rij van Fibonacci - 349
H. Broekman: Diagnostisch(?) Toetsen - 92
E. C. Buissant des Amorie: De matrices van spiegeling en rotatie nogmaals - 299
M. Dijkshoorn: Zo kan het ook - 369
Hans Freudenthal: Wiskunde-onderwijs anno 2000 - 290
Fred Goffree: Vakdidactische notities
1 Boven de stof staan - 281
2 Vakbekwaamheid (1) - 323
3 Meetkundige ervaringen van een basisschoolleerling - 365
Dr. P. M. van Hiele: Hoe moet men . . - jan. - 128
Sieb Kemme: Denkniveaus en het begin-onderwijs in de wiskunde - 370
R. Kooistra: Over de niet-differentieerbaarheid van f op het examen wiskunde I (v.w.o. '76) - 224
Frank Laforce: X^X - 347
Marja Meeder: Keuze-onderwerp op het HAVO - dec. - 140
Ir. H. M. Mulder: Een maximum-probleem bij zien en fotograferen - 110
Ir. H. M. Mulder: Een maximum bij filevorming - dec. - 149
Ir. H. M. Mulder: Biljarten op een rond biljart - 303
A. H. Nicolai: Eindexamen wiskunde II - 227
Drs. A. H. Nieuwenhuis: Buigpunt ja, buigpunt nee? - 108
A. J. L. Osté: Een suggestie n.a.v. het vraagstuk over vectoren op het C.S.E. Mavo-4 1976 - 219
C. Rijke: Reacties op het v.w.o.-eindexamen 1976 - 221
J. Roelofsen: Naar aanleiding van de leerzame reis van de heer Van Dalen - dec. - 142
C. van Schagen: De puzzel als didactisch hulpmiddel - 61
S.O.L. vakgroep wiskunde: Voorbereiding op het leraarschap - 378
Rik Verhulst: Het affiene vlak als gangmaker voor de reële vectorruimten - jan. - 142
P. G. J. Vredenduin: Afbeeldingen - 56
P. G. J. Vredenduin: Het aanvangsonderwijs in de meetkunde - jan. - 121
P. G. J. Vredenduin: The mathematics teacher - jan. - 158
P. G. J. Vredenduin: Rectificatie definitie differentiaalvergelijking - 301

F. M. Vriesendorp: Magische vierkanten als voorbeeld voor lineaire ruimten - 41
Joh. H. Wansink: Een halve eeuw Wimecos-NVWL 1926-1976 - 1
Edu Wijdeveld: ? - 296

xev

KORRELS

Drs. W. E. de Jong: - 225
P. G. J. Vredenduin: Logisch correct taalgebruik - 59

DIVERSEN

Bij de 100ste Verscheidenheid - 345
De C.M.L.-wiskunde: Een interview met Prof. Dr. H. Freudenthal - 100
Computerkunde: onderwijsprobleem met een oplossing? - 77
Erepromotie - 335
Examens: eindexamen Middelbare Technische Scholen 1976-1977 - 250
 de eindexamens wiskunde 1976 in meerkeuzevorm - 268
 examens wiskunde a.v.o.-v.w.o. 1976 - 201
 examens wiskunde a.v.o.-v.w.o. tweede tijdvak 1976 - 252
 het eindexamen wiskunde II 1976 - 270
Een huiswerkopgave - dec. - 133
In memoriam L. van Beek - 363
18de Internationale Wiskunde Olympiade - 390
Moeten ellips en hyperbool op het eindexamen gekend worden? - 276
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1975, 2de ronde - 63
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1976, 1ste ronde - 308
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1976, 2de ronde - 395
Uit de tijdschriften - 65
De 'periode Krooshof' (1968-1976) - 364
G. Krooshof-Bert Zwaneveld - 81
Vakantiecursus - 346
De vierde Wiskunde Olympiade in de U.S.A. - 64

VERSLAGEN

Het centraal schriftelijk examen v.w.o.-wiskunde I van mei 1976 - 241
Drs. W. F. J. Edelaar: Verslag van de ingangstest wiskunde van het cursusjaar
 1975-1976 gehouden aan de TH-Delft, TH-Eindhoven en TH-Twente -
 dec. - 121
Examenverslag 1975 - 24
F. F. J. Gaillard: het l.b.o./m.a.v.o. 3 - examen wiskunde 1976 - 248
F. J. Mahieu: Verslag examen wiskunde mavo-4 1976 - 228
Redactieverslag - 70
De regionale werkgroep Alkmaar - 332

BOEKBESPREKINGEN

- Prof. Dr. S. T. M. Ackermans en Prof. Dr. J. H. van Lint: Algebra en Analyse* (M. F. Blommestijn) - 312
- B. Anger, H. Bauer: Mehrdimensionale Integration* (A.C. Zaanen) - dec. - 156
- Les Applications Nouvelles des Mathématiques et l'Enseignement Secondaire* (P. G. J. Vredenduin) - 34
- Robert G. Bartle: The elements of real analysis* (W. Kleijne) - 237
- K. de Bruin e.a.: Getal en Ruimte dl 3M IV-1,2* (L. v. d. Zijden) - dec. - 155
- Friedrich W. Buckel: Rechnen mit Stab und Taschenrechner* (G. Krooshof) - 71
- Lucas N. H. Bunt, Philip S. Jones, Jack D. Bedient: The Historical Roots of Elementary Mathematics* (P. G. J. Vredenduin) - 314
- Emma Castelnuovo e Mario Barra: Matematica nella realtà* (P.G.J.Vredenduin) - 356
- Dr. D. van Dalen e.a.: Verzamelingen, naïef, axiomatisch en toegepast* (P. G. J. Vredenduin) - 72
- Dr. A. van Dop e.a.: Sigma deel 3h* (J. Th. J. Mahieu) - 73
- Dr. A. van Dop e.a.: Vectormeetkunde 2* (L. v. d. Zijden) - dec. - 155
- B. Fuchssteiner e.a.: Funktionalanalysis* (W. J. Claas sr.) - 34
- G. Gottschalk, R. E. Kaiser: Einführung in die Varianzanalyse und Ringversuche* (J. Fabius) - dec. - 158
- H. B. Griffiths, P. J. Hilton: Klassische Mathematik in zeitgemässer Darstellung* (W. Kleijne) - 313
- H. Hasse: Mathematische Abhandlungen* (J. P. Murre) - dec. - 156
- E. Heil: Differentialformen* (W. J. Claas sr.) - 116
- Horst Herold: Differentialgleichungen im Komplexen* (W. Kleijne) - jan. - 154
- E. Hille: Ordinary differential equations in the complex domain* (A. C. Zaanen) - 238
- B. Hoffmann: Albert Einstein* (W. Burgers) - 75
- Prof. Dr. G. Holland: Geometrie für Lehrer und Studenten* (Joh. H. Wansink) - 30
- E. Holler e.a.: Rechnernetze* (J. Wessels) - 73
- Jahrbuch Ueberblicke Mathematik 1975* (A. C. Zaanen) - 115
- Jahrbuch Ueberblicke Mathematik 1976* (A. C. Zaanen) - jan. - 156
- W. Jochems, J. Vastenhouw: De didaktische waarde van onderwijs gebaseerd op handelings- en leerstofstructuren* (Joh. H. Wansink) - jan. - 154
- B. Kanitschneider: Vom absoluten Raum zur dynamischen Geometrie* (O. Bottema) - 312
- R. Kieslich, Prof. Dr. H. Klager: Soziale Interaktion in der Gesamtschule* (Joh. H. Wansink) - 30
- K. Kießwetter: Reelle Analysis einer Veränderlichen* (W. Kleijne) - 31
- U. Kulisch: Grundlagen des Numerischen Rechnens* (M. N. Spijker) - 359
- P. Lauwen: Moderne wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs* (J. K. Timmer) - dec. - 154
- D. Lovelock, H. Rund: Tensors, Differential Forms and Variational Principles* (W. J. Claas sr.) - jan. - 156
- D. Marsal: Die numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen* (M. N. Spijker) -
- E. A. Maxwell: Geometry by Transformations* (P. G. J. Vredenduin) - 357

- Lic. Jean Meeus, Dr. T. de Groot*: Sterrengids 1977 (W. Kleijne) – 238
- J. H. Meijer*: Rekenen en moderne wiskunde (J. K. Timmer) – 74
- H. Meschkowski*: Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie (O. Bottema) – 73
- H. Meschkowski*: Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik (W. Burgers) – 311
- A. Mizrahi, M. Sullivan*, Finite Mathematics with applications (W. Burger) – 75
- K. de Munter e.a.*: Omtrent $\mathbb{R}$ (P. G. J. Vredenduin) – 32
- De Munter e.a.*: Moderne Wiskunde, deel I (J. K. Timmer) – 116
- Commentaar op een recensie (van blz. 116) (J. K. Timmer) – 315
- Tweede commentaar (J. K. Timmer) – 360
- E. Nagel e.a.*: De stelling van Gödel (Burgers) – 33
- I. Niven, H. S. Zuckerman*: Einführung in die Zahlentheorie I (A. W. Boon) – jan. – 157
- Georg Nöbeling*: Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene (W. Kleijne) – 358
- H. Noltemeier*: Graphentheorie mit Algorithmen und Anwendungen (A. H. G. Rinnooy Kan) – 237
- A. Oberschelp*: Elementare Logik und Mengenlehre I (W. Kleijne) – 31
- Prof. Dr. Franz Pichler*: Mathematische Systemtheorie (H. J. M. Goeman) – 71
- R. M. Pickrell*: Arithmetic, basic skills for college students (J. K. Timmer) – 117
- G. Preusz*: Grundbegriffe der Kategorientheorie (J. Brinkhuis) – dec. – 157
- Proceedings of the ICMI-IDM Regional Conference (P. G. J. Vredenduin) – 313
- G. Polya*: Heuristiek en wiskunde (W. Kleijne) – 74
- B. van Rootselaar*: Lineaire Algebra (W. Kleijne) – 311
- J. M. Rushforth, J. L. I. Morris*: Computers and Computing (A. F. Alkemade) – 71
- Imre Rusze*: Die Begriffswelt der Mathematik (W. Kleijne) – 314
- M. Rutsch, K. H. Schriever*: Wahrscheinlichkeit II (A. C. Zaanen) – 237
- Karl Schick*: Lineare Optimierung (W. Kleijne) – 359
- Prof. Dr. N. Sieber e.a.*: Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen (W. Kleijne) – 358
- Mary Sime*: Zoals een kind het ziet (P. G. J. Vredenduin) – dec. – 158
- SMP*: Further Mathematics Series III, Differential Equations and Circuits (P. G. J. Vredenduin) – 398
- SMP*: Further Mathematical Series V, Statistics and Probability (P. G. J. Vredenduin) – 114
- Dr. J. van Tiel*: Wiskundige methoden met toepassingen (W. Kleijne) – 114
- R. Verhulst e.a.*: Wiskundig Leerpakket I (P. G. J. Vredenduin) – jan. – 154
- Wiskunde en Onderwijs (W. Kleijne) – dec. – 154

ONTVANGEN BOEKEN – 35-99-120-295-400

DIDAKTISCHE LITERATUUR – 60

RECREATIE - 36-76-118-159-239-278-316-361-399

NEDERLANDSE VERENIGING VOOR WISKUNDELERAREN - 66 - dec:
144 - jan: 160-232-319-389

MEDEDELINGEN - 19-28-29-35-38-62-80-109 - dec: 141-146-153 - jan: 157-
232-277-298-302-326-338-360-368-397-401

De 52ste jaargang stond onder redactie van G. Krooshof (tot 1 dec.), voorzitter - B. Zwaneveld (sinds 1 dec.), voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong (sinds 1 dec.) - D. P. M. Krins (sinds 1 dec.) - Drs. J. van Lint - Drs. S. A. Muller (sinds 1 mei) - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof (tot 1 dec.).

In memoriam

L. VAN BEEK †

Op zaterdag 14 mei is ons bestuurslid Bert van Beek overleden.

Een bericht waar je van schrikt: een contrast met de zo bruisende vitaliteit die hem kenmerkte en de haast waarmee hij leefde.

Bert heeft zijn gaven en zijn werkkraft – en dat was waarachtig veel – in dienst gesteld van het onderwijs. Hij gaf zich daaraan zo volledig, dat wij ons wel eens afgevraagd hebben of hij zich niet al te zeer inspande. Van een mens als Bert begrijp je dat hij niet minder kón.

Hij was directeur van een mavo-school in Balk en hij vervulde daarnaast veel en belangrijke functies in verscheiden onderwijs-organisaties, waaronder zijn vereniging voor schooldekanen. Een organisatieman in hart en nieren.

Zijn kennis van mavoleraren bracht hij in bij de Centrale Commissie Begeleiding Mavo-Wiskunde als vertegenwoordiger van het Mavo-Verband.

In 1969 werd hij bestuurslid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Hij heeft veel werk voor de vereniging verzet, daarbij vooral gebruikmakend van zijn organisatorische kwaliteiten en heel bijzonder lettend op de belangen van het wiskunde-onderwijs in het mavo. Ook vertegenwoordigde hij de vereniging in de Raad van Vakgroepen.

Bert was een werkzaam mens, die rustig wist te luisteren om vervolgens met verve en gevoel voor werkelijkheid van zijn idealen te getuigen, daarbij een gezellige en trouwe vriend en bovenal een wijs en goed mens.

Het moge voor zijn vrouw een troost zijn te weten dat Bert in de herinnering van velen zal voortleven als een vriend waarvoor je respect hebt.

Theo J. Korthagen

Leo A. G. M. Muskens

De 'periode Krooshof' (1968–1976).

In het decembernummer van de 44e jaargang van Euclides werd G. Krooshof voor het eerst als voorzitter van de redactie genoemd, het oktobernummer van de 52e jaargang vermeldde zijn naam voor het laatst in deze hoedanigheid. Daartussen ligt een tijdspanne van 8 jaar, die als de 'periode Krooshof' van Euclides kan worden aangemerkt.

Het duidelijkst is dit wellicht tot uitdrukking gekomen in het eerste nummer van de 45e jaargang, toen van het vertrouwde, maar weinig tot de verbeelding sprekende, geelkleurige omslag werd overgestapt naar een fellere kleur groen. Bij deze transformatie onderging de titel van het tijdschrift een rotatie over $-\frac{1}{2}\pi$ en zou de lezer in het vervolg in diapositief tegemoet treden.

Ditzelfde nummer opende met een redactionele bijdrage van Krooshof, waarin hij stelde: 'Het vernieuwde omslag moet ook een symbool zijn voor een verandering van de inhoud'.

Twee redenen werden daarvoor aangevoerd: de leerplanontwikkelingen in inhoudelijke zin en de doorbreking van de grenzen tussen de verschillende soorten van onderwijs.

Dat het niet bij goede voornemens in dit opzicht is gebleven hebben de vele trouwe lezers van Euclides in de 'periode Krooshof' duidelijk kunnen constateren, zoals ook door Vredenduin is gememoreerd bij de overdracht van het voorzitterschap van Krooshof aan B. Zwaneveld.

Ook in technisch opzicht heeft Euclides de afgelopen jaren een nogal ingrijpende wijziging doorstaan: De overgang van boekdruk naar offset. Vooral in het begin van deze 'vooruitgang' van de techniek werd de redactie geconfronteerd met erg veel fouten in het zetwerk, waardoor een stevig beroep werd gedaan op het incasseringsvermogen van alle betrokkenen. Dat de relatie tussen redactie en uitgever hiervan geen schade opliep is voor een niet onaanzienlijk deel te danken geweest aan het begrip dat Krooshof voor de moeilijkheden wist op te brengen.

Nu aan het einde van de 52e jaargang de periode Krooshof definitief is afgesloten willen we hem, en met hem de gehele redactie, graag bedanken voor de samenwerking. We spreken graag de wens uit dat de traditie in dit opzicht – al of niet in een nieuw jasje – met de redactie onder aanvoering van B. Zwaneveld zal worden voortgezet.

Wolters-Noordhoff bv

Vakdidaktische Notities

FRED GOFFREE

3 Meetkundige ervaringen van een basisschoolleerling

Bij het onderwijzen van het vak meetkunde heb ik diverse malen in ongewisheid verkeerd over de zin ervan. In het oude, traditionele programma waren het vaak de mikroskopische problemen van de driehoek die mij zeer aan het twijfelen brachten. Niet het minst overigens door de twijfel die ik bij mijn 'onderbouwers' wist te zaaien. Ondanks de zekerheid die je had binnen de theoretische opbouw van het geheel – later weer terdege ondermijnd door kritischer leraren in de wiskunde – was er toch een grote mate van ontevredenheid.

Wellicht was deze ontevredenheid gedeeltelijk de oorzaak van de grote welwillendheid waarmee de nieuwe wiskundeprogramma's werden ontvangen. Natuurlijk had je niet direkt in de gaten dat de moderne meetkunde veel abstrakter was dan de oude. In de schoolboeken werd dat trouwens sterk verdoezeld door de pogingen om in konkrete situaties en met konkrete spullen te werken. De groepsstructuur kun je met een kartonnen rechthoek beschrijven

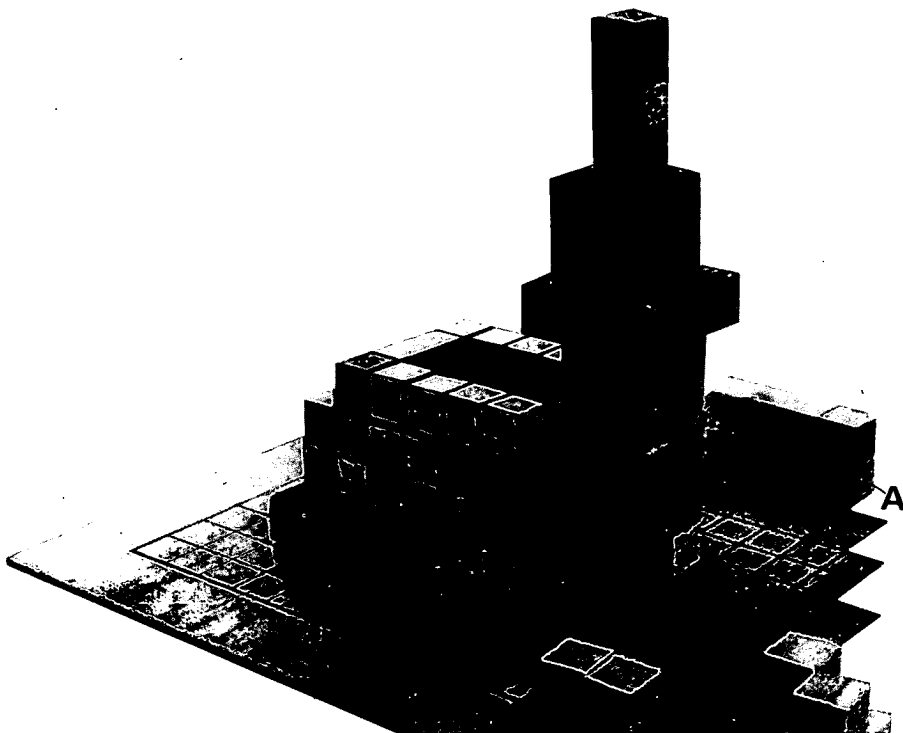
En hoewel de leerlingen de nieuwe aanpak in het algemeen wel kunnen waarderen, in elk geval wel aankunnen, rijst ook hier af en toe de vraag: wat is de zin van dit alles? Bij het nadenken over het antwoord is nu evenwel het argument van de (schijn-)deduktieve theorie verdwenen. Je moet zoeken in de buurt van de structuren en komt dan tot de konklusie dat de zin 'later in de wiskunde' wel duidelijk zal worden. Hierbij moet ik wel bekennen dat deze stap voor mij niet zo vanzelfsprekend was. Ik had nogal wat tijd nodig om door de schijnbare relatie tot de realiteit heen te zien. Het werken met spiegels heeft tenslotte niets te maken met ons spiegeltje 'aan de wand'. Om van doorkijkspiegels maar niet te spreken.

Eigenlijk ben ik nu weer ontevreden. Lang niet alle leerlingen in de onderbouw kunnen 'later in de wiskunde' ervaren wat de 'zin' was van hun brugklas wiskunde. Met brugklassers is dat anders dan met leerlingen van de basisschool. De laatsten kunnen nog alle kanten uit en zitten (soms) ongedifferentieerd bij elkaar. Misschien levert het nadenken over meetkundige activiteiten voor basisschoolleerlingen iets op voor ons onderbouwprogramma. Het komt mij

voor dat in elk geval de l.b.o.-meetkunde – in het licht van bovengenoemde ontevredenheid – eerder van onder af dan van boven (= mavo, vwo) uitgevoerd moet worden. *

Welnu, deze lange overpeinzing is bedoeld als inleiding op een paar ervaringen die ik u graag wil vertellen.

Het begon allemaal in de pedagogische akademie. We hadden een groep van ca. 18 studenten, van wie er zeker drie met atheneum (wiskunde) en een stuk of vijf met wiskunde in het havopakket. Met deze studenten kon, zo meenden we, op redelijk nivo ingestapt worden. Zodoende werd na een wiskundige beschrijving van een blokkenbouwsel (kerk met toren) de vraag gesteld of vanuit een bepaald huis, ook van blokken gebouwd, de torenklok gezien kon worden. En eventueel hoeveel procent van de klok maximaal waargenomen kon worden.

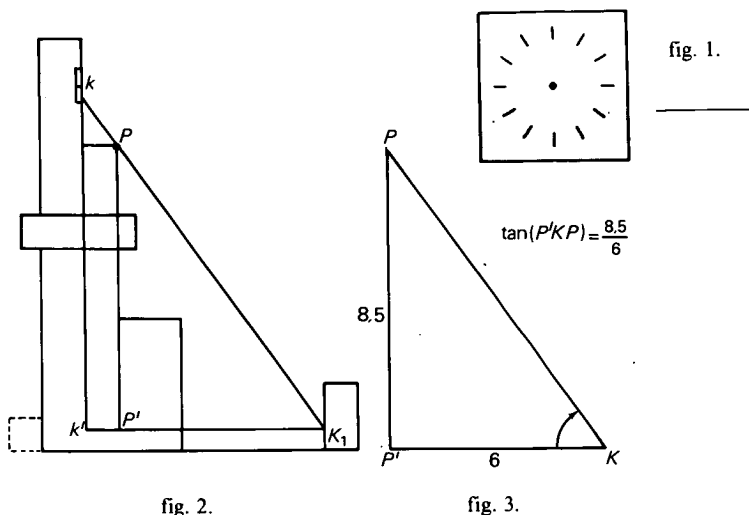


De aanpak van de studenten – het probleem werd open gepresenteerd – was onvoorstelbaar onhandig. Had ik mij voorgesteld dat uit de gegeven bouwtekening (plattegrond met hoogtecijfers) (zie ook Wiskobas-Bulletin, leerplan-publikatie 2 december 1975) een neerslag of een silhouet zou worden getekend, het kwam anders uit. De problematiek was ongrijpbaar, geen van de studenten bezat het instrumentarium of alleen maar de fantasie om een begin te maken.

* Zie ook de Wiskrant – uitgave IOWO.

Na de les (lees: puinhoop) kwam ik tot bezinning. Deze studenten – met of zonder wiskunde in hun pakket – hadden meetkunde niet als beschrijvingsmiddel ervaren. Dat een lichtstraal gekonkretiseerd kon worden door een touwtje, en dat weer gesymboliseerd door een rechte lijn, was hun onbekend. Dat je ‘kijken naar’ dan ook met een rechte lijn kunt beschrijven, ligt buiten hun bereik.

Op deze manier was het natuurlijk ondenkbaar dat men tot de gelijkvormige driehoeken zou komen, waarin de gevraagde percentages berekend konden worden.



Met deze analyse in gedachten tracht je dan als leraar de volgende les zo in te richten dat al het onheil van vorige keer weer uit de weg wordt geruimd. En ik begon te vertellen dat *iedereen* meetkunde in zijn pakket heeft. ‘Alleen de meesten onder ons hadden nog geen gelegenheid gehad zich dat bewust te maken’.*

Via ‘vragen van kinderen’ hebben we toen heel wat meetkunde in-(op-)gehaald. Een enkel voorbeeld kan ik u niet onthouden.

Waarom lijken dingen verder weg kleiner?

Waarom lijkt de zon ongeveer even groot als de maan?

Hoe werkt een kaleidoskoop?

Hoe komt het dat je in de trein de bomen dichtbij schijnbaar achteruit ziet gaan ten opzichte van de verder weg staande dingen?

Is dat een cirkel in het water, als je er een steen in hebt gegooid?

Kun je de hoogte van die boom meten?

Hoe komt het dat je het gezicht van de meester achter de top van je vinger kunt laten schuilen?

* Zie bijvoorbeeld ook *Uebungssammlung* van Titiane Ehrenfest-Afanasjewa.

In het laatste geval bleek het voor de studenten niet vanzelfsprekend om een plaatje als hieronder ter verklaring te tekenen:

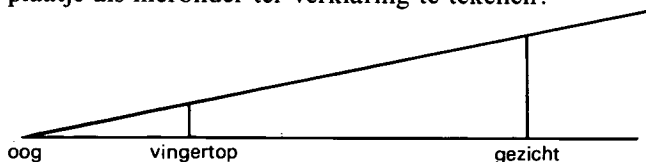


fig. 4.

Dit konkretiseren (Ik denk op dit 'konkretiseren' terug te komen in een volgende notitie) vereist zeker een mate van abstraktievermogen. Er waren studenten die bleven zitten met een plaatje als:



fig. 5.

Ook de atheneumleerlingen hadden reden om verbaasd te zijn. De vraag 'zie je een functioneel verband tussen de hoek die twee (vertikale) spiegels maken en het aantal beelden?' viel niet op een meetkundige voedingsbodem

Ik zei het al. meetkundeonderwijs kan vele gezichten hebben. Zoek je de zin ervan in de richting van het bruikbare, dan heeft het basisonderwijs hierin een fundamentele taak*). In het voortgezet onderwijs zal men in genoemde zin moeten verder werken. Maar wat men ook doet, het is voor mij heel duidelijk geworden dat momenten van bewustmaking bij het leren van meetkunde expliciet ingebouwd moeten worden. Dat het geschikt is om bij jezelf te beginnen moge uit deze notitie blijken.

* Zie ook: Educational Studies in Mathematics, augustus 1976: IOWO snapshots.

16e wiskunde olympiade, eerste ronde 1977

Na opvragen en controle van werk van de eerste ronde is besloten 88 deelnemers met 18 punten of meer, waaronder één uit 4 h.a.v.o. uit te nodigen voor de tweede ronde, die op vrijdag 2 september a.s. gehouden zal worden te Utrecht.

De tien beste van deze tweede ronde zullen een prijs krijgen.

Zo kon het ook

M. DIJKSHOORN

Met belangstelling heb ik in de 'Vakdidaktische Notities' van Fred Goffree de aardige grafische oplossingen gezien van het volgende vraagstukje: *

Iemand komt dagelijks met de trein van zijn werk en wordt dan door zijn vrouw met de auto van het station gehaald. Vandaag komt hij een uur vroeger met de trein aan. Hij besluit zijn vrouw tegemoet te wandelen. Onderweg ontmoet hij haar en ze rijden gezamenlijk naar huis, waar ze 10 minuten vroeger arriveren dan gewoonlijk. Als we er van uitgaan dat alle snelheden konstant zijn, stellen we de vraag: hoelang heeft de man gewandeld?

Ik zou indertijd mijn leerlingen van b.v. 'M.U.L.O., H.B.S. of Gymnasium' in de volgende denkrichting geloodst hebben, die ook nu nog wel naast de vermelde grafische oplossing waardevol is: natuurlijk in voortdurend samen zoeken met mijn leerlingen.

Ook mevrouw rijdt 10 minuten korter dan gewoonlijk, doordat de afstand huis – ontmoetingspunt – huis bekort is met tweemaal het stuk dat de man gelopen heeft van het station tot het ontmoetingspunt. Voor éénmaal dat stuk is de rijtijd dus 5 minuten. Hierdoor heeft de ontmoeting 5 minuten vroeger plaats dan anders. (Vervolgens duurt ook de rit naar huis 5 minuten korter, zodat ze 10 minuten eerder thuis zijn dan gewoonlijk). Was de aankomst van de trein normaal b.v. om 4 uur, dan heeft nu de ontmoeting plaats om 3.55. De man vertrok om 3 uur van het station en heeft dus 55 minuten gelopen. De uitleg aan de leerlingen zou natuurlijk verlucht zijn met een tekeningetje, compleet met auto en wandelaar.

Ook bij deze oplossing zien we dat de grootte van de snelheid van de auto geen invloed heeft op het antwoord; evenmin die van de wandelaar. Wel is er verband tussen deze twee snelheden: de door de wandelaar in 55 minuten afgelegde weg wordt door de auto in 5 minuten gereden. De afstand van huis tot station heeft evenmin invloed op het antwoord.

* Euclides, 52e jaargang, no. 8, blz. 281 e.v.

Denkniveaus en het begin-onderwijs in de wiskunde.

SIEB KEMME

Inleiding

Vredenduin ontleent in zijn artikel: 'Het aanvangsonderwijs in de meetkunde', (Euclides, 1977, no. 5) een aantal argumenten aan de theorie van de denkniveaus van Van Hiele. Naar ons idee is deze interpretatie van de theorie van Van Hiele onvolledig en in sommige gevallen onjuist. In het onderstaande willen we wat andere argumenten aandragen voor de ontwikkeling van het begin-onderwijs in de wiskunde. Die argumenten zijn op hun beurt ook ontleend aan de theorie van de denkniveaus, althans aan onze interpretatie van de theorie (en dat is niet de enig mogelijke en ware interpretatie). Met dit artikel hebben we de bedoeling een alternatieve aanvulling te geven op de ideeën van Vredenduin.

Denkniveaus en leerstof

De theorie van de denkniveaus is geen beschrijving van interne leerprocessen zoals die mogelijkwerijs bij het leren van wiskunde bij leerlingen zouden kunnen plaatsvinden. De theorie karakteriseert vooral de verschillen in gedrag die kunnen optreden bij het bedrijven van wiskunde. Dit kunnen chronologische verschillen zijn bij jezelf ('5 jaar geleden deed ik het zó, nu doe ik het anders') of onderlinge verschillen op éénzelfde tijdstip (tussen leerlingen in een groep). In de niveau-theorie van Van Hiele zijn kenmerken ontwikkeld op grond waarvan men een lineaire ordening in deze verschillen in wiskundig 'gedrag' kan herkennen.

Onder wiskundig 'gedrag' verstaan we niet alleen het werken met tekeningen en concreet materiaal, maar ook allerlei taaluitingen (gesproken of geschreven). De verschillen in wiskundig gedrag zullen bij het concreet handelen met materialen herkenbaarder zijn. In het taalgedrag kunnen veel niet-wiskundige factoren het handelen beïnvloeden. Verschillen zijn dan niet altijd te verklaren als verschillen in wiskundig denken, maar kunnen ook hun oorzaak hebben in verschillen in taalgedrag. Het is gevaarlijk om alléén op grond van het taal-

gedrag te konkluderen op welk denkniveau een leerling handelt. Abstraktie kan best bereikt zijn zonder dat een leerling het kan expliciteren. (Bijna iedereen weet wat een diagonaal is in een vierhoek, lang niet iedereen kan het omschrijven.)

Taal en denken zijn moeilijk te scheiden. Dat verklaart misschien waarom de theorie van de denkniveaus zoveel gemakkelijker bij meetkundige- dan bij algebraïsche activiteiten is te plaatsen.

Zo is het ook onjuist in wiskunde-leerstof indelingen te maken in denkniveaus. Leerstof is nooit meer dan een aanzet tot leren. Wat er uiteindelijk van dat leren terecht komt, hangt van vele factoren af. Soms handelt de ene leerling na het maken van een bepaalde opgave ineens op een hoger niveau, terwijl een andere leerling door taalmoeilijkheden, of een gebrekkige voorkennis, op zijn oude niveau blijft 'hangen'.

Men kan daarom niet zeggen: 'In het Wimecos programma van vóór 1958 werd gestart op het tweede niveau'.

Leerstof is meestal geschreven met de bedoeling leerlingen tot een hoger niveau van wiskundig handelen te voeren. Natuurlijk is dit weer het gemakkelijkste te herkennen aan onderdelen uit de meetkunde. Het geleidelijk loslaten van konkrete voorwerpen en het zich daarbij beperken tot tekeningen waarin de gevonden eigenschappen zijn samengevat, leidt haast onvermijdelijk van nulde-niveau activiteiten naar activiteiten op het eerste niveau. Bij onderdelen over de gehele getallen is dat al veel minder duidelijk. Tot welk niveau zullen opgaven over de som, het verschil of het produkt van gehele getallen, kunnen voeren? Waarschijnlijk zijn de onderlinge verschillen tussen leerlingen hier erg groot. De ene leerling zal vooral vanuit zijn geheugen werken en via associaties met vroegere situaties nieuwe opgaven maken. Een ander zal bij moeilijke situaties konsekwent de getallenlijn gebruiken. De eerste leerling bevindt zich op een lager niveau van handelen dan de tweede: alleen de objekten zelf (gehele getallen) spelen bij zijn activiteiten een rol, terwijl de tweede leerling gebruik maakt van de eigenschap van die objekten dat ze in een ordening op de getallenlijn zijn weer te geven door middel van pijlen en dat bewerkingen met de objekten overeenkomen met bewerkingen tussen die pijlen. Toch zullen we het gedrag van de eerste leerling niet afkeuren. We zullen het zelfs toejuichen als de tweede leerling los zal komen van zijn pijlenvoorstelling en vanuit zijn routine leert te werken met gehele getallen. Kunnen we nu zeggen: 'Dit onderdeel over gehele getallen bevindt zich op het eerste denkniveau?' De theorie van de denkniveaus levert dus geen juiste argumentatie om leerstof naar niveaus te beoordelen. Van leerstof kun je hooguit zeggen dat die de bedoeling kan hebben een leerling op een bepaald niveau van wiskundig handelen te brengen. Wat daarvan terecht komt, hangt van vele factoren af. Het niveau van handelen wordt uiteindelijk door de leerling zelf bepaald en is geen intrinsieke eigenschap van de leerstof.

Bewijzen

‘Het bewijzen’ is één van de vormen van wiskundig handelen. Zoals ook het ordenen en het ontdekken van wetmatigheden. Aan de hand van deze activiteit, ‘het bewijzen’, geven we een nadere uitwerking van de relatie tussen denkniveaus en leerstof.

Wat is eigenlijk een wiskundig bewijs?

Het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde heeft hier geen, voor iedereen bevredigend, antwoord op gegeven. Vooral de relatie tussen de betekenis en de grammatikale regels van de taal maakt de zaak nogal ondoorzichtig. Merkwaardig genoeg bestaat er in de schoolwiskunde nauwelijks misverstand over het begrip ‘wiskundig bewijs’. We kunnen meestal precies aangeven wat wel en wat niet een bewijs is.

Niet:

Door middel van de grafiek laten zien dat $\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg} x = \infty$.

Wel:

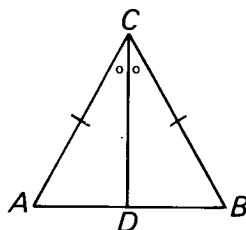
Laten zien dat er voor ieder getal M een getal $\delta > 0$ bestaat zodat uit $0 < \frac{1}{2}\pi - x < \delta$ volgt dat $\operatorname{tg} x > M$.

Niet:

Een gelijkbenige driehoek tekenen, de basishoeken uitknippen, op elkaar leggen en konstateren dat ze even groot zijn.

Wel:

De bisectrice uit de tophoek trekken en door middel van de congruentie van $\triangle ADC$ met $\triangle BDC$ (ZHZ) konstateren dat $\angle A = \angle B$.



Hoe komt het dat een leraar nu wel zo precies weet wat een bewijs is, maar dit zo moeilijk kan overdragen? Waarom vinden leerlingen, ondanks alle inspanningen van de leraar, bewijzen veelal nutteloze doordrammerijen over zaken waarvan je zo wel kunt zien dat ze juist zijn?

In de dagelijkse praktijk van de ‘beroeps’-wiskundigen is het bewijs vooral de uiteindelijke bevestiging van een vermoeden. Het neemt de laatste twijfels weg en toont aan dat, op grond van bepaalde uitgangspunten, het vermoeden juist is. Dat ‘aantonen’ verloopt volgens strikte regels waarover de meeste van zijn kollega’s het eens zijn (maar waarover een grondslagen onderzoeker zijn twijfels zal hebben).

Vallen bovenstaande non-voorbeelden buiten dit gedragspatroon? Noemen we ze daarom (geringschattend?): ‘motivatie’ of ‘illustratie’? Is er echt zo’n verschil in handelwijze dat een dergelijk verschil in benaming gerechtvaardigd is? Bij een gelijkbenige driehoek lijken, op het eerste gezicht, de basishoeken even groot te zijn. Meten, knippen of vouwen leveren een duidelijke bevestiging van dit vermoeden. Zeker vóór de brugklas hebben leerlingen altijd geleerd dat je door tellen, meten of afpassen kunt verifiëren of dingen even groot zijn.

Dat zijn hun regels om iets te verifiëren, en waarover ze het onderling met elkaar eens zijn. We moeten ons niet verwonderen dat dit voor hun de waarde heeft van een onwrikbaar bewijs. We zullen ze alleen tot andere gedachten kunnen brengen door twijfel te zaaien aan hun methodes. (Zoals dat in de geschiedenis van de wiskunde zo vaak is gebeurd bij de opbouw van wiskundige begrippen tot een steeds fijnere graad van exaktheid.)

We moeten een duidelijk onderscheid maken tussen 'het bewijzen' en 'het bewijs'. 'Bewijzen' is een handeling waardoor een vermoeden definitief tot zekerheid wordt. 'Het bewijs' wordt doorgaans opgevat als een keten van ware beweringen in een logische samenhang, waarvan de laatste bewering precies het vermoeden is. 'Bewijzen' kan op vele manieren gebeuren. Daarin kunnen we niveaus onderscheiden.

Het nulde niveau.

De leerling betreft alleen het objekt van discussie zelf bij zijn overwegingen. *Bij het tekenen van de grafiek van de tangens-functie spelen alleen de funktiewaarden een rol. Van de eigenschap $tg = \sin/\cos$ wordt geen gebruik gemaakt (hooguit om de waarden uit te rekenen).*

De gelijkbenige driehoek wordt uitgeknipt en door midden gevouwen. Bij deze aktiviteit realiseert de leerling zich niet dat de benen van de driehoek gelijke lengte hebben. Alleen indirekt wordt van dit gegeven gebruik gemaakt (de hoeken blijken bij het doormidden vouwen precies op elkaar te vallen).

Algemeen kan men zeggen: bij het bewijzen op het nulde-niveau, verifieert men eigenschappen van objekten waarbij alleen die objekten zelf een rol spelen bij de bewijsvoering.

Het eerste niveau.

$tg = \sin/\cos$, de $\cos$ nadert van de positieve kant naar 0 in de linker omgeving van $\frac{1}{2}\pi$, de $\sin$ nadert tot 1 in de omgeving van $\frac{1}{2}\pi$. Dus wordt de tg steeds groter naarmate je dichterbij $\frac{1}{2}\pi$ komt vanaf de linkerkant.

Bij deze redenering is heel nadrukkelijk gebruik gemaakt van de eigenschappen van de tg , $\sin$ en $\cos$ funkties. De tangens-functie zelf (een verzameling van getallenparen) heeft geen rol gespeeld. Het probleem heeft zich gesplitst in de (al bekende) eigenschappen van $\cos$ en $\sin$.

Algemeen: bij het bewijzen op het eerste niveau zullen niet de objekten zelf, maar eigenschappen van die objekten een rol spelen in de argumentatie. Van het objekt zullen een aantal eigenschappen paraat moeten zijn. We dienen niet alleen te weten welke eigenschap het objekt heeft, maar ook welke eigenschappen kenmerkend zijn voor het objekt (van alle driehoeken is de gelijkbenige de enige met gelijke basis hoeken). Dit komt overeen met het eerste denkniveau van Van Hiele.

Het tweede niveau.

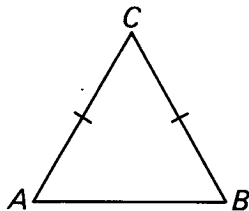
Bij de argumentatie spelen nu de onderlinge betrekkingen tussen de eigenschappen een rol.

In de gelijkbenige driehoek ABC geldt:

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \overline{AB}$$



dus $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ (ZZZ), dan is $\angle A = \angle B$.

Hier is gebruik gemaakt van de betrekking 'als... dan...' tussen de eigenschappen: 'In twee driehoeken zijn de zijden twee aan twee gelijk' en 'Twee driehoeken zijn kongruent'. Een dergelijke relatie is in een vroeger stadium geverifieerd (misschien door de driehoeken uit te knippen en op elkaar te leggen, of met behulp van konstrukties met passer en liniaal). De uitdrukking 'als... dan...' heeft een intuïtieve betekenis. In dezelfde zin waarin het woord 'vierkant' verbonden werd met een bepaalde vorm (op het nulde niveau). Het handelen op het tweede niveau wordt vooral gekenmerkt door het hanteren van relaties tussen de eigenschappen.

Het derde niveau.

Op het derde niveau zal het geheel van alle relaties tussen de eigenschappen een rol spelen. Tussen de eigenschappen zal door dit net van relaties een zekere (logische) samenhang ontstaan. We weten welke eigenschappen aan andere vooraf gaan of ermee gelijkwaardig zijn. Sommige eigenschappen zijn zo fundamenteel dat we ze de waarde van een axioma hebben gegeven. Kenmerkend is nu dat we vanuit dit (logische) overzicht, door het net van relaties gegeven, gaan opereren. Iedere schakel in dit net zal volkomen helder dienen te zijn. Alle onderliggende begrippen, eigenschappen en relaties daartussen zijn hanteerbaar paraat.

Van alle mogelijke transformaties in het vlak worden de spiegeling, de rotatie, de translatie en de glijspiegeling, gekenmerkt door hun isometrisch zijn, hun gedrag t.o.v. de oriëntatie en hun verzameling dekpunten. Het na elkaar uitvoeren van twee spiegelingen in twee snijdende lijnen, levert een isometrie op met één dekpunt, die bovendien oriëntatie-behoudend is. Dan moet het resultaat van de samenstelling een rotatie zijn om het snijpunt van de lijnen.

Bij een dergelijke redenering dient de leerling bekend te zijn met: spiegeling, rotatie, translatie, glijspiegeling, isometrie, oriëntatie, verzameling van dekpunten, samenstellen van transformaties. Zonder een dergelijke kennis verliest de redenering haar betekenis en wordt tot een spel met woorden en zinnen. Bovendien, en dat is kenmerkend voor het derde niveau, is een karakterisering van konkrete meetkundige zaken, door middel van algemene eigenschappen

essentieel voor de redenering. Een dergelijk patroon van relaties moet volledig duidelijk zijn voor de leerling.

Het (denk)niveau van een bewijs wordt niet bepaald door datgene wat we willen bewijzen, maar door de manier waarop we het bewijs leveren. Het heeft weinig zin een eigenschap twee keer te bewijzen op een ander niveau. De leerling zal dat als overbodig ervaren ('Dat wist ik toch al lang'), tenzij het een heel nieuw licht werpt op die bewezen eigenschap, doordat die bijvoorbeeld een heel bijzondere plaats in gaat nemen tussen alle andere eigenschappen.

Het beginonderwijs in de wiskunde

Het is twijfelachtig of alle brugklas-leerlingen een nulde niveau hebben als ze aan het wiskunde-onderwijs beginnen. De leerlingen zullen onderling nogal wat verschillen tonen. Bovendien zal er ten aanzien van de onderdelen nogal wat verschil kunnen zijn. In de meetkunde handelen de meeste leerlingen wel op het nulde niveau (ze zien niet in dat een vierkant een speciale rechthoek is). Bij het werken met getallen is er vaak sprake van een hoger niveau van handelen (leerlingen hanteren eigenschappen van getallen, zoals 'even zijn', 'deelbaarheid en gelijkwaardigheid van breuken). Sommige begrippen zitten zelfs nog in een pré-wiskundig stadium. Zo kunnen de meeste leerlingen wel allerlei verbanden leggen tussen grootheden ('als ik harder trap, komt de bal verder', 'hoe ouder hoe groter') zonder dat ze een dergelijk verband kunnen kwantificeren.

De diverse onderdelen zullen op grond van deze niveau-verschillen een andere aanpak vereisen. Toch is er ondanks deze verschillen een gemeenschappelijke noemer: de begrippen en activiteiten zijn voortdurend geplaatst in een toegepaste of toepasbare kontekst. Om de intrinsieke eigenschappen van de objecten naar boven te halen, zullen we los moeten zien te komen van deze kontekst.

Zoiets kan op twee manieren: je kunt de kontekst 'wegdenken', of je plaatst alles in fundamenteel verschillen konteksten zodat de intrinsieke (konstante) eigenschappen zich als het ware 'opdringen'. In de huidige schoolwiskunde gebeurt vaak het eerste. Begrippen worden door middel van een theoretische benadering uitgediept. Toepassingen komen hoogstens achteraf. Bij de tweede methode komen toepassingen juist vooraf. (Het woord 'toepassing' is hier misplaatst.) Die toepassingen zijn zo verschillend mogelijk, maar toch weer niet zo dat de verschillen overheersen. Niet alle onderwerpen lenen zich daarvoor.

Beide methodes hebben voor- en nadelen. De eerste is direkter (misschien sneller). Bovendien komt de leerling in aanraking met kontekst-vrije redeneringen die gebruikelijk zijn in sommige stukken wiskunde. De tweede methode zal beter kunnen aansluiten bij de werkwijze van de leerling aan het begin van het wiskunde-onderwijs.

Vindt het begin-onderwijs plaats volgens de eerste, direkte, methode, dan is het gevaar voor 'vervreemding' niet denkbeeldig. De draad van wiskundige en pré-wiskundige activiteiten wordt niet opgepakt en de leerling raakt eerder verder van deze activiteiten verwijderd, dan dat ze op een hoger niveau gaan plaatsvinden. We geven een tweetal voorbeelden.

Door middel van een regelmaat in optel-tabellen leren we de leerlingen dat optellen in $\mathbb{N}$ kommutatief is. We illustreren dat nog eens met allerlei sinistere bewerkingen tussen getallen ($m \square n = \max(m, n)$) waar de meeste leerlingen nog nooit mee hebben gewerkt en nooit mee zullen werken. We zeggen dat de leerling het heeft begrepen als hij zelfstandig bij dergelijke voorbeelden de kommutativiteit kan aantonen of ontkennen. Wat is de waarde van dat begrijpen?

Zal de leerling door deze kennis een beter wiskundig gedrag vertonen door in het vervolg konsekwent de regel $a + b = b + a$ toe te passen? Nee, hij weet ook zo wel dat $125 + 76 = 76 + 125$, en dat een dergelijke regel geldt voor alle getallen. Dat was de bedoeling ook niet. We willen de leerlingen bewust maken van een eigenschap van de verzameling van natuurlijke getallen.

Nu is de kommutativiteit van bewerkingen een kenmerk op grond waarvan we structuren met een binaire bewerking kunnen sorteren. Niet alleen hieraan ontleent de kommutativiteit haar betekenis: je weet pas goed wat het betekent dat een bewerking kommutatief is (of niet kommutatief is), als je er genoeg voorbeelden en non-voorbeelden van hebt meegemaakt. Als je ervaren hebt hoe lastig en misleidend het kan zijn berekeningen uit te voeren met bewerkingen die niet kommutatief zijn (matrixvermenigvuldiging, samenstellen van operatoren).

Van een dergelijke kontekst van het begrip kommutativiteit kan bij leerlingen geen sprake zijn. De voorbeelden en non-voorbeelden worden daarom speciaal uitgevonden en komen verder niet meer aan de orde. Hierdoor worden voor de hand liggende en al bekende eigenschappen van het optellen en vermenigvuldigen in $\mathbb{N}$ beladen met deftig klinkende termen, die in feite uit hun normale (wiskundige) verband zijn gerukt. Dit vervreemdt de leerling van zijn vroegere wiskundige activiteiten. (Vraag: wat heeft het betalen van 7 flessen melk, inklusief statiegeld, met de distributieve eigenschap te maken?)

In nog sterkere mate treden dergelijke vervreemdende effecten op bij begrippen die in een pré-wiskundige fase verkeren zoals het begrip funktie. Bij het opstellen van wiskundige modellen speelt het begrip funktie een fundamentele rol. Niet alleen in de natuurkunde. Ook in andere B-vakken en in de sociale wetenschappen liggen de voorbeelden voor het grijpen. Ook een brugklas-leerling heeft geleerd verbanden te leggen tussen grootheden. Hij heeft er alleen nog nooit tabellen bij gemaakt en ze in een grafiek uitgezet. De meesten zullen hier ook niet aan toe komen. Want bij het funktiebegrip in de school-wiskunde gaat het om de 'kale' eigenschappen. De meeste voorbeelden zijn

terwille van dit doel uitgevonden. Na enkele van die voorbeelden wordt meestal een definitie gegeven (een funktie is een voorschrift zodat..., een funktie is een bijzondere relatie zodat...) gevolgd door nog een aantal voorbeelden. Het begrip funktie wordt vastgelegd aan de hand van de eigenschappen waaraan het moet voldoen. De leerling zal bij zijn redeneringen dan ook gretig gebruik maken van die eigenschappen. Het is zijn enige houvast. We denken dat hij daarmee handelt op het eerste niveau. Of in ieder geval op een hoger niveau. Mis. De eigenschappen zijn rekenregels voor letters, doorgaans f , g en h , die funkties voorstellen (als $f: x \rightarrow x^2$ dan is $f(2) = 2^2 = 4$). Deze rekenregels zijn de objecten van zijn handelen. De leerling zit op het nulde niveau, het behandelde heeft geen relatie met een vroeger handelen.

Wil er echt sprake zijn van een niveau-sprong, dan zal er een verandering in gedragspatroon dienen op te treden ten aanzien van het (pré-wiskundige) begrip funktie. De leerling leert hoe hij verbanden tussen grootheden kan kwantificeren door middel van tabellen en grafieken, hoe hij eigenschappen kan afleiden uit deze overzichten. Hij kan op grond van de gevonden wetmatigheden tot een steeds hoger niveau van redeneren komen.

Samenvattend kunnen we stellen dat het wiskunde-onderwijs dat erop gericht is leerlingen op een hoger niveau van handelen te brengen, in het begin heel goed geworteld dient te zijn in de al aanwezige wiskundige en pré-wiskundige activiteiten van leerlingen. Het is riskant bij onderdelen de kontekst weg te laten omwille van de structuur. Zeker als het onderdelen zijn die bij leerlingen in een pré-wiskundige vorm aanwezig zijn. Dat werkt vervreemdend. Wiskunde wordt een spel met letters en symbolen, komt los te staan van de denk- en leefwereld van de leerling. Bovendien krijgt men ten onrechte de indruk dat de leerlingen op een hoger niveau opereren. (Dit zou men niveau-vervuiling kunnen noemen.)

LITERATUUR:

J. van Dormolen: Over het leren begrijpen wat een bewijs is. Euclides, 50, no 4/5.

H. Freudenthal: Mathematics as an Educational Task. Reidel, 1973.

P. M. Van Hiele: Begrip en Inzicht, hoofdstuk 14, De niveaustruktuur van de argumentatie. Muusses, 1973.

P. Vredenduin: Het aanvangsonderwijs in de meetkunde. Euclides 52, no 5.

Voorbereiden op het leraarschap

schets van de vakgroep wiskunde van de Stichting Opleiding Leraren te Utrecht, opgetekend door het docenten-team.

Vooraf

Nu ruim zes jaar geleden werd in ons land begonnen met een nieuwe vorm van voorbereiding op het leraarschap: de Nieuwe Leraren Opleidingen. Dit zijn dagopleidingen voor 2e en 3e graadsbevoegdheden.

In dit artikel geven wij een schets van ons werk in de vakgroep wiskunde van één van de zeven nieuwe instituten, de Stichting Opleiding Leraren (SOL). We schreven het stuk op verzoek van de redactie; we waren blij met deze mogelijkheid in contact te kunnen komen met U *in het veld*, zoals dat tegenwoordig heet.

Wij geven U het beeld dat ons, het docenten-team, voor ogen staat; een visie die voor een groot deel werkelijkheid is geworden. U krijgt een momentopname, maar U moet weten dat de zaak in ontwikkeling is.

We hebben moeten kiezen uit een veelheid van onderwerpen. We schrijven bijvoorbeeld niet over de tweevakkigheid en over het stelsel van bevoegdheidsgraden, wel veel over de dagelijkse gang van zaken. Veel voorbeelden komen uit het eerste jaar – de jongste studenten, die de school eigenlijk alleen kennen vanuit de gezichtshoek van de leerling.

We onderscheiden de *vakopleiding* (de wiskunde) van de *beroepsopleiding* (de didaktiek, de onderwijskunde). Die twee zijn echter niet te scheiden; in het wiskundewerk gaat het vaak over leren en wiskunde-didaktiek, en uit de cursussen onderwijskunde kun je de wiskunde vaak niet weglaten zonder in onbruikbaar getheoretiseer te vervallen.

We hebben getracht voor U te schrijven, maar onze besognes zijn de Uwe niet, we zijn er niet zeker van dat dit artikel een antwoord is op Uw vragen. We zijn daarom benieuwd naar Uw reacties, we zullen daar, indien mogelijk, graag op in gaan. Ons adres is: Stichting Opleiding Leraren, vakgroep wiskunde, postbus 14007, Utrecht.

Tenslotte, voor U gaat lezen, nog dit. Het heeft ons nogal wat moeite gekost ons werk op papier te krijgen; dat heeft in elk geval onszelf wat meer duidelijkheid opgeleverd. Alleen daarom al zijn we blij dat we dit gedaan hebben.

Achtereenvolgens komen nu de paragrafen.

I Wie zijn de studenten.

- II Wie zijn de docenten.
- III Waar werken we naar toe.
- IV Wat doen we.
- V Hoe doen we dat.
- VI Beoordelen, hoe gaat dat.

I *Wie zijn de studenten?*

De meeste studenten hebben een havo-, sommige een vwo-diploma. De mannen zijn in de meerderheid, ongeveer 85 %. In totaal zijn er nu 250 studenten die de opleiding tot wiskundeleraar volgen, op een totaal van 11 docenten.

Interessanter dan dergelijke feiten is de houding die studenten hebben ten opzichte van de opleiding en de opleiders. Zonder wetenschappelijke pretenties geven we hieronder een aantal typen. De meeste studenten hebben iets van meerdere typen in zich verenigd.

De Wiskundige. Wiskunde-leraar worden betekent voor hem allereerst wiskunde bestuderen. Hij ontkent niet dat er nog wat meer bij komt kijken, maar dat is bijzaak.

De Onderwijshervormer. In het onderwijs ging tot nu toe alles fout, dat moet nu maar eens grondig worden aangepakt.

De Kindervriend. Voor hem is het leraarschap: omgaan met kinderen, dat bracht hem er toe dit beroep te kiezen. „Waarom wiskunde? Je moet nu eenmaal kiezen, en wiskunde was ik wel goed in”.

De Lesgever. Niets is fijner dan anderen iets uit te leggen, te helpen moeilijke dingen gemakkelijk te maken.

Het Natuurtalent. „Je bent als leraar in de wieg gelegd (zoals ik) of je leert het nooit”.

De Afhankelijke. Zit vol vertrouwen in de docenten: „Zeggen jullie maar wat ik moet doen”. Hij wil alles doen waarvan de docent zegt dat het bijdraagt voor zijn leraarschap.

II *Wie zijn de docenten?*

Een onderwijskundige, een agoge, wiskundigen met en zonder ervaring in het voortgezet onderwijs. Met elkaar zijn we er van overtuigd dat leraar worden iets heel anders is dan leraar zijn; dat docent zijn aan een lerarenopleiding dus andere vaardigheden vereist dan wiskunde-leraar zijn. Geen van ons is zelf echt opgeleid tot leraar, laat staan tot lerarenopleider. Dat betekent voor ons: onze eigen opleiding voortdurend in die zin aanvullen.

We vermijden specialismen niet, maar we willen dat ook niet te ver doorvoeren. We willen gezamenlijk voor het geheel verantwoordelijk kunnen blijven. We hebben de laatste jaren veel geleerd, plezier gehad en mislukkingen geboekt; veel ook nog niet geleerd.

III *Waar werken we naar toe?*

In deze paragraaf schrijven we iets over de doelen van de opleiding. Het is in feite onze visie op het professionele leraarschap. Het beeld dat we geven is niet compleet, we schetsen een aantal grote lijnen. De volgorde waarin die staan is geen aanwijzing voor het belang dat we er aan hechten.

– Het woord „opleiding” suggereert dat de student die het einddiploma heeft, klaar is voor het leraarschap. We gebruiken daarom liever de term „voorbereiding” op het leraarschap. De student moet namelijk als leraar een goed begin kunnen maken en verder kunnen leren van wat hij doet. Nog sterker: Hij moet steeds beter kunnen formuleren wat hij nog niet kan en wat hij nog wil leren. Hij moet werken en leren tegelijk. Daarvoor is nodig dat hij goed „ziet” wat hij doet. Hij moet in staat zijn, zijn werk te evalueren met het oog op de leerlingen (hoever zijn zij in hun leerproces) en met het oog op zichzelf (hoever ben ik gevorderd in mijn leraarschap). Deze zelfreflectie is voor de leraar een eerste vereiste, want er is niemand die dat voor hem kan doen. Hij moet zich *zelf* kunnen ontwikkelen.

– De beginnende leraar moet wiskundig geschoold zijn. Die scholing moet in de eerste plaats gericht zijn op het werk dat hij op school moet doen. Dit betekent ten opzichte van de schoolwiskunde: meer weten en beter weten. Naast allerlei wiskundige theorieën en technieken: zicht op algemene aspecten en toepassingen van wiskunde: rekenaspect, taalaspect, toepasbaarheid, praktisch nut, structuuraspect, methodisch aspect, dynamisch aspect, attitude-aspect (Zie Wiskobas leerplanpublicatie no. 1, Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs (I.O.W.O.) oktober 1975).

– Een leraar is geen leerboekenexplicateur (Knoers). Hij is hulpverlener bij het leren van de leerlingen. Hij moet dus weten hoe kinderen leren en hoe hij daarbij kan helpen. De leraar is ook mede-opvoeder van de kinderen die hij ontmoet. Didaktische en opvoedkundige bekwaamheden zijn nodig. Beide zijn gericht op het steeds meer overbodig worden van de leraar en een steeds grotere zelfstandigheid van de leerling.

– Leren op school vindt plaats in een groep, een klas; dat is een samenwerkingsverband gericht op het leren van de leerlingen. De leraar moet theoretisch en praktisch geschoold zijn in het hanteren van groepsprocessen. Dit is een tamelijk nieuw element bij het opleiden van leraren. Het kan daarom gemakkelijk misverstanden oproepen.

Ter verduidelijking het volgende:

We leiden geen sensitivity-trainers op. We willen bereiken dat de studenten beter luisteren, misverstanden in een klasse-situatie kunnen signaleren en ophelderen, zicht hebben op individuele en groepsdoelen in een klas, rekening kunnen houden met gevoelens van leerlingen en die van zichzelf, initiatieven van leerlingen naar waarde kunnen schatten, enzovoort.

Het bovenstaande klinkt op meerdere plaatsen nogal beslist. Daar moet wat aan worden toegevoegd. We willen geen SOLconfectie-Wiskundedocent. De ene student komt verder dan de andere, en ieder heeft zijn eigen stijl. Maar niet ieder nivo is acceptabel, evenmin iedere stijl van leraar zijn. Dat is een groot probleem. Algemene minimeisen zijn erg moeilijk te formuleren. We mikken op leraren die minstens hun bedoelingen met de klas, in wiskundige en in onderwijskundige zin, kunnen formuleren. Op leraren die die doelen kunnen beargumenteren en het gewicht ervan aangeven. Op leraren die in de klas in de richting van die doelen kunnen werken. We kunnen het dan met de gefor-

muleerde doelen oneens zijn, we kunnen erover discussiëren, maar de manier waarop de student straks leraar wil zijn is zijn eigen verantwoordelijkheid.

IV *Wat doen we?*

Om enig idee te geven van wat er bij ons omgaat is hier een opsomming van de cursussen waarin de studenten in de loop der jaren aan het werk zijn.

- 1e jaar analyse, informatica, transformatiemeetkunde, statistiek, wiskundededidaktiek, studentenlessen, „functioneren in onderwijssituaties”
- 2e jaar analyse, lineaire algebra, statistiek, numerieke wiskunde, onderwijskunde en wiskundededidaktiek, minischoolpraktikum
- 3e jaar statistiek, varia, vrije cursus, complexe getallen, differentiaalvergelijkingen, algebra, schoolpraktikum, wiskundeonderwijs op school, puberteitspsychologie, „school en milieu”
- 4e jaar algebra, twee cursussen onderwijskunde naar keuze, zelfstandig bestuderen van een wiskundig en een onderwijskundig onderwerp naar eigen keuze, schoolpraktikum
- 5e jaar voor de tweede graads bevoegdheid nog een aantal keuzeonderwerpen: wiskundig, didaktisch en onderwijskundig

We gaan hier niet verder op de wiskunde in; we hopen dat u er zich in het licht van de gestelde doelen een voorstelling van kunt maken. De overige onderdelen lichten we enigszins toe.

We gaan uit van de gedachte dat de student bijna zijn hele leven lang in het onderwijs heeft meegedraaid, en nog meedraait in de opleiding zelf, en daardoor een schat van ervaringen heeft opgedaan waarvan hij kan leren.

Die ervaringen kunnen betrekking hebben op *vroeger* en op *nu*.

Een voorbeeld: hoe vond je het vroeger als je een proefwerk kreeg en hoe ervaar je het maken van een toets nu? Overeenkomsten, verschillen, oorzaken, conclusies?

De ervaringen van de student kunnen betrekking hebben op verschillende aspecten van het onderwijs: het *leren*, het *samenwerken*, het deel uitmaken van een *groep*, het *helpen* of *geholpen worden*, enzovoort. Ze zijn alle nauw verweven met *houdingen*, *opvattingen* en *gedragingen* die studenten vertonen. In diverse onderdelen van het eerstejaarsprogramma komen deze thema's terug.

– Bij *wiskundededidaktiek* staat centraal het eigen denken en leren in relatie tot wiskunde. Hoe denk en leer ik als ik met wiskunde bezig ben? De volgende vragen komen aan de orde.

Wat is de functie van vragen en vraagstukken in het onderwijs?

Hoe werk ik zelf aan wiskundevragen en vraagstukken?

Hoe dragen voorbeelden en nonvoorbeelden bij aan mijn leren?

In wat voor patronen denk ik?

Dit wordt toegespitst op het OSAEV-model van Van Dormolen, en de bijbehorende theorie.

– Bij *studentenlessen* staat het helpen leren meer centraal. Twee studenten geven les aan medestudenten over een wiskundig onderwerp van eigen keuze. Stof voor de bespreking van zo'n studentenles is niet de wiskunde die aan de orde

was, maar datgene wat in de les gebeurde. Ervaringen van de 'leraren' en van de 'leerlingen'. Gedragingen en ook gevoelens geven aanleiding tot reflectie op de vragen rondom hulp geven en hulp ontvangen. Wie neemt initiatief, wordt hulp geboden of gevraagd, wanneer vraag ik om hulp en aan wie, enzovoort. Ook vakdidactische zaken komen hier aan bod, door verbinding te leggen met de cursus wiskundendidactiek.

– Bij de cursus *functioneren in onderwijssituaties* staat de wiskunde buiten schot. Thema's in deze cursus zijn onder andere: beginnen en eindigen, individuele en groepsgesprekken, luisteren en verwoorden, gevoelens, akseptatie, relaties. Leerstof is hier wat studenten aan ervaringen en opinies inbrengen, van vroeger of van onderwijsbijeenkomsten van de afgelopen dagen. In een aantal gevallen lenen rollenspellen zich goed voor het bespreekbaar maken van deze thema's. De doorwerking van de onderwerpen is praktisch (toegepast op de persoon van de student of op de groep) en theoretisch (het verkrijgen van een eigen theoretisch kader en het leren lezen over deze onderwerpen).

In het tweede jaar trekken we de lijnen van het begin door. Het programma is nog in ontwikkeling; met name het zoeken en maken van geschikt materiaal vraagt tijd. In wekelijkse kolleges van drie uur wordt een uitbreiding gegeven aan de didactiek. Stond in het eerste jaar het eigen leren en denken centraal, nu wordt meer de aandacht gericht op de rol van de leraar als hulpverlener bij het leren van anderen. Het *diagnosticeren* van leerproblemen is één onderdeel, de *vaardigheid* van het hulpverlenen sluit hier op aan. De studentenlessen van het eerste jaar en de cursus 'functioneren in onderwijssituaties' krijgen hierin ook hun vervolg. In de tweede helft van dit studiejaar werken de studenten aan de voorbereiding van een *serie lessen* die ze gaan geven aan 6e klassen van het basisonderwijs. Ze gebruiken hiervoor het leerstofpakket 'Spionnen in de stad', ontwikkeld door het I.O.W.O. De studenten hebben in deze stage de verantwoordelijkheid voor een eigen stukje onderwijs. Ze leren van het schriftelijk voorbereiden van de lessen, van wat in de les gebeurt, van het maken van verslagen en niet in het minst van de bespreking van dit alles met de SOL-begeleider. Dit mini-'schoolpraktikum' is voor studenten een test-case voor belangrijke vragen. Is het leraarschap iets voor mij? Waarin komt de praktijk overeen met mijn verwachtingen? Hoe sluit mijn opleiding aan bij de praktijk? Op welke punten zal ik verder moeten leren? Het mini-schoolpraktikum zou je kunnen beschouwen als het sluitstuk van ruim anderhalf jaar opleiding, en als oriëntatie op de laatste studie jaren.

In het derde en vierde jaar staan de *schoolpraktika* centraal. Ze vinden plaats onder leiding van docenten die bij het voortgezet onderwijs werkzaam zijn, en voor dit schoolpraktikumwerk speciaal door ons zijn opgeleid. Na het derdejaars schoolpraktikum 'weten' de studenten waar het om gaat in hun opleiding. Er volgen dan cursussen 'puberteitspsychologie', 'school en milieu' en 'wiskundeonderwijs op school'. Uitgangspunten zijn hierbij de ervaringen van de studenten in de school, vroeger en nu. In het vierde jaar kan uit een ruim aantal cursussen algemene onderwijskunde gekozen worden. De beroepsopleiding wordt in het 4e en 5e jaar afgesloten met een aantal afstudeeronderwerpen naar keuze.

V *Hoe doen we dat?*

We maken weer onderscheid tussen de cursussen voor wiskunde, het gekozen vak, en de cursussen die verband houden met het gekozen beroep van leraar.

In de *wiskunde-cursussen* is er vooral in het eerste jaar veel aandacht nodig voor het *samenwerken*. Studenten en docenten werken samen in werkgroepen van 15 tot 20 studenten (vaste samenstelling) en 1 docent (wisselt per cursus). Binnen de werkgroepen worden studiegroepjes gevormd van 3 à 4 studenten. In zo'n studiegroepje bestuderen de studenten samen het boek of diktaat dat voor die cursus is aangewezen of gemaakt. Voor een deel van de tijd is daarbij een begeleidende docent aanwezig.

Eerstejaars studenten vragen stevast in de eerste week om een antwoordenlijst. Ze hebben het idee dat het werk aan een opgave klaar is als hun einduitkomst door een autoriteit goedgekeurd is. Ze zullen moeten leren zelf van hun werk vast te stellen hoe goed het is. Naast de vaststelling van het eindresultaat zullen ze zich moeten afvragen: Hoe hebben we dit gedaan?, Waarom staat deze opgave hier in dit diktaat? Wat ben ik er nou wijzer van geworden?

Van tijd tot tijd is het praktischer een probleem 'klassikaal' te behandelen. Dat kan bijvoorbeeld het geval zijn als veel studenten met dezelfde vraag zitten. Ook als de docent snel enige controle wil uitoefenen op het werk, of iets wil demonstreren.

De werkvorm wijkt nogal af van wat de meeste studenten hebben meegemaakt op school of verwachten te vinden op de SOL. Aankomende studenten hebben het er dan ook vaak moeilijk mee. We proberen die moeilijkheden zo duidelijk mogelijk ter sprake te brengen. Werkbare afspraken maken, luisteren, de ander duidelijk maken wat je bedoelt, verschillende manieren van samenwerken – dat zijn aspecten die telkens weer aan de orde komen.

In het eerste jaar wordt veel energie gestoken in het leren maken van samenvattingen en overzichten. We beginnen met gerichte vragen: Wat zit er in dit hoofdstuk aan theorie (begrippen, notaties, technieken)? Welke wiskundige methoden worden gehanteerd? Welke toepassingen staan er in en welke heb je er zelf aan toegevoegd? Hoe is de verbinding met de andere hoofdstukken? Hoe zit dit hoofdstuk didactisch in elkaar? Moeilijke vragen voor de beginners. Na veel zelf doen en veel voorbeelden kan een student een eigen stijl gaan ontwikkelen.

We vragen een zelfstandig, actief, productief meewerken van de studenten. Dat is een moeilijke zaak. Studenten zijn aanvankelijk in het algemeen niet geneigd en soms nauwelijks genegen zich af te vragen waarom deze opgave nou net hier in dit diktaat staat. Open vragen behandelen ze vaak met de franse slag. Het verband tussen vragen die bij elkaar staan is voor hen vaak zoek. En aangeboden hulp bij het zoeken naar een vorm van zelfstandigheid is vaak niet aangenaam. We proberen die hulp te geven door toch open vrager op te nemen, door expliciet naar verbanden te vragen, door hun manier van werken met hen te bespreken. Ook door de manier van begeleiden. Een student die verstrikt is in een wiskundig probleem en daarbij om hulp vraagt, wil zelf vaak direct de oplossing horen. Hij is echter dikwijls beter gediend met hulp

bij het zelf vinden van die oplossing. Zodat hij het de volgende keer misschien wel, of beter, zonder hulp kan.

Wat ons docenten voor in de mond ligt, blijkt uit deze anecdote. De ene student vraagt aan de ander: 'Hoe laat is het?', en krijgt prompt als reactie: 'Wat denk je er zelf van?'.

In de hogere jaren staan de studenten zelfstandiger ten opzichte van hun werk. Er is dan minder begeleiding. Er wordt minder met de hele groep gewerkt. Vaak treden meer en minder grote tempoverschillen op.

De wijze van werken in de *beroepsgerichte* onderdelen van het programma laat zich niet een-twee-drie omschrijven. Dat komt omdat de doelen per onderdeel nogal sterk kunnen verschillen. We geven eerst een aantal voorbeelden.

– Bij de eerstejaarskursus *wiskunde-didactiek* staat het eigen wiskundig leren en denken centraal. We vragen dan om voorbeelden uit het wiskunde-onderwijs op de SOL, als huiswerk ter voorbereiding op de bijeenkomst. Of we creëren een situatie waarin de studenten, individueel of in groepjes, een stukje wiskundetext – uit eigen SOL-diktaten, schoolboeken of bijvoorbeeld Pythagoras – moeten bekijken op een aantal aspecten. Bijvoorbeeld: 'Er staan verschillende vragen in dit stukje tekst. Wat voor vragen zijn dat? Waarin verschillen de vragen; hoe zou je de verschillende vragen noemen?' Daarna wordt dit materiaal (de antwoorden van studenten of groepjes) vergeleken met dat van anderen. De één zegt: 'Dit is typisch een vraag naar de voorkennis', een ander: 'Nee, ik vind het meer een vraag waardoor de leerling gemotiveerd wordt om verder te lezen'. Waar studenten dan vaak de neiging hebben om in discussie of debat te gaan, probeert de begeleider te kijken naar de argumenten, en hun geldigheid, van de beide standpunten. Om tot *ordening en onderscheid* te komen. Daarna zal de docent zijn standpunt geven. Soms ook laat hij dat achterwege als het doel alleen maar is een voorlopige inventarisatie en ordening van de gehanteerde begrippen te verkrijgen. Pas in laatste instantie zal gekeken worden naar wat er in meer aanvaarde theorie aan begrippen en ordening gegeven wordt en waarom. Deze theorie wordt of mondeling ingebracht door de docent, of via stencils e.d., of via verwijzing naar literatuur (bijvoorbeeld: J. van Dormolen, Didactiek van de wiskunde; Skemp, Wiskundig denken). De student gaat nu proberen of hij met de aldus verworven kennis uit de voeten kan in nieuwe situaties. Dit gebeurt meestal in de vorm van opdrachten voor thuis, na te kijken door en te bespreken met de docent.

Het is onze ervaring – en we zien dat steeds sterker – dat de studenten moeite hebben met de verwerking en toepassing van geleerde begrippen. Ze nemen vrij gemakkelijk genoegen met een verbale kennis, zonder dat het geleerde praktische betekenis heeft gekregen.

In deze globaal omschreven opzet zit – misschien herkende U het – een dubbele bodem. Het is voor ons een belangrijke eis dat de leerstof (bijvoorbeeld de OSAEV-strategie) gebruikt wordt door ons zelf, waar dat zinvol is; én dat we dat ook als dubbele bodem laten zien aan de studenten. Spelenderwijs en voor hen zelf vaak onbewust gaan ze in hun eigen studie en samenwerking deze didactische zaken toepassen.

– Bij de *studentenlessen* worden uiteraard weer andere werkvormen toegepast.

We bedoelen natuurlijk niet de werkvormen die de studenten zelf in hun lessen gebruiken. (Die zouden leerstof kunnen zijn voor de bespreking). De werkvormen die hier gebruikt worden zijn:

Voorbespreking met de student-leraar. Centraal staat hier de vraag: waar wil je deze les voor gebruiken om iets meer over jezelf als leraar aan de weet te komen?

De les zelf en de nabespreking met de hele groep. Dan gaat het met name om het functioneren van de student-leerlingen tijdens de les.

De nabespreking met de student-leraar. Stof hiervoor zijn de resultaten van de nabespreking met de groep, en het individuele verslag van de student-leraar dat gericht is op de punten uit de voorbespreking.

In het onderdeel studentenlessen is de docent ook aanwezig bij het werk van de student, de studentenles die hij verzorgt. Daarin verschilt het van de begeleiding bij het mini-schoolpraktikum, waar de docent niet de lessen bijwoont en waar de verslagen, voorbereidingen en lesplannen van de student het leer-materiaal vormen.

– Bij de cursus *functioneren in onderwijssituaties* is er sprake van weer andere werkvormen, ook omdat de doelen er anders liggen. Met een voorbeeld: De eerste bijeenkomst van deze cursus heeft als thema: ‘Beginnen’: Wat doe, denk en voel ik in diverse situaties van beginnen, wat voor factoren spelen daarbij een rol? Dit thema is bewust aan het begin van de cursus gezet, omdat vooral dan zinnig gebruik kan worden gemaakt van de situatie die voorhanden is, namelijk een beginsituatie. Bewustwording van die situatie, het verwoorden van ‘wat mij in de eerste minuten bezig hield’ en het reflecteren daarover – dit alles leidt tot het ontdekken en later ook herkennen en gebruiken van begrippen, houdingen en dergelijke die met ‘beginnen’ te maken hebben. Als huiswerk voor de tweede bijeenkomst wordt dan ook gevraagd om de volgende keer iets in te brengen over een beginervaring tijdens een SOL-bijeenkomst in de tussenliggende week. Andere werkvormen die hier gebruikt worden zijn: rollenspel, simulatie-gesprekken en andere oefeningen (bijvoorbeeld met betrekking tot ‘luisteren’, ‘afoetsen’ en ‘inleven’).

– In deze cursussen, maar ook in andere, speelt de verslaglegging een belangrijke rol. Die is bedoeld om de samenhang van de verschillende onderdelen uit het programma in de gaten te krijgen. Ook om de studenten bewuster te laten worden van de manier waarop ze met de stof bezig zijn, hoe ze leren. Het gaat dan om vragen als: ‘wat en hoe heb ik geleerd, waar had ik moeite mee, wat ging me gemakkelijk af en waarom, wat zou ik nu verder willen doen en leren?’ De laatste 10 minuten van de bijeenkomsten worden hier vaak aan besteed.

Als we nu proberen een aantal *uitgangspunten* te formuleren van onze manier van werken, dan noemen we de volgende.

1. Eerst doen en ervaren, dan pas de vraag: wat kan me dit nu opleveren? Zonder ervaring geen leren, maar leren is meer dan alleen maar iets gedaan en ervaren te hebben. Praktijk en theorie gaan hand in hand, maar met een sterk aksent op de praktijk.

2. Denken, doen en voelen zijn op elkaar betrokken; wel van elkaar te onderscheiden, maar niet te scheiden.
3. Wat je van de student vraagt doe dat ook zelf.
4. Laat als docent zien, en wijs daarop, waar een dubbele bodem zit in wat je zegt en wat je doet.
5. Tracht bij de student een houding te ontwikkelen, waardoor hij niet de docent als enige 'leerbron' gebruikt, maar ook zijn mede-studenten en zichzelf.
6. Maak als docent duidelijk wat je werkvoorwaarden zijn bij kursussen en dergelijke. Geef aan binnen welke kaders je hen kunt en wilt begeleiden.
7. Ga geen student begeleiden als er geen 'kontrakt' met hem is gesloten. Begeleiding heeft geen zin, als de student deze begeleiding afwijst.

Deze opsomming is weliswaar niet uitputtend, maar geeft toch een aantal belangrijke uitgangspunten aan van onze manier van werken.

Een enkele opmerking moeten we in dit verband nog kwijt. Met name in het eerste jaar blijken veel studenten nogal moeite te hebben met onze aanpak. Verslaglegging en zelfreflectie zijn voor hen tamelijk ongebruikelijke en lastige activiteiten. Het veelal achterwege laten van waarderingen en oordelen van docenten over het werk van studenten (behalve in toets-situaties) maakt nogal eens onzeker. Studenten die aan de docent vragen: 'Wat moet ik nu precies doen... is dit zo goed... is dit zo voldoende... was dit nou wat je bedoelde... hoelang moet het verslag zijn... moet je het ook lezen...', krijgen nogal eens nul op hun rekest, zij het meestal door ons beargumenteerd. Deze vragen wijzen sterk op een *normatieve* benadering van hun werk en de docent. Het moet goed, volledig, precies, enzovoort zijn wat ze doen. En dan vooral in de ogen van de docent. Zelfvertrouwen, en de bereidheid om 'nou eerst gewoon maar eens wat te proberen' ontbreken in die gevallen.

In het begin van de opleiding proberen we dit dikwijls tot voor hen en ons aanvaardbare proporties terug te brengen. Bijvoorbeeld: 'Je mag er niet langer dan een uur over doen; ook als je nog niet klaar bent: toch stoppen'. Of: 'Zoek niet meer dan twee positieve en negatieve kenmerken hiervan, met zijn allen komen we dan wel een heel eind'. Door op deze wijze te reageren op de moeite die studenten hebben met onze werkwijze, bereiken we – is onze ervaring – dat studenten langzamerhand ook de uitgangspunten van onze werkwijze gaan delen en overnemen.

VI Beoordelen, hoe gaat dat?

Vrijwel elke docent is tegelijkertijd beoordelaar en hulpverlener. Deze twee functies zijn vaak moeilijk te scheiden, ze zijn eveneens vaak moeilijk in één persoon te verenigen. Dit geldt voor de docent; maar het is ook moeilijk voor de student, die afwisselend door de zelfde persoon geholpen én beoordeeld wordt. Veel konflikten tussen student en docent zijn te herleiden tot een botsing tussen deze twee functies.

Het is vanzelfsprekend dat wij aan de SOL ook moeten beoordelen. Dat vloeit voort uit onze taak om te bepalen of een student op een zeker moment

de opleiding heeft voltooid met voldoende resultaat. Met andere woorden: er is geen externe beoordelaar (zoals een gekommitteerde) die dat werk van ons overneemt.

We beperken ons eerst tot die situaties waarin we *wiskundige* leerprestaties van de student beoordelen.

Deze beoordeling vindt plaats op grond van schriftelijke toetsen en tentamens. De toetsen vormen de hoofdmoot. Elke wiskundekursus kent een aantal toetsen die de beheersing meten van opeenvolgende leerstofonderdelen en hun onderlinge samenhang. Als een student zover is, krijgt hij de toetsopgaven en die kan hij dan, zonder surveillance, gaan maken. In de eerste jaren is daarvoor een toetsrooster per werkgroep opgesteld, dat wil zeggen dat de studenten deze toetsen maken per werkgroep op vaste tijden. In de loop van het tweede jaar en daarna is er door differentiatie in tempo meer sprake van een individuele tijdsplanning.

De beoordeling van deze toetsen is in eerste instantie een gezamenlijke zaak van docent en student. Sinds kort is er een beroepsprocedure voor die gevallen waarin student en docent met elkaar van mening verschillen. Onze ervaringen met dit toetssysteem zijn in het algemeen vrij gunstig, hoewel er hier en daar haken en ogen aan zitten. Eén van de problemen is dat veel jongerejaarsstudenten nogal moeite hebben met de vrijheid (geen toezicht op spieken) en de verantwoordelijkheid (mede-beoordeling van eigen werk, wel of niet toestaan dat de ander bij je afkijkt of om 'hulp' vraagt). In het voortgezet onderwijs ligt nog sterk de nadruk op de selectieve functie van proefwerken, overhoringen en dergelijke: 'elk cijfer telt mee voor het rapport'. Veel studenten hebben in de achter hen liggende jaren dan ook sterk een afwachtende houding ontwikkeld: 'zeg het maar, gezakt of geslaagd, voldoende of onvoldoende?' Naar hun eigen oordeel werd niet gevraagd, laat staan dat dat ontwikkeld werd ten dienste van het leren. Om de overgang niet te abrupt te laten zijn werken we in het eerste studiejaar met tentamens, naast handhaving van de toetsen. De tentamens hebben hier de selectieve functie van de toetsen overgenomen. Er wordt bij de tentamens ook gesurveilleerd; de beoordeling is een zaak van docenten.

De toetsen tellen in het eerste studiejaar niet mee bij een oordeel over de voortgang van de studie. Ze zijn vooral bedoeld om de eerstejaars te wennen aan het systeem van zelfbeoordeling. Ook om gebruik te maken van de toetsbespreking met de docent voor het opsporen van eigen tekorten in het leren. In deze individuele toetsgesprekken, en daarbuiten in de wekelijkse werkgroepvergaderingen, wordt aandacht besteed aan de eventuele moeite die studenten hebben met dit beoordelingssysteem. De vruchten van deze opzet plukken we in de hogere jaren. Dan kan het voorkomen – al is het geen regel – dat studenten zelfs toetsen mee naar huis nemen en ze de volgende dag weer inleveren. Een kwestie van vertrouwen dat vaak niet eens meer hoeft te worden uitgesproken. Vanzelfsprekend ontkomen we niet aan selectie. We komen niet veel verder met studenten die veel (her)toetsen en -tentamens onvoldoende maken. Daar komt nog bij dat we graag zo vroeg mogelijk duidelijkheid willen hebben over

studenten die het naar onze indruk wel eens niet zouden kunnen halen. We willen deze indruk ook graag zo vroeg mogelijk uitspreken. Dat is een tweede reden waarom we nu in het eerste jaar met tentamens werken. Het is mede een gevolg van nare ervaringen met studenten die pas in het derde studiejaar of zelfs later met grote vertraging de studie staakten.

Verwijdering van studenten uit de opleiding is overigens een moeilijk punt. Formeel heeft de student het recht gedurende zes jaar de opleiding te volgen. Het enige middel dat een opleidingsteam heeft is het bestuur te verzoeken een student niet in te schrijven voor het volgend studiejaar – een middel dat slechts bij uiterste noodzaak wordt toegepast. Voor het zover is hebben dan meestal ettelijke gesprekken met de student plaats gevonden.

De beoordeling van vorderingen met betrekking tot het leraarsberoep (de *beroepskomponent*) levert een iets ander beeld op. Toch geldt ook hier het principe van de continuïteit: elk moment kan in principe aanleiding zijn tot het doen van beoordelende uitspraken. De student kan dan beoordelende uitspraken van de docent beter herleiden tot de konkrete situaties, die daartoe aanleiding gaven. Op deze manier zal hij, op langere termijn gezien, beter zicht krijgen op het proces van oordeelsvorming en -verandering bij de docent. Een hulpmiddel daarbij is de verslaglegging van 'voortgangsgesprekken' van de student en zijn docent(en). Voorwaarde is dan steeds dat de gesprekspartners, student en docent(en), akkoord zijn met de weergave van de gesprekken die ze voerden. Beoordelingen met konsekventies komen op deze wijze niet 'uit de lucht vallen'. In de dagelijkse omgang met de studenten is dit een belangrijke, maar toch wel moeilijke hanteringskwestie. Een enkel voorbeeld: Je kunt jaloers zijn op een student, zoals hij bijvoorbeeld in konfliktgevallen met leerlingen omgaat, terwijl hij in de nabespreking van de lessen geen vorderingen maakt in bewustwording van en reflectie op zijn lesgedrag (één van de doelen van de begeleiding). Een opmerking als: 'Ik ben gewoon jaloers op je dat je dit zo hebt aangepakt' is geen oordeel, maar het uitspreken van een gevoel. De student zou zoiets als een (positief) oordeel kunnen opvatten. Als de uiteindelijke beoordeling bijvoorbeeld luidt: 'ik vind dat je weinig vorderingen hebt gemaakt op het punt van bewustwording en verwoording van je lesgedrag', dan zou dit als een verrassing kunnen overkomen doordat de student in dit geval geen onderscheid maakt tussen beoordeling enerzijds en gevoelens anderzijds. Bij de kursussen didaktiek en onderwijskunde vinden de beoordelingsgesprekken grotendeels plaats aan de hand van verslagen. Studenten maken op basis van hun aantekeningen een eindverslag volgens gespecificeerde vragen. In de meeste gevallen doet de docent dat ook, toegespitst op de indrukken die hij van de vorderingen en mogelijkheden van de student heeft. In de ontwikkelingen van deze kursussen is er een tendens bij ons om met name op gebied van de didaktiek de onderdelen, die meer te maken hebben met kennis en vaardigheden, schriftelijk te toetsen, zodat er hardere gegevens op tafel komen.

In situaties waarbij op de beroepskomponent een negatief oordeel over de vorderingen van de student wordt uitgesproken is het moeilijk voor de student

verder te leren als hij de gronden van zo'n oordeel niet deelt. In het schoolpraktikum (derde en vierde jaar) komt dit wel eens voor. We gaan uit van de opvatting dat een student in die opzichten niet kan leren als hij niet wil. Bij onvoldoende vorderingen tijdens een schoolpraktikum (onvoldoende naar het oordeel van de docenten) wordt hij dan ook niet op herhaling gestuurd. Hij heeft dan het recht om met motivering een ekstra geboden kans op verdere oefensituaties af te slaan.

Bij de beoordeling van beroepsgerichte aspecten spelen subjectieve inzichten en opvattingen van docent en student een belangrijke rol. Doen alsof ze geen rol spelen is onmogelijk en onwenselijk. Dat zou teveel lijken op de struisvogel die zijn kop in het zand steekt bij onraad, en zo denkt niet gezien te worden. Het is de taak van de docent om 'eerlijk' te zijn over zijn eigen subjectieve gevoelens, gedachten en opvattingen. Hij dient te voorkomen dat de student er impliciet normen aan ontleent om bijvoorbeeld in het geveel van de docent te komen. De docent zal zelfs mechanismen die hierbij kunnen spelen tussen hem en de student moeten signaleren. Bijvoorbeeld als er sprake is van afhankelijkheidsversterkend gedrag waar beiden wel bij varen, om welke reden ook. De begeleiding zal er op gericht moeten zijn, dat de student zijn eigen ontwikkeling volgt en deze steeds beter kan richten en beheersen. Toch stuit je hiermee op paradoxale problemen. Het doel van de opleider is dat de student zijn eigen doelen bewust wordt en leert na te streven. Maar wat als de student een ontwikkeling doormaakt die hij wel, maar de docent niet kan onderstrepen? Denk bijvoorbeeld aan de student die zijn lessen nooit schriftelijk wil voorbereiden, omdat dat 'alle spontaniteit doodt'. Of de student die volhardt in zijn 'zeg nou maar hoe ik het moet doen'. Het komt voor dat een student hulp in de richting van onze opleidingsdoelen afwijst. De vraag of we deze student dan nog kunnen begeleiden, moeten we dan wel eens met 'nee' beantwoorden. In dergelijke situaties zoeken we dan een konstruktie, zodat de student zijn opleiding niet hoeft te staken. Bijvoorbeeld door de beroepsgerichte opleiding in zijn geheel bij het andere vak te laten verzorgen. De vraag of we een student voldoende voorbereid achten voor het leraarschap is niet altijd eenduidig te beantwoorden. Het lijkt soms een gewetenskwestie. Misschien is uiteindelijk dit nog wel het beste antwoord: 'Durf ik mijn kinderen aan hem of haar als leraar toe te vertrouwen. Ja of nee?'

Hiermee is de weg geopend naar willekeur en macht; maar evenzeer naar een fundamentele discussie over doelen en criteria, en hoe je daarmee als docent en opleider omgaat.

Utrecht, november 1976

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op 22 januari 1977 heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren tijdens een algemene ledenvergadering te Utrecht de leden gehoord in verband met een advies aan de inspectie over het eindexamenprogramma wiskunde I voor vwo.

Aan de inspectie is een advies uitgebracht in overeenstemming met de besluiten van de vergadering, waar 127 leden aanwezig waren.

De beslissing van het ministerie zal via een circulaire van het ministerie aan de scholen worden bekend gemaakt.

18de Internationale Wiskunde Olympiade gehouden van 7 t/m 21 juli 1976 in Oostenrijk

Opgaven

Eerste dag

- 1 In een vlakke convexe vierhoek met een oppervlakte van 32 cm^2 is de som van de lengten van een diagonaal en twee tegenover elkaar liggende zijden gelijk aan 16 cm .

Bepaal alle mogelijke waarden van de lengte van de andere diagonaal.

- 2 Zij $P_1(x) = x^2 - 2$ en $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ voor $j = 2, 3, \dots$

Bewijs dat voor elk positief geheel getal n alle wortels van de vergelijking

$$P_n(x) = x$$

reëel en van elkaar verschillend zijn.

- 3 Een rechthoekige doos kan volledig met eenheidskubussen gevuld worden. Wanneer men zoveel mogelijk kubussen met inhoud 2 in de doos legt zo, dat hun ribben evenwijdig zijn aan de ribben van de doos, kan men precies 40% van de doos vullen.

Bepaal de (inwendige) afmetingen van alle dozen met deze eigenschap.

$$(\sqrt[3]{2} = 1,2599 \dots).$$

Beschikbare tijd: 4 uren.

Tweede dag

- 4 Bepaal (met een bewijs) de grootste waarde van het product van positieve gehele getallen waarvan de som gelijk is aan 1976.

- 5 Beschouw het stelsel van p vergelijkingen met q onbekenden waarbij $q = 2p$,

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = 0$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2q}x_q = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = 0,$$

en waarbij elke coëfficiënt a_{ij} een element is van de verzameling $\{-1, 0, 1\}$.

Bewijs dat er een oplossing $(x_1, \dots, x_q)$ van het stelsel bestaat met de volgende eigenschappen:

(a) alle x_j ($j = 1, \dots, q$) zijn gehele getallen,

(b) er bestaat ten minste één waarde van j waarvoor $x_j \neq 0$,

(c) $|x_j| \leq q$ ($j = 1, \dots, q$).

6 De rij $\{u_n\}$ wordt gedefiniëerd door

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 (n = 1, 2, \dots).$$

Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt $[u_n] = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}$, waarin $[x]$ het grootste gehele getal $\leq x$ betekent.

Beschikbare tijd: 4 uren.

Verslag van de voorbereiding.

In de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1975 eindigden als nrs. 1 t/m 10 achtereenvolgens

- | | |
|------------------|------------------------|
| 1 Ralph Tschopp | 6 Herko van der Meulen |
| 2 Haus Rieuwerts | 7 Mark Overmars |
| 3 Pierre America | 8 Rob van Ommering |
| 4 Bart Westra | 9 Alex Fekken |
| 5 Peter Boots | 10 Mark Kramer. |

De nrs. 1 t/m 8 kwamen in aanmerking om uitgezonden te worden naar de Internationale Wiskunde Olympiade 1976. Als voorbereiding hierop ontvingen zij *lesbrieven* met stukken theorie, en vraagstukken om de wiskundige vaardigheid te vergroten. Ook de ‘reserves’ nr. 9 en 10 ontvingen deze lesbrieven, evenals, op eigen verzoek, Karel Mak (nr. 18). Na terugzenden van een aantal vraagstukken ontvingen de leerlingen telkens een volgende lesbrief. De reacties op de lesbrieven was grotendeels positief, enkelen waren zelfs zeer enthousiast. Een overzicht van uitzend – en ontvangstdata van de lesbrieven volgt hieronder

Naam	Lesbrief nr.	I	II	III	IV	V
Ralph Tschopp	27/1	25/2	25/2 31/3	12/4	—	—
Hans Rieuwerts		24/2	24/2 23/3	29/3 22/4	26/4	—
Pierre America		19/2	20/2 4/3	8/3 14/4	15/4 17/5	17/5 9/6
Bart Westra		24/2	24/2 23/3	29/3 18/4	3/5	—
Peter Boots		17/2	17/2 4/3	8/3 27/4	3/5	—
Herko van der Meulen		24/2	24/2 24/3	29/3 28/4	3/5	—
Mark Overmars		24/2	24/2 24/3	29/3 4/5	10/5	—
Rob van Ommering		8/3	9/3	—	—	—
Alex Fekken		12/2	17/2 1/3	8/3 22/4	22/4 17/5	17/5
Mark Kramer		25/2	25/2 31/3	12/4 11/5	12/5	—
Karel Mak		17/2	17/2 23/3	29/3 29/4	3/5	—

De lesbrieven zijn samengesteld door M. A. J. G. van der Vlugt en J. van de Craats. Voor een aantal ervan is gebruik gemaakt van gedeelten uit een experimentele uitgave *Getallentheorie voor het keuzevak Wiskunde II van de heren Boon en Groenevelt*.

Van 31 mei tot en met 4 juni werd een *trainingsweek* georganiseerd in het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Leiden, onder leiding van de heren van der Vlugt en van de Craats.

Kort tevoren meldde *Rob van Ommering* dat hij van deelname aan deze week en uitzending naar de Intern. Wisk. Ol. afzag. In zijn plaats werd nr. 9, *Alex Fekken* uitgenodigd. Hij kon pas vanaf dinsdag 1 juni aan de trainingsweek meedoen. *Pierre America* was juist die week op schoolreis. Hij kreeg extra lesmateriaal per post toegezonden. Aan de trainingsweek namen dus deel de nrs. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9.

De deelnemers logeerden bij van der Vlucht (nrs. 5 en 6), van de Craats (nrs. 1, 2 en 9) en een andere medewerker van het Math. Inst., de heer van Egmond (nrs. 4 en 7). Reiskosten en kosten van maaltijden die de leerlingen niet bij hun gastheren kregen, werden vergoed. Voor de nrs. 1, 2, 4 en 7 werd een fiets gehuurd. Als lesmateriaal kregen de deelnemers o.a. de nog niet toegezonden lesbrieven, een diktaat 'Elementaire Vlakke Meetkunde', en een volledig stel opgaven met uitwerkingen van alle 17 vorige Internationale Wiskunde Olympiades.

De 18e Internationale Wiskunde Olympiade

Van 7 t/m 21 juli 1976 vond in Oostenrijk de 18e Internationale Wiskunde Olympiade plaats. De Olympiade is een wedstrijd op het gebied van de wiskunde tussen scholieren van het VWO of vergelijkbaar onderwijs. Elk deelnemend land kan maximaal 8 scholieren afvaardigen. De deelnemers moeten op 2 opeenvolgende dagen elke keer 3 moeilijke opgaven oplossen. Zij hebben hiervoor elke dag 4 uur de tijd. De leiding van de wedstrijd berust bij een internationale jury, samengesteld uit wiskundigen van de deelnemende landen, voor elk land twee. Er waren dit jaar deelnemers uit Bulgarije, Cuba (slechts 3 deelnemers), Tjecho-Slowakije, West-Duitsland (slechts 2 deelnemers als waarnemer buiten mededinging), de DDR, Frankrijk, Groot-Brittannië, Griekenland, Hongarije, Nederland, Polen, Roemenië, Zweden, Finland, de Sovjet Unie, de Verenigde Staten, Viet-Nam, Joegoslavië en het organiserende land Oostenrijk.

Programma en organisatie

Uit elk deelnemend land kwam op 7 juli één van de juryleden naar Oostenrijk. In Eisenstadt werd daar op 8 juli begonnen met het selecteren van de 6 opgaven uit de door de verschillende landen ingezonden voorstellen. Hierna werd de definitieve formulering van de gekozen opgaven in de 4 officiële voertalen (Duits, Engels, Frans en Russisch) vastgesteld. Tenslotte vertaalden de juryleden de opgaven in de moedertaal van hun scholieren (de deelnemers kunnen de opgaven in hun eigen taal maken). Dit werk werd op zaterdag 10 juli voltooid. Op deze zelfde dag kwamen de scholieren en de overige juryleden in Oostenrijk aan. Zij werden naar Lienz in Oost-Tirol gebracht, waar de wedstrijd plaats zou vinden. De jury reisde op zondag 11 juli van Eisenstadt naar Heiligenblut, een plaats aan de voet van de Grossglockner, niet ver van Lienz. Op maandag 12 juli vond in Lienz de officiële opening plaats, gevolgd door de eerste zitting voor de scholieren. Nadat op dinsdag 13 juli de deelnemers hun laatste opgaven voltooid hadden, kon de jury in Heiligenblut beginnen met

corrigeren, coördineren en prijzen vaststellen. Dit werk was op zaterdag 17 juli voltooid. Op zondag 18 juli reisden jury en deelnemers via Salzburg naar Wenen, waar op dinsdag 20 juli 's-middags in een plechtige slotbijeenkomst in de Hofburg de prijsuitreiking plaatsvond. Daarna werd aan deelnemers en juryleden een diner aangeboden door de burgemeester van de stad Wenen. Gedurende de gehele periode waren er voor de deelnemers zowel als voor de jury talrijke excursies en ontvangsten georganiseerd.

Alle kosten verbonden aan de organisatie van de Olympiade en de verblijfskosten van deelnemers en juryleden werden gedragen door het Oostenrijkse Bundesministerium für Unterricht und Kunst. Slechts de reiskosten van en naar Oostenrijk waren voor rekening van de deelnemende landen.

Resultaten

De opgaven waren dit jaar vrij moeilijk, hetgeen o.m. blijkt uit het feit dat er slechts één deelnemer, Laurent Pierre uit Frankrijk, was die alle opgaven zonder fouten oploste, en daarmee de volle 40 punten scoorde. Er waren in totaal 9 deelnemers die 32 punten of meer behaalden. Zij allen kregen een eerste prijs en een radiocassette recorder. 28 deelnemers behaalden een puntenaantal tussen 23 en 31. Zij kregen een tweede prijs en een elektronische handrekenmachine. Voor de 44 deelnemers met puntenaantallen van 15 t/m 22 punten was er een derde prijs en een fototoestel. Onder deze prijswinnaars was de Nederlander Alex Fekken (17 punten). De Engelse deelnemer J. R. Rickard ontving een speciale prijs voor een generalisatie van opgave 5. Alle deelnemers kregen een oorkonde als bewijs van deelname.

In de officieuze landenklassering voerde Rusland met 250 punten de lijst van 19 landen aan, gevolgd door Groot-Brittannië (214 p), de Verenigde Staten (188 p) en Bulgarije (174 p). De Nederlandse ploeg kwam met 78 punten op de 15e plaats. Hoewel onze resultaten internationaal gezien dus nog niet indrukwekkend zijn, is er toch een duidelijke vooruitgang ten opzichte van vorig jaar. Ons land is bijvoorbeeld vrijwel het enige dat dit jaar meer punten verzamelde dan in 1975. Dit is voor een deel te danken aan een betere voorbereiding. Onze deelnemers ontvingen een aantal lesbrieven, en er is een trainingsweek georganiseerd op het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit van Leiden. Nog betere resultaten zou men echter kunnen verwachten als de belangstelling voor de Nederlandse Wiskunde Olympiade groter was. Zouden meer scholen deelnemen aan de eerste ronde, dan zou men veel meer wiskundig talent kunnen opsporen en stimuleren, hetgeen de voornaamste doelstelling is van zowel de Nederlandse als van de Internationale Wiskunde Olympiade. In dit verband zou ook het wiskunde-tijdschrift voor scholieren Pythagoras een stimulerende functie kunnen vervullen door aandacht te besteden aan de Nederlandse en de Internationale Olympiade, en bv. door een speciale opgavenrubriek te creëren waarin niet alleen eenvoudige, maar ook moeilijke tot zeer moeilijke sommen worden opgenomen (met uitwerkingen en commentaar). De enthousiaste reacties van onze scholieren op de lesbrieven, de trainingsweek, en de deelname aan de Internationale Olympiade vormen een aanwijzing dat stimulering van wiskundig talent niet alleen maatschappelijk nuttig, maar

ook individueel van grote vormende waarde kan zijn. Helaas is de Nederlandse Onderwijscommissie voor de Wiskunde door intrekking van alle overheids-subsidies voor de nationale en internationale Olympiades afhankelijk geworden van giften van o.a. het Wiskundig Genootschap en het bedrijfsleven. Hierdoor zal uitbreiding van de activiteiten niet eenvoudig zijn.

De Nederlandse deelnemers aan de 18e Internationale Wiskunde Olympiade waren (tussen haakjes de behaalde punten)

Pierre America (14 p)

Peter Boots (2 p)

Alex Fekken (17 p, 3e prijs)

Herko van der Meulen (7 p)

Mark Overmars (14 p)

Hans Rieuwerts (12 p)

Ralph Tschopp (6 p)

Bart Westra (6 p).

In de Internationale jury hadden voor Nederland zitting dr. J. van de Craats en drs. M. A. J. G. van der Vlugt.

De puntenwaardering, land van herkomst, en gemiddelde score door de 139 deelnemers voor de zes opgaven was als volgt

opg. 1, 5 punten, CS, gemiddeld 2,61 p.

opg. 2, 7 punten, SF, gemiddeld 1,94 p.

opg. 3, 8 punten, NL, gemiddeld 3,94 p.

opg. 4, 6 punten, USA, gemiddeld 3,77 p.

opg. 5, 7 punten, NL, gemiddeld 1,09 p.

opg. 6, 7 punten, GB, gemiddeld 4,59 p.

Het gemiddeld totaal aantal behaalde punten was 16,9. Opgave 5 werd door slechts 15 deelnemers volledig opgelost.

Totaaloverzicht

Land	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	1.Pr.	2.Pr.	3.Pr.	Extra prijs
BG	20	22	21	20	19	21	24	27	174		2	6	
C	13	1	2										
CS	5	14	24	19	8	22	17	7	116		1	3	
D	2 deelnemers buiten mededinging.												
DDR	21	12	12	16	30	28	16	7	142		2	3	
F	10	21	3	27	40	11	30	23	165	1	3	1	
GB	21	30	28	29	28	34	35	9	214	2	4	1	1
GR	9	1	13	7	9	1	6	4	50				
H	22	18	25	18	21	7	26	23	160		3	4	
NL	14	2	17	7	14	12	6	6	78			1	
PL	13	18	18	14	20	19	19	17	138			6	
R	14	19	17	16	12	13	4	23	118		1	3	
S	16	9	22	24	18	10	12	9	120		1	3	
SF	0	11	5	3	15	13	1	4	52			1	

SU	22	37	26	24	34	31	37	39	250	4	3	1
USA	14	23	31	21	38	25	10	26	188	1	4	1
VN	9	19	4	5	27	13	16	19	112		1	3
YU	27	19	8	7	20	19	9	7	116		1	3
A	21	23	34	16	17	24	17	15	167	1	2	5

J. van de Craats,
M. A. J. G. van der Vlugt.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1976 2e ronde

- 1 Bewijs dat geen van de getallen van de vorm $8n + 7$ ($n \in \mathbb{N}$) geschreven kan worden als de som van 3 kwadraten van gehele getallen.
- 2 P is een punt in het vlak van driehoek ABC . Men construeert de parallelogrammen $CPBL$, $APCM$ en $BPAN$. Bewijs dat de lijnen AL , BM en CN door één punt S gaan, en dat S het midden is van elk van de drie lijnstukken AL , BM en CN .
- 3 Op hoeveel manieren kan de koning in het schaakspel vanuit zijn oorspronkelijke veld op de eerste rij in 7 zetten de achtste rij bereiken? (Een schaakbord bestaat uit 8×8 vierkante velden. De kolommen zijn van links naar rechts genummerd a t/m h, de rijen zijn van beneden naar boven genummerd 1 t/m 8. De koning bevindt zich oorspronkelijk op veld e1. Bij elke zet mag hij verplaatst worden naar ieder veld dat met het veld waarop hij staat een zijde of een hoekpunt gemeen heeft. De koning kan dus bijvoorbeeld op de volgende manier in 7 zetten de achtste rij bereiken: e1, e2, f3, g4, h5, h6, h7, g8).
- 4 Gegeven de vergelijking in x

$$x^2 - (2a^2 + 4)x + a^2 + 2a + b = 0$$

(a , b en x zijn reële getallen).

Aan welke voorwaarden moet b voldoen om te bewerkstelligen dat deze vergelijking minstens een wortel x tussen 0 en 1 heeft voor elke waarde van a ?

- 5 Is A een getal, dan verstaan we onder $[A]$ het grootste gehele getal G met de eigenschap $G \leq A$. Zo is b.v. $[4\frac{1}{3}] = 4$, $[-3\frac{1}{2}] = -4$.
 n is een positief geheel getal. Voor $k = 1, 2, \dots, n$

$$f(k) = k + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil. \text{ Noem } k_0 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1.$$

Bewijs $f(k_0) \leq f(k)$ voor alle $k = 1, 2, \dots, n$.

Oplossingen

- 1 Elk kwadraat is een achtvoud $+0,1$ of 4 . De som van 3 van deze getallen kan geen achtvoud $+7$ zijn.

- 2 $ABLM$ is ook een pgm., etc.

3

								8
2	3	3	3	3	3	3	2	7
5	8	9	9	9	9	8	5	6
13	22	26	27	27	26	22	13	5
	61	75	80	80	75	61	35	4
		216	235	235	216	171		3
			686	686	622			2
				1994				1
a	b	c	d	e	f	g	h	

In elk veld staat aangegeven op hoeveel manieren vanuit dat veld de 8e rij bereikt kan worden.

Antwoord 1994.

- 4 Noem het linkerlid $f(x)$. Heeft f een nulpunt x_1 , dan is er ook nog een tweede x_2 (eventueel $x_1 = x_2$). Maar $x_1 + x_2 = 2a^2 + 4 > 4$, dus als $0 < x_1 < 1$ moet $x_2 \neq x_1$, en $x_2 > 4$. Omdat $f(x)$ als grafiek een dalparabool heeft moet dus voor alle a $f(0) > 0$ en $f(1) < 0$. $f(0) = a^2 + 2a + b > 0$ voor alle a geeft $b > 1$, $f(1) = -a^2 + 2a + b - 3 < 0$ voor alle a geeft $b < 2$, dus als $1 < b < 2$ is aan de voorwaarden voldaan.
- 5 De functie $g(x) = x + n/x$ heeft in $x = \sqrt{n}$ een minimum. De minimale waarden van $f(k)$ wordt dus aangenomen in $k_0 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ of in $k_0 - 1$ (en misschien nog in meer punten). Het is dus voldoende om te bewijzen dat $f(k_0) \leq f(k_0 - 1)$.

$$f(k_0) = k_0 + \left\lceil \frac{n}{k_0} \right\rceil \leq 2k_0 \text{ en } f(k_0 - 1) = k_0 - 1 + \left\lceil \frac{n}{k_0 - 1} \right\rceil > 2k_0 - 2.$$

Stel daarom $f(k_0) = 2k_0 - 1$, d.w.z. $\lfloor n/k_0 \rfloor = k_0 - 1$, d.w.z.

$$k_0 - 1 \leq \frac{n}{k_0} < k_0.$$

Dan is

$$k_0 \leq \frac{n}{k_0 - 1}, \text{ dus } \frac{n}{k_0 - 1} \geq k_0, \text{ dus } f(k_0 - 1) \geq 2k_0 - 1 = f(k_0).$$

Prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1976

(in alfabetische volgorde)

Pierre AMERICA, Gymnasium Rolduc Kerkrade (leraar H. Temmink)

Fons BOTMAN, R. S. G. Goeree Overflakkee Middelharnis (M. Verolme)

Sipke Jan HIEMSTRA, Menso Alting College Hoogeveen, (M. E. Kok)

Frank HOOGEVEEN, S. G. Hervormd Lyceum Amsterdam (C. J. Sikkell)

Martijn KRUISHOOP, Lorentz Lyceum Eindhoven (F. Sluiter)

Marc van LEEUWEN, Erasmuscollege Zoetermeer (C. Hendriks)

Hans MULDER, Chr. Lyceum Veenendaal (Mej. N. H. Visser)

Frank van OVERBEEKE, Herman Wesselink College Amstelveen (R. H. Plugge)

Rinus SPIT, Ichthus College Enschede (J. M. Schothans)

René ZANDBERGEN, S. G. Spieringshoek Schiedam (E. Clarenbeek/
C. A. M. v. Haaster)

Van dezen zullen er acht deel kunnen nemen aan de 19de Internationale Wiskunde Olympiade 1977 in Joegoslavië.

Mededeling van het ministerie van onderwijs en wetenschappen

De minister van onderwijs en wetenschappen brengt het volgende ter kennis van belanghebbenden. Met ingang van 1 januari 1978 is aanmelding voor het examen wiskunde m.o-A nieuwe stijl mogelijk. Na 1 januari 1981 is aanmelding voor het examen oude stijl niet meer mogelijk. In de periode 1 januari 1978 t/m 31 december 1980 kan men het examen hetzij in oude stijl, hetzij in nieuwe stijl, afleggen. Vrijstellingen, behaald in enig jaar, blijven 2 jaar geldig.

In het bijzonder betekent dit dat degene die in 1979 of 1980 een vrijstelling projectieve en beschrijvende Meetkunde behalen, in de gelegenheid zijn hun examen in oude stijl te voltooien in 1981 resp. 1982.

Indien men echter in de periode 1 januari 1978 t/m 31 december 1980 enige vrijstelling behaalt bij het examen oude stijl, maar bij nader inzien het examen in nieuwe stijl wenst te voltooien, dan meldt men zich aan voor het examen nieuwe stijl (onder betaling van het verschuldigde examen-geld). Vrijstellingen voor algebra, analyse of analytische meetkunde blijven dan geldig met inachtneming van de gebruikelijke termijn. Uiteraard dient men dan het examen statistiek en waarschijnlijkheidsrekening zowel schriftelijk als mondeling af te leggen. Tenslotte zij nog opgemerkt dat bij het examen nieuwe stijl de keuze van het (de) vak(ken) die een deexamen vormen, aan de kandidaat wordt overgelaten, met dien verstande dat een deexamen twee vakken dient te omvatten. De samenstelling van een deexamen oude stijl blijft ongewijzigd en is aldus voorgeschreven: òf algebra en analyse òf analytische meetkunde en projectieve en beschrijvende meetkunde.

Namens de minister,
drs. N. J. Dersjant

Boekbespreking

SMP Further Mathematics Series III, *Differential Equations and Circuits* (Draft Edition), Cambridge University Press 1971, X + 178 blz., £ 1.80.

Het boek is bestemd voor die leerlingen die het A-level examen in wiskunde willen afleggen en daarbij niet alleen het gewone programma kiezen, maar bovendien speciale onderwerpen bestuderen.

We worden ingeleid in een fundamenteel stuk wiskunde en de toepassing ervan, waarbij de toepassing centraal staat.

Eerst een beetje Boolese algebra en propositiologica, maar direct in verband gebracht met schakelingen. We leren opereren met Boolese matrices en met Karnaugh diagrammen (een soort veredelde Venn diagrammen). En dan zitten we ongemerkt al snel midden in een beschrijving van de digitale computer. Uitvoerig wordt de optelling besproken en daarna ook de aftrekking en de vermenigvuldiging.

Het volgende hoofdstuk gaat over de analoge computer. Het begint eenvoudig. Met behulp van schakelingen met weerstanden worden optellingen en vermenigvuldigingen ingevoerd. Dan wordt het interessanter. De condensator blijkt een goed hulpmiddel te zijn voor het uitvoeren van integraties. Met behulp van weerstanden en condensatoren kunnen we differentiaal-

vergelijkingen oplossen van het type $a \frac{dx}{dt} + bx = c$ en van het type $a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = d$.

Het daarop volgende hoofdstuk is geheel op de praktijk gericht. Gegeven is een netwerk van weerstanden met daarin één e.m.k. Gevraagd de stroomsterkten in de verschillende takken. Een algemene methode wordt ontworpen om dit probleem met behulp van matrixrekening de baas te worden.

Na dit uitstapje keren we terug naar de differentiaalvergelijkingen.

Uitgangspunt is steeds een fysisch probleem, bijv. een slinger of een veer. Maar al spoedig komt de elektriciteitsleer weer centraal te staan. Een circuit met daarin een e.m.k., een weerstand, een zelfinductie en een condensator geeft aanleiding tot een differentiaalvergelijking van de tweede orde. Deze worden opgelost. De fysische interpretatie van de oplossing is de harmonische trilling, de gedempte harmonische trilling of de gedempte beweging. In het bijzonder komen differentiaalvergelijkingen ter sprake waarvan de oplossing duidelijk maakt wat resonantie betekent.

Opnieuw komen de circuits ter sprake met weerstand, zelfinductie en condensator, maar nu met een ander doel. Uiteengezet wordt hoe de complexe getallen een vruchtbaar hulpmiddel zijn bij de beschrijving van dergelijke circuits.

In een slothoofdstuk wordt kort uiteengezet, hoe de Laplace transformatie gebruikt wordt bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Een voortreffelijk geschreven boek, dat de lezer weet te boeien.

Het boek draait om de differentiaalvergelijkingen. We leren deze niet alleen theoretisch oplossen, maar ook mechanisch en krijgen bovendien een helder inzicht in de fysische betekenis ervan. Voor onze leerlingen is dit boek te moeilijk. Maar onze leraren kunnen er veel plezier mee beleven. Uw recensent althans heeft er veel van opgestoken.

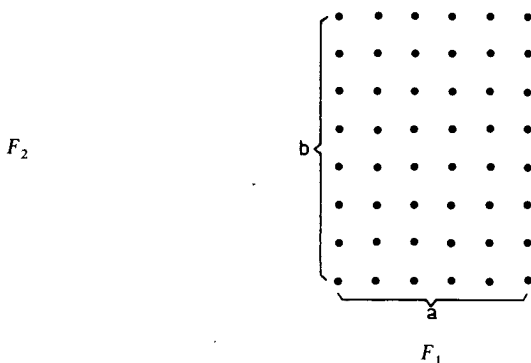
P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doornwerth.

Opgaven

368. ab personen worden in een rechthoek opgesteld (zie figuur). De fotograaf F_1 wil een foto nemen en vraagt de personen zich zo op te stellen, dat ieder korter is dan zijn achterbuurman. Geen twee personen hebben dezelfde lengte. Op hoeveel manieren kunnen ze zich opstellen?



Er is nog een fotograaf, F_2 , die ook een foto wil nemen. Nadat F_1 de foto genomen heeft, draaien allen zich een kwartslag en nu moet weer ieder korter zijn dan zijn achterbuurman. Op hoeveel manieren kunnen de personen zich opstellen zo, dat aan beide eisen voldaan is?

Ik ben er niet in geslaagd een formule te vinden voor dit aantal. Gevraagd wordt een algoritme te geven om het antwoord te vinden en de berekening uit te voeren voor het geval $a = 3$ en $b = 6$. Mocht iemand een formule vinden, dan houd ik mij aanbevolen.

369. Iemand heeft een trui aan. Het etiket zit aan de binnenkant aan de achterzijde. Hij trekt de trui uit over zijn hoofd en trekt hem vervolgens weer aan, maar steekt daarbij zijn rechterarm in de linkermouw en ook zijn linkerarm in de rechtermouw.

Gevraagd wordt waar het etiket dan zit.

Verboden op te lossen als er een trui in de buurt is.

Oplossingen

Voor de opgaven zie het vorige nummer.

366. Volgens de dienstregeling schijnen de afstanden tussen de eilanden te zijn:

Aloha – Bali-Hai 34 vaaruur

Bali-Hai – Crackatoea 71 vaaruur

Crackatoea – Aloha 36 vaaruur

Dit kan niet. Twee van de eilanden moeten dus aan één zijde en het derde aan de andere zijde

van de datumgrens liggen. Er blijken maar twee mogelijkheden te zijn voor de gecorrigeerde afstanden, namelijk

Aloha – Bali-Hai	58 vaaruur	of	34 vaaruur
Bali-Hai – Crackatoea	47 vaaruur		47 vaaruur
Crackatoea – Aloha	36 vaaruur		60 vaaruur

De havenmeester van Aloha seinde donderdag om 21 uur, dus 84 uur na het vertrek van de boot uit Aloha, dat er een orkaan op komst was. De boot ligt 3 uur in Bali-Hai. In het tweede geval is de boot op het moment dat het bericht geseind werd, juist in Crackatoea aangekomen. Dit is in strijd met het gegeven dat de boot op dat moment onderweg was van Bali-Hai naar Crackatoea. Blijft alleen de eerste mogelijkheid over. De kapitein ontvangt het bericht dan, als hij 23 vaaruur van Bali-Hai verwijderd is. Zijn afstand tot Crackatoea is dan 24 vaaruur, terwijl zijn afstand tot Aloha meer dan 23 vaaruur blijkt te zijn. Hij keert dus terug naar Bali-Hai en komt daar donderdag 20 uur aan.

367. Er zijn twee mogelijkheden.

A. Het eerste hoofdstuk bevat een oneven aantal bladzijden.

B. Het eerste hoofdstuk bevat een even aantal bladzijden.

A. Er zijn drie submogelijkheden.

a. Geen noten heeft hoofdstuk 3 (of 1 of 5 of 7).

b. Geen noten heeft hoofdstuk 4 (of 2 of 6).

c. Geen noten heeft hoofdstuk 8.

Neem voorlopig aan dat hoofdstuk 1 bestaat uit 1 bladzijde. De acht hoofdstukken bevatten dan resp. (met $a-1$ is bedoeld a bladzijden plus 1 lege bladzijde):

2 3-1 3-1 5-1 6 7-1 8 9-1 totaal 48 blz.

b. Deze aantallen zijn

2 3-1 4 4 6 7-1 8 9-1 totaal 46 blz.

c. De aantallen zijn

2 3-1 4 5-1 6 7-1 8 8 totaal 46 blz.

Bevat hoofdstuk 1 niet 1 maar 3 bladzijden, dan worden de totalen vermeerderd met 16, enz. Nu is noch $200-48$ noch $200-46$ deelbaar door 16. In geval A kan het gehele boek geen 200 bladzijden bevatten.

B. Weer drie submogelijkheden.

a. Geen noten heeft bijv. hoofdstuk 3.

b. Geen noten heeft bijv. hoofdstuk 4.

c. Geen noten heeft hoofdstuk 8.

Neem aan, dat hoofdstuk 1 uit 2 bladzijden bestaat. De gevallen a, b en c leveren nu resp.

3-1 4 4 6 7-1 8 9-1 10 totaal 54 blz.

3-1 4 5-1 5-1 7-1 8 9-1 10 totaal 56 blz.

3-1 4 5-1 6 7-1 8 9-1 9-1 totaal 56 blz.

Geval a is weer uitgesloten. Blijven over geval b en c. In deze gevallen is de paginaverdeling in de herdruk

2 3-1 4 5-1 6 7-1 8 13-1 totaal 52 blz.

Hoofdstuk 1 bevat 20 bladzijden. De oorspronkelijke uitgave heeft 5 witte bladzijden, de herdruk 4.

Opmerking. Men had kunnen volstaan te geven, dat de herdruk dunner was dan de oorspronkelijke uitgave, zonder te vermelden hoeveel dunner.

Ontvangen boeken

J. J. Jacobs e.a., *Moderne Wiskunde deel 5m*, 3e herziene druk, 317 blz., f22.50, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1976.

Mededelingen

Oriënterend colloquium voor leraren

Onderwerp: Meetkunde van oppervlakken

Gedurende het cursusjaar 1977/1978 wordt over bovengenoemd onderwerp een colloquium voor leraren georganiseerd door het Mathematisch Centrum. Dit colloquium is in de eerste plaats bedoeld voor wiskundeleraren, verbonden aan VWO en HAVO, maar andere belangstellenden zijn eveneens van harte welkom.

Het ligt in de bedoeling het colloquium te houden aan de hand van het boekje 'Surfaces' van H. B. Griffiths. Het boekje bedoelt onder andere een inleiding te geven in de topologie van compacte oppervlakken. Door een heel speciale benaderingswijze (die zich tot de gebruikelijke verhoudt als de synthetische tot de projectieve meetkunde) wordt de theorie ontwikkeld met een nadruk op de intuïtieve betekenis van de behandelde onderwerpen. Behandeld worden o.a. classificatiestellingen voor compacte oppervlakken, invariantie van de Euler karakteristiek, en de 'berg-beklimmersvergelijking' betreffende het aantal 'bergen plus dalen minus passen' op een oppervlak. Daarnaast is het boekje uit didactisch oogmerk interessant: het is een poging een methode te geven om aan leerlingen duidelijk te maken wat 'definities', 'stellingen' en 'bewijzen' in de wiskunde eigenlijk zijn. Het boekje kost $\pm f 30,-$.

Aanvangsdatum van het colloquium: woensdag 14 september 1977

Tijd: 19.30 (precies)–21.15 uur

Plaats: Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, grote collegezaal, 3e étage.

Het colloquium zal wekelijks gehouden worden in de periode van september tot half november 1977 en half januari tot half maart 1978.

Een ieder die aan het colloquium wenst deel te nemen wordt verzocht zich op te geven bij het Secretariaat van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, tel. 020-947272, tst. 63.

Een volledige informatie over dit colloquium is telefonisch te verkrijgen bij dr. J. de Vries, tel. 020-947272, tst. 76.

Staalkaart van bijeenkomsten voor wiskundeleraren

De afgelopen jaren zijn er ten behoeve van de wiskundeleraren door verschillende organisaties en instituten cursussen en konferenties over allerlei didactische onderwerpen georganiseerd. Door de verscheidenheid van deze activiteiten en door het ontbreken van onderlinge afstemming is er in het verleden wellicht verwarring bij individuele leraren, sekties en directies ontstaan. Vorig jaar hebben wij, om een deel van de ontstane verwarring weg te nemen, een staalkaart van activiteiten samengesteld.

Een volledige onderlinge afstemming is nog steeds niet goed mogelijk gebleken. Toch menen wij, dat het ook nu weer zinvol is een staalkaart van activiteiten in het komende schooljaar aan te bieden.

A-kursus, bestemd voor wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs.

Thema: leerstofordening

Organisator: Didaktiekkommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in samenwerking met het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs

Tijden: 1e mogelijkheid: donderdag 29 september, vrijdag 30 september en zaterdagmorgen 1 oktober

2e mogelijkheid: donderdag, vrijdag en zaterdagmorgen 5, 6 en 7 januari 1978.

B-kursus, bestemd voor wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs.

Thema: samenwerken

Organisator: Didaktiekkommissie van de NVWL in samenwerking met het I.O.W.O.

Tijd: donderdag, vrijdag, zaterdagmorgen 2, 3 en 4 februari 1978.

C-konferentie, bestemd voor wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs.

Thema: rekening houden met verschillen tussen leerlingen.

Organisator: Didaktiekkommissie van de NVWL in samenwerking met het I.O.W.O.

Tijd: maandag, dinsdag, woensdagmorgen 17, 18 en 19 oktober 1977 (in de herfstvakantie).

Regionale bijeenkomsten, bestemd voor wiskundeleraren die geïnteresseerd zijn in of gewerkt hebben met de pakketjes van het I.O.W.O.

Thema: uitwisseling van ervaringen met de pakketjes en informatie krijgen over nieuw ontwikkelde pakketten

Organisator: instituut ontwikkeling wiskunde onderwijs (I.O.W.O.)

Tijd: 1e bijeenkomst: Zwolle 7-11-'77

Eindhoven 8-11-'77

Utrecht 9-11-'77

Utrecht 10-11-'77

2e bijeenkomst: in de laatste week van januari 1978

3e bijeenkomst: het laatst van de week van 17 april 1978.

Konferentie I, bestemd voor wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs.

Thema: het diagnostisch gebruik van studietoetsen

Organisator: Centraal Instituut voor Toets-Ontwikkeling (C.I.T.O.) in samenwerking met het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie (R.I.T.P.)

Tijd: Tweedaagse konferentie op vrijdag 23 en zaterdag 24 september 1977.

Konferentie II, bestemd voor wiskundeleraren bij het voortgezet onderwijs.

Thema: de deelnemers kiezen uit enkele nog nader te bepalen thema's

Organisator: C.I.T.O. in samenwerking met het R.I.T.P.

Tijd: een konferentie op vrijdag 25 en zaterdag 26 november 1977 en een konferentie op maandag 12 en dinsdag 13 december 1977.

S.D.B.W.-bijeenkomsten, bestemd voor wiskundeleraren bij het lbo en mavo.

Thema: differentiatie vandaag!

Organisator: Stuurgroep Didaktische Begeleiding Wiskunde

Tijd: op de vrijdagmiddagen: 9 september, 30 september, 21 oktober, 11 november en 2 december.

De wiskundeleraren zullen eind augustus 1977 via hun scholen aanmeldingsformulieren voor het De wiskundeleraren zullen eind augustus 1977 via hun scholen aanmeldingsformulieren voor deze activiteiten ontvangen. Tevens zullen zij dan naast uitvoeriger informatie over deze activiteiten, informatie ontvangen over een aantal projecten waarvoor echter geen open aanmelding mogelijk is, zoals begeleidingsproject Mastery Learning (K.P.C.) en project vierjarig lbo (L.P.C.).

H. Broekman (Didaktiekkommissie NVWL)

L. Muskens (R.I.T.P.)

H. Pouw (K.P.C.)

G. Schoemaker (I.O.W.O.)

A. Segaar (S.D.B.W.)

J. Timmer (C.I.T.O.)

ARISTO biedt meer

Voor middelbare- en technische scholen!

Het ARISTO oplaadapparaat voor klassikaal gebruik

Een diplomatenkoffer met een oplaadapparaat dient om de ARISTO mini-kalkulators met ingebouwde oplaadbare batterijen op te laden, als opbergruimte en als vervoersmiddel voor klassikaal onderwijs.

Onderstaande punten geven U de voordelen van deze set:

- De mini-kalkulators worden in de koffer netjes opgeborgen en kunnen in gesloten koffer van klas naar klas worden vervoerd.
- De koffer kan worden afgesloten.
- De overzichtelijke vakken maken het mogelijk bij het uitdelen en terugnemen snel de aanwezigheid van alle mini-kalkulators te controleren.

- Dankzij de eenvoudige bediening staan de kalkulators steeds gebruiksklaar ter beschikking.
- Er kunnen naar keuze 1 tot 20 ARISTO mini-kalkulators tegelijk worden opgeladen.
- Om te laden resp. op te bergen worden de kalkulators in de vakjes geschoven.
- De aansluiting op het lichtnet geschiedt d.m.v. een eurostekker.
- Het opladen van de kalkulators kan ook plaatsvinden als de koffer is gesloten.
- Opladen van de kalkulators vergt 14 uur. Eventueel langer opladen is onschadelijk.

Technische gegevens:

Koffer met oplaadapparaat om 1-20 ARISTO kalkulators op te laden

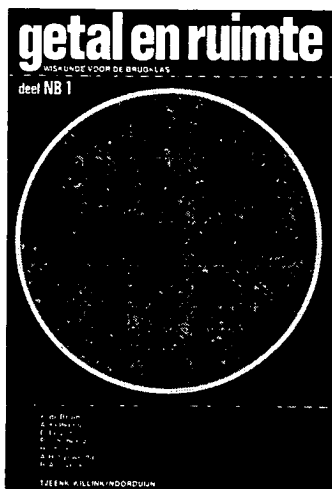
Afmetingen:
48 x 36 x 11 cm

Gewicht:
ca. 3 kg. zonder kalkulators

Aansluiting:
220 V wisselstroom

Stroomverbruik:
ca. 10 W





zojuist verschenen:

getal en ruimte

N B 1 wiskunde voor de brugklas

door

K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes,
P. C. Schnetz, H. Steur, A. H. Syswerda,
R. A. J. Vuijk.

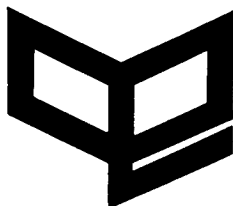
Kenmerken: • Indeling in **Basisstof, Herhalingsstof, Verrijkingsstof.**

- Veel opgaven.
- Extra aandacht aan de rekenvaardigheid.
- Consequente indeling.
- Functioneel gebruik van steunkleur.
- Goede mogelijkheid tot D.B.K.
- Docentenbegeleiding.

Heeft u het beoordelingsexemplaar nog niet ontvangen, vraag het dan onmiddellijk aan.

ISBN 90 11 81046 5 / 198 blz. / 100 figuren / f 13,75.

Een uitgave van: Tjeenk Willink/Noorduijn.



educaboek bv
culemborg

INDUSTRIEWEG 1 TELEFOON 03450-3143

getal en ruimte

medio juli verschijnen de gewijzigde herdrukken van 4/5H2 en 5/6V3

GETAL EN RUIMTE 4/5H2

meetkunde en statistiek voor de vierde en de vijfde klas havo.

ISBN 90 11 81096 1 / 4e druk / 280 blz. / 130 figuren / steunkleur / f 20,50.

- Geheel herschreven op grond van 6 jaar ervaring.
- Veel opgaven.
- Degelijke aanpak.
- Functioneel gebruik van steunkleur.
- Extra aandacht aan het tekenen.
- Gevarieerde herhalingsopgaven.

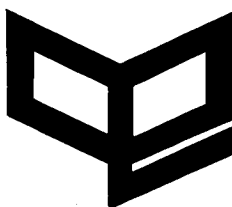
GETAL EN RUIMTE 5/6V3

wiskunde II voor de vijfde en de zesde klas vwo.

ISBN 90 11 81110 0 / 3e druk / 260 blz. / 90 figuren / f 20,75.

- Geheel vernieuwd examenboek voor wiskunde II.
- Op examenniveau.
- Extra veel vraagstukken.
- De examens zijn opgenomen.
- Paragrafen met toepassingen in natuurkunde, economie en wiskunde na elk hoofdstuk.
- Uitvoerige losse antwoordenlijst.

Uitgave: Tjeenk Willink/Noorduijn.



educaboek bv
culemborg

INDUSTRIEWEG 1 TELEFOON 03450-3143



**Nog net
op tijd**

Voor het nieuwe schooljaar
is de uitgave: " De Wissel "
verschenen.

De Wissel kan de brugklassen
helpen om gemakkelijker de
aansluiting te vinden naar het
algebra.

Gaarne sturen wij een present
exemplaar.

Uitgave: Segers - Schiedam.
postbus 207

DE WISSEL

rekenen - algebra



Technische Hogeschool Delft

Bij de Onderafdeling der Wiskunde kan worden geplaatst een

vakdidacticus wiskunde (m/v)

ten behoeve van de opleiding tot 1e graads wiskundeleraar

Taakomschrijving: tot de taak van de vakdidacticus zal behoren het verzorgen van onderwijs en het verrichten van onderzoek op het gebied van de didactiek der wiskunde in het kader van de opleiding tot 1e graads leraar in de wiskunde. Tevens zal hij/zij – in samenwerking met andere vakdidactici en onderwijskundigen – een bijdrage moeten leveren aan de opbouw van de in te stellen lerarenvariant. Ook moet de te benoemen functionaris bereid zijn op andere gebieden van het wiskunde-onderwijs/onderzoek zijn bijdrage te leveren.

Vereisten: doctoraal examen wiskunde of hiermede overeenkomstige opleiding; ruime onderwijservaring bij het V.W.O.; praktische en theoretische kennis van de problematiek van de didactiek der wiskunde.

Nadere inlichtingen omtrent deze functie worden gaarne verstrekt door de voorzitter van de benoemingsadviescommissie: lector dr. A. W. Grootendorst, tel. 015-133222 toestel 4572, of met de huidige functionaris dr. P. G. J. Vredenduin, tel. 085-333807.

Aanstelling en bezoldiging volgens Rijksregeling zal geschieden in het rangenstelsel der wetenschappelijke medewerkers. Directe opnemings in welvaartsvast pensioenfonds.

Schriftelijke sollicitaties te richten aan het Hoofd van de Centrale Personeelsdienst, Julianalaan 134 te Delft, onder vermelding van nr. WI 7703 in de rechterbovenhoek van de brief.

INHOUD:

In memoriam L. van Beek	363
De „periode Krooshof" (1968-1976)	364
Fred Goffree: Vakdidactische Notities	365
16e Wiskunde Olympiade, eerste ronde 1977	368
M. Dijkshoorn: Zo kon het ook	369
Sieb Kemme: Denkniveaus en het begin-onderwijs in de wiskunde	370
S.O.L. vakgroep wiskunde: Voorbereiden op het leraarschap	378
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	389
18e Internationale Wiskunde Olympiade 1976	390
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1976, 2e ronde	395
Mededeling van het ministerie van onderwijs en wetenschappen	397
Boekbespreking	398
Recreatie	399
Ontvangen boeken	400
Mededelingen	401

ADRESSEN AUTEURS:

M. Dijkshoorn, Suzannaland 214, 's-Gravenhage.
Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.
Sieb Kemme, Leeghwaterstraat 2, Koog aan de Zaan.
S.O.L., vakgroep wiskunde, postbus 14007, Utrecht.