EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang
1976/1977
no 9
mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, Apeldoorn, tel. 055-250834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 30,50. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: 1/1 pag. *f* 275,—, 1/2 pag. *f* 150,— en 1/4 pag. *f* 85,—.

Vakdidaktische Notities

FRED GOFFREE

Den Dolder

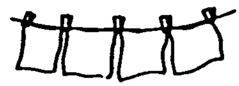
2 Vakbekwaamheid (1)

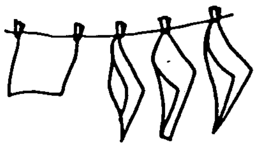
Soms beleef je wel eens het genoegen om buiten het kringetje van 'onderwijsgevenden' mensen te ontmoeten, die zeer deskundig over hun vakgebieden kunnen spreken. Mij imponeren vaklui altijd in hoge mate. De ouderwetse meubelmaker met zijn kennis van praktische aard, de bierbrouwer van de sterreklame met het sfeertje van mystieke wijsheid en de arts, die op zijn praatstoel gezeten blijk geeft van een grote hoeveelheid van feitelijke kennis.
Waar blijft in dit gezelschap de vakbekwaamheid van de (wiskunde) leraar? Zolang het over de schoolwiskunde gaat, en er zijn eindeksamenkandidaten binnen het bereik, dan kan de deskundigheid nog imponeren. Maar wat blijft erover als specifiek aan het leraarschap wordt geappeleerd?
De goede wiskundeleraar ontleent zijn faam veelal aan zijn kundigheid bij het uitleggen. Wat dat precies is, weet ik niet. De ene keer lukt een bepaalde uitleg heel goed, dan blijkt een gekozen voorbeeld inderdaad voorbeeldig, dan is die ene vraag precies op het juiste moment gesteld . . . Met dezelfde aanpak in een andere klas kun je volledig de mist ingaan. Om te overleven bedachten wij leraren in een dergelijk geval reeds lang geleden de enige en algemene oorzaak: de domheid van de leerlingen.
Met 'de kunst van het uitleggen' ben je er evenwel niet in deze tijd van modern wiskundeonderwijs. Didaktiek heeft vele kanten, dat is inmiddels duidelijk. En daarbij heb ik het nog niet eens over de algemene didaktiek; een vakgebied waarin we ons als wiskundigen niet gemakkelijk thuis voelen. Is dat misschien de oorzaak van het feit dat ook de vakdidaktiek zo matig tot ontplooiing is gekomen?

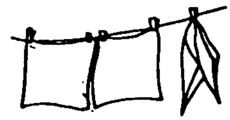
Wel, ik wil u vertellen van enige stukjes wiskundeonderwijs op de basisschool, beoefend door studenten van een pedagogische akademie. De beide beperkingen (basisschool en studenten P.A.) stelden mij in de gelegenheid om tot enige interessante analyses te komen.
Stel u voor, Herma, eerstejaars studente, een jongedame van ca. 19 jaar. Wiskunde was niet haar sterkste kant op de H.A.V.O., maar ze heeft moed en vertrouwen in de stageopdracht. Deze bestaat uit een korte aanwijzing:*

* Zie Wiskobas Bulletin: Leerplanpublikatie 2, dec. 1975, pag. 24.

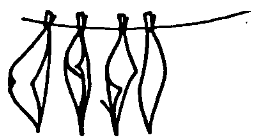
'Juf heeft de was gedaan. Ik waste vier zakdoeken. Ik had maar vijf knijpers nodig'
Aan een klein lijntje voor de klas gaat men proberen.
Dan moeten de kinderen tekenen:



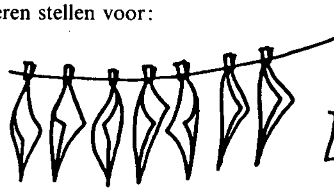


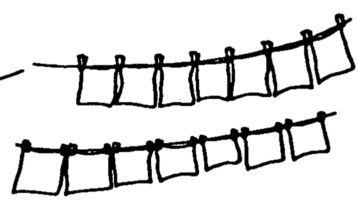


Juf neemt de goede ideeën op het bord over en inspireert zodoende tot nieuwe vondsten.
'*Kun je ook vier zakdoeken met vier knijpers ophangen?*'
Dat is gemakkelijk:



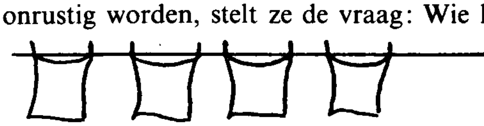
Daarom waarschijnlijk brengt juf een ander aspekt naar voren:
'*Wanneer zijn ze sneller droog, denk je? En hoe komt dat?*'
De praktische instelling van de kinderen valt haar erg mee.
Dan toch maar weer naar de wiskunde:
'Laatst waste ik zeven zakdoeken.'
De kinderen stellen voor:



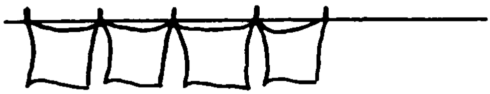


In het tweede geval tekent wilma eerst de acht knijpers en 'hangt' dan de zakdoeken op.
Juf gaat er verder op in:
'*Wie heeft het minste aantal knijpers gebruikt?*
Wie heeft het nog anders gedaan?
Kun je het met nog minder?'

Als ik in de klas kom hangt de (was)lijn al voor het bord en de eersteklassertjes zijn vol stille afwachting.
De les begint met een (gebruikelijke) inleiding. Het is wasdag . . .
Dan mogen de kinderen om de beurt zakdoeken ophangen.
Herma gunt ze rustig de tijd en als de kinderen in de klas, door hun gedwongen passiviteit onrustig worden, stelt ze de vraag: Wie kan het vlugger dan zij?



Met nogal wat moeite doet ze daarna de kinderen geloven, dat



'vlugger' gaat. Jammer genoeg vereist deze werkwijze een zekere motorische vaardigheid, zodat het feit dat minder knijpers gebruikt worden niet betekent dat er minder tijd voor het ophangen nodig is.
Zeker twintig minuten is men bezig met de waslijn als Herma en de kinderen het zat zijn. Het lesje wordt beëindigd en ik zoek zuchtend mijn weg naar de gang . . .

Na de eerste uiting van teleurstelling ('de kinderen hebben in elk geval geleerd hoe je een zakdoek kunt ophangen') doe ik toch een poging om ook hier iets van te leren. Wat was nu de bedoeling van het beschreven wiskundeonderwijs en waarom kan dat hier mislopen?
Wel, het ging niet om zakdoeken, maar het ging om een wetmatigheid. Een wetmatigheid in de relatie tussen aantallen knijpers en aantallen zakdoeken.
Op deze aantallen zou de aandacht van de kinderen gericht moeten zijn geweest. De wenselijkheid van ontdekking van een struktuur had wellicht relief gekregen door een vraag met betrekking tot grotere aantallen (Hoeveel knijpers heb je nodig voor 10 zakdoeken?)
Maar Herma had zich niet gerealiseerd dat de variabelen, die de situatie wezenlijk beschreven, de genoemde aantallen waren.

Dit aspekt van de vakbekwaamheid geldt niet slechts voor het wiskundeonderwijs in de eerste klas van de basisschool. Verderop in de school kwam ik het ook nog tegen.
Stel u voor een groepje leerlingen uit een tweede klas. Ellen, eveneens een eerstejaars studente, gaat een leergesprek aan over de wegen, de kruispunten, de wegwijzers en de richtingen op Waterland.*
Ze heeft, heel ijverig, wegwijzerbordjes gemaakt met symbolen, die naar objekten op het eiland wijzen. De vraag: 'waar moet die wegwijzer staan?' leidt tot een chaotisch gezoek. Hoewel de kaart voor ons ligt op een grote tafel en de kinderen met de vingers langs de wegen kunnen reizen, komt er niets uit. Ellen ziet het niet meer zitten . . .

Achteraf probeer je de fouten te analyseren. Ik voel me schuldig dat mijn opdracht en hulp vooraf tot zo'n negatief resultaat voerden. En in feite is het zo triviaal. We hadden te doen met verschillende wegwijzers, verschillende symbolen, verschillende punten waar wegwijzers moesten staan, verschillende objekten op het eiland en verschillende wegen. Ga eens na, wat een variabelen. Om die te onderscheiden moet men toch vakbekwaam zijn. En om het probleem toegankelijk te maken voor je leerlingen, moet je bovendien op de gedachte komen er enkele te fikseren. (Bijvoorbeeld: 'neem nu eens dit kruispunt . . .)

* Zie leerplanpublikatie deel 2 pag. 28 of Euclides: jrg. 50 jubileumnummer.

Gelukkig had ik, enige tijd later een ervaring, die veel positiever was. Dat ik evenwel dezelfde 'bekwaamheid' meende te signaleren, wijt ik geheel en al aan de hiervoor beschreven analyses.
Het was in klas 5. We hadden een groep van 6 leerlingen voor het probleem geplaatst de richting van Moskou te vinden. Twee studenten leidden het gesprek, daarbij gebruik makend van een kompas en de wandkaart van Europa. Al spoedig ligt de kaart midden in het lokaal op de grond.
Wat moet er niet allemaal doordacht worden? Het begrip richting (kompasnaald, Noord-Zuid op de kaart) de meridiaan, de windroos op het kompas, de kompasnaald, het verband tussen de laatste . . .

Keurig netjes hebben de studenten dit vóórgedacht. Eerst komt er een windroos in het lokaal. Daar is het noorden, met een touwtje aangegeven: N-Z. Nu moet de kaart in de juiste stand komen. Hoe zit dat daar met N-Z? Het idee om de globe te gebruiken – van de kinderen – wordt niet afgewezen. Een verband met het touwtje in de klas ontwikkelt zich tijdens een goede diskussie . . .

— — —

Vakbekwaamheid is niet beschreven met deze kunst van het onderscheiden en scheiden van variabelen. Misschien zie ik binnenkort nog wel meer van dit soort aspekten. Daarvan zal ik zeker dan een notitie maken. Als u, lezer, ook meedoet, kunnen we over enige tijd misschien ook andere vaklui imponeren.

Examens Statistisch Assistent en Analist VVS 1977

De vereniging voor Statistiek zal onder toezicht van het ministerie van Economische Zaken de examens Statistisch Assistent en Analist VVS in 1977 afnemen op de volgende data:
Statistisch Assistent VVS
(alleen schriftelijk) op vrijdag 3 juni van 13.30–16.30 uur.
Statistisch Analist VVS
Schriftelijk gedeelte: dinsdag 31 mei van 13.30–16.30 uur
monderling gedeelte: 29, 30 juni, 1 juli.
De kandidaten, die door de examencommissie net niet voldoende worden gekwalificeerd, mogen een verlengd mondeling examen afleggen. Dit zal rond 1 oktober worden afgenomen.
De schriftelijke examens worden afgenomen in de Grote Zaal van Musis Sacrum te Arnhem, de mondelinge in het Bouwcentrum te Rotterdam.
De examenkosten bedragen *f* 125 per examen.
Degenen, die aan de examens wensen deel te nemen, dienen zich vóór 6 mei 1977 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie, de heer R. Tillemans, Bolthagen 4, Zevenaar. Aanmeldingsformuleren zijn verkrijgbaar bij mevr. M. den Ouden, Weena 700 Rotterdam, telefoon 010-116181 toestel 2126.

Leerboeken wiskunde in de brugklas in 1976/1977

GERT BAKKER

Cito, Arnhem

In april 1976 heeft het CITO aan alle scholen voor voortgezet onderwijs het verzoek gericht om informatie te verstrekken over boeken die in het eerste leerjaar gebruikt worden. In september had 89% van de scholen de enquête ingevuld geretourneerd.
De opgegeven boeken zijn voor acht vakken geïnventariseerd.
Het doel van dit artikel is om u te laten zien welke boeken er frequent bij de verschillende schoolcategorieën gebruikt worden voor wiskunde (en rekenen). Terloops zal ook iets vermeld worden over veranderingen in het boeken-assortiment. Het hier besproken onderzoek is louter inventariserend van aard; aan mathematische en didaktische kwaliteiten is geen aandacht besteed.

Aanleiding voor het onderzoek

De inventarisatie werd verricht in het kader van het CITO-project 'leerdoelgerichte toetsen voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs'. In dit project worden toetsen ontwikkeld die gebaseerd zijn op expliciet geformuleerde leerdoelen. Deze toetsen zijn klein van omvang: elk bestaat uit 5 à 10 vragen. Een zeer belangrijke functie is om na te gaan of de leerlingen het leerdoel bereikt hebben. In een volgend nummer van Euclides zal nader op deze soort toetsen worden ingegaan. Om te weten welke leerdoelgerichte toetsen meest gewenst zijn inventariseert het CITO het boekengebruik op de scholen.

Frequent gebruikte boeken voor wiskunde

Het aantal boeken dat voor wiskunde op de ontvangen boekenlijsten van 1976 voorkwam bedraagt 175. Hierbij zij opgemerkt dat verschillende delen van een leergang apart geteld zijn. In CITO-publicatie no. 46 is voor wiskunde, evenals voor andere vakgebieden, een volledige lijst van gebruikte boeken opgenomen. De verdeling over 21 schoolcategorieën is aangegeven.
In diezelfde publicatie zijn ook lijsten opgenomen die zich beperken tot frequent gebruikte boeken: dat zijn in dit onderzoek boeken die op tenminste

Frequent gebruikte leergangen voor wiskunde (in procenten)

	Titel	Auteur	Uitgever	Op hoeveel ontvangen boekenlijsten
19.	Cijfertraining I	Broertjes v. Hooff	Dijkstra	29
34.	Getal en ruimte BI	De Bruin Kelfkens e.a.	Educa	180
35.	Getal en ruimte BII	De Bruin Kelfkens e.a.	Educa	164
36.	Getal en wereld I	Frankema Sleyter	Ten Brink	117
43.	Hoe en hoeveel IA	Stoelhorst	Thieme	35
44.	Hoe en hoeveel IB	Stoelhorst	Thieme	24
54.	Ik reken met ideeën	Duvekot Duvekot	Educa	43
75.	Moderne wiskunde I	Jacobs Kniep Krooshof e.a.	Wolters	788
76.	Moderne wiskunde II	Jacobs Kniep Krooshof e.a.	Wolters	534
78.	Moderne wiskunde voor LBO I	Jasper Lolkema Krooshof	Wolters	133
180.	Passen en meten 1	Doevendans	Wolters	155
181.	Passen en meten 2	Doevendans	Wolters	90
182.	Passen en meten 3	Doevendans	Wolters	86
214.	Proef op de som	Barteling e.a.	Ten Brink	46
93.	Rekenen en toepassen I		Ivio	34
95.	Rekenen geen kunst	Balt	Ten Brink	39
102.	Rekenen voor de brugklas	v. d. Goot Schelfhout e.a.	Malmberg	35
106.	Rekenen voor IO I	Mabesone Limburg	Wolters	32
108.	Rekenen voor ITO IA	Broertjes v. Hooff	Dijkstra	24
111.	Rekenen voor ITO IA	Ten Thij e.a.	Educa	22
109.	Rekenen voor ITO IB	Broertjes v. Hooff	Dijkstra	18
112.	Rekenen voor ITO IB	Keizer	Educa	20
116.	Rekenen voor LTS	De Greef	Dijkstra	64
117.	Rekenen, wiskunde voor LHNO		NCB	52
206.	Ruimte voor getallen	Roodhart	Educa	22
123.	Sigma, Wisk. voor MAVO, HAVO, VWO	Cohen v. Dop Groeneveld e.a	Wolters	172
125.	Taakboeken mod. wisk. Meetk. I	Kuipers Velders	Wolters	35
129.	Thematisch rekenen voor LHNO I	Eitens IJspeerd	Dijkstra	28
133.	Van A tot Z IA	Hartman v. Hiele	Muusses	205
134.	Van A tot Z IB	Hartman v. Hiele	Muusses	130
143.	Werkboek wisk. voor LBO Alg. I	Coumans	Malmberg	51
144.	Werkboek wisk. voor LBO Meetk. I	De Bruijne	Malmberg	64
149.	Wiskunde op mod. basis I Rek.	Lauwen	SMD	131
231.	Wiskunde op mod. basis I ABC	Lauwen	SMD	20
202.	Wiskunde op moderne basis II	Lauwen	SMD	26
62.	8 Leerstofblokken wiskunde	Dir. Landb. Onderw. APS	APS	60

Aantal ontvangen boekenlijsten . . . .
Aantal frequent gebruikte boeken ($\geq 5\%$) . . . .
Totaal aantal gebruikte boeken . . . .

LEAO = Lager economisch en administratief onderwijs.
LHNO = Lager huishoud- en nijverheidsonderwijs (IHNO: individueel ...).
LLO = Lager Landbouwonderwijs.
LMO = Lager middenstandsonderwijs.

	LEA	LHN	IHN	LLO	LMO	LTO	ITO	LBO SG	LBO AVO VWO SG	MAV	MAV HAV ATH	MAV HAV ATH GYM	MAV HAV	HAV ATH GYM	HAV ATH	GYM
19	–	–	–	–	–	–	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–
34.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8	10	27	26	12	26	32
35.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	7	10	27	26	11	26	32
36.	7	21	8	–	–	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–
43.	–	7	–	–	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–
44.	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
54.	7	5	–	–	15	–	–	5	6	–	–	–	–	–	–	–
75.	–	–	–	10	10	–	–	–	55	69	66	40	46	38	40	24
76.	–	–	–	–	–	–	–	–	39	43	39	37	44	37	40	24
78.	23	–	–	21	30	25	–	18	10	–	–	–	–	–	–	–
180.	–	31	9	–	5	–	–	6	–	–	–	–	–	–	–	–
181.	–	19	5	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
182.	–	18	5	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
214.	–	–	21	–	5	–	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–
93.	5	–	–	8	10	–	–	–	8	–	–	–	–	–	–	–
95.	–	–	28	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
102.	7	–	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
106.	–	–	6	–	–	–	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–
108.	–	–	–	–	–	–	15	–	–	–	–	–	– –	–	–	–
111.	–	–	–	–	–	–	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–
109.	–	–	–	–	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–
112.	–	–	–	–	–	–	5	–	5	–	–	–	–	–	–	–
116.	–	–	–	–	–	24	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
117.	–	11	–	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
206.	–	–	–	5	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
123.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	7	20	19	24	36	22	38
125.	–	–	–	16	–	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
129.	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
133.	5	9	10	–	–	8	–	8	8	13	7	8	–	–	–	–
134.	–	6	–	–	–	–	–	6	8	9	5	5	–	–	–	–
143.	5	–	–	–	10	7	7	6	–	–	–	–	–	–	–	–
144.	5	–	–	–	5	8	10	5	–	–	–	–	–	–	–	–
149.	14	–	–	–	–	33	7	19	6	–	–	–	–	–	–	–
231.	–	–	–	–	–	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
202.	–	–	–	–	–	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
62.	19	–	–	44	–	–	–	11	–	–	–	–	–	–	–	–
. .	57	404	125	73	20	233	124	80	49	790	41	75	68	73	144	34
. .	14	11	9	10	27	9	13	13	8	7	7	7	5	5	5	6
. .	50	80	49	46	27	73	55	60	28	41	14	23	23	17	20	14

LTO = Lager technisch onderwijs (ITO: individueel ...).
LBO = Lager beroepsonderwijs.
AVO = Algemeen voortgezet onderwijs.
SG = Scholengemeenschap.

5% van het aantal ontvangen boekenlijsten van een type brugklas voorkwamen.
Dat aantal bedraagt zelfs 57 voor wiskunde. Ook voor nederlands zijn het er 57. Bij de andere vakken is dit aantal aanmerkelijk kleiner.
Om voor dit maandblad het overzicht wat beperkt te houden is iedere leergang die op minder dan 18 van de 2418 ontvangen boekenlijsten voorkwam weggelaten. Op deze wijze blijven nog 36 leerboeken over die u in de vorige tabel aantreft.
Voor 16 schoolcategorieën ziet u aangegeven hoeveel procent een bepaald boek gebruikt. Een streepje – betekent minder dan 5%.
Onderin de tabel zijn twee extra rijen opgenomen:
'Aantal frequent gebruikte boeken (> 5%): gemiddeld 10;
'Totaal aantal gebruikte boeken': gemiddeld 39 per categorie.
In dit overzicht zijn 'eigen methoden' (40 maal opgegeven, vooral bij het LBO) buiten beschouwing gelaten. De nummers die links in de tabellen staan hebben slechts betekenis als computernummer.

Het boekengebruik bij het eerste leerjaar van het AVO, VWO beperkt zich vrijwel tot de vier leergangen: 'Moderne wiskunde' (54%), 'Getal en ruimte' (16% deel BI, 15% deel BII), 'Sigma' (16%) en 'Van A tot Z' (8%); bij het LBO is er een veel grotere diversiteit.
De volgende tabel geeft het aantal leerlingen en de percentages leerlingen weer die veel gebruikte leerboeken voor wiskunde en rekenen hanteren.
Het betreft in deze tabel de LBO-categorie, de AVO, VWO-categorie en de gehele leerlingenpopulatie van het brugjaar. Percentages onder de 5 zijn weer door een streepje aangegeven.

	Veel gebruikte boeken	Leerlingen					
		LBO		AVO+VWO		Totaal	
		A	%	A	%	A	%
34	Getal en ruimte BI	738	–	23856	16	24594	11
35	Getal en ruimte BII	753	–	22245	15	22998	10
36	Getal en wereid I	6947	10	748	–	7695	–
75	Moderne wiskunde I	2070	–	80414	54	82484	37
76	Moderne wiskunde II	20	–	60256	41	60276	27
78	Moderne wiskunde voor LBO I	10762	15	1214	–	11976	5
180	Passen en meten I	7826	11			7826	–
181	Passen en meten II	4155	6			4155	–
182	Passen en meten III	4094	6			4094	–
116	Rekenen voor LTS	6179	9			6179	–
123	Sigma, wisk. voor MAVO, HAVO en VWO			24136	16	24136	11
133	Van A tot Z 1A	5990	8	11984	8	17974	8
134	Van A tot Z 1B	2984	–	9277	6	12261	6
149	Wiskunde op moderne basis I	11471	16	1313	–	12784	6
62	8 Leerstofblokken wiskunde	3546	5	75	–	3621	–
	Totaal aantal leerlingen	72453		148673		221126	

Verschuivingen

Vinden er verschuivingen plaats in het gebruikte boekenassortiment?
Het antwoord op deze vraag is ja. Het is echter moeilijk om nauwkeurig aan te geven welke veranderingen zich voordoen.
Wanneer we het onderhavige CITO-onderzoek vergelijken met dat van 1974 (CITO-publicatie no. 36) kunnen wel een paar trends opgemerkt worden:

- Het aantal geregistreerde boeken is wat teruggelopen:
  186 in 74/75 en 175 in 76/77. Er zijn er veel verdwenen, terwijl er 24 boeken voor het eerst werden opgegeven.
- In het LEAO is er een grote afname voor 'Ik reken met ideeën' en een toename voor 'Moderne wiskunde voor LBO'.
- Bij het LHNO is er een aanzienlijke afname voor 'Getal en wereld' en 'Hoe en hoeveel' en een flinke toename van 'Passen en meten'.
  Deze laatste wint ook terrein bij andere LBO-takken.
- Het IHNO gebruikt 'Rekenen geen kunst' veel minder en 'Proef op de som' veel meer dan 2 jaar geleden (deze laatste heeft ook een marktaandeel bij het ITO verworven).
- Voor 'Van A tot Z' blijkt in het CITO-onderzoek geen onderscheid gemaakt te zijn tussen AVO, VWO-edities en de LBO-edities. Voor deze leergang lijkt er een kleine teruggang te zijn bij AVO, VWO terwijl er bij het LBO belangstelling is ontstaan voor de LHNO-editie en de LTO-editie.
- Wat betreft het AVO, VWO heeft 'Sigma' een groter marktaandeel gekregen en hebben er (mede daardoor) wat kleine verschuivingen plaatsgevonden bij 'Getal en ruimte', 'Moderne wiskunde' en 'Van A tot Z'.

Dit artikel kan gezien worden als een voortzetting van het artikel 'Schoolboekenmarkt voor wiskunde' van Dr. Joh. H. Wansink, in Euclides, 51e jaargang, no. 8, blz. 315/317 en 322/324.
In dat artikel besteedt hij aandacht aan de situatie omstreeks 1890, omstreeks 1961 en aan het RITP-CITO-onderzoek van 1973. In het onderzoek van 1973 werd gesignaleerd dat in 62% van de brugklassen AVO, VWO 'Moderne wiskunde' werd gebruikt, in 13% 'Getal en ruimte' en in 11% 'Van A tot Z' (blz. 316).

In januari 1977 is aan iedere school (ter attentie van de brugklascoördinator) de onderhavige *CITO-publicatie nr. 46* gestuurd.
Bij de afdeling Voorlichting van het CITO kunt u deze publicatie bestellen ad *f*10,– (Postbus 1034, Arnhem).

De regionale werkgroep Alkmaar.

De regionale werkgroep voor wiskunde-didaktiek te Alkmaar is gestart, zoals zoveel regionale werkgroepen, in het schooljaar 1974–'75. Het programma voor die bijeenkomsten werd landelijk voorbereid door de gespreksleiders van de groepen. Centrale themaas dat eerste jaar waren: leerstofordening en studie. Er werden stukken gelezen uit J. van Dormolen 'Didaktiek voor de wiskunde' en P. M. van Hiele 'Begrip en inzicht'. Het OSAEV-model werd te voorschijn getoverd uit de hoge hoed van een stel leerstofordeningspuzzels en vervolgens verwerkt in door de leden van de groep gemaakte lesplannen of teksten. Wiskundige onderwerpen die zich hiervoor leenden, waren: de invoering van de goniometrie, de introduktie van het worteltrekken, het oplossen van eerstegraads vergelijkingen, vektoren. Ook proefwerken werden besproken. De onderlinge sfeer was intussen zo goed geworden dat aan elkaar vragen konden worden gesteld als 'Maar vind jij dát dan belangrijk?', zonder dat dit tot vervelende reakties over en weer leidde. Vanuit zo'n sfeer ga je iedere keer weer met huiswerk naar je school terug. Iedereen was altijd vrij 'incidenten' uit z'n eigen lessen aan te dragen, die dan uitgebreid besproken werden, hetzij op de bijeenkomst, hetzij tijdens de broodmaaltijd die altijd een aangename onderbreking vormt.
Het 2e jaar moest de groep op eigen kracht verder. De landelijke bijeenkomsten van de groepsleiders bestonden niet meer. Achteraf bezien is er dat jaar niet zo erg sprake geweest van een duidelijke lijn in de aktiviteiten van de groep. Een leerstofordeningspuzzel, een werkstuk van een der groepsleden over de introductie van het begrip variabele, een leerstofanalyse met een leerstofboom, een video-opname van 2 brugklasmeisjes die de merkwaardige produkten verkrachtten en een bezoek aan het Johannes College in Den Helder, waar in 'open ruimtes' wordt gewerkt in plaats van in lokalen, vormden de onderwerpen waarmee we bezig waren.
Het ontbreken van de lijn maakte aan de ene kant dat de 'incidenten' als smaakmakers gingen fungeren, en aan de andere kant dat algemeen gevoeld werd dat er voor het volgende jaar een wat doordachter programma moest worden opgesteld.
Als thema voor dit jaar werd toen gekozen zoiets als 'ontwikkelingen naar het toekomstige wiskunde-onderwijs'. Konkreter gezegd:

- Voorbeelden van probleemgericht onderwijs werden ons voorgeschoteld door een van de groepsleden. Eén van die voorbeelden is te aardig om niet aan te halen. Teneinde het abstrakte funktiebegrip te voorzien van een konkrete en emotionele basis, zitten zijn leerlingen op een gegeven moment met een brandend kaarsje voor zich te werken aan de opdracht een grafiek te maken van de lengte van de kaars als funktie van de tijd. Het lineaire verband komt er natuurlijk prachtig uit (fig. 1). Maar dan begint het pas. Dan komen vragen aan de orde als:

– wat is er gebeurd met de kaars waarvan je de grafiek ziet in fig. 2?
– hoe heeft de kaars er uit gezien waarvan je de grafiek ziet in fig. 3? Ik vertel je erbij dat hij konstant gebrand heeft.
– en hoe zit 't met de kaars van fig. 4?

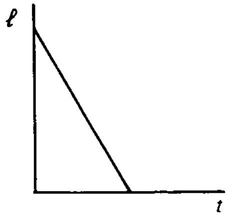


fig. 1

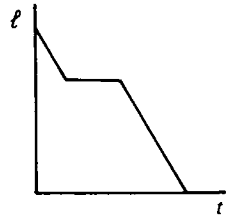


fig. 2.

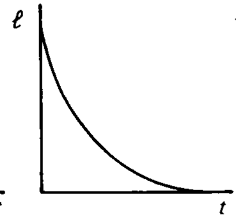


fig. 3

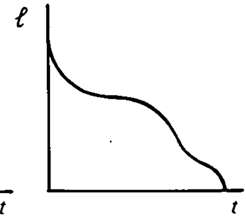


fig. 4

– heb je nu ook enig idee hoe de grafiek er uit zal zien van deze kaars, weer aangenomen dat we hem achterelkaar laten opbranden?

Een bron van inspiratie voor deze kollega was en is de LBO-brochure van het IOWO.

– Datzelfde IOWO en de daar levende gedachten over leerplanontwikkeling hebben we besproken. Daarbij is er o.a. gewerkt aan en gediskussieerd over een gedeelte van Belvia, één van de onderdelen van het leerplan voor 12–14 jarigen dat op het IOWO in de maak is. Het verschil tussen die (konteksttrijke) wiskunde en de wiskunde die brugklasleerlingen konfronteert met een nulletje met een streep erdoor waar al of niet akkolades om heen moeten, komt dan natuurlijk aan de orde, evenals het voor en tegen van het een en het ander.
– Een gast, afkomstig uit de wereld der P. A., heeft ons teruggevoerd naar de basisschool aan de hand van Wiskobas-werkmateriaal. Al denkend aan stuiterende balletjes vergaarden we informatie over datgene wat Wiskobas is, wil, gelooft, denkt, doet, voorstelt, probeert, propageert, enz.
– De werkgroepleden van voornoemde school uit Den Helder gaan nog een bijeenkomst vullen met hun interpretatie van tempodifferentiatie, zoals ze die in hun brugklassen aan het opzetten zijn.

Het laatste jaar heb ik wat uitvoeriger beschreven dan de 2 voorgaande jaren, omdat ik 't gevoel heb dat de bezigheden waarvoor wij dit jaar gekozen hebben, ontbraken in de lijst van mogelijkheden voor een regionale werkgroep zoals die in het nummer van december 1976 van Euclides stond afgedrukt. Niet iedereen zal deze bezigheden als even nuttig ervaren, omdat het met huiswerk terugkeren in je eigen klas niet altijd even duidelijk is. Maar ach, zo af en toe wat lange-termijn-werk kan toch geen kwaad?

Erepromotie

Zeer geachte Professor Freudenthal,*

De Universiteit van Amsterdam heeft besloten U een eredoctoraat in de wiskunde en natuurwetenschappen te verlenen op grond van Uw eminente verdiensten op het gebied van de zuivere wiskunde, waarin U baanbrekend, veelzijdig en inspirerend werk verrichtte, en op grond van Uw stimulerende interesse voor de verwevenheid van de wiskunde met onze cultuur.

'Jonge doctor',

Dat zijn de gebruikelijke woorden waarmede een toespraak bij een gewone promotie begint. En in Uw geval lijken ze ook nog wel van toepassing, want zoals U zelf schreef: de revolutie betekende liefst de nieuwste wiskunde studeren die er te koop was, wetenschap, net zo oud als jezelf of nog iets jonger (De Groene, 8-III-1947).

Zeer gewaardeerde toehoorders,

U kunt onbezorgd luisteren: ik zal U niet een uiteenzetting geven over het veelzijdige wiskundige werk van Freudenthal. Veel liever presenteer ik U enkele historische feiten. Er zijn verrassende paralellen te trekken. En wie het verleden probeert te begrijpen, kan wellicht het heden en de toekomst beter hanteren.
In 1930 komt Freudenthal naar Amsterdam, trots op zijn assistentschap bij Brouwer (De Groene, 17-XII-1966, pag. 6). In de tien jaren die daarop volgen doet Freudenthal zijn belangrijkste topologische werk. De goede sfeer, en de contacten, onder andere met Hurewicz droegen daartoe zeker bij.
In 1937 komen er twee plaatsen van gewoon hoogleraar in de wiskunde aan onze Universiteit vrij. De gemeenteraad is ingenomen met een voorstel over de opvolging. Want, in plaats van twee hoogleraren worden er een lector en een conservator benoemd, waardoor een belangrijke bezuiniging wordt verkregen. Uit het gemeenteblad blijkt dat de motivering voor deze benoemingen niet erg duidelijk naar voren komt uit de ingediende stukken (Gemeenteblad, afd. 2, 23-VI-1937, pp. 753–755). Desondanks wordt deze oplossing als alleszins behoorlijk bestempeld, omdat men ervan overtuigd is dat het onderwijs uitstekend gegeven zal worden, en dat men op deze wijze de kosten geringer kan doen zijn. En met deze zuinige pluim op de hoed moeten de lector Heyting en de conservator Freudenthal het voorlopig dan maar doen. 'Zoals gezegd, één ding moet

* Rede uitgesproken door Prof. Dr. Dr. F. Oort ter gelegenheid van het verlenen van een eredoctoraat aan Prof. Dr. H. Freudenthal, 10 januari 1977.

vooropstaan: het onderwijs mag niet slechter worden!' Bezuinigen ligt ook nu, 40 jaren later, nog steeds in onze hollandse aard, maar ik vraag me af of de kwaliteitsnormen voor het onderwijs daarbij niet vergeten worden.
Enkele jaren na 1937, namenlijk in 1940, wordt de joodse hoogleraar Meyer in Leiden ontslagen, waarna een fel protest volgt, onder anderen van zijn collega Cleveringa op 26 november. Een Amsterdams equivalent van de Leidse verontwaardiging blijft uit als joodse personeelsleden aan onze Universiteit hetzelfde lot treft.
Enkele jaren heeft Freudenthal dan een deel van het onderwijs in de wiskunde verzorgd, zonder dat het hem toegezegde lectoraat afkwam (Alg. Handelsblad, 24-VI-1937, pag. 5) Na de oorlog zijn er studenten die zich wél de krantenverslagen uit 1937 herinneren; zij dringen aan op een benoeming van Freudenthal. Ik citeer U uit een petitie van studenten, gedateerd 1 december 1945, waarvan een afschrift aan de burgemeester, en aan de faculteit werd gestuurd: 'Na de bevrijding hebben wij met vertrouwen het rechtsherstel van dr. Freudenthal tegemoetgezien, daar wij er niet aan twijfelden, dat U dit, evenals andere aan U toevertrouwde taken, met kracht ter hand zoudt nemen.' Jammer genoeg werd er toen te weinig naar studenten geluisterd. De gevraagde benoeming blijft uit. De grote wetenschappelijke kwaliteiten, het gegeven onderwijs, het werk verricht als redactie-secretaris van het tijdschrift Compositio Mathematica, en nog andere verdiensten van Freudenthal werden hier in Amsterdam niet gehonoreerd. In 1946 volgt een benoeming van Freudenthal tot hoogleraar in Utrecht.

Waarde Freudenthal,

Studenten hebben Uw vertrek uit Amsterdam betreurd. Zelf zal het U destijds ook niet meegevallen zijn. Enkele maanden geleden nog schreef U daarover: 'ik was veel liever in Amsterdam gebleven, waar ik al mijn studenten had. Het heeft mij jaren gekost om daar overheen te komen maar ik heb nu hier [in Utrecht] mijn eigen existentie geschapen.' (Vrij Nederland, 31-VII-1976, pag. 5). Wat U wel meenam naar Utrecht was een charmante en U toegewijde vondst uit Uw Amsterdamse tijd; na meer dan 40 jaren kan zij nu met U delen in de vreugde en de eer van deze dag. In Uw Utrechtse tijd heeft U onder meer gewerkt aan exceptionele Liegroepen. Van Uw verder veelzijdig werk moet ik het meeste ongenoemd laten. Als weinigen heeft U getracht ook voor niet-wiskundigen de plaats van de wiskunde in het geheel van onze cultuur te belichten. In het besef van de verwevenheid van de wiskunde met onze cultuur past Uw actieve belangstelling voor het wiskunde-onderwijs op ieder niveau. Uw stimulerende invloed en Uw activiteiten op internationaal niveau met betrekking tot het wiskunde-onderwijs, hebben er mede toe bijgedragen dat er een kentering optreedt in de opvattingen ten aanzien van doel en functie van het wiskunde-onderwijs.
Toen een eredoctoraat aan onze Universiteit ter sprake kwam, hadden zowel mijn collega Professor Van Est als ik de overtuiging dat dit U zeker toe zou komen. Van Uw wetenschappelijke grootheid getuigt Uw werk. Maar, 'cultuur

herkent men niet aan de inhoud, maar aan de stijl'. Het feit dat U uitgever was van een deel van het verzameld werk van Brouwer, en nog veel meer dingen getuigen daarvan. Een stijl, een ereoctor aan onze Universiteit waardig. Velen met mij verheugen zich in het feit dat Uw naam als eredoctor vandaag geschreven wordt op deze witte bladzijde in de geschiedenis van de Universiteit van Amsterdam.

Ik heb gezegd.

Beste Promotor,*

Uit mijn eigen ervaring weet ik hoe sterk in beraadslagingen over te verlenen eredoctoraten de band aangehaald, die de te erende verbindt met de instelling die de eer toekent. Terecht hebt u gewag gemaakt van mijn banden in het verleden met de Universiteit van Amsterdam. Immers was het niet Amsterdam dat mijn tweede Alma Mater werd? – met L. E. J. Brouwer als genius loci, met Hurewicz als proximus, met de rijk voorziene en gemakkelijk toegankelijke UB, met de maandelijkse ontmoetingen van Wiskundig Genootschap, met het tijdschrift Compositio Mathematica als spinneweb, dat de hele wereld overspande, met een schare studenten, die mijn leerlingen en medewerkers werden, met – niet te vergeten – een zee van vrije tijd – vijftig verhandelingen uit mijn Amsterdamse jaren zijn er getuige van.
Maar laat ik het niet bij de wiskunde laten. Het considerans van mijn eredoctoraat spreekt van mij mede als van een plaatsbepaler van de wiskunde in onze cultuur. Onder de aegis van Minerva Amstelodamensis heb ik me tot wiskundige kunnen ontwikkelen, tot mens van onze tijd – ook nog van deze – en tot dankbaar erfgenaam en trouw beheerder van wat de beschaving biedt aan wie er open voor staat. Bij mijn tweede Alma Mater hoort mijn tweede moedertaal, die ik als kostbaar schat koester en beheer, beter zelfs dan mijn eerste, in woord en geschrift, al erger ik mij elke keer aan mijn eigen stem als deze van de band op me afkomt. Met die tweede moedertaal heb ik een tweede vaderland verworven, mèt zijn verleden, waarin ik diep ben gedoken, èn zijn toekomst waarin ik diep geloof; mèt al waarin een klein land groot is geweest en groot zal blijven. Mijn vrouw is in Amsterdam geboren en getogen en heeft mij in Amsterdam onze vier kinderen geschonken. Als burger van Amsterdam ben ik wereldburger geworden. In Amsterdam ben ik tot culturele en geestelijke volwassenheid gegroeid. Mijn vrouw kan getuigen, dat geen aankondiging van een academische eer, die mij te beurt viel, mij zo ontroerd heeft, als die omtrent het doctoraat dat ik zojuist heb ontvangen. Na 30 jaren ben ik terug op 't toneel van mijn jeugd. In mijn Utrechtse oratie heb ik van mijn dankbaarheid jegens Amsterdam getuigd, ook van het bezwaard gemoed waarmee ik afscheid nam, in de steek liet wat ik had opgebouwd, om elders uit het niets opnieuw te beginnen. Het is mij gelukt. Met mijn onder*wijs* veranderde mijn onder*zoek* van richting. Met topologie was ik begonnen, maar onder de invloed van het onderwijs, dat ik

* Antwoord door Prof. Dr. H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat.

gaf, was ik in Amsterdam naar de analyse overgegaan. Mijn Utrechtse taak van meetkunde-onder*wijs* deed me in het onder*zoek* overschakelen naar meetkunde, algebra, Liegroepen, met veel zijsprongen naar statistiek, taalanalyse, logica, filosofie, geschiedenis en heel wat journalistiek over alles en nog wat. Het was het zaad, door Amsterdam gevormd, dat zich in Utrecht als plant ontvouwde. En dan weer – niet te vergeten – een zee van vrije tijd. Als ik het goed bekijk, dan is mijn hele leven vrijetijdsbesteding geweest. Ik beken het in nederigheid, want weinigen zijn zo bevoorrecht.
Sinds ruim vijf jaren besteed ik deze vrije tijd vrijwel geheel aan de zaak van het onderwijs, of om het met de titel van een van mijn boeken te zeggen, aan 'Wiskunde als pedagogische taak'. Niets heeft in het onderwijs in de laatste decennia zulk een vlucht genomen als de wiskunde, en dit in velerlei opzicht:

Het aantal hunner die wiskunde leren is snel groeiende,
overal ter wereld is men zoekende naar een nieuw wiskundeonderwijs, dat recht doet wedervaren aan wat wiskunde kan betekenen voor individu en maatschappij,
de steeds diepere pedagogische doordenking van ons vak brengt ideeën voort, die uitstralen over het onderwijs als geheel.

Mijn bemoeienis met de zaak van het onderwijs is ook al in Amsterdam begonnen – van Hiele heeft er naar aanleiding van mijn afscheid van gerept, en in mijn afscheidsrede heb ik mijn ontwikkeling als onderwijskundige geschetst – heel een leven als onderwijskundige achter het bureau, die zich ineens – vijf jaar geleden – opgenomen ziet in een team van toegewijde jongeren, om mèt hen onderwijs te gaan scheppen, vóór het veld, in het veld, mèt het veld – vijf jaren, waarvan de naam is : IOWO – Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs.
Die tocht is pas begonnen – laat dit vooral duidelijk zijn. Ik zei eens: De grootste deugd van de opvoeder is geduld. We verbeelden ons niet, wat voor eeuwen is gegroeid, van vandaag op morgen te kunnen veranderen. In naburige landen dacht men het met ministeriële besluiten en verordeningen te kunnen doen en het liep mis. In ons land zijn wij – de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde – het met heroriëntering van onderwijzenden begonnen. Vijftien jaar geleden was dit iets ongehoords en uniek in de wereld. Inmiddels hebben we iets geleerd en we belijden het metterdaad: dat het veld essentiëler bij ontwikkelingen in het onderwijs kan en moet zijn betrokken. Vernieuwing van onderwijs is meer dan vernieuwing van stof en didaktiek – het is een nieuwe attitude.
Wanneer een kind de baisschool verlaat, heeft het tussen de tien en twintig duizend rekensommen verwerkt – voor hoeveel percent het erin is geslaagd, bepaalt zijn voortgezette opleiding en zijn levensweg, langs een soort lager beroepsonderwijs of een veelal nog gehomogeniseerde brugklas van AVO. Maar vooral bepaalt dit feit van het leren rekenen (en het hierbij al dan niet behaalde sukses) de wiskundige (of veeleer antiwiskundige) attitude van de leerling èn – wat nog erger is – van de onderwijzer die dit onderwijs moet geven – een kijk op de mens als ware hij een doelmatig te programmeren computer, terwijl hij nooit de een computer typerende prestaties zou kunnen benaderen.
Het onderwijs dat wij ontwikkelen is door een ander mensbeeld bepaald en

tevens door een andere kijk op de wiskunde – niet als leerstof, maar als menselijke aktiviteit. Ik heb het eerder driewerf gekenmerkt als

aan de realiteit gelieerd,
nabij de kinderen,
maatschappelijk relevant,

en ik vat deze kenmerken thans samen in één dat alle overkoepelt:

menswaardig,

de mens als lerende, als onderwijzende, als begeleider van onderwijs en als schepper van onderwijs waardig. Wiskunde is voor ons een menselijke aktiviteit, zei ik,

een aktiviteit èn menselijk.

Sinds enkele minuten hebt u mij het woordje 'wij' in de plaats van 'ik' horen bezigen. Het was geen pluralis maiestatis, maar het 'wij' van een team: IOWO plus onderwijzenden, leerlingen, opleiders en allen in het veld die met ons samenwerken – collectief werk waar elk tegelijk leerling en leermeester is.
Onderwijs scheppen, zoals wij het zien en diep hebben beleefd, is een groots leerproces. Het komt me soms voor, of ik, de oude man, in deze laatste vijf jaren meer heb geleerd dan ooit te voren in mijn leven. *Ik* heb immers al dat mogen leren wat *wij* hebben geleerd. Wij – dat sluit ook in de kinderen die ik gadesloeg en waarmee ik werkte. Het was een avontuur zonder weerga, een geslaagd avontuur.
Onder alle geschenken, die ik van Amsterdam ontving, is dat van heden het meest vleiende. De eer werd mij betoond, zoals u uiteenzette, mede om mijn verdiensten voor het onderwijs. Wat dit aangaat voel ik me een beetje als een verwende prima donna die een open doek krijgt. Het betaamt mij, deze eer met een grazieuze geste door te geven aan mijn medespelers.
Medespelers waaronder ook de kinderen, die voor mij als leermeesters waren.
Een Duits auteur schreef een boek 'Sternstunden der Menschheit'
– grote uren van grote mensen. Maar niets gaat boven een kind, dat met zijn eigen ogen naar de sterren kijkt.

Statistische dag/Mathematisch congres

Op woensdag 6 en donderdag 7 april 1977 houden de Vereniging voor Statistiek en het Wiskundig Genootschap gezamenlijk hun jaarlijkse wetenschappelijke bijeenkomst, in de Erasmus Universiteit te Rotterdam.
De bijeenkomst zal worden geopend door de Rector Magnificus van de Erasmus Universiteit, Prof. Dr. B. Leijnse. Op de eerste dag spreekt Prof. Dr. W. R. van Zwet, Rijksuniversiteit Leiden, over 'Wiskunde, Statistiek en Zwarte Kunst'.
In de middag zijn er o.m. acht parallel-series, elk van vier lezingen. In deze series komen onderwerpen aan de orde, zoals Nationaal Kiezersonderzoek (met beschouwingen van drie experts), Statistiek en Computer, Verkeersregeltechniek, Parapsychologie, Von Neumann-algebra's, Temperatuurregulatie bij de Mens, Operationele Research, Modellen in de Economie, om slechts enkele te noemen. Op de tweede dag ligt de nadruk meer op de wiskundige onderwerpen, zoals Waarschijnlijkheidsrekening en Coxeter-Dynkin diagrammen.
Voorts is er op beide dagen een tentoonstelling van o.a. boeken en diverse rekenapparatuur.
Nadere informatie is te verkrijgen bij het secretariaat van de Vereniging voor Statistiek, Weena 700 te Rotterdam, eventueel telefonisch via 010-116181 (tst. 2126)

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

C. *Geen commentaar*

1 It is chiefly from mathematics we realize the fact that there actually is a road to truth by means of reasoning.
John Stuart Mill, Inaugural Address at St. Andrews, February 1, 1867. *The six great humanistic essays of John Stuart Mill.* (New York, 1963), p. 334.

2 At last I said: 'Lincoln, you can never make a lawyer if you do not understand what *demonstrate* means' and I left my situation at Springfield, went home to my father's house and stayed there till I could give any proposition in the six books of Euclid at sight. I then found out what demonstrate means and went back to my law studies.
Geciteerd door D. E. Smith, *The poetry of mathematics and other essays.* (New York, 1934), p. 22.

3 Jamais il ne fut peut-être un esprit plus sage, plus méthodique, un logicien plus exact que M. Locke; cependant il n'était pas grand mathématicien. Il n'avait jamais pu se soumettre à la fatigue des calculs, ni à la sécheresse des vérités mathématiques, qui ne présente d'abord rien de sensible à l'esprit; et personne n'a mieux prouvé que lui qu'on pouvait avoir l'esprit géomètre sans le secours de la géométrie.
Voltaire, *Lettres philosophiques.* Ed. Garnier-Flammarion, (Paris, 1964), p. 82.

4 Een jeugdig docent uit Tahiti
Gaf een heldere les over $i\pi$;
Hij had nog willen bepalen
Een drietal Lebesgue-integralen,
Maar dat tijdrovend denkbeeld verliet ie.

Anon

5 Das höchste Leben ist Mathematik.
Es kann Mathematiker der ersten Grösse geben, die nicht rechnen können.
Das Leben der Götter ist Mathematik.

Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein.
Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen.
Novalis (1772–1801). *Werke-Briefe-Dokumente.* 2. Band, (Heidelberg, 1957), S. 126.

6 Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht.
G. Chr. Lichtenberg (1743–1799). *Über Wissenschaft und Bildung.* Gesammelte Werke I, 2. Auflage (Darmstadt, 1953), S. 266.

7 Een gelijkbeenige driehoek is de voordeeligste omtrek om het oog te bedriegen, voornamentlijk op plaetzen van eenen kleinen grond.
Pieter de la Court van der Voort, *Bijzondere aanmerkingen over het aanleggen van prachtige en gemeene landhuizen, lusthoven, plantagiën en aanklevende cieraden.* (Leiden, 1737). Geciteerd in: *Historische Landhuizen* (Deventer, 1975).

8 Mathematicus non est collega.
Negentiende-eeuwse zegswijze.

9 Die Ideen Clifford's aufzuklären und anzuwenden, haben allerdings einige englische Mathematiker versucht. Es scheint aber diesen Autoren, soweit der Verfasser ihre Arbeiten kennt, an klar gefassten Problemen und überhaupt an den nöthigen Kenntnissen gefehlt zu haben. Sie und noch Andere dürften die beklagenswerthen Opfer eines früher und zum Theil anscheinend auch jetzt noch in England üblichen Erziehungssystems geworden sein.
E. Study, *Geometrie der Dynamen.* (Leipzig, 1903), S. 596.

10 Numero deus impare gaudet.
(De godheid schept behagen in een oneven getal).
Vergilius, *Bucolica*, Ecloga VIII, regel 75.

11 *Falstaff*: This is the third time; I hope good luck lies in odd numbers. They say there is divinity in odd numbers, either in nativity, chance or death.
Shakespeare, *The merry wives of Windsor*, Act V, scene 1.

12 I have read of one by shipwreck thrown
With fellow sufferers whom the waves had spar'd
Upon a region uninhabited
An island of the deep, who having brought
To land a single volume and no more,
A treatise of Geometry, was used
To part from company and take this book
To spots remote and corners of the isle
By the seaside, and draw his diagrams
With a long stick upon the sand, and thus

Did oft beguile his sorrow.
William Wordsworth, *The Prelude* (version of 1805); (Oxford University Press, London-New York-Toronto, 1953), p. 89.

13 Op een bok.

In Siddeburen was een bok,
die machtsverhief en worteltrok.
Die bok heeft onlangs onverschrokken
de wortel uit zich zelf getrokken,
waarna hij zonder ongerief
zich weer in het kwadraat verhief.
Maar 't feit waardoor hij voort zal leven
is, dat hij achteraf nog even
de massa die hem huldigde
met vijf vermenigvuldigde.

De Dierkundige Dichtoefeningen van Trijntje Fop. Uit Pennewips Nalatenschap vergaard door Kees Stip. Met tekeningen van Bertram uitgegeven door L. J. C. Boucher. z.j. [1955].

14 So viel darf wohl als feststehend betrachtet werden, dasz in den weitesten Kreisen die Mathematik sich einer glänzenden Unpopularität erfreut.
A. Pringsheim, *Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.* Jahresb. D. Math. Ver. *13* (1904), S. 357.
De onbemindheid der wiskunde.
J. A. Barrau, Rectoraatsrede aan de Rijksuniversiteit te Groningen op 20 September 1926.

15 Thomas Carlyle (1795–1881), de historicus, had genoeg belangstelling voor wiskunde om in 1821 op verzoek van Brewster de *Elémens de géométrie* van Legendre in het engels te vertalen: 'a well-paid and easy job'; 'he began the day with the translation till the breakfast was ready'. In 1824 bracht Carlyle te Parijs een bezoek aan Legendre, die hem mee nam naar een vergadering van het *Institut* waar onder meer Laplace en Dupin aanwezig waren.
D. A. Wilson, *Carlyle till marriage* (1795–1826). (London, 1923), p. 220, 233, 350.
Dr. (now Sir David) Brewster's English edition of Legendre's Geometry (Edinburgh, 1824, 8vo.) translated by some one who is not named. I picked up a notion that the translator was the late Mr. Galbraith. But it turns out that it was by a very different person, and one destined to shine in quite another walk; it was a young man named Thomas Carlyle. He prefixed, from his own pen, a thoughtful and ingenious essay on Proportion, quite enough to show that he would have been a distinguished teacher and thinker on first principles. But he left the field immediately.
A. de Morgan (1806–1871). *A budget of paradoxes.* Second edition. Vol. II (Chicago-London, 1915), p. 372–73.

16 Wat mij terugziende op die jaren zelf verbaast, is de bijna algeheele afwezigheid van wiskundige en wijsgeerige belangstelling, maar ook van zin voor de natuurwetenschappen. [...]. Deze tekorten heb ik nooit goedgemaakt en slechts in geringe mate als een gemis gevoeld.
J. Huizinga, *Mijn weg tot de historie*. Verzamelde Werken, 1 (Haarlem, 1948), p. 17–18.

17 Er is in de mathesis een sterke neiging tot abstractie, tot een zich terugtrekken op eenvoudige, zo algemeen mogelijke beginselen, die concretisering in velerlei richting nog openlaat. Dat is wiskunde van boven de boomgrens, waar de lucht ijl en het uitzicht ver is; de omgeving levert niets op, maar men vindt er het kristalzuivere ijs der gletschervelden, waaruit de rivieren ontstaan die van nut zijn voor het kaas- en broodvolk in de laagvlakte.
Anon.

18 The most vitally characteristic fact about mathematics is, in my opinion, its quite peculiar relationship to the natural sciences, or, more generally, to any science which interprets experience on a higher than purely descriptive level.
John von Neumann, *The mathematician*. The World of Mathematics, by James R. Newman. Vol. IV (New York, 1956), p. 2053.

19 Dann gerät Goethe in die Welt der Winkel und Dreiecke. Man macht ihn darauf aufmerksam, dasz Mathematik zu optischen Forschungen doch wohl unentbehrlich sei. Er dekretiert sogleich: nein. Die Mathematik hat in der Physik nichts zu suchen.
R. Friedenthal, *Goethe, sein Leben und seine Zeit* (München, 1963), S. 369.

20 Bepaal het punt waarvoor de som der kwadraten van de afstanden tot de hoekpunten van een gegeven viervlak minimaal is. Bepaal het punt waarvoor de som der afstanden tot de hoekpunten van een gegeven viervlak minimaal is.

21 Ich kann mich nicht entbrechen, nochmals die, schon an einem andern Orte gegebene Figur herzusetzen (Fig. 6), deren bloszer Anblick, ohne alles Gerede, von der Wahrheit des Pythagorischen Lehrsatzes zwanzig Mal mehr Überzeugung gibt, als der Euklidische Mausefallenbeweis.
Arthur Schopenhauer, *Ueber die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde* (1847), 6. Kapitel, Geometrie; § 39. Sämmtliche Werke (Inselverlag, Leipzig), III. Band, S. 159.

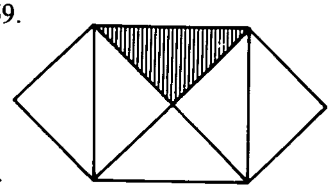


Fig. 6.

22 Eukleides heeft te zijner tijd bewezen, dat alle hoeken, gelegen tusschen twee lijnen, die in eenen cirkel van de eindpunten der middellijn naar eenzelfde punt aan den omtrek worden getrokken, niet anders dan recht kunnen blijken. Wie op die stelling komt of wordt gebracht, behoeft niet eens het logisch bewijs om hare waarheid in te zien; door bloote inductie of herhaling van feitelijke constructie reeds kan ze hem door aanschouwing tot overtuiging worden.
G. J. P. J. Bolland, *Aanschouwing en verstand. Gedachten over continua en discreta in wiskunde en bewegingsleer.* (Leiden, 1897), p. 30.

23 De Vriesche *Euklides* hangt alleen
van cijfferletters hecht aan een,
Bewaart toch *Sybrant* met u allen.
Bewaart dien Rekenschat getrou:
Viel *Kardinaal* van 't plat, hij zou
Aan cijfferletters stucken vallen.
Vondel, Lijfwacht voor Meester Sybrant Hanssen Kardinael, den Vrieschen Euklides. Aen zijn scholieren. *Verscheide Gedichten* (1644), p. 342.

24 *Raas*. 'k Loof dat gij nooit geen spheer of globus hebt gezien. Weet gij wat sinus is of tangens? *Uri*. Ja. *Raas*. Misschien. Den klootsendriehoek, vriend, weet jij die te berekenen?
Pieter Langendijk, *De wiskunstenaars of 't gevlugte juffertje* (1715), Tiende Tooneel, regel 279–281.

25 Een volmaakte noemer uit Nieuwegein
Kocht een bloem bij een stalletje
En schonk dat niemendalletje
Aan een klein volmaakt getalletje,
Vragend: wil jij bij gevalletje
Vandaag mijn teller zijn?
Het werd een breuk van *modern design*
(De streep had een helling van tachtig graden).
Noemen wij haar kortweg *b*,
Dan is *b* zowat nul komma nul één twee.
Kunt gij nu de naam van de noemer raden?

Anon.

26 Il convient de remarquer ici que, sous le rapport de l'éducation intellectuelle, l'étude de la Géométrie descriptive présente une importante propriété philosophique, tout-à fait indépendante de sa haute utilité industrielle.
Auguste Comte, *Cours de philosophiè positive*, Tome premier. (Paris, 1830), p. 415.

27 Hermite à Stieltjes (8 mai, 1890). Les compositions de baccalauréat à

noter, les examens à la Faculté, les leçons à préparer m'ont fait perdre le bénéfice des vacances de Pâques. Je ne puis vous dire à quels efforts je suis condamné pour comprendre quelques choses aux épures de la Géométrie descriptive, que je déteste.
Stieltjes à Hermite (10 mai, 1890). Je partage votre aversion pour la Géométriè descriptive. [...]. Il y a une quinzaine d'années, j'avais une curiosité plus vive pour toutes sortes de choses et à cette époque la Géométriè descriptive avait quelques charmes pour moi, mais actuellement cela ne me dit rien.
Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Tome II (Paris, 1905), p. 41, 45.

28 Histories make men wise; poets witty; the mathematics subtile; natural philosophy deep; moral grave; logic and rhetoric able to contend.
Francis Bacon, *The Essayes* (1597). Ed. Everyman's Library. Essay L.: Of Studies. (London, 1906), p. 151.

29 Dieses Buch ist nicht für Anfänger geschrieben, denn es setzt keine Vorkenntnisse voraus.
H. Lenz, *Grundlagen der Elementarmathematik*. (Berlin, 1961), S. 10.

30 It is undubitable that a 50-year-old mathematician knows the mathematics he learned at 20 or 30, but has only notions, often rather vague, of the mathematics of his epoch, i.e., the period of time when he is 50. It is a fact we have to accept as it is, we cannot do anything about it.
Jean A. Dieudonné, *The work of Nicholas Bourbaki*, Amer. Mathem. Monthly 77 (1970), p. 135.

31 Le calcul différentiel est la plus grande découverte mathématique que les hommes aient faite, et si l'on considère l'importance et la variété de ses applications, c'est la plus fidèle conception de l'esprit humain.
Francois Arago, *Oeuvres complètes*, T. II (Paris, Leipzig, 1854), p. 613.

32 Actually, women today have an exciting and impressive legacy in the development of mathematics. Despite the long tradition of elitism that has surrounded this discipline, a galaxy of brilliant women have made very substantial creative contributions to its development. Yet when many of these women are mentioned at all in history texts, it is for their more secular activities, particularly where these have been interesting adjuncts to the life of a famous man.
Lynn M. Osen, *Women in Mathematics*. (Cambridge, London, 1974), p. 2.

33 Laat ons bedenken, hoe het wiskunde-onderwijs den leerling in kennis brengt met een vermogen van den menselijken geest, waarvan we goed zullen doen, de wonderlijke eigenschappen steeds te blijven beseffen, met de scheppende kracht van het mathematische denken.
Men kan dat besef niet levendiger voelen, dan wanneer men luistert naar

een uiteenzetting van een goed mathematicus. De man komt voor U staan; hij heeft een bord en een stuk krijt; hij heeft niets gezien of ervaren, waarvan hij verslag komt doen; hij heeft geen apparaten noodig om verschijnselen in het leven te roepen, die tot vragen aanleiding geven, maar hij bouwt een onstoffelijke wereld voor u op uit wat schijnbaar niets is. Hij behoeft niet eens te eischen, dat ge al wat weet; alles kan hij terugbrengen tot beweringen, waaraan het een kunst zou zijn, te twijfelen of tot afspraken, die ieder gewillig met hem maakt. Zo stapelt hij, kalm en helder, vanaf de fundamenten, steen voor steen op en alles, wat hij doet, ligt open voor uw critisch oog.

E. J. Dijksterhuis, *Over de waarde van grondig wiskunde-onderwijs voor alle leerlingen van scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs.* Handelingen XXe Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres, gehouden te Groningen op 14, 15 en 16 April 1925. (Haarlem, 1925), p. 126.

Envoi. 't Is bij hún licht dat Winkler Prins verbleekt:
Al wat in kloeke boeken steekt
Is in hun edel brein paraat.
Als zij 't niet weten: zij weten waar het staat.
Zij toeven 't liefst in hun librijen
Te delven een teloorgegaan citaat,
Om daar hun vriend mee te verblijen
Die machteloos voor zijn intenties staat.
Daarom diens dank aan het triumviraat:
Albertus magnus, Janus V., Philippus de soldaat.

Bij de 100ste Verscheidenheid

De redactie van Euclides is Prof. Bottema zeer erkentelijk voor het vele werk dat hij jaren lang verricht heeft om de liefde voor de meetkunde bij de lezers wakker te houden.
Ze heeft het voornemen uit de honderd Verscheidenheden een vijftigtal te selecteren en deze in boekvorm de lezers van Euclides en eventuele andere belangstellenden ter beschikking te stellen. Wolters-Noordhoff en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren willen het hunne ertoe bijdragen de prijs van het boek laag te houden. Uiteraard kan dit plan alleen doorgang vinden bij voldoende belangstelling.
In dit nummer is een kaart gelegd waarop u bij voorintekening het boek kunt bestellen. Wilt u deze kaart ingevuld inzenden binnen één maand na verschijning van dit nummer? Door aan dit verzoek gevolg te geven draagt u ertoe bij dat de uitgave mogelijk wordt.

De redactie

Mathematische Logica

onderwerp van de Vakantiecursus 1977 van het Mathematisch Centrum

Toen honderd jaar geleden de verzamelingenleer ontwikkeld werd, vooral door CANTOR, stuitte men op een aantal paradoxen, innerlijke tegenspraken binnen de wiskunde. Mede in reactie hierop begonnen velen zich intensief bezig te houden met de grondslagen van de wiskunde, en met de verhouding tussen wiskunde en logica.

Om enkele namen te noemen: KRONECKER, POINCARÉ en later BROUWER oefenden kritiek uit op het gebruik van 'oneindig' in de wiskunde; HILBERT stelde een programma op om de wiskunde te formaliseren, inclusief de daarin gebruikte logica, terwijl bijvoorbeeld RUSSELL de klemtoon juist op de *logica* legde, en trachtte wiskunde tot (streng geformaliseerde!) logica te herleiden.

De mathematische logica is overigens al ouder dan deze honderd jaar. In 1847 schreef Boole zijn 'The Mathematical Analysis of Logic', en in 1854 'An investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities'. En wie dat wil kan nog verder teruggaan, desgewenst zelfs tot de oude Grieken. Maar tot grote bloei kwam de Mathematische Logica toch voornamelijk in deze eeuw, en dan wel met name in de laatste vijftig jaar.

Wiskundigen zijn er altijd prat op gegaan dat zij zo logisch te werk gingen. Het zal dan ook niemand verbazen dat de Mathematische Logica dienen kan om het inzicht in wiskundige redeneringen te verdiepen. Inmiddels kan die logica echter veel meer: steeds meer resultaten – wiskundige resultaten! – zijn gevonden met methoden uit de Mathematische Logica; resultaten die op dit moment niet, althans niet zonder heel veel extra werk en moeite, langs 'gewone' wiskundige weg kunnen worden verkregen. Aan de andere kant is het zo, dat de Mathematische Logica steeds meer een onderdeel van de wiskunde is geworden, waarin wiskundige methoden met vrucht worden toegepast (met name methoden uit verzamelingenleer en algebra).

In de komende vakantiecursus van het Mathematisch Centrum zal de wisselwerking tussen de Mathematische Logica en die zo logische mathesis worden toegelicht. Eerst wordt uit de doeken gedaan wat een 'formeel systeem' (of 'geformaliseerde wiskundige theorie') is, en wat een 'formele afleiding' (of 'formeel bewijs'). Daarna wordt de hoogst belangrijke vraag behandeld wàt nu een 'effectieve procedure' is, een 'algoritme'; het antwoord op deze vraag voert tot een op zichzelf interessante klasse van getaltheoretische functies, de recursieve of berekenbare functies. Tenslotte worden formele systemen en algoritmen gecombineerd om toe te werken naar de beroemde *onvolledigheidsstelling* van GÖDEL, uit 1931.

Deze stelling zegt dat het niet mogelijk is een wiskundige theorie (die niet àl te triviaal is) zó te formaliseren dat alle ware uitspraken uit die theorie ook formeel bewijsbaar zijn: de mathematisch-logische formalisering is altijd onvolledig. Sommigen hebben gesteld dat hiermee is aangetoond dat de mens altijd op sommige punten meer kan dan de meest geperfectioneerde denkmachine. Anderen hebben deze conclusie aangevochten; maar in ieder geval is GÖDEL's stelling van bijzonder grote invloed geweest op de wijsbegeerte van de wiskunde en de ontwikkeling van de Mathematische Logica. En op de ontwikkeling van de wiskunde: inmiddels zijn er heel wat problemen bekend waarvan we – gebruik makend van de gedachten van GÖDEL – kunnen aantonen dat ze niet effectief opgelost kunnen worden!

P. C. Baayen.

X^X

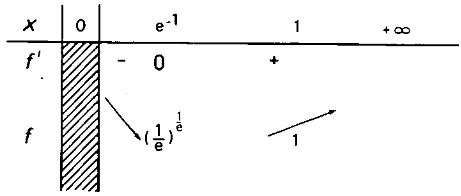
FRANK LAFORCE

Wilrijk (België)

De klas (1WB) was bezig met oefeningen op exponentiële vergelijkingen. Bij de oefening (Wis en Kundig 6A1) $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$ kwamen enkele probleempjes opdagen.

$$(x^x)^2 - 3(x^x) - 4 = 0 \qquad x^x = -1 \ (1)$$
$$x^x = \ \ 4 \ (2)$$

(1) werd afgewezen, alhoewel $(-1)^{-1} = 1/-1 = -1$, omdat bij de definitie van de exponentiële functie: $x \to a^x$, $a \in \mathrm{R}^+$.
(2) gaf de oplossing $x = 2$.
Op mijn vraag of dat de enige oplossing was, vonden alle leerlingen dat vanzelfsprekend. Dit is hier inderdaad zo, maar waarom?
De volgende vraag: Los op: $x^x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Een van hen ontdekte dat dit kon geschreven worden als: $x^x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$.
De voor de hand liggende oplossing $x = \frac{1}{2}$ werd unaniem aanvaard.
Een pientere knaap vroeg of $x = \frac{1}{4}$ ook voldeed.
Inderdaad: $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$. Dus 2 oplossingen. Was dat een speciaal geval? Hoe kunnen we dat uitzoeken?
Een interessante didactisch-wiskundige situatie. De leerlingen hadden de nodige voorkennis en de middelen om het probleem te onderzoeken.
De klas besloot de functie: $\mathrm{R}^+ \xrightarrow{f} \mathrm{R}^+ : x \to x^x$ te bestuderen.
De afgeleide functie $f' : x \to x^x(\ln x + 1)$ was vlug gevonden.
Vermits geldt: $\forall x \in \mathrm{R}^+ : x^x > 0$, en $\ln x + 1 = 0$ geeft $x = e^{-1}$, krijgen we het schema:



Minimum $(1/e)^{1/e} = 0{,}692201$, volgens het electronisch rekenmachientje van een leerling.
Het feit dat 0 een adherentiepunt is van dom f, roept de vraag op naar de rechterlimiet: $\lim\limits_{x>\to 0} x^x = ?$

De electronische zakcalculator gaf: $(0{,}01)^{0{,}01} = 0{,}954996$
$(0{,}001)^{0{,}001} = 0{,}993116$
$(10^{-6})^{10^{-6}} = 0{,}999998$

De limietwaarde 1 is dus wel te verwachten.

$$\ln(\lim_{0^+} x^x) = \lim_{0^+} \ln x^x = \lim_{0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{0^+} (-x) = 0$$

met de regel van De l'Hôpital.

$$\exp \circ \ln(\lim_{0^+} x^x) = \exp 0 = 1 = \lim_{0^+} x^x.$$

De leerlingen waren erg fier op deze limiet en meer dan ooit overtuigd van het nut van de regel van De l'Hôpital.
Dus Sup $f(]0, e^{-1}]) = 1$ en Min $f(]0, +\infty[) = (e^{-1})^{e^{-1}}$ en $f(1) = 1$.
Dus $f^{-1}([(e^{-1})^{e^{-1}}, 1]) =]0, 1]$.
Waaruit volgt: $x^x = k$ en $k \geqslant 1$ $x \geqslant 1$, en wegens het monotoon stijgend zijn van f in $[1, +\infty[$ heeft de vergelijking maar één oplossing.
Is $k < (e^{-1})^{e^{-1}}$ dan is de oplossingenverzameling leeg. B.v. bij $k = 0{,}5$.
Is $k = (e^{-1})^{e^{-1}}$ dan is de enige oplossing $x = e^{-1}$.
Is $k \in](e^{-1})^{e^{-1}}, 1[$ dan zijn er 2 oplossingen: $0 < x_1 < e^{-1}$ en $e^{-1} < x_2 < 1$.
Een speciale situatie: $x^x = a^a$, $a \in \mathbf{R}^+$.
Er is één oplossing $x = a$ als $a \in]1, +\infty[\cup \{e^{-1}, 1\}$.
Geldt: $a \in]0, 1[\setminus \{e^{-1}\}$, dan zijn er 2 oplossingen; de gemakkelijkste is $x = a$, maar hoe de andere te vinden?
Is $0 < a = x_1 < e^{-1}$ dan is $e^{-1} < x_2 < 1$.
Is $e^{-1} < a = x_2 < 1$ dan is $0 < x_1 < e^{-1}$.
vb. $x^x = 0{,}2^{0{,}2} = 0{,}72478$ $\quad 0{,}5^{0{,}5} = 0{,}707107$

$x_1 = 0{,}2 < e^{-1} = 0{,}367879$ $\quad 0{,}6^{0{,}6} = 0{,}736022$

Een goede benadering blijkt $x_2 = 0{,}566$.
Voor de berekeningen bleek de pocketcalculator onschatbare diensten te bewijzen, ook al konden we met de logaritmentafels goede benaderingen bekomen, al duurde het eindeloos lang.

* Zie ook G. Bosteels: a^b en b^a. Wiskunde en Onderwijs nr.4, 1975 VVWL.

De rij van Fibonacci

W. A. M. BURGERS

Wassenaar

We zullen een rij, waarvoor geldt $\underset{n\in Z}{\forall} | t_n = t_{n-1} - t_{n-2}$ een F-rij noemen. Voor de algemene geldigheid laten we ook negatief gehele getallen en 0 als rangnummers toe.

$$a_{-2} = -2a+2b,\ a_{-1} = 2a-b,\ a_0 = b-a,\ a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = a+b,$$
$$a_4 = a+2b,\ a_5 = 2a+3b, \tag{I}$$

Is $a = b = 1$ dan ontstaat de rij van Fibonacci; afgekort Fib. rij.
Het verband tussen een F-rij en een rij van Fibonacci kunnen we goed zien als we de termen van rij I als vectoren schrijven nl. a_5 als $\binom{2}{3} = 2a+3b$

a_{-4},	a_{-3},	a_{-2},	a_{-1},	a_0,	$a_1 = a$,	$a_2 = b$,	a_3,	a_4,	a_5,	a_6,	a_7,
−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5
5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8
t_{-5},	t_{-4},	t_{-3},	t_{-2},	t_{-1},	t_0,	t_1,	t_2,	t_3,	t_4,	t_5,	t_6

en men ziet twee Fib. rijen, die een plaats verschoven zijn: $a_n = t_{n-2} \cdot a + t_{n-1} \cdot b$.

We leiden eerst enige relaties tussen drie termen af.

1 $\quad \underline{a_n = 1a_{n-2} + a_{n-1}}$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-2} = 2a_{n-2} + (a_{n-2} - a_{n-4}) =$$
$$= 3a_{n-2} - a_{n-4}$$

2 $\quad \underline{a_n = 3a_{n-2} - a_{n-4}}$

$$a_n = 3a_{n-2} - a_{n-4} = 3a_{n-3} + 3a_{n-4} - a_{n-4} = 3a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-4} =$$
$$= 3a_{n-3} + (a_{n-3} - a_{n-5}) + a_{n-4} = 4a_{n-3} + (a_{n-4} - a_{n-5}) = 4a_{n-3} +$$
$$+ a_{n-6}$$

3 $\underline{a_n = 4a_{n-3}+a_{n-6}}$

$$a_n = 4a_{n-3}+a_{n-6} = 4a_{n-4}+4a_{n-5}+a_{n-6} = 4a_{n-5}+3a_{n-5}+(a_{n-5}+$$
$$+a_{n-6}) = (4a_{n-4}+3a_{n-4})-3a_{n-6}+a_{n-4} = 7a_{n-4}-(a_{n-4}+a_{n-8})+$$
$$+a_{n-4} = 7a_{n-4}-a_{n-8}$$

4 $\underline{a_n = 7a_{n-4}-a_{n-8}}$

Noemen we de eerste coefficienten A_1, A_2, A_3 en A_4 dan is

$$(A_0 = 2),\ A_1 = 1,\ A_2 = 3,\ A_3 = 4,\ A_4 = 7.$$

Voor deze vier termen geldt: $\underline{A_k = A_{k-1}+A_{k-2}}$ $(k = 3 \text{ of } 4)$

en óók $a_n = A_k a_{n-k}+(-1)^{k+1}a_{n-2k}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$
Dit laatste kunnen we ook a.v. schrijven

$$\underline{A_k a_p = a_{p+k}+(-1)^k a_{p-k}}. \tag{5}$$

Zo hebben we in afleiding (4) voor $3a_{n-6}$ geschreven $a_{n-4}+a_{n-8}(k = 2,$ $p = n-6)$ (Nemen we $A_0 = 2$ dan geldt $2a_p = a_p+a_p$)
We tonen aan dat de rij A_k een F-rij is.

$$a_n = A_k a_{n-k}-(-1)^k a_{n-2k} = A_k(a_{n-k-1}+a_{n-k-2})-(-1)^k a_{n-2k} =$$
$$= A_k a_{n-k-1}+(A_{k-1}+A_{k-2})a_{n-k-2}-(-1)^k a_{n-2k} =$$
$$= A_k a_{n-k-1}+A_{k-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k-3})+A_{k-2}a_{n-k-2}-(-1)^k a_{n-2k} =$$
$$= (A_k+A_{k-1})a_{n-k-1}-A_{k-1}a_{n-k-3}+A_{k-2}a_{n-k-2}-(-1)^k a_{n-2k} =$$
$$= (A_k+A_{k-1})a_{n-k-1}-(a_{n-1}+(-)^{k-1}a_{n-2k-2})+(a_{n-4}+(-1)^{k-2}a_{n-2k})$$
$$-(-1)^k a_{n-2k} = (A_k+A_{k-1})a_{n-(k+1)}+(-1)^{(k+1)+1}a_{n-2(k+1)}.$$

Dus $A_{k+1} = A_k+A_{k-1}$.

Uit $A_k = a_{p+k}+(-1)^k a_{p-k}$ volgt voor $p = k$: $\underline{A_k a_k = a_{2k}+(-1)^k a_0}$ (6)

Is de rij $\sum a_i$ dus een Fib. rij dan geldt: $A_k = (t_{2k}/t_k)$ waarbij $\sum t_i$ dan een Fib. rij is.

zo is dus $A_5 = \dfrac{t_{2k}}{t_k} = \dfrac{t_{10}}{t_5} = \dfrac{55}{5} = 11.$

Ook geldt: $\dfrac{t_{2k+2}}{t_{k+1}} = \dfrac{t_{2k}}{t_k} + \dfrac{t_{2k-2}}{t_{k-1}}$ (7)

zo is $\frac{t_8}{t_4}+\frac{t_6}{t_3}=\frac{21}{3}+\frac{8}{2}=11=\frac{t_{10}}{t_5}=\frac{55}{5}$.

Voor de rij van Fibonacci geldt

$$t_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

waarin α en β de wortels zijn van $x^2-x-1=0, \alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$.
Dus voor de A-rij geldt dus:

$$A_k=\frac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{\alpha^k-\beta^k}=\alpha^k+\beta^k. \tag{8}$$

$$\alpha+\beta=1, \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3, \alpha^3+\beta^3=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha+\beta)=4$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=7. \text{ etc.}$$

Formules voor $\sum a_i$ of deelrijen van een F-rij

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2+a_1 \\ a_4 &= a_3+a_2 \\ &\;\;\cdots \\ a_{n+2} &= a_{n+1}+a_n \quad + \end{aligned}$$

$$a_{n+2}=a_2+\sum_1^n a_i \text{ of } \underline{\sum_1^n a_i=a_{n+2}-a_2} \tag{9}$$

$$\text{en } \underline{\sum_k^n a_i=a_{n+2}-a_{k+1}}$$

b.v. 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47 $\Rightarrow$ $4+7+11+18=40=47-7$.

Een formule voor a_n geeft dus ook een formule voor $\sum a_i$.
Voor alle F-rijen geldt $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.
Zijn α en β de wortels van $x^2=x+1$ dan is

$$a_n=p\alpha^n+q\beta^n \text{ met } \alpha\beta=-1, \alpha+\beta=1.$$

Is $a_1=a$ en $a_2=b$ dan vindt men:

$$a_n=\frac{a+(a-b)\beta}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^n-\frac{a+(a-b)\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\beta^n \tag{10}$$

Men ziet dit ook a.v. $a_n = a \cdot t_{n-2} + b \cdot t_{n-1} = a(t_n - t_{n-1}) + bt_{n-1}$
$= at_n + (b-a)t_{n-1}$ in overeenstemming met (10)

$1 = a = b$ geeft de rij van Fibonacci.

$a = 1, b = 3 \Rightarrow a_n = \alpha^n + \beta^n$

Voor een deelrij $a_k, a_{k+2}, a_{k+4}, a_{k+6}$ geldt:

$$a_k + a_{k+2} + a_{k+4} + a_{k+6} = (-a_{k-1} + a_{k+1}) + a_{k-2} + a_{k+4} + a_{k+6} =$$

$$= -a_{k-1} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+6} = -a_{k-1} + a_{k+5} + a_{k+6} =$$

$$= -a_{k+1} + a_{k+7} \text{ zodat } \sum_{i=0}^{n} a_{k+2i} = a_{k+2n+1} - a_{k-1}$$

... 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...
$T_1 = 1 \quad T_2 = 4 \quad T_3 = 11, \quad T_3 = 3T_2 - T_1$
$1 + 4 + 11 = 18 - 2$
... 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
$T_1 = 1 \quad T_2 = 2 \quad T_3 = 5 \quad T_4 = 13, \quad T_k = 3T_{k-1} - T_{k-2}$
$1 + 2 + 5 + 13 = 21 - 0$

$$\sum_{1}^{n} t_{2k-1} = t_{2n}.$$

Als voor een rij geldt $T_n = 3T_{n-1} - T_{n-2}$ dan blijkt dat de T_n ook termen van een F-rij a_n zijn n.l. $T_n = a_{2n-1}$. Men vindt die F-rij door tussen elk tweetal termen T_k en T_{k+1} één term te interpoleren.
Algemeen geldt $T_n = A_k T_{n-1} + T_{n-2}$ dan is $T_n = a_{kn-(k-1)}$ van een F-rij. Men moet dan tussen elk tweetal termen T_k en T_{k+1}, $(k-1)$ termen interpoleren. Deze interpolatie is a.v. eenvoudig uit te voeren.
a Neem k even, men interpoleert een *oneven* aantal. b.v. *drie* termen.

$a, \quad x, y, \quad z, \quad b, \quad p, \quad q, \quad r, \quad c \qquad c = A_n b - a = 7b - a$
3, −2, 1, −1, 0, −1, −1, −2, −3: −Fib. rij, start: 0 onder b
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21: Fig. rij, start: 0 onder a

$$a = \frac{3a}{3}, \; x = \frac{-2a+b}{3}, \; y = \frac{a+b}{3}, \; z = \frac{-a+2b}{3} \Rightarrow b = \frac{3b}{3}$$

$$q = \frac{-a+8b}{3}, \; r = \frac{-2a+13b}{3} \Rightarrow c = 7b - a$$

b Neem k oneven, men interpoleert een *even* aantal, b.v. *vier* termen

$a, \quad x, y, \quad z, t, \quad b, p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad c; \qquad c = A_5 b + a = 11b + a$
5, −3, 2, −1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5: Fib. rij, 0 onder b
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55∘ Fib. rij, 0 onder a

$$a = \frac{5a}{5}, z = \frac{-a+2b}{5}, t = \frac{a+3b}{5} \Rightarrow b = \frac{5b}{5}, r = \frac{2a+21b}{5},$$

$$s = \frac{3a+34b}{5} \Rightarrow c = 11b+a.$$

Geldt $T_n = 3T_{n-1} - T_{n-2}$ dan is $T_n = p_1\alpha_1^n + q_1\beta_1^n$; α_1 en β_1 de wortels van $x^2 = 3x-1$ maar $T_n = t_{2n-1}$ dus

$$T_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^2)^n}{\alpha(\alpha-\beta)} - \frac{(\beta^2)^n}{\beta(\alpha-\beta)},$$

waarbij α en β de wortels zijn van $x^2 = x+1$.

$$\text{dus } p_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)};\ q_1 = \frac{-1}{\beta(\alpha-\beta)},\ \alpha_1 = \alpha^2,\ \beta_1 = \beta^2.$$

Geldt voor alle n: $T_n = A_{k+1}T_{n-1} - (-1)^k T_{n-2}$
dan is

$T_n = p_k\alpha_k^n + q_k\beta_k^n$ waarbij α_k en β_k de wortels zijn van

$x^2 = A_{k+1} \cdot x - (-1)^k$

$$\text{maar dan is } T_n = t_{(k+1)n-k} = \frac{(\alpha^{k+1})^n}{\alpha^k(\alpha-\beta)} - \frac{(\beta^{k+1})^n}{\beta^k(\alpha-\beta)}$$

$$\text{dus } p_k = \frac{1}{\alpha^k(\alpha-\beta)},\ q_k = \frac{-1}{\beta^k(\alpha-\beta)},\ \alpha_k = \alpha^{k+1},\ \beta_k = \beta^{k+1}$$

Als dus α en β de wortels zijn van $x^2 - A_1x - 1 = 0$ dan zijn α^k en β^k de wortels van $x^2 - A_kx + (-1)^k = 0$. $(k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x^2 - (\alpha^k + \beta^k)x + (\alpha\beta)^k = 0$.
N.B. ook de A-rij kan men naar links voortzetten.

$\ldots, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$

$\ldots, A_{-2}, A_{-2}, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \ldots$

We gaan weer uit van de vergelijking $x^2 = x+1$.
De wortels zijn $\alpha = 1 + (\sqrt{5} : 2)$ en $\beta = 1 - (\sqrt{5} : 2)$.
We onderzoeken nu β, om breuken te vermijden $2\beta^n$.
We korten a.v. af $a + b\sqrt{p} \Rightarrow (a, b)$

$$2\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = (1, 1)$$

$$2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = (3, 1)$$

Aangezien $\beta^n = \beta^{n+1} + \beta^{n-2}$ ontstaan in de kolommen twee F-rijen. De eerste is de zg. A-rij, de tweede de rij van Fibonacci

$(1, 1), (3, 1), (4, 2), (7, 3), (11, 5)\ldots$

Zodat $2\beta^n = A_n - t_n\sqrt{5}$ dus $\frac{A_n}{t_n} - \sqrt{5} = \frac{2\beta^n}{t_n}, \frac{2\beta^n}{t_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

De rij: A_n/t_n is een rij van breuken die tot $\sqrt{5}$ naderen, daar $\beta < 0$ zal voor n even $A_n/t_n > \sqrt{5}$ en voor n oneven $A_n/t_n < \sqrt{5}$.
Hieruit kan men weer enkele relaties afleiden tussen A_n en t_n

$$2\beta^n = A_r - t_n\sqrt{5},\ 2\beta^{n+1} = (A_n - t_n\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{A_n + 5t_n}{2} - \frac{A_n + t_n}{2}\sqrt{5} = A_{n+1} - t_{n+1}\sqrt{5}, \text{ zodat}$$

$A_n + 5t_n = 2A_{n+1}$ en $A_n + t_n = 2t_{n+1}$ waaruit weer volgt:

$t_n + t_{n+2} = A_{n+1}$ en $A_{n+1} + A_{n-1} = 5t_n$

Natuurlijk kan men deze formules ook wel direct afleiden, b.v.

$$A_n + t_n = \alpha^n + \beta^n + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n+1}) + \alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$= t_{n+1} + t_{n-1} + t_n = 2t_{n+1}.$$

$$A_{n+1} + A_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - \alpha\beta(\alpha^{n-1} +$$

$$+ \beta^{n-1}) = (\alpha - \beta)(\alpha^n - \beta^n) = (\alpha - \beta)^2 \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = 5t_n.$$

De breuken van de rij A_n/t_n zijn of de naderende breuken van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{5}$ of behoren tot de ingelaste breuken.

$$\sqrt{5} = (2, \bar{4}) \Rightarrow \frac{2}{1}, \left(\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)\frac{9}{4}\left(\frac{11}{5}, \frac{20}{9}, \frac{29}{13}\right), \frac{38}{17}$$

$$\frac{A_4}{t_4} = \frac{7}{3}, \frac{A_5}{t_5} = \frac{11}{5} \text{ enz.}$$

Wenst men de ingelaste breuken te vermijden, dan kan men a.v. op eenvoudige wijze kettingbreuken ontwikkelen. We geven enkele voorbeelden
$[\sqrt{2}] = 1$, $1 - \sqrt{2}$ is een wortel van $(x-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2x + 1$

$(1-\sqrt{2}) = (1, 1)$ de termen in de kolommen voldoen aan
$(1-\sqrt{2})^2 = (3, 2)$ $\qquad p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$
$(1-\sqrt{2})^3 = (7, 5)$ dus $\sqrt{2} = (1, \overline{2})$

$[\sqrt{3}] = 1$, $1-\sqrt{3}$ is een wortel van $(x-1)^2 = 3 \Rightarrow x^2-2x = 2 \Rightarrow$
$x^2 = 2x+2$

$(1-\sqrt{3}) = (1, 1)$ de termen in de kolommen voldoen aan
$(1-\sqrt{3})^2 = (4, 2)-2(2, 1)$ $\qquad p_n = 2p_{n-1}+2p_{n-2}$
$(1-\sqrt{3})^3 = (10, 6) = 2(5, 3)$
$(1-\sqrt{3})^4 = (28, 16) = (7, 4)$ dus $\sqrt{3} = 1+\frac{2|}{|2}+\frac{2|}{|2}\ldots =$
$(1-\sqrt{3})^4 = (28, 16) = 4(7, 4) = 1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\ldots$ of
$\sqrt{3} = (1, \overline{1, 2,})$

$[\sqrt{5}] = 2$, $2-\sqrt{5}$ is een wortel van $(x-2)^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 4x+1$
$(2-\sqrt{5}) = (2, 1)$ de termen in de kolommen voldoen aan
$(2-\sqrt{5})^2 = (9, 4)$ $\qquad p_n = 4p_{n-1}+p_{n-2}$
$(2-\sqrt{5})^3 = (38, 17)$ $\qquad$ dus $\sqrt{5} = (2, \overline{4})$
$[\sqrt{6}] = 2$ $\;2-\sqrt{6}$ is een wortel van $(x-2)^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 4x+2$
$(2-\sqrt{6}) = (2, 1)$ de termen in de kolommen voldoen aan
$(2-\sqrt{6})^2 = (10, 4) = 2(5, 2)$ $\qquad p_n = 4p_{n-1}+2p_{n-2}$
$(2-\sqrt{6})^3 = (44, 18) = 2(22, 9) \Rightarrow \sqrt{6} = 2+\frac{2|}{|4}+\frac{2|}{|4}+\ldots =$
$= 2+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|4}+\frac{1|}{|2}+\ldots =$

$(2-\sqrt{6})^4 = (196, 80) = 4(49, 20)$ $\sqrt{6} = (2, \overline{2, 4,})$

$(2-\sqrt{6})^3 = 44-18\sqrt{6}$ dus $\frac{(2-\sqrt{6})^3}{18} = \frac{44}{18}-\sqrt{6} = \frac{22}{9}-\sqrt{6}$,
$\frac{22}{9}$ is te klein

$(2-\sqrt{6})^4 = 196-80\sqrt{6}$ dus $\frac{(2-\sqrt{6})^4}{80} = \frac{49}{20}-\sqrt{6}$, $\frac{49}{20}$ is te groot.

Boekbespreking

Emma Castelnuovo e Mario Barra, *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino 1976, 290 blz. (met 273 afb.), 10000 lire.

Emma Castelnuovo is een begaafd Italiaans lerares. Ze geeft les aan een scuola media (een driejarige middenschool) te Rome. Ze is hier zeer gelukkig mee, want ze heeft daar de volle vrijheid volgens haar eigen didactische inzichten les te geven, een vrijheid die ze aan een vervolgschool niet zou hebben. Haar sterke kant is het vanuit de praktijk de wiskunde toegankelijk te maken. Ze heeft de gave vrij gecompliceerde problemen op verrassend eenvoudige wijze begrijpelijk te maken. Uiteraard maakt ze daarbij van wiskundige strengheid geen dogma. Ze wil de kinderen wiskunde leren begrijpen en leren waarderen. Ze heeft daarbij tevens een sterk esthetische inslag. De essentie van haar methode heeft ze, samen met Mario Barra, tentoongesteld in Rome in de vorm van een groot aantal van toelichtende tekst voorziene tekeningen. Een groot deel van deze expositie was ook in Karlsruhe tentoongesteld.
In het boek vindt men de 273 afbeeldingen van de expositie op duidelijke wijze gereproduceerd. Een korte beschrijving vergemakkelijkt de lezer de samenhang van de tekeningen te begrijpen. Het boek is in zeer eenvoudig Italiaans geschreven. Ik vermoed, dat iemand die deze taal niet machtig is, veel ervan kan volgen.
Men kan het boek bestellen door de uitgever te vragen het onder rembours toe te zenden. Adres: Editore Boringhieri, Corso Vittorio Emanuele 86, Torino. (Men betaalt dan slechts 40% van de hier gelden boekhandelsprijs.)
In dit nummer vindt men twee recreatieopgaven aan het boek ontleend. Omdat deze echter niet representatief zijn voor de inhoud, volgt hier een verrassend staaltje van haar gave een probleem simpel op te lossen.
Gevraagd wordt te bewijzen dat de oppervlakte onder één boog van een cycloide gelijk is aan driemaal de oppervlakte van de cirkel die de cycloide voortbrengt. Zie figuur 1. In deze figuur is $B'\bar{B}'$ = boog BB', bg AB''' = bg BB' en $B'''\bar{B}'''$ = boog BB''' = halve cirkel − boog AB'''.

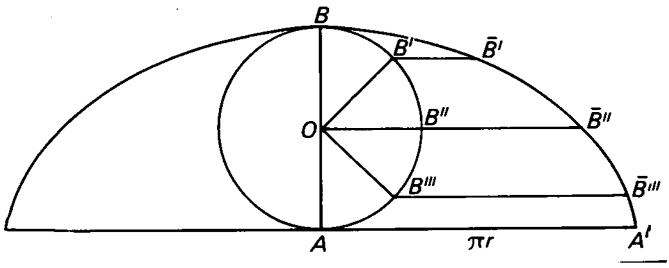


Fig. 1

Waaruit volgt dat $B'\bar{B}' + B'''\bar{B}'''$ = halve cirkel = πr.
De gelijkheid van de oppervlakten van de beide figuren in figuur 2 berust op het principe van Cavalieri.

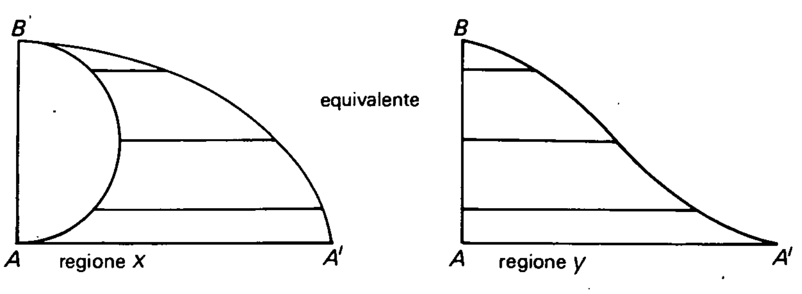


Fig. 2

In figuur 3 is de rechter figuur 2 tweemaal getekend, eenmaal rechtop en eenmaal op zijn kop en zijn beide naast elkaar geplaatst. Zo ontstaat een rechthoek met rechthoekszijden $2r$ en πr en dus met oppervlakte gelijk aan $2\pi r^2$.

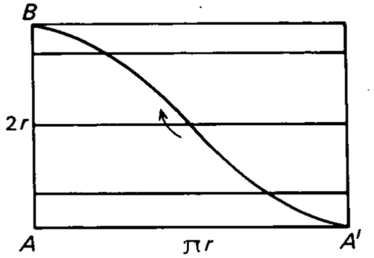


Fig. 3

Hieruit volgt direct dat de oppervlakte onder de boog van de cycloide gelijk is aan $3\pi r^2$, hetgeen we wilden aantonen.
Opsomming van enkele van de 16 behandelde onderwerpen: Pythagoras, som van een oneindige meetkundige rij, talstelsels, structuren, kegelsneden en kwadratische oppervlakken, affiene transformaties, zwaartepuntsberekeningen, stroomgrafen (methode van Mason).

P. G. J. Vredenduin

E. A. Maxwell, *Geometry by Transformations*, S.M.P. Handbooks, Cambridge University Press 1975, XII+275 blz., $3.75.

Dit handboek is in de eerste plaats bestemd voor leraren, maar wordt ook gebruikt door leerlingen die zich voorbereiden op het A-level examen.
De planimetrie wordt gefundeerd op een intuïtieve basis. Dat is niets nieuws. Maar wel nieuw is de scherpomlijnde manier waarop deze basis aangebracht wordt. Zo scherp dat ze haast vertaalbaar is in een axiomatische grondlegging. Uitgegaan wordt van twee basisvaardigheden: men kan vouwen en prikken. Men kan een blad papier omvouwen; de vouw is een rechte lijn. In feite is dit omvouwen een afbeelding van een gesloten halfvlak op een gesloten halfvlak. Van elk punt vindt men het beeldpunt door te prikken.
Door twee keer te vouwen krijgt men twee lijnen. Op deze manier wordt het punt geïntroduceerd. Neem een blad papier, vouw dit, neem twee punten X en Y op de vouwlijn, vouw opnieuw maar nu zo, dat X op Y valt. Men krijgt daardoor een tweede vouwlijn. Deze staat per definitie loodrecht op de eerste. Twee lijnstukken zijn gelijk, als men de een door vouwen met de ander kan laten samenvallen. Bovendien worden ze gelijk genoemd, als ze beide gelijk zijn aan een derde lijnstuk. (Men zou ook kunnen zeggen, dat ze gelijk zijn, als ze door één of twee keer vouwen tot samenvallen gebracht kunnen worden.)
Orde en oriëntatie (positieve draairichting) worden ingevoerd op grond van demonstratie, dus even primitief intuïtief als wij dat gewoon zijn. Het begrip gerichte hoek, de gelijkheid van hoeken en de bissectrice van een hoek kunnen nu zonder moeite gedefinieerd worden.
Nu de evenwijdigheid. Neem een lijn XY met daarop een punt A. Richt in A een loodlijn op XY op en kies daarop een punt D. Richt in D een loodlijn UV op AD op. Dan zijn de lijnen XY en UV per definitie evenwijdig. Voorlopig is deze evenwijdigheid gekoppeld aan de lijn AD. Aangenomen wordt nu, dat indien een vierhoek drie rechte hoeken heeft, de vierde hoek ook recht is. En nu kan de evenwijdigheid losgekoppeld worden van de keuze van D.
Op grond van deze intuïtief verkregen basis wordt nu streng deductief een stuk meetkunde ontwikkeld.
Om meer resultaten te bereiken zijn nieuwe bewijsmiddelen nodig. In het tweede deel van het boek worden daarom de transformaties behandeld. Achtereenvolgens komen aan de orde spiege-

ling, rotatie, translatie, schuifspiegeling. Het rekenen met transformaties (samenstellen en inverteren) blijkt een machtig hulpmiddel om nieuwe resultaten af te leiden.
Na de isometrieën komen de vermenigvuldiging en de gelijkvormigheidstransformaties aan de orde. Bij de laatste wordt onderscheid gemaakt tussen spiral similarity (samenstelling van vermenigvuldiging en rotatie) en stretch reflection (samenstelling van vermenigvuldiging en spiegeling). We hebben nu voldoende bewijsmiddelen om de gangbare planimetrische stellingen te bewijzen. Zelfs komt de schrijver toe aan de behandeling van de negenpuntscirkel, de cirkel van Apollonius, de stelling van Ptolemeus en de rechte van Simson.
In het laatste deel krijgt men een ruimere blik op de transformaties, doordat de matrices ingevoerd worden en deze dienen ter beschrijving van de transformaties. Een punt wordt voorgesteld door een 2×1-matrix. Wordt punt A voorgesteld door de matrix $\mathbf{a}$, dan is de lengte van het lijnstuk OA gelijk aan $\sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$. De matrix $\mathbf{a}$ is matrix van een isometrie als $\mathbf{r}^T(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{r} = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$ voor elke $\mathbf{r}$. Nu blijkt $\forall \mathbf{r}$: $\mathbf{r}^T\mathbf{u}\mathbf{r} = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$ gelijkwaardig te zijn met $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$. Omdat $\mathbf{a}^T\mathbf{a}$ een symmetrische matrix is, is dan $\mathbf{a}^T\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hieruit vindt men voor $\mathbf{a}$ de bekende eigenschappen van een orthogonale matrix. Daarmee zijn meteen ook de matrices gevonden die behoren bij een spiral similarity en bij een stretch reflection.
Hierna volgt nog een aardig hoofdstuk over de eigenwaarden van een matrix.
Het boek is stellig niet alleen de moeite waard voor Engelse leraren. Ook de Nederlandse collega's zullen een vernieuwde kijk op de meetkunde krijgen, als ze van de inhoud van dit boek kennis nemen.

P. G. J. Vredenduin

Prof. Dr. N. Sieber, Dr. H. J. Sebastian, Dr. G. Zeidler, *Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen*, Teubner, Leipzig, 208 blz., 15,– M.

Dit boek is het eerste deel uit de serie 'Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte'. Overeenkomstig het hierin vervatte doel van het werk gaan de schrijvers nergens diep abstract-theoretisch op de problemen in. Zij bespreken de volgende onderwerpen:
- logica: o.a. waarheidstafels en bewijsmethoden
- opbouw van het getallensysteem tot en met de complexe getallen. Uitbreiding van een getallenstelsel geschiedt op de bekende 'schoolmanier'.
- combinatoriek, waaronder ook *herhaalde* permutaties, variaties en combinaties.
- verzamelingen en afbeeldingen
- functies en functie-papier
- rijen met convergentie-kriteria.

Geen differentiaal- noch integraalrekening. Slechts in de laatste paragrafen komt, vluchtig, het limietbegrip aan de orde. Het geheel is geschreven in een gemakkelijk te begrijpen stijl. Voor ons taalgebied lijkt me een dergelijk werk overbodig, zeker voor het doel waarvoor het geschreven is. Blijkens de titelpagina is dit werk 'Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt'. Het komt mij voor dat aankomende studenten in Nederland van de meeste in dit boek besproken onderwerpen reeds op de hoogte zijn.

W. Kleijne

Georg Nöbeling, *Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1976, 166 blz., gebonden DM 38,–.

Uitgaande van een axiomasysteem bouwt de schrijver een absolute meetkunde op. Deze bestaat uit de doorsnede van de Euclidische, de elliptische en de hyperbolische meetkunde. Al in het begin van het boek introduceert de schrijver de drie parallellen-axioma's ter karakterisering van de drie meetkundes. Daarna wordt op zorgvuldige wijze de meetkunde van absolute vlakken opgebouwd op axiomatisch, synthetische wijze. Vervolgens komen in aparte hoofdstukken de elliptische en de hyperbolische meetkunde aan de orde. In elk: invoering van coördinaten, een metriek, transformaties, trigonometrie, booglengte, oppervlaktebepaling. De behandeling is zeer goed en helder. De uitvoering van het boekje keurig. Een gedegen leerboek van niet-euclidische meetkunden.

W. Kleijne

Karl Schick, *Lineare Optimierung*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1976, 331 blz., prijs onbekend.

Deze inleiding in de lineaire programmering is bestemd 'für Studienanfänger'. Na een uitvoerige schets, aan de hand van diverse praktische problemen, van het probleemgebied, wordt een idee gegeven van diverse oplossingsmethoden, waarbij uitvoerig de methode m.b.v. grafieken aan de orde komt. Na een voorbeeld, waarbij in wezen de simplexmethode wordt gebruikt, behandelt de schrijver eerst een behoorlijk brok lineaire algebra. Daarna bespreekt hij de simplexmethode. De behandeling van de diverse problemen is uitermate duidelijk; het niveau is niet te hoog. Druktechnisch ziet het boek er niet zo aantrekkelijk uit: de letter is nogal klein, Griekse letters zijn in handschrift, het geheel lijkt op stencilwerk.
Aanbevolen voor ieder die van dit onderwerp wil kennisnemen.

W. Kleijne

U. Kulisch, *Grundlagen des Numerischen Rechnens*. Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/ Zürich, 1976, 467 blz.

Bij optellen en vermenigvuldigen met behulp van een computer gaan, ten gevolge van afrondfouten, de gebruikelijke rekenregels niet alle meer op. Zo is bijvoorbeeld de optelling, bij uitvoering in gebruikelijke drijvende punt aritmetiek, wel commutatief, maar niet associatief. Doel van dit boek is op overzichtelijke wijze de rekenregels te beschrijven, die nog van kracht zijn, wanneer de aritmetische operaties op een computer worden uitgevoerd. Hierbij gaat het niet alleen om aritmetische operaties tussen reële getallen, maar onder meer ook om aritmetische operaties tussen matrices, reële intervallen en matrix-intervallen.
Om het gestelde doel te bereiken heeft de auteur voor een abstracte opzet gekozen. Een centraal begrip in het boek is dat van een *geordende ringoïde*. Dit is een verzameling, waarin een optelling, vermenigvuldiging en ordening gedefinieerd zijn, die aan vrij 'zwakke' axioma's moeten voldoen: betreffende de optelling wordt bijvoorbeeld alleen geëist, dat deze commutatief is en dat een nulelement bestaat. De verzameling der reële getallen is een voorbeeld van zo'n geordende ringoïde. Een tweede belangrijk begrip in het boek is het begrip *semimorphisme*. Voorbeelden van semimorphismen zijn afrondingsoperaties, zoals die uitgevoerd worden, wanneer reële getallen door middel van een eindig aantal cijfers in een computer gerepresenteerd worden. Eén van de hoofdstellingen uit het boek zegt (ruwweg) dat het beeld onder een semimorphisme van een geordende ringoïde weer een geordende ringoïde is. Deze stelling impliceert bijvoorbeeld, dat de optelling en vermenigvuldiging op een computer, uitgevoerd in geschikte drijvende punt aritmetiek, aan de axioma's van een ringoïde voldoen.
De abstracte begrippen en stellingen worden uitgebreid geïllustreerd aan de hand van verschillende computer implementaties van de beschouwde aritmetische operaties. Sommige van deze implementaties worden, met betrekking tot hun nauwkeurigheid, met elkaar vergeleken. Er worden ook adviezen voor de numerieke praktijk gegeven.
Voor het lezen van het boek is nòch op het gebied van de algebra, nòch op het gebied van de computerkunde, enige speciale voorkennis vereist.

M. N. Spijker

Tweede Commentaar op de 'Vlaamse Recensie'

Bij de beoordeling van de vereniging van een verzameling concentrische schrijven heb ik mij helaas laten verleiden aan elke schijf de structuur van een verzameling concentrische cirkels toe te kennen. De structuur was niet vermeld, maar bedoeld als puntstructuur, wat het voorbeeld *foutloos* maakt. Mijn bezwaar tegen het niet onderscheiden van 'het platte valk' met een van zijn structuren (onverschillig welke) moet ik echter handhaven indien dit *gecombineerd* wordt *met het gebruik van het gelijkteken*. Met een simpel 'is' was ik accoord gegaan.
Didactisch gesproken is het betreurenswaardig dat reeds de lagere school de zo sterk van elkaar afwijkende uitspraken 'is' en 'is gelijk aan, kortweg *gelijk*' niet uit elkaar houdt.
Behalve door het streng scheiden hiervan, kunnen we mogelijk uit de moeilijkheid geraken door invoering van het begrip *Totaliteit van een verzameling*. Daarmee grijpen we tevens terug op het in onbruik geraakte begrip *meetkundige plaats* (locus). Een rechte is dan de totaliteit van de verzameling van al zijn punten, maar ook van al zijn gelijkgerichte halve rechten.
Ten slotte merkte iemand mij op, dat ik voor het onderscheid tussen een verzameling en zijn totaliteit niet naar Afrika behoefde over te stappen. *Mensheid* is de totaliteit van *alle mensen* en boom zou twee meervouden hebben, n.l. *bomen* en de totaliteit *bos*.

J. K. Timmer.

Vakantiecursus voor leraren exacte vakken en andere belangstellenden 1977

De jaarlijks door het Mathematisch Centrum te organiseren Vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden zal dit jaar plaatsvinden in slechts één plaats en wel in

AMSTERDAM, OP 11 EN 12 AUGUSTUS 1977

ONDERWERP: 'MATHEMATISCHE LOGICA'
(Algoritmen en hun beperkingen)

Het programma ziet er als volgt uit:
1e dag:
ochtend: dr. J. F. A. K. van Benthem – 'Formele systemen'
middag: Prof. dr. A. S. Troelstra – 'Algoritmen en berekenbaarheid'

2e dag:
ochtend: dr. D. H. J. de Jongh – 'Coderen'
middag: dr. D. H. J. de Jongh – 'Volledigheid en onvolledigheid'

Nadere inlichtingen en aanmeldingsformulieren zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-1005, tel. 020-947272, tst. 63.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

De heer J. D. Priester maakte mij attent op het boekje Sunday Times Brain Teasers (Penguin Books). Vanaf 1961 verschijnt in de Sunday Times wekelijks een puzzel. Deze worden door lezers ingezonden. Tien van de meest producerende inzenders zijn uitgenodigd om uit hun puzzels een boekje samen te stellen. Daaruit is dit boekje ontstaan, dat 100 opgaven bevat. De wijze van samenstelling garandeert, dat het origineler opgaven bevat dan vele andere soortgelijke uitgaven. Uit de eerste 5 heb ik er 2 gekozen, die hieronder zijn afgedrukt.

366. In de zuidelijke Pacific in de buurt van de 180e lengtegraad bevinden zich drie eilandjes: Aloha, Bali-Hai en Crackatoea.
Een oude veerboot onderhoudt een wekelijkse dienst tussen de eilanden. De dienstregeling is:

Aloha	vertrek	maandag	9 uur
Bali-Hai	aankomst	dinsdag	19 uur
	vertrek	dinsdag	22 uur
Crackatoea	aankomst	vrijdag	21 uur
	vertrek	zaterdag	7 uur
Aloha	aankomst	zaterdag	19 uur

De boot vaart met constante snelheid.
De havenmeester van Aloha seint op een donderdag om 21 uur, dat er een orkaan op komst is en dat de kapitein onmiddellijk koers moet zetten naar het dichtstbijzijnde eiland. De kapitein ontvangt het bevel, terwijl hij onderweg is van Bali-Hai naar Crackatoea. Hij gehoorzaamt zonder vaart te verminderen.
Welk van de drie eilanden bereikte hij en op welk tijdstip?

367. Een boek is, het voorwerk niet meegerekend, 100 bladen (200 bladzijden) dik. Het bestaat uit 8 hoofdstukken. Elk hoofdstuk is 1 bladzijde dikker dan het vorige. Van elk hoofdstuk is de laatste bladzijde geheel volgedrukt. Na elk hoofdstuk, 1 hoofdstuk uitgezonderd, volgt een halve bladzijde noten. Elk hoofdstuk begint op een rechterbladzijde.
Bij een herdruk geeft men er de voorkeur aan alle noten achter elkaar aan het einde van het boek af te drukken. Het boek wordt daardoor 2 bladen dunner.
Hoeveel geheel lege bladzijden zijn er in de oorspronkelijke uitgave en hoeveel in de herdruk?

Oplossingen

364. Men kan bij een wedren wedden op paard

Darlington	5 – 4
Bradford	1 – 1
Southend	5 – 1

Een klant wenst een aantal loten te kopen zo, dat hij in totaal zeker wint. De bookmaker wenst zijn loten in een zodanige verhouding te verkopen, dat hij zeker wint. Wie van de twee kan in zijn opzet slagen?
Onderstel de aantallen loten Darlington, Bradford en Southend die de klant koopt, verhouden zich als x, y en z ($x+y+z = 1$).
Hij wil in totaal winnen in het geval dat Darlington wint. Dus zorgt hij ervoor dat

$$\tfrac{5}{4}x > y+z$$

Maar ook als Bradford of Southend wint, dus zorgt hij er ook resp. voor dat

$$y > x+z$$
$$5z > x+y$$

Teken een gelijkzijdige driehoek met hoogte 1 en kies als coördinaten van een punt (binnen de driehoek) de afstanden van het punt tot de drie zijden. Voor elk punt is dan $x+y+z = 1$.
De lijnen

$$\tfrac{5}{4}x = y+z; \qquad y = x+z; \qquad 5z = x+y$$

zijn evenwijdig aan de zijden van de driehoek. In figuur 1 zijn ze getekend. De arceringen geven aan in welke vlakdelen aan de bovenstaande drie ongelijkheden voldaan is. De doorsnede van deze vlakdelen is leeg. De klant kan dus niet in zijn opzet slagen.
De bookmaker wel. Hij kiest dan x, y en z zo, dat het corresponderende punt binnen het kleine driehoekje ligt.

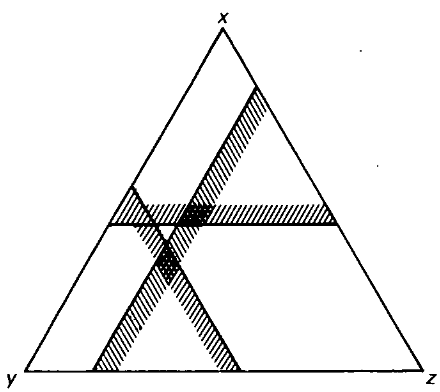


fig. 1.

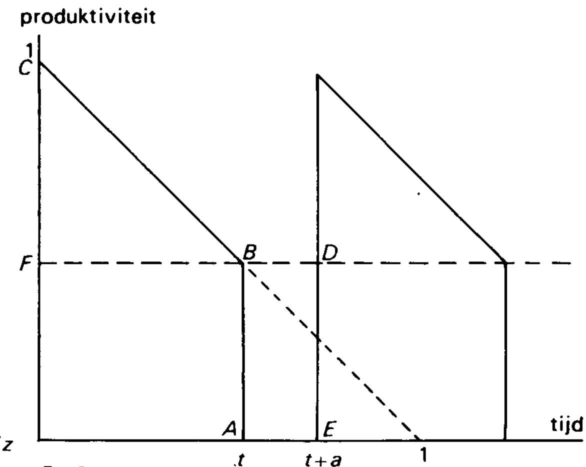


fig. 2.

365. Een katalysator bewerkt een chemische reactie. De werkzaamheid van de katalysator neemt evenredig met de tijd af. In de grafiek (fig. 2) is de produktiviteit van de katalysator als functie van de tijd weergegeven.

Om optimale werking te verkrijgen stoppen we het proces op het tijdstip t. Voor vervanging van de katalysator is een vaste tijd a nodig. Daarna starten we het proces opnieuw. Hoe moeten we t kiezen om een optimale produktiviteit per tijdseenheid te verkrijgen?
Stoppen van het proces als de produktiviteit nog boven het optimale gemiddelde ligt, is niet juist. Evenmin doorgaan als de produktiviteit onder het optimale gemiddelde ligt. We stoppen dus op het moment dat de produktiviteit de waarde van het optimale gemiddelde bereikt heeft.
Dat wil in de grafiek zeggen, dat
opp. FBC = opp. $AEDB$
Dus
$\frac{1}{2}t^2 = a(1-t)$
Waaruit men t kan oplossen.

359. Van Drs. J. G. van Bruchem (Lopik) ontving ik de volgende elegante algemene oplossing.
Alle oplossing van $a^{-2}+b^{-2} = c^{-2}+d^{-2}$ krijgen we door de oplossingen van $p^2+q^2 = r^2+s^2$ te zoeken en dan door het kgv van p^2, q^2, r^2 en s^2 te delen.
Stel $p = u-v$, $q = x+y$, $r = u+v$ en $s = x-y$. Substitutie levert de voorwaarde $uv = xy$. Kies nu u en v zo, dat niet de een priem en de ander 1 is. Kies daarbij x en y. Zo vindt men elke oplossing.
Op het eerste gezicht lijkt er nog iets te haperen. Men zou kunnen nemen bijv. $u = 4\frac{1}{2}$, $v = 3\frac{1}{2}$, $x = 10\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{2}$. Is dat nog iets nieuws? Neen, want men vindt hetzelfde resultaat door te nemen $u = 9$, $v = 7$, $x = 21$, $y = 3$.

INHOUD:

Fred Goffree: Vakdidaktische notaties 323
Examens Statistisch Assistent en Analist VVS 1977 326
Gert Bakker: Leerboeken wiskunde in de brugklas 1976/1977 327
De regionale werkgroep Alkmaar 332
Erepromotie 334
Statistische dag/Mathematisch congres 338
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 339
Bij de 100ste Verscheidenheid 345
Mathematische Logica - onderwerp vakantiecursus 1977 346
Frank Laforce: X^x 347
W. A. M. Burgers: De rij van Fibonacci 349
Boekbespreking 356
Vakantiecursus 1977 360
Recreatie 361

ADRESSEN AUTEURS:

Gert Bakker, Oeverstraat 65, Arnhem.
Prof. Dr. O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, Delft.
W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar.
Fred Goffree, Bremlaan 16, Den Dolder.