

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang

1976/1977

no 8

april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffr e - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, Apeldoorn, tel. 055-250834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 30,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. *f* 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. *f* 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. *f* 85,—.

Vakdidaktische Notities

FRED GOFFREE

Den Dolder

1 'Boven de stof staan'

Als wiskundeleraar valt het je niet moeilijk om van jezelf te zeggen, dat je boven de stof staat. Vooral na het doornemen van de stof gedurende een aantal opeenvolgende jaren ken je de theorieën en bijbehorende opgaven, vaak met boek en pagina waar ze te vinden zijn.

Tijdens de laatste leerplanvernieuwingen zijn evenwel momenten voorgekomen, waarin je kennis niet zover reikte. Bij het voorbereiden van de lessen en soms nog wel later kwam je dan voor het feit te staan om zelf weer wiskundig actief te worden. Soms werkte dat motiverend op jezelf en soms ook op de leerlingen. Je voelde dan dat de eigen doordinking op wiskundig nivo nauw verwant kan zijn aan een didaktische bewerking van het gebied. Bij een dergelijke situatie van gezamenlijk met de leerlingen optrekken om zekere leerstof te veroveren en problemen te overwinnen, lijken de 'klassen' minder stom en de leerlingen meer betrokken. Enige jaargangen verder ontstaat dan weer de oude situatie, waarin je als leraar weer helemaal boven de stof staat en je met een gevoel van veiligheid op elk moment in het programma elke willekeurige klas kunt binnen stappen.

Wat is dat nu eigenlijk, dat 'boven de stof staan'? Deze vraag stelde ik me nog eens na de gebeurtenis, die ik hieronder voor u wil beschrijven.

Het was op een verjaardagsfeestje van buurtgenoten. Velen hebben de leeftijd dat ze op dit ogenblik kinderen in het voortgezet onderwijs hebben. Bovendien bestaat er een natuurlijke belangstelling voor het oplossen van probleempjes, die al dan niet wiskundig van aard zijn. Het komt niet zelden voor dat de gastheer (of vrouw) zijn feest opluistert met heel lastige, zelf gefabriceerde kriptogrammen (bijvoorbeeld van de vorm: vogel; intieme vraag aan mevrouw Groeneveld), ingewikkelde meetproblemen of strategiespelletjes. Welnu, op dit feestje meende ik te kunnen komen met een probleempje, dat me zelf toch enige kopzorg had bezorgd om op te lossen:

Iemand komt dagelijks met de trein van zijn werk en wordt dan door zijn vrouw met de auto van het station gehaald. Vandaag komt hij een uur vroeger met de trein aan. Hij besluit zijn vrouw tegemoet te wandelen. Onderweg ontmoet hij

haar en ze rijden gezamenlijk naar huis, waar ze 10 minuten vroeger arriveren dan gewoonlijk.

Als we ervan uitgaan dat alle snelheden konstant zijn, stellen we de vraag: hoelang heeft de man gewandeld?

Mijn eerste oplossingspogingen geschieden voor het slapen gaan. Dit is een werkwijze die mij goed bevalt. Soms vind ik, al mijmerend en in gedachten op het plafond tekenend fraaie oplossingen, ook komt het voor dat ik in een heerlijke slaap geraak, zonder dat het probleem opgelost wordt. In dit geval moet het laatste gebeurd zijn. Want toen ik enige weken hierna even te maken kreeg met de afstand-tijd grafieken in het Wiskobas-leerplan*) herinnerde ik me plotseling het probleem weer. En tegelijkertijd was daar 'de' oplossing, die op papier er aldus uitziet:

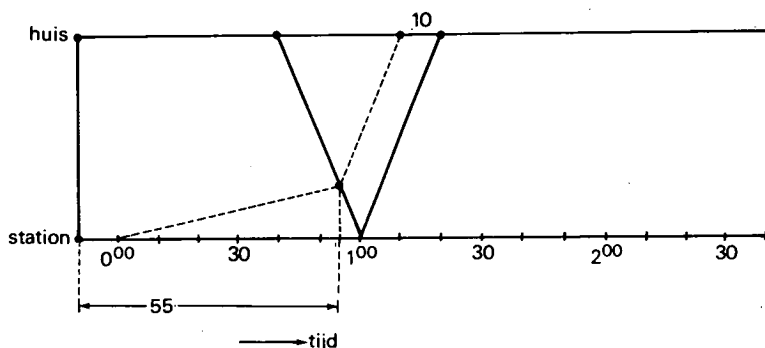


Fig. 1.

Een feilloze oplossing, die tegelijk iets weerspiegelt van een didactische moeilijkheid: de invariantie van de oplossing onder de verschillende snelheden van de auto (met moeder de vrouw).

Wel, ik was voorbereid om mijn leerlingen – buurtgenoten bij hun mathematische activiteiten te begeleiden. Ik had in elk geval het veilige gevoel van het 'boven de stof' te staan, niets kan er gebeuren.

De eerste reactie had ik enigszins verwacht. Ellen vindt dat de man 50 minuten gewandeld heeft. Wellicht het resultaat van een eenvoudige aftrekking: 1 uur vroeger op het station, 10 minuten eerder thuis, dus

Wat doe je dan als leraar? Je weet dat er 55 minuten uitkomt, dus is het gerechtvaardigd om te zeggen: *fout!* Je kunt ook wat weifelend doen, en opmerken dat dit antwoord *er dichtbij is*. Dat is natuurlijk onzin, maar je wilt mensen niet direkt ontmoedigen. Ook kun je tonen dat je met de mensen meedenkt: *'denk je er wel om dat er ook tijd voor nodig is om met de auto naar huis te rijden?' of 'denk erom: Hij is 10 minuten vroeger thuis dan anders!'*

Ik deed het laatste en achteraf konstateerde ik dat mijn eigen oplossing voortdurend aanwezig was. Gebarend met mijn handen – onbegrijpelijk overigens voor elk van de aanwezigen – tekende ik de grafiek van de autorit

* Wiskobas Bulletin: Leerplanpublicatie 2, december 1975: Overzicht van Wiskunde Onderwijs op de Basisschool. pag. 173, 254, 258, 300.

Dan komt Piet met een opmerking:

‘Dit soort problemen heeft altijd een eenduidige oplossing. Als we nu eens een bijzondere situatie kiezen, bijvoorbeeld: de man komt precies (10 minuten vroeger) thuis als mevrouw juist op weg gaat om naar ‘t station te rijden’.

Wat doe ik daarmee. Natuurlijk zie ik weer het grafiekje voor me, maar tijd voor een nadere uitwerking van deze fundamentele opmerking wordt me niet gelaten. Pas na het feest teken ik in gedachten op het plafond:

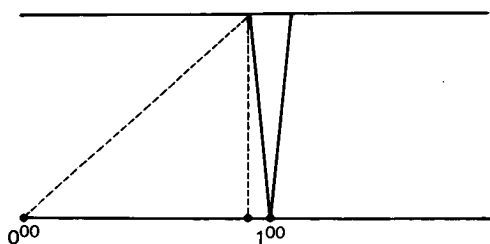


Fig. 2.

Ali merkt op (ze heeft tot nu toe nog niets gezegd): ‘Je hebt geen gegevens, je kunt dit niet uitrekenen’. Een uitspraak die de anderen in de gelegenheid stelt om hun gedachten tot hier toe onder woorden te brengen. Er wordt nu uitgelegd wat je allemaal weet

Gerhard springt er als eerste weer in: ‘Die vrouw rijdt 10 minuten minder ver dan anders’. Ik beluister de afstand-tijd relatie in deze woorden en zie op mijn gedachte-grafiekje dat dit een zeer goede opmerking is. Een zeer nadrukkelijk en instemmend geknik is mijn reactie. De anderen trekken daaruit hun konklusies, er is een spoor gevonden. Maar voordat men zich nog heeft kunnen bezinnen op de opmerking zelf, zegt Piet: ‘Dus 55 minuten’. Men kijkt vragend, maar Gerhard, die zojuist de goede opmerking plaatste, wijst dit antwoord gedecideerd af. Jámmer genoeg heb ik mijn gezicht niet in de plooi gehouden, en iedereen weet dat de goede oplossing gevonden is. Hiermee is voor de meesten de actieve inzet beëindigd, een enkele twijfelaar vraagt bij Piet om nadere toelichting

Wat is ‘boven de stof staan’? Na deze ervaring met ‘probleem geöriënteerd groepswork’ weet ik dat het meer is dan hetgeen hierboven werd gezegd: de theortietjes en bijbehorende opgaven kennen. Het is ook meer dan alleen maar de kunst van goede vragen te stellen en op de juiste momenten belangrijke aanwijzingen te geven.

Dit laatste betreft meer het blijik geven van boven de stof staan.

Voor mij heeft het ook nog te maken met ‘het inleven in de ander’, ‘het flexibel interpreteren’ en *een grote mate van bescheidenheid*.

Voorlopig ben ik maar zo onbescheiden om deze notitie aan u voor te leggen.

Keuze en ordening van vraagstukken

H. BOSSCHER

Oegstgeest

Leerstofordening.

Bij de leerstofordening geven we tegenwoordig nogal eens de voorkeur aan een (leer)psychologisch, inductief model boven het tradionele logische, deductieve model. Traditie is immers om eerst langs logische weg, stap voor stap, de *algemene* geldigheid van een stelling, formule of algoritme te bewijzen. Vervolgens wordt dan in *bijzondere* gevallen gebruik gemaakt van hetgeen bewezen is. Niet alleen werd daarmee weinig inzicht bereikt, maar ook is het de vraag of daarmee de juiste instelling bij de leerlingen werd aangebracht ten opzichte van het omgaan met de stof. Immers, het bevorderde zeker niet een attitude nodig voor meer zelfstandig onderzoeken. Daarom is het niet alleen didaktisch en psychologisch beter om een meer inductief model te gebruiken, maar ook voor het bevorderen van de juiste studiehouding die tot verwondering, divergent en creatief denken kan leiden.

Vraagstukkenordening.

Vraagstukken dienden in het verleden meestal om de behandelde en geleerde theorie te gaan toepassen. Als het goed is werd daarbij dan onderscheid gemaakt in vraagstukken ter verwerking van de nieuwe theorie en vraagstukken ter toepassing van de nieuwe kennis geïntegreerd met reeds aanwezige kennis en vaardigheid.

De betekenis van vraagstukken voor de opbouw van de theorie en voor het verkrijgen van inzicht in de theorie voordat deze zelf expliciet wordt, krijgt de laatste tijd meer aandacht. Aan de hand van hoofdstuk I uit *Moderne Wetenschap* deel 9V wil ik illustreren hoe daarvan bij het afleiden van goniometrische formules te weinig gebruik gemaakt wordt.

In een vorig artikel: 'Oorzaken van slechte proefwerkresultaten'¹⁾ stelde ik dat het *expliciteren* van conclusies van groot belang is om te voorkomen dat leerlingen meer op basis van visuele waarneming werken, dan op basis van begripmatig denken. Van Dormolen²⁾ heeft reeds gewezen op het belang van de fasen die aan het expliciteren voorafgaan, namelijk het *oriënteren* en *sorteren* dat moet leiden tot *abstractie*. Dit geldt zowel voor het vinden van stellingen, formules, algoritmen als ook voor de aanpak van vraagstukken.

Vraagstukken die gemaakt worden in de fasen van oriënteren en sorteren heb-

ben een voorbereidende functie. Aan de hand van vraagstukken met 'getallen-voorbeelden' kan inzicht ontstaan over de wijze waarop algemene geldigheid moet worden bewezen. We zijn daar altijd enigszins bang voor geweest omdat we wilden voorkomen dat leerlingen bewijskracht voor een stelling, formule of algoritme zouden ontleenen aan het aantonen van de juistheid in zo een enkel geval. Natuurlijk moeten we hier voor waken, maar hierdoor hebben we echter soms ook de didaktische waarde over het hoofd gezien van het eerst laten aantonen van de juistheid voor een enkel geval. De *wiskunde* heeft in zichzelf een *logische* opbouw, maar het *wiskundeonderwijs* kent echter ook een *psychologische* volgorde die voorafgaat aan het zuiver wiskundig bezig zijn.

Formule voor: $\cos(\alpha - \beta)$

Deze formule wordt in deel 9V van *Moderne Wiskunde Hoofdstuk I* afgeleid met het inproduct $(\overline{OP}_\alpha, \overline{OP}_\beta)$, waarbij P_α en P_β de beeldpunten zijn van de reële getallen α en β bij de opwindfunctie.

In een figuur zijn op de eenheidscirkel aangegeven P_α , P_β en de hoeken α , β en de hoek tussen de vectoren $\overline{OP}_\alpha$ en $\overline{OP}_\beta$.

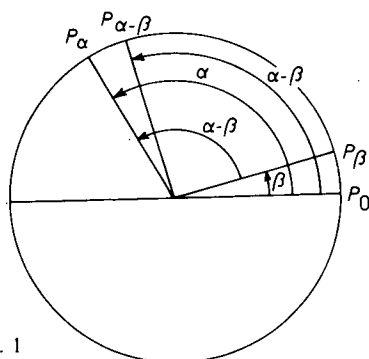


fig. 1

Dan volgt direct de afleiding volgens een deductieve redenering. Voor de leerling toch wel weinig gelegenheid om tot begrip en inzicht te komen. In de figuur is ook al niet duidelijk wat nu eigenlijk bepaald wordt. $\cos(\alpha - \beta)$ is de waarde van de x-coördinaat van het beeld $P_{\alpha-\beta}$ van het reële getal $(\alpha - \beta)$. Het lijkt gewenst om dit punt in de figuur erbij te tekenen (Zie fig. 1.) Het is echter van groter belang eerst eens b.v. het probleem $\cos \frac{1}{12}\pi$ aan de orde te stellen en dan misschien zelfs op twee manieren!

$$\cos \frac{1}{12}\pi = \cos(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi) \text{ of } \cos \frac{1}{12}\pi = \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi)$$

Motivatie bevorderend is het om te ervaren dat dit inderdaad hetzelfde resultaat oplevert!

Hierbij dan ook een figuur tekenen en daarbij ook de vector $\overline{OP}_{\frac{1}{12}\pi}$ en misschien zelfs wel de projecties op de x-as en y-as (fig. 2).

Nu met het inproduct aan de gang. In het boek wordt dit soort opgaven alleen aangeboden als *toepassing* van de formule, niet als *voorbereiding* op de formule! Vervolgens leiden we de formule voor $\sin \frac{1}{12}\pi$ af, via $\cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{12}\pi)$ met het inproduct, als voorbereiding op $\sin(\alpha - \beta)$.

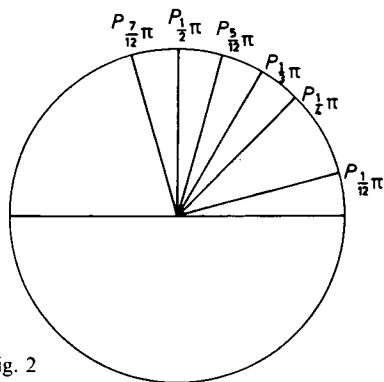


fig. 2

Tenslotte $\tan \frac{1}{12}\pi$ als quotiënt van $\sin \frac{1}{12}\pi$ en $\cos \frac{1}{12}\pi$.

Nu volgt analoog de afleiding van de gewenste formules voor $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ en vervolgens voor de optelling.

Keuze van vraagstukken.

Vraagstukken kunnen een verschillende rol spelen in het wiskundeonderwijs:

1 Opgaven als *instapprobleem*.

Een opgave die de behoefte aan de nieuwe leerstof voorbereidt, waardoor motivatie ontstaat. Een opgave zonder variabelen, b.v. een herleiding of oplossen van een vergelijking. Zo mogelijk is er verband met de vorige leerstof (oriënteren). Ideaal is dat het probleem ook relevant is in de wereld van de leerlingen.

2 Opgaven ter *voorbereiding* van nieuwe formule, stelling of algoritme.

Via enkele van zulke opgaven ontstaat de behoefte aan een algemene methode en vindt voor-oefening plaats voor het algemene geval. Er is dus steeds sprake van 'getallenvoorbeelden' (sorteren).

3 Opgaven ter *afleiding of bewijs* van nieuwe formule, stelling of algoritme.

In principe verloopt de oplossing van dit vraagstuk analoog aan die uit de voorbereidingsfase (via abstractie).

4 Opgaven ter *formulering of notering* van stelling, formule of algoritme. (expliciteren).

5 Opgaven ter *verwerking* van de nieuwe leerstof. Eerst opgaven die alleen met deze nieuwe stof worden aangepakt. Daarna complexere opgaven met integratie van vorige leerstof.

Instapprobleem.

In de fase van het *oriënteren* is het van belang dat de leerling enig zicht krijgt op het doel van de nieuwe leerstof, verband met de vorige leerstof ziet en deze actualiseert en gemotiveerd wordt voor de nieuwe leerstof. Aan het begin van een nieuw onderwerp is het daarom van belang een *probleem* aan te bieden ter oplossing. Het moet dan een concreet probleem zijn, een 'getallenvoorbeeld'. Het is duidelijk dat het aan te bieden probleem nooit het bewijs van een stelling of de afleiding van een formule of een algoritme kan zijn.

Voorbereiding.

Ter voorbereiding van het algemene bewijs kunnen voor het *sorteren* opgaven worden aangeboden die wat structuur betreft hetzelfde zijn als de te bewijzen stelling of formule. Daar er echter nog niet met variabelen wordt gewerkt kan de leerling het probleem beter aanpakken. Het gaat nu dus niet om een min of meer op zichzelf staand probleem ter bevordering van de motivatie, maar het gaat nu duidelijk om voorbereiding van het algemene geval. Het gaat niet meer om een concreet geval, maar om een 'verzameling of omgeving' van vergelijkbare gevallen.

Afleiding of bewijs.

Vervolgens komt dan de algemene afleiding of het algemeen geldige bewijs dat geheel analoog verloopt aan de bijzondere gevallen.

De ervaring met de bijzondere gevallen leidt tot het inzicht hoe in het algemene geval gehandeld moet worden, er ontstaat *abstractie*.

Formule voor: $\cos 2\alpha$.

Ook hier wordt in het boek de afleiding direkt ten tonele gevoerd. Als instap-probleem lijkt mij $\cos \frac{1}{12}\pi$ weer goede mogelijkheden bieden. Bovendien is er dan gelegenheid om tot je verwondering of je verrassing te zien dat er ook nu weer hetzelfde resultaat ontstaat. Uiteraard zal in een onderwijsleergesprek eerst geconstateerd moeten worden dat $\cos \frac{1}{6}\pi = \cos(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{12}\pi)$.

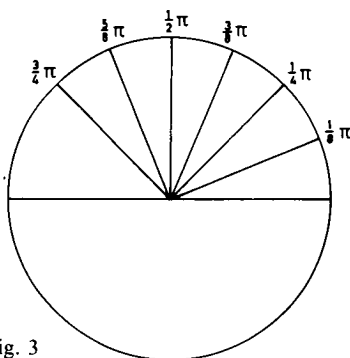


fig. 3

Ook $\sin \frac{1}{8}\pi$ via $\sin \frac{1}{4}\pi = \sin(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi)$ kan bijv. als voorbereiding dienen.

Evenzo $\cos \frac{1}{8}\pi$ via $\cos \frac{1}{4}\pi = \cos(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi)$, $\tan \frac{1}{8}\pi$ via $\tan \frac{1}{4}\pi = \tan(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi)$ met controle van $\tan \frac{1}{8}\pi = \sin \frac{1}{8}\pi : \cos \frac{1}{8}\pi$.

Een ongezochte gelegenheid om vaardigheid in breuken met wortels te herhalen.

Formule voor: $\sin p + \sin q$.

Als instapprobleem $\sin \frac{7}{12}\pi + \sin \frac{1}{12}\pi = \sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi) + \sin(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi) = 2 \sin \frac{1}{3}\pi \cos \frac{1}{4}\pi = 2 \sin \frac{1}{2}(\frac{7}{12}\pi + \frac{1}{12}\pi) \cos \frac{1}{2}(\frac{7}{12}\pi - \frac{1}{12}\pi)$.

Hierna de afleiding van $\sin p + \sin q$, waarbij we ook proberen p als som van twee reële getallen en q als verschil van twee reële getallen te zien. Na de voorbereiding is dit geen gegoochel meer voor de leerlingen.

$\sin p + \sin q = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$.

Uit $p = \alpha + \beta$ en $q = \alpha - \beta$ volgt $\alpha = \frac{1}{2}(p+q)$ en $\beta = \frac{1}{2}(p-q)$.

Als instapprobleem is ook goed bruikbaar: $\sin \frac{5}{8}\pi$ nadat eerst $\sin \frac{1}{8}\pi$ is berekend met de formule voor $\sin 2\alpha$ (zie boven). Immers (zie fig. 3).

$\cos \frac{6}{8}\pi - \cos \frac{4}{8}\pi = \cos (\frac{5}{8}\pi + \frac{1}{8}\pi) - \cos (\frac{5}{8}\pi - \frac{1}{8}\pi) = -2 \sin \frac{5}{8}\pi \sin \frac{1}{8}\pi = -2 \sin \frac{1}{2}(\frac{6}{8}\pi + \frac{4}{8}\pi) \cdot \sin \frac{1}{2}(\frac{6}{8}\pi - \frac{4}{8}\pi)$.

Aanpak van verwerkingsvraagstukken.

Hierbij gaat het om het leren onderscheiden in verschillende typen, in verschillende oplossingsmethoden. Het herkennen van verschillende typen is afhankelijk van de signalen die door het materiaal van het vraagstuk zelf, door de structuur, worden aangegeven. Eigenlijk ontstaat hier een nieuw leerproces. Het onderscheiden is dan weer het *sorteren* in verschillende soorten aanpak. Dit moet dan leiden tot *abstractie* van aanpak. Hierdoor ben je vervolgens in staat om sneller en gericht tot de juiste aanpak te komen bij nieuwe vraagstukken als je die aanpak *expliciteert*.

Als leraren hebben wij zelf een zeer intensief proces van sorteren doorgemaakt. Hierdoor hebben wij leren onderscheiden en zijn zo tot abstractie van aanpak en oplossingsmethoden gekomen. We hebben vervolgens voor onszelf geëxpliciteerd aan de hand van welke informatie we tot een bepaalde aanpak besluiten. Dit voltrekt zich bij ons zelf nu zo snel dat we het nauwelijks meer als zodanig herkennen. Leerlingen zeggen dan van ons: 'U ziet het direkt'. We zullen daarom de leerlingen wel moeten helpen om eveneens in zekere mate zo ver te komen. Daartoe zullen we het vraagstukkenmateriaal regelmatig moeten laten analyseren naar de informatie die van het materiaal zelf, van de structuur van de opgaven, uitgaat.

Niet alle leerlingen zijn in gelijke mate in staat tot zo een *aktief-structurende* aanpak. Dit hangt samen met de wijze van waarnemen. Leerlingen die een meer *globale waarneming* vertonen zijn bij de aanpak van wiskundevraagstukken meestal in het nadeel. Bij andere vakken of in andere situaties waar het bijvoorbeeld gaat om het reageren op sociale of emotionele aspecten van een situatie kunnen de laatsten tot betere resultaten komen. Uiteraard speelt ook de *motivatie* een rol. Zijn de leerlingen bereid om hun beschikbare energie in te zetten voor het oplossen van het probleem of zijn zij tevreden met een *moment-aanpak*?³⁾

Hoewel deze zaken dus min of meer in de persoonlijkheid van de leerling zijn verankerd is er ontwikkeling mogelijk. In ons onderwijs zullen we daarom ook het aanpakgedrag als een onderdeel van het leerproces moeten zien en daar tijd voor uittrekken.

Teneinde ook bij de aanpak van vraagstukken tot explicitering van aanpak-principes door de leerling zelf te komen, kan bijvoorbeeld in een onderwijs-leergesprek of in groepjes het volgende worden gedaan.

Het laten opstellen van een schema van verschillende oplossingsmethoden van behandelde vraagstukken. Uit het behandelde vraagstukkenmateriaal wordt dan geabstraheerd tot typen van aanpak.

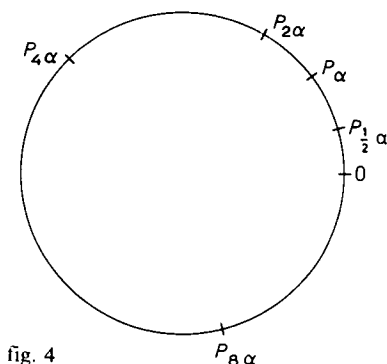
Een andere opdracht kan zijn om de leerlingen zelf in groepjes een proefwerk te laten ontwerpen dat representatief is voor de behandelde opgaven. Ook daarbij zal het vraagstukkenmateriaal dan gesorteerd worden, waardoor de

typen herkend kunnen worden. Vervolg van de opdracht kan dan zijn om bij elk van de typen de specifieke kenmerken expliciet te maken en daarop de aanpak te baseren.

Verwerkingsvraagstukken.

Nadat de formules in het boek zijn afgeleid op de traditionele wijze, volgen in het boek verwerkingsvraagstukken die alle van abstracte aard zijn.

In feite moeten steeds nieuwe formules worden bewezen. Dat is niet erg motiverend. Beter lijkt het mij nu eerst de formules te gaan toepassen voor concrete berekening. De aanpak van deze opgaven kan nl. beter eerst worden geoefend met getallenvoorbeelden.



Bijvoorbeeld als volgt:

a) Bereken: $\sin \frac{1}{2}\alpha$ en $\cos \frac{1}{2}\alpha$ als $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ en $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. (Het boek vraagt dit wel voor $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$).

Bereken evenzo:

$\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\sin 8\alpha$; $\cos 8\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$.

Het boek laat alleen de formules afleiden voor $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\sin 8\alpha$ enz. Eventueel kan na de voorbereiding met berekeningsvraagstukken alsnog het afleiden van de formules volgen.

1) H. Bosscher: Euclides nov. 1975, zie ook J. van Dormolen: wisk. vaardigheden, uitg. N.V. W. L. okt. 75

2) J. van Dormolen: Didaktiek van de wiskunde, Utrecht 1974

3) C. F. van Parreren: Informatie over leren en onderwijzen, Groningen 1972

Wiskunde-onderwijs anno 2000

HANS FREUDENTHAL

Utrecht

In ons land pleegt een nieuw benoemd hoogleraar zich aan zijn collegae voor te stellen met een oratie – ik deed het in november 1946. De titel was ‘5000 jaren internationale wetenschap’, waarmee ik natuurlijk de wiskunde bedoelde. Zowat tien jaar geleden begon ik over mijn afscheidscollege na te denken, en ik koos het onderwerp ‘50 jaren wiskunde’. Het ziet er bescheidener uit, maar dit was maar schijn, want die 50 jaren zouden doelen op de halve eeuw, die ik bewust als wiskundige heb beleefd. Hoewel ik, als het te pas kwam, rede en titel al heb aangekondigd, hoewel ik in mijn geest het geheel heb ontworpen, in alle details, gekruid met schittering, geestigheid en wijsheid, zal ik deze rede nooit houden en nog minder publiceren. Ondertussen ben ik door uiterlijke omstandigheden erachter gekomen wat scheef zat in de hele opzet. Immers als je al tien jaar, voor de tijd afgelopen is, over ‘50 jaren wiskunde’ gaat denken, zul je nooit recht laten wedervaren aan de laatste tien jaar. Feitelijk zal ook aan een deel van het verleden niet meer de verdiende aandacht te beurt vallen. ‘50 jaren wiskunde’ zou echt een arrogante titel zijn geweest. Hoe had ik me kunnen aanmatigen ook maar in de verte de periode 1925–1975 in de wiskunde met mijn eigen mathematische leven te identificeren? Er zijn, dunkt me, weinig wiskundigen geweest die zich echt tijdgenoten van een halve eeuw mathematisch leven hebben kunnen noemen, en ik ben zeker niet een hunner.

Niet mijn eigen wijsheid behoeftte me ervoor, mijn loopbaan met een bedriegelijk overzicht over een halve eeuw mathematisch leven te sluiten. Vijf jaar geleden begon ik een nieuw leven – U ziet, het is nooit te laat –, het leven met het IOWO. Een nieuw leven – het kan een bekering betekenen, maar dit zou overdreven zijn. Toch was het meer dan een verhuizing van de Uithof naar Overvecht. Het betekende een nieuw milieu, niet aardrijkskundig, maar menselijk – mensen, waarvan ik de meeste nooit eerder had gezien, en medewerkers op een gebied waar ik tot dan toe als enkeling had gewerkt.

Onderwijs, in ’t bijzonder in de wiskunde, was een van mijn eerste interesses. Van Hiele heeft vorig jaar in een artikel bij mijn 70e verjaardag opgediept, hoe ik als jong assistent en privaatchoortant aan de Universiteit van Amsterdam de

* Lezing op de Internationale Dag van het Wiskunde onderwijs – Vijf jaren IOWO – Afscheid als Hoogleraar-directeur van het IOWO. Uit het Engels vertaald.

moed had een seminarium over wiskunde-onderwijs aan te kondigen en te leiden. Had Van Hiele me niet aan deze haast vergeten trek in mijn verleden herinnerd, dan zou ik vast geloofd hebben dat mijn belangstelling voor onderwijs opkwam, toen ik begon mijn eigen kinderen te onderwijzen. Het is een feit dat ik gedurende de oorlog ruim de tijd en gelegenheid had, de hele literatuur over rekenonderwijs te bestuderen en al het materiaal te verzamelen, om er een boek over te schrijven. Waar het uiteindelijk bij bleef, was een voorrede van ruim 100 schrijfmachinepagina's. Een tijd geleden herlas ik het manuscript. Ik was verbaasd daar de hoofdlijnen van mijn denken over wiskunde-onderwijs terug te vinden, hoewel één fundamenteel idee nog ontbrak: de niveaus in het leerproces – iets dat ik later van de Van Hieles zou overnemen.

Mijn eerste uitstapje na Victory Europe Day was liftende van Amsterdam naar Rhederoord, naar de eerste na-oorlogse conferentie van de W.V.O., de Nederlandse sectie van New Education Fellowship, bijeengeroepen en georganiseerd door Kees Boeke – van alle 'Zauberberg' conferenties, die ik ooit mee maakte, de meest enthousiaste, die diepst betoverende.

De wiskunde werkgroep van dezelfde W.V.O. was de hoge school waar mijn ideeën over wiskunde-onderwijs in de dan volgende twintig jaren werden gevormd. Mijn levendigste herinneringen gaan terug naar twee van die groep, die niet meer leven, Tatjana Ehrenfest-Afanassjewa en Dieke van Hiele-Geldof. Laat ik allen uit deze groep, die mij heden door hun aanwezigheid eren, van deze plaats groeten.

In de jaren vijftig verwijdde mijn horizon zich. Van 1954 tot 1974 werkte ik in ICMI, de Internationale Commissie van het Wiskunde-onderwijs; met vrienden uit de hele wereld raakte ik betrokken bij internationale activiteiten voor het wiskunde-onderwijs, bijvoorbeeld de uitgave van Educational Studies in Mathematics. Het was dezelfde periode, die de historie zou kunnen ingaan als 'Opkomst en Ondergang van New Math'. Altijd wilden de mensen maar niet geloven dat ik het meende, wanneer ik ijverde tegen vernieuwing van wiskunde door nieuwe *leerinhoud*, zoals New Math. Een van mijn vrienden noemde mij de advocaat van de duivel. Een ander, die mij beter kende, antwoordde wijselijk en terecht: 'Hij is de duivel zelf.'

Van de oprichting van ICMI af aan is aan de schoolwiskunde verweten dat zij een eeuw of eeuwen bij echte wiskunde ten achter was. Felix Klein dacht het ravijn te kunnen overbruggen met 'schoolwiskunde van hoger standpunt'. In principe had hij gelijk, dunkt me. Hoewel, degene die de schoolwiskunde van een hoger standpunt hoort te zien, is dan de leraar en niet de universiteitsprofessor, en de bekwaamheid tot deze visie is een der dingen, die hij in zijn opleiding zou moeten verwerven.

Zoals U weet, heeft New Math zijn oorsprong te danken aan de lancering van de eerste Sputnik in 1957 en aan de pogingen van OECD om onderwijs technocratisch te beïnvloeden. Het is jammer, dat OECD na vijftig jaar ICMI zijn vertrouwen stelde in hen, die geloofden dat een eeuw achterstand door een eeuw leerinhoud kon worden overbrugd. Wiskunde is meer dan inhoud, wiskunde is een wijze van denken, en zich op de inhoud concentreren is de veiligste weg om te bereiken dat 'plus cela change, plus cela reste la même chose'.

Van begin af aan heb ik in de CMLW meegewerkt, de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, en sinds 1969 ben ik er voorzitter van. In deze periode heeft de visie op wiskunde-onderwijs van die commissie en van mezelf zich verbreed, om tenslotte kleuter- en basisschool te omvatten. De CMLW bestaat nu 15 jaar, twee derde van die tijd als werkgroep van enthousiaste amateurs en in het laatste derde ondersteund door het IOWO.

Vergelijkt men internationaal de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs sinds het begin van de jaren zestig, dan vallen bij het onze drie dingen op:

- ten eerste, hoge prioriteit voor heroriëntering van onderwijsgevenden,
- ten tweede, naar verhouding weinig invloed van de zogenaamde New Math in het voortgezet onderwijs, en geen invloed in het basisonderwijs,
- ten derde, een snel groeiend aantal leerlingen dat in het voortgezet onderwijs wiskunde kiest.

Zonder twijfel is het wiskunde-onderwijs bij ons door het werk van de CMLW beïnvloed hoewel veel minder dan we ons hadden voorgesteld en gewenst, en vaak averechts. Laten we eerlijk zijn, zo vergaat het nu eenmaal vernieuwingspogingen in het onderwijs overal ter wereld en in elk tijdperk.

Onderwijs moet veranderen omdat de maatschappij verandert. Vanaf onmiddellijk na de oorlog heb ik in talrijke commissies gezeten, in subcommissies, comité's en werkgroepen, om regering, universiteit, faculteit en andere lichamen te helpen adviseren. Ik zag tal van nieuwe wetsontwerpen, wetten, Koninklijke besluiten, reglementen de revue passeren – enkele die effect sorteerden, de meeste ineffectief of van averechtse uitwerking. Onderwijs is een geweldig systeem met zijn eigen wetten van reactie op, en immuniteit tegen, maatregelen van buiten, een systeem dat zijn eigen leven leidt. Het is allesbehalve ongevoelig, het is geweldig vatbaar voor invloeden, als je maar weet waar en hoe, maar niemand weet het. Of veeleer: zij die het weten, weten niet dat ze het weten, en zij die denken dat ze het weten, kunnen zich schromelijk vergissen.

De geschiedenis van het onderwijs is er een van vernieuwing. We weten heel wat van *hoe* vernieuwingen zich voltrekken en *waarom*; we weten weinig over hoe je vernieuwing stuurt. De lacunes in onze ervaring kunnen niet door theoretici achter het bureau gevuld worden. Vernieuwing van opvoeding en onderwijs is een leerproces van de maatschappij zonder leermeester, of veeleer waar iedereen leermeester is van zichzelf en van alle anderen.

De enige manier, om opvoeding en onderwijs te vernieuwen is, het eerlijk te proberen, en het middel om het te volbrengen, is weer opvoeding en onderwijs. De opvallendste trek van IOWO's benadering is integratie, leerplanontwikkeling als interactie van allen die bij het leerproces betrokken zijn,

- leerlingen, onderwijzenden, ouders, opleiders, her- en bijscholers, studenten en hun leraren, begeleiders, innovatoren, en, lest best, leerplanontwikkelaars.

Zulk een benaderingswijze is een doorn in 't oog van allen, die van zuivere structuren houden, met indelingen en onderverdelingen, schotjes en laadjes. Ik geef toe, structuur is nodig, dringend nodig, vooral na de jaren van wilde groei, die onze verzorgingsstructuur heeft gekend. Wilde groei kan door bulldozers ingetoomd worden, of door antibiotica. Een andere manier is er een Frans

Park van te maken, met fraaie structuren van geknipte en gekapte bomen en bosjes, en tenslotte is er nog die van de liefdevolle hovenier, die onkruid weet te onderscheiden van bloemen, groente en vruchtdragende gewassen. Maar, ik geef toe, opvoeding van mensen is geen tuinieren, en het onderscheid tussen goed en kwaad is moeilijker in opvoeding dan in land- en tuinbouw.

Structuur is een dringend vereiste, vooral als een vehikel van machtige denkbeelden in opvoeding en onderwijs. Een vehikel, maar dan ook niet meer dan dat. Of iets in een voorbedachte structuur past, kan nimmer een criterium voor deugdelijkheid zijn. In een van zijn befaamde nota's maakt Minister van Kennede onderscheid tussen *ontwikkeling* als een proces binnen een heersende structuur en *innovatie* als de heersende structuren *doorbrekend*. Leerplanontwikkeling, zoals door het IOWO begrepen, is van het tweede soort, een groeiende boom, die met zijn wortels en takken, onder en boven het oppervlak alle grenzen schendt die op het oppervlak netjes zijn uitgetekend. Dit is niet zomaar beeldspraak. Integratie was en is IOWO's beginsel en recht van bestaan. Laat ik van deze plaats allen uit het veld groeten, die enthousiast met het IOWO samen hebben gewerkt en die het willen blijven doen in alle omstandigheden. We hebben samengewerkt en iets tot stand gebracht – laten we dit in alle nederigheid uitspreken zolang het nog kweken en wieden is. Maar iets mogen we stellen: We hebben één goed ding geleerd om het aan anderen over te brengen – integratie van het onderwijsveld. Ik hoop en vertrouw dat de nieuwe SLO deze op integratie gerichte traditie van het IOWO zal voortzetten. In de naaste toekomst zie ik SLO niet als nieuw bureaucratisch lichaam, maar als een inspirerende kracht in het onderwijsveld.

IOWO's benadering is nog in een andere dimensie integraal: Wiskunde is zo breed mogelijk geïnterpreteerd, met wortels en takken in elk ander vakgebied en in het leven van het kind, en dat brengt me tot het eigenlijke onderwerp van deze lezing.

Enkele maanden geleden toen de medewerkers van het IOWO de discussie over het programma van deze dag inzetten, vroeg men mij, er een lezing toe bij te dragen met de titel 'Wiskunde-onderwijs in het jaar 2000'. Natuurlijk, wie een oratie over '5000 jaar internationale wetenschap' hield en een afscheidscollege '50 jaren wiskunde' heeft beraamd, zou niet vervaard mogen zijn voor zo'n kleintje als 'Wiskunde-onderwijs in het jaar 2000'. Desniettemin weigerde ik. Zou het niet het toppunt van arrogantie zijn? Toen begon ik na te denken, en het viel me op, dat je, wanneer je over opvoeding en onderwijs denkt, altijd over de toekomst denkt. Het jaar 2000, is het te ver weg, te ambitieus ver weg? Neen, het is te dichtbij.

Enkele maanden geleden bladerde mijn vrouw in een oud tijdschrift en vond daar een rapport over een lezing die ik in 1946 had gehouden. Het was een vreemde gewaarwording. Geen voorspelling, die uitgekomen was – neen. Ik zou zeggen: iets wat toen een diepe gedachte leek en inmiddels een trivialiteit is gebleken. Zulks is trouwens de gang van zaken ook in de wiskunde geweest van de eerste beginselen af aan, de gang van zaken ook in opvoeding en onderwijs, en het is een van de redenen waarom wiskunde en onderwijs zo nauw verbonden zijn.

Tallose malen is mij gevraagd, waarom er een instituut als het onze voor de wiskunde bestaat en voor geen ander vak. We zijn eerder begonnen – zei ik. Hoeveel eerder? In 1971, toen IOWO werd opgericht? Neen. In 1961, toen de CMLW werd ingesteld? Neen. In 1908 toen door Felix Klein's activiteit ICMI tot stand kwam? Neen. In de 19e eeuw, toen de drie prominente Duits sprekende pedagogen, Herbart, Pestalozzi, Froebel wiskundigen waren? Neen. Wij zijn $2\frac{1}{2}$ duizend jaren eerder begonnen, precieser ongeveer 400 v. Chr. Denk erover, de eerste les, die we uit geschiedenis en literatuur kennen, is de wiskunde-les die Socrates aan Menon's slaaf doceerde – de socratische les.

Maar hè, zult U zeggen, wat deed U dan ondertussen, al die $2\frac{1}{2}$ duizend jaar? Wel, gedurende 2500 jaren kreeg de maatschappij al het wiskunde-onderwijs dat die maatschappij verdiende. Maar niet precies. De mensen krijgen altijd onderwijs dat een generatie ten achter is, te weten het generatieverschil van onderwijzenden en onderwezenen, en als men over onderwijs nadenkt, denkt men over wat er over een generatie na heden zal geschieden.

Daarom is 'Wiskunde-onderwijs in het jaar 2000' een te kort bestek. Het moet een generatie zijn, een derde van een eeuw, 2010 in plaats van 2000. Maar 2010 is geen rond getal. Laat ik 2000 zeggen, als ik 2010 bedoel.

Wat nu te voorspellen? Hoe zal het wiskunde-onderwijs er in 2000 uitzien? Er is een simpel antwoord. Er is geen wiskunde-onderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer, wiskunde geheten, geen wiskundeles op de rooster, geen wiskunde-boekje om te onderwijzen. Zeg niet: "de advocaat van de duivel". Ik ben de duivel zelf.

Als ik terugkijk op mijn activiteit bij het IOWO en U me vraagt wat ik denk dat mijn belangrijkste bijdrage was, dan zeg ik: hun met mijn gezag als wiskundige garanderen dat hetgeen zij aan het ontwikkelen waren, echte wiskunde is, dat om jezelf als wiskundige waar te maken, je geen minderwaardigheidscomplexen bij anderen hoeft te kweken door middel van verzamelingenleer, propositie-calculus, groepentheorie, vectorruimten en andere hoogdravende onverteerde theorie, dat je wiskunde overal kunt ontdekken, met je blote oog en je gezond verstand, dat het het kenmerk van wiskunde is, zo voor zich zelf te spreken, dat je je niet hoeft uit te sloven, om anderen ervan te overtuigen dat het waard is, om te kennen, te leren, te onderwijzen. Dit nu is het soort wiskunde dat we in Wiskobas zijn begonnen te ontwikkelen en dat Wiskivon gaat voortzetten. Mijn bescheiden verdienste is het geweest het af te stemmen als echte wiskunde.

Als wiskunde is het zo echt en zo overtuigend dat ik er zeker van ben dat het in de toekomst wordt onderwezen. Maar tegelijkertijd en om dezelfde redenen is het het soort dat je niet als losstaand vak kunt onderwijzen. Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademen, in een geïntegreerd onderwijs. In 't algemeen vormend onderwijs zal er in 2000 meer wiskunde worden opgedaan dan ooit tevoren, al zal het niet als afzonderlijk vak onderwezen worden – tenzij op hogere leeftijden, in gespecialiseerd onderwijs, waarvan dan misschien ook nog meer kinderen dan nu zullen profiteren. Vraag dan niet hoeveel wiskunde een kind kan slikken. Vraag wel op welke wijze wiskunde in het onderwijs

kan bijdragen tot de menselijke waardigheid van het kind.

Het is voor mij een geweldige, tot diepe dankbaarheid verplichtende ervaring geweest, dat gedurende de laatste vijf jaren, de IOWO-jaren, een groep van jongeren, gemiddeld half zo oud als ik, mij als leidsman en raadgever hebben aanvaard. Het was een wonderbaarlijk leerproces van vijf jaar – het komt mij voor, nog meer voor mij, de oude man, dan voor U. In allerlei verhaaltjes heet ik de vader van het IOWO. Daar klopt niets van. Als ik iets was, dan was ik de grootvader. Denk er over na, er schuilt méér wijsheid in wat een grapje lijkt.

Als een kind plotseling ziek wordt en er is geen dokter te bereiken, als het zoek is en het wordt steeds maar later, en het is jouw kind, en als U ooit vader of moeder was, dan weet U wat dit betekent. Als U grootouder bent, hoort U wel de volgende dag per telefoon of volgende week als U ze bezoekt, wat er aan de hand is geweest en hoe alles zich oploste, en dat is dan het verschil tussen ouders en grootouders.

IOWO is niet ziek, het voelt zich zo lekker als altijd of nog lekkerder. Het is niet zoekgeraakt, U ziet het in functie. Er dreigde gevaar, althans het leek boven ons hoofd te zweven. Een onweerswolk dreef over en ik hoop voorgoed. Terecht? U weet het verschil tussen ouders en grootouders – ik had het er net over. Binnen enkele weken zal ik wel horen hoe alles op zijn pootjes terecht kwam. Moet ik hier de aarzelingen, de bezorgdheid van IOWO's ouders vertolken? Ik heb er een etmaal mee geworsteld. Deze lezing was een boodschap van vertrouwen. Ik koester een diep geloof in mensen, in de jeugd, in het jaar 2000, dat de meesten Uwer nog zullen beleven. Mijn laatste woorden moeten geen spoor van twijfelingen doen weerklinken. Waar het op aankomt, is of de kinderen en het onderwijs mogen oogsten wat het IOWO in vijf jaren tijds heeft gezaaid en geplant. Ik hoop en vertrouw dat dit zal geschieden.

Wat er dan ook moge gebeuren, in het jaar 2000 is er toch al geen wiskunde-onderwijs meer, dankzij het IOWO of welk instituut dan ook het baanbrekende werk voortzet. Maar denk erom, wij zijn 2500 jaar eerder begonnen en dat betekent een uitdaging: Beter werk, meer kritiek en meer verantwoordelijkheids-besef.

ontvangen boeken

H. J. Jacobs e.a., *Moderne wiskunde* deel 9 VWO, derde herziene druk, 368 blz., f35,25. Noordhoff-Wolters, Groningen 1976.

Edu WIJDEVELD

Utrecht

Op haar wiskunde-proefwerk kreeg Jeske (brugklas) de volgende opgave:

‘Bepaal de oplossingsverzameling van de vergelijking:

$$-(-2+x)+(2+x) = 4; \quad x \in \mathbb{Q}.$$

Ze had de opdracht als volgt uitgevoerd:

$$2-x+2+x = 4$$

$$4+0 = 4$$

$$4 = 4; \text{ antwoord: } \mathbb{Q}.$$

Dat ze als een van de weinigen in de klas dit goede antwoord had – een ster in de wiskunde is ze niet –, verklaarde ze zelf door te zeggen: ‘ik dacht gewoon aan dat vraagteken dat jij er altijd bijzet en dan spreekt het vanzelf’.

Dat ‘vraagteken’ is de interrogatieve kwantor, die professor Freudenthal introduceerde in ‘Exacte Logica’ (2e druk; pag. 77).

De grote waarde van het gebruik van deze kwantor, kwam met bovenvermeld voorval nogmaals duidelijk aan het licht*).

Zeker in een fase, waarin het gaat om het vormen van inzicht in wat het oplossen van een vergelijking/ongelijkheid feitelijk betekent, kan deze interrogatieve kwantor een zeer verhelderende rol spelen.

Een tweede belangrijke faktor daarbij, is de hantering van het begrip ‘keuze-verzameling’ – d.i. de verzameling waaruit de waarden van de betrokken variabele gekozen kunnen worden.

Vooraf in het begin, is deze uitdrukking veel doorzichtiger dan een formulering als: ‘x is een variabele over ...’.

Voorbeeld:

1 (‘Moderne Wiskunde’; deel I; 3.2 opgave 7c)

‘In de volgende open bewering is x een variabele over $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

* Zie bijv. ook: Kindt, Maassen, Van Oosten: ‘Moderne algebracursus’.

... x is kleiner dan 6'.

Van meet af aan herschreven we een dergelijke opdracht tot:

keuzeverzameling: $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$$\{x \in C \mid x \text{ is kleiner dan } 6\} = \{1, 3, 5\}$$


open bewering



oplossingsverzameling

Daarbij werd de opdracht afgerond met:

verwoording: 1, 3 en 5 zijn de elementen uit de keuzeverzameling, die de open bewering 'x is kleiner dan 6', wáár maken.

notatie: $\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \circ$

2 ('Moderne Wiskunde; deel I; 11.1 opgave 7d)

‘Los de volgende ongelijkheden op $x \in \mathbb{Q}$

$$\dots\dots 3(x+1)+2(x+4) > 31'.$$

Herformulering:

Herleid: $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3(x+1) + 2(x+4) > 31\} = \dots$



keuzeverz.



ongelijkheid



oplossingsverz.

Oplossingstechniek:

? $3(x+1)+2(x+4) > 31$ ('Voor welke $x \in \mathbb{Q}$ geldt: ...)

 $x \in \mathbb{Q}$

$$? \quad 3x + 3 + 2x + 8 > 31$$

 $x \in \mathbb{Q}$

? $5x + 11 > 31$

 $x \in \mathbb{Q}$

? $5x > 20$

 $x \in \mathbb{Q}$

? $x > 4$

 $x \in \mathbb{Q}$

Het antwoord – een zelf-evidentie – werd vervolgens bovenin genoteerd:

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 4\}$$

N.B. Ook de rol van de lege verzameling en de volledige keuzeverzameling als mogelijke oplossingsverzamelingen, kwamen door deze notatiewijze duidelijker tot hun recht:

? $x < 0$; oplossingsverzameling: $\emptyset$

 $x \in \mathbb{N}$

? $x \geq 0$; oplossingsverzameling: $\mathbb{N}$

 $x \in \mathbb{N}$

Toen in een later stadium het inzicht voldoende gevestigd was, werd de notatie 'slordiger'.

Zo werd de interrogatieve kwantor alleen nog gebruikt, als de aperte noodzaak daartoe bleek, zoals bijvoorbeeld bij eerderevermeld proefwerksommetje:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Q} \mid -(-2+x) + (2+x) = 4\} &= \dots \\ -(-2+x) + (2+x) &= 4 \\ 2-x+2+x &= 4 \\ ? 4 &= 4 \\ x \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Dat een juiste beantwoording van deze laatste vraag, met de gegeven notatie nog niet 'vanzelfsprekend' is, zoals Jeske vond, staat vast. Maar dat die formulering een beter inzicht in het wèzen van die vraag bevordert, had ze zeker aangetoond!

Mededeling over de Leesportefeuille

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren stelt zijn leden in de gelegenheid kennis te nemen van buitenlandse (en enkele Nederlandse) tijdschriften, die onder de belangstellenden circuleren. Momenteel zijn er 11 tijdschriften in circulatie, nml:

- a Elemente der Mathematik, 6 maal per jaar, 7 lezers.
- b The Mathematical Gazette, 4 maal per jaar, 7 lezers.
- c The Mathematics Teacher, 8 maal per jaar, 15 lezers.
- d De Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 8 maal per jaar, 4 lezers.
- e Paedagogische Studiën, 12 maal per jaar, 4 lezers.
- f Mathematische und Physikalische Semesterberichte, 2 maal per jaar, 4 lezers.
- g School Science and Mathematics, 9 maal per jaar, 4 lezers.
- h Wiskunde en Onderwijs; Mathématique et pédagogie, beide 4 maal per jaar, 7 lezers.
- i Mededelingen van het Wiskundig Genootschap, 9 maal per jaar; Nieuw Archief voor Wiskunde, 3 maal per jaar, 4 lezers.
- j Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, 5 maal per jaar, 2 lezers.
- k Praxis der Mathematik, 12 maal per jaar, 14 lezers.

Overwogen wordt, als er belangstelling voor is, nog enkele tijdschriften in de portefeuille op te nemen, nml:

- l Educational Studies.
- m Mathematics Teaching.
- n NIKO.
- o Didaktik der Mathematik.
- p Der Mathematik Unterricht.

Nog steeds geldt: het lesgeld bedraagt voor één tijdschrift f 2,50 per jaar, bij meer tijdschriften f 2,— per jaar voor elk tijdschrift; i) is gratis. Wel verplicht men zich om het tijdschrift na één week door te sturen, zodat men nog een aantal malen per jaar de portokosten – meestal (nog) f 1,70 – moet betalen.

Om deelnemer te worden gireert men, onder vermelding der nummers, het verschuldigde bedrag op nr. 572855 van ondergetekende. Men komt dan op de deelnemerslijst en ontvangt, na kortere of langere tijd, zijn tijdschrift ter lezing. Wat betreft de nieuwe tijdschriften het volgende: daarvoor nog geen betaling maar even een kaartje naar ondergetekende. Bij voldoende liefhebbers ontvangt men dan alsnog bericht. Natuurlijk kan men eventueel ook een wijziging opgeven, zodat sommige reeds circulerende tijdschriften, waarvoor de belangstelling gering is, misschien beter kunnen vervallen.

Dr. A. J. E. M. Smeur
Dennenlaan 17
Dorst 4344

De matrices van spiegeling en rotatie nogmaals

E. C. BUISSANT DES AMORIE

Amstelveen

In een van de voorgaande afleveringen van Euclides (jg. 51, blz 401–402) geeft collega J. Roelofsen uit Apeldoorn een eenvoudige afleiding voor het vinden van de matrix voor de spiegeling in een lijn door θ en voor de rotatie om θ .

Behalve het geven van de afleiding van deze matrices verdient het ook aanbeveling de leerlingen een manier te leren om het resultaat snel te kunnen terugvinden. Zo u wilt een ezelsbrug.

Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

De beeldvector van $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}$, die van $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix}$

De kolomvectoren van de matrix zijn de beelden van de eenheidsvectoren.

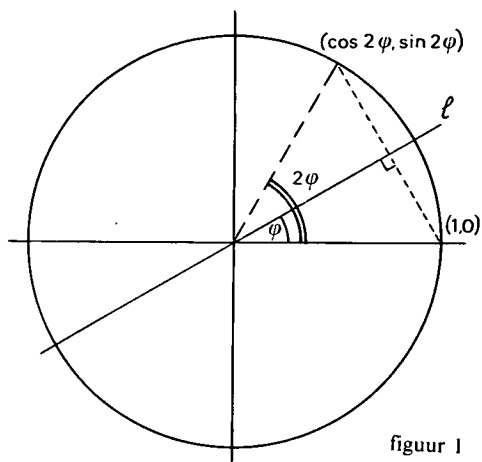
Met behulp van de eenvoudig te schetsen figuurtjes 1, 2 en 3 kan men de resultaten zeer lug terugvinden.

Voor de spiegeling:

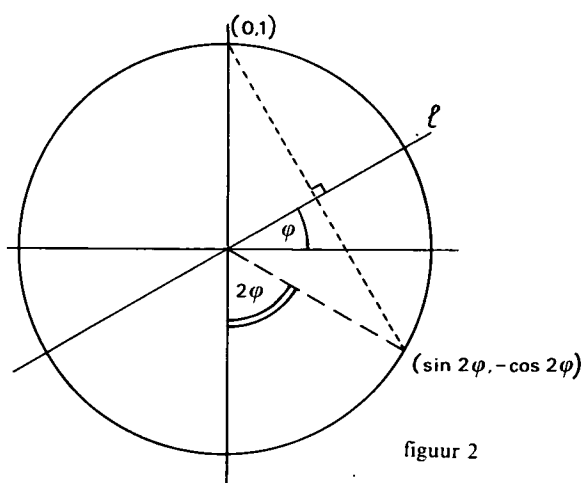
$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} \text{ is de beeldvector van } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sin 2\varphi \\ -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \text{ is de beeldvector van } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Voor de rotatie:

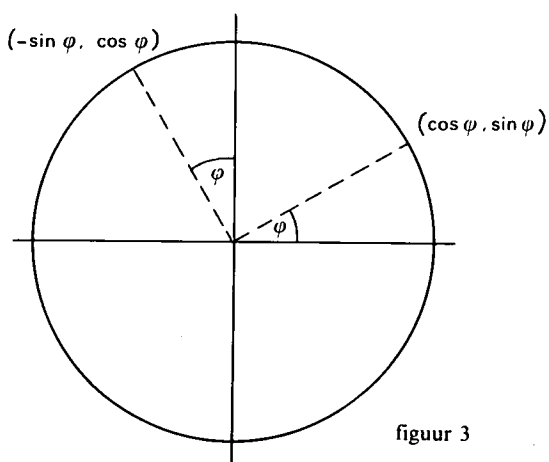
$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ is de beeldvector van } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ is de beeldvector van } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



figuur 1



figuur 2



figuur 3

Rectificatie definitie differentiaalvergelijking

P. G. J. VREDENDUIN

Doorwerth

In Euclides 51, no. 9, blz. 355–362 vindt men een artikel van H. J. K. Moet getiteld ‘Over differentiaalvergelijkingen’. In dit artikel wordt op blz. 356 uiteengezet, hoe volgens de schrijver de terminologie van het vwo met betrekking tot de differentiaalvergelijkingen is. Hetgeen hij zegt, berust echter helaas op een misverstand, dat ik al eerder tegengekomen ben. Omdat dit misverstand hinderlijke consequenties heeft bij het redigeren en normeren van eindexamenopgaven, zou ik het gaarne zo spoedig mogelijk uit de weg willen ruimen.

Ik citeer eerst de tekst op blz. 356.

‘De algemene gedaante van een differentiaalvergelijking is $F(x, y)dy + G(x, y)dx = 0$, hierin zijn F en G continue functies met een gebied D als gemeenschappelijk domein. Punten $(x, y) \in D$ waarvoor geldt $F(x, y) = 0$ en $G(x, y) = 0$ heten singuliere punten. Punten van D die niet singulier zijn heten regulier.

Een lijnelement van een differentiaalvergelijking is een drietal $(x, y, F(x, y) : -G(x, y))$ waarin $(x, y) \in D$ een regulier punt is. Het punt (x, y) heet drager van het lijnelement en $F(x, y) : -G(x, y)$ heet de richting van het lijnelement.

Een integraalkromme is een kromme die:

a *uitsluitend uit reguliere punten bestaat*;

b in elk van zijn punten raakt aan het lijnelement waarvan dat punt drager is.’
In dit citaat zijn door mij twee passages recursiveerd. Om deze passages gaat het.

De juiste tekst luidt:

Een lijnelement van een differentiaalvergelijking is een geordend drietal $(x, y, F(x, y) : -G(x, y))$.

Een integraalkromme is een kromme die in elk punt raakt aan een lijnelement waarvan dat punt drager is.

Persoonlijk zou ik liever zeggen:

Een integraalkromme van een differentiaalvergelijking is een kromme waarvan alle raaklijnelementen aan de differentiaalvergelijking voldoen.

In tegenstelling tot hetgeen Moet beweert, voldoen dus alle lijnelementen in de singuliere punten aan de differentiaalvergelijking. En verder mag een integraalkromme gerust singuliere punten bevatten.

Kies ter toelichting een eenvoudig voorbeeld:

$$y dx - x dy = 0$$

Singulier punt (0, 0). Integraalkrommen alle lijnen door de oorsprong, dus alle lijnen $y = mx$ en de lijn $x = 0$. Het zou wel rampzalig zijn, als we door een ongelukkige keuze van onze definities moesten zeggen, dat de integraalkrommen alle open halve lijnen zijn die de oorsprong als grenspunt hebben. Of elke lijn door de oorsprong met uitzondering van de oorsprong zelf. Deze rectificatie heeft geen invloed op de strekking van het artikel van Moet. Enkele kleine correcties zijn nodig. Zo zal op blz. 361 het folium van Descartes zelf integraalkromme zijn en niet de lus zonder het punt (0, 0), maar van belang is dit niet. Ik hoop dat het misverstand nu definitief uit de wereld is.

Met ingang van het meinummer zullen de adressen van de auteurs van artikelen op de achterzijde van 'Euclides' worden vermeld.

De redactie

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij die zich in het jaar 1977 wensen te onderwerpen aan de examens ter verkrijging van de hierna genoemde akten – zonder toezending van andere bescheiden zich vóór de vermelde datum op de aangegeven wijze dienen aan te melden.

wiskunde m.o., akte wiskunde m.o. A

wiskunde m.o., akte wiskunde m.o. B

niet per briefkaart

vóór 1 mei 1977 door storting van f 60,— op giro 172007 ten name van de voorzitter van de commissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 's-Gravenhage, met vermelding van *volledige* naam en adres van de kandidaat en de mededeling *m.o. A* of *m.o. B*.

Namens de minister,
A. Th. Eijssenring.

8e Benelux Congres voor de Geschiedenis der Wetenschappen

Bergen op Zoom 15, 16, 17 april 1977.

Onder auspiciën o.a.:

het Genootschap voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek.

Betreffende de Wiskunde zijn er de volgende lezingen te beluisteren:

Prof. Dr. P. P. Bockstaele: De beoefening van de Wiskunde in de Nederlanden van omstreeks 1750 tot 1830.

Prof. Dr. E. M. Bruins: De ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs Europees gezien.

Nadere informatie te verkrijgen bij

Mevr. Drs. M. Fournier

Helmhof 36

Alphen a.d. Rijn.

Euclides

Inhoud van het vijfde tiental
jaargangen

1965-1975

Wolters-Noordhoff bv Groningen

ARTIKELEN

J. P. ALDERSHOF, Werkstukken voor het vak wiskunde	47	10
„ Schoolonderzoek in Mavo-4.	48	64
W. AMSE, Analytische meetkunde met translaties	45	133
„ Differentialen en kettingregel	46	19
„ Een niet-aanschouwelijke introductie van de be- grippen limiet en continuïteit	46	337
„ $\int_a^x f$ is op $[a, b]$ een primitieve van f als f continu is op $[a, b]$	46	162
IR. S. M. ARGELO, Test en enquête computerkunde	45	65
C. A. VAN BAALEN, Een ander montessori-geluid	45	129
„ Experimenten met projektonderwijs	50	16
P. C. BAAYEN, Opmerkingen over de verzamelingentheoretische topologie	41	33
DRS. H. C. G. C. BALEMANS: De normale verdeling voor n stochas- tische variabelen	42	293
PROF. DR. J. F. BENDERS, Enkele aspecten van de wiskundige op- timalisering	43	241
M. G. BEUMER, ε , δ en de rekenwijze van Horner	44	144
PROF. DR. F. VAN DER BLIJ, De stereometrie is dood. Leve de meetkunde van de ruimte	50	161
DRS. D. DE BOER, Wacht Mijnheer van Dalen nog steeds op antwoord?	50	359
W. BOLT, Economie en wiskunde	46	369
B. BOKHORST, Ringen met slagen	44	311
„ Het symmetrisch verschil van verzamelingen.	45	59
J. N. BOSMAN, Nieuw wiskunde-onderwijs in oude lokalen	47	69
DR. G. BOSTEELS, Gelijkvormige matrices	46	53
„ Restklassen modulo p	46	381
„ Euler-Möbius	50	393
PROF. DR. O. BOTTEMA, Verscheidenheden		
LX. Een verwantschap van de achtste graad	41	86
LXI. Wiskundigen over zichzelf	41	177
LXII. Kaarten leggen	41	271
naschrift	42	41
LXIII. Een kwestie van wrijving	41	309
LXIV. Schommelen	42	23
LXV. Wis- en weerkunde	42	116
LXVI. De snelheid bij de beweging van Kepler	42	182
LXVII. Frans van Schooten aan Christiaan Huygens	42	204
LXVIII. Een vierhoek in een vierhoek	42	236
LXIX. Een bijzondere boldriehoek	43	24
LXX. Elementary, dear Watson	43	164
LXXI. Over sommen van kwadraten van projecties van ribben van veelvlakken	43	195
LXXII. De ladenkastjes van Bertrand	43	229

LXXIII. De uiterste waarden van een lijnstuk . . .	44	20
LXXIV. Een ongelijkheid voor twee gelijkvormige driehoeken	44	107
LXXV. De gemengde oppervlakte van twee drie- hoeken	44	304
LXXVI. Een probleem van Pieter Nieuwland . . .	45	105
LXXVII. Een scheve stangenvierzijde	45	267
LXXVIII. Euler geometer	46	97
LXXIX. De voetpuntsirkels van een driehoek . . .	46	265
LXXX. Op dezelfde dag jarig	46	329
LXXXI. Hoe schommelt een weegschaal?	46	337
LXXXII. Variaties over een formule	47	5
LXXXIII. De cosinussen van de hoeken van een driehoek	47	61
LXXXIV. De zwaartepunten van een simplex . . .	47	206
LXXXV. Om het punt van Lemoine	48	19
LXXXVI. Gelijke hoektransversalen in een drie- hoek	48	222
LXXXVII. Michel Chasles of de tragedie der goed- gelovigheid	48	249
LXXXVIII. Russell vertaald	49	64
LXXXIX. Beweging langs een lemniscaat	49	150
XC. Vergissen is menselijk	49	228
XCI. Evenwicht door beweging	49	337
XCII. Drie op een rij	50	24
XCIII. Ingeschreven driehoeken	50	363
„ Zes punten op een cirkel	44	235
DR. J. S. TEN BRINKE, Moedertaalonderwijs en toch geen 'Neder- lands'	45	327
DRS. H. G. B. BROEKMAN, Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	46	8
„ Differentiatie in het onderwijs	46	281
„ The Association of Teachers of Mathematics (A.T.M.)	50	321
„ Mogelijkheden voor vaksecties	50	368
DRS. L. VAN DEN BROM, Graad en/of radiaal	42	53
„ Als $l_1 \perp l_2$ dan $m_1 m_2 = -1$?	44	257
„ Gelijkwaardig $\Leftrightarrow$ ekwivalent?	44	130
„ $\pm$	44	296
„ De som van t_1	44	98
„ Wij zijn niet zo zuiver in de leer	44	300
„ Rij en reeks	45	263
„ Soroban contra minicomputer	46	131
„ Dubbele produkten insplitsen	49	19
„ Het deelbaarheidskenmerk van Pascal	49	95
„ Ere wie ere toekomt	50	61

DR. P. BRONKHORST, Spitsvondigheden in de klassieke getallen-		
theorie	42	12
PROF. DR. N. G. DE BRUYN, Modernisering leerplan wiskunde	43	260
„ Programmeren van de pentamino-puzzle	47	90
DR. W. BURGERS, Groepen van eindige orde	41	225
„ Een experiment in VIb. Lineaire transformaties .	42	209
„ Twee vectorstellingen	46	306
„ Lineaire transformaties en wijziging van het assen-		
stelsel	47	55
„ Gelijkvormige matrices	48	355
„ Sluitingen	49	27
„ Over het aantal afbeeldingen van V op W	49	214
PROF. DR. J. S. CRAMER, Wat moet een econoom van de wiskunde		
weten?	45	49
D. CRAWFORTH, What is a quadrilateral?	44	111
DR. D. VAN DALEN, Logica en formele theorieën	48	384
DRS. J. VAN DORMOLEN, Geen graden, maar ook geen radialen .	42	246
„ De nutteloosheid van venn-diagrammen	43	273
„ Criteria voor de ordening van leerstof	48	161
„ Naar een nieuw onderwijsprogramma voor de wis-		
kunde	46	1, 121
„ Grootheden	46	363
„ Het bewijs door volledige inductie	47	147
„ De familie der cos-achtigen	47	1
„ Over het leren begrijpen wat een bewijs is . . .	50	247
C. W. DORNSEIFFEN, De stelling van Whittaker voor een keplerse		
beweging	42	43
DRS. A. G. M. DORRESTEIJN, DRS. J. J. P. Olgers, Alle hoeken het		
hoekje om? ofwel: 'slorde'-ge meetkunde	48	247
PROF. DR. H. J. A. DUPARC, Nodig en voldoende, onnodig en on-		
voldoende	41	305
„ De wiskunde in de oudheid	45	41
„ Gedachten rondom discrete wiskunde	46	27
PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS, De plaats van de geschiedenis in de		
studie der wiskunde	42	1
PROF. DR. M. EUWE, Kennis van computer en automatisering als		
vak bij het middelbaar onderwijs	42	257
A. ENGEL, Systematic use of applications in mathematical teaching	44	65
DR. IR. J. S. FOLKERS, Het lesrooster als beslissingsprobleem . .	43	209
PROF. DR. H. FREUDENTHAL, Functies en functie-notaties . . .	41	299
„ Modernisering leerplan wiskunde	43	321
„ Verzamelingen in het onderwijs	45	321
„ Samen jarig	46	177
„ Kanttekeningen bij de nomenclatuur	47	139
„ Nog eens nomenclatuur	47	181
„ Nieuwe niet-euclidische meetkunde	48	13
„ Nomenclatuur en geen einde	49	53
„ Waarschijnlijkheid en statistiek op school	49	245

„	Wat is meetkunde?	50	151
PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN,	Projectieve grondslagen van de leer der translaties en spiegelingen in de vlakke meetkunde	45	91
F. GOFFREE,	Voorzichtigheid met venndiagrammen?	44	86
„	TREFFERS, WIJDEVELD, Wiskunde op de basis-school (I)	46	309
„	TREFFERS, WIJDEVELD, Wiskunde op de basis-school (2, 3).	47	45, 161
„	Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek in het basisonderwijs	49	278
„	Inleiding en leeswijzer	50	129
„	Verzamelingenleer, moderne wiskunde en modern wiskunde-onderwijs	50	259
DR. J. T. GROENMAN,	Isotrope coördinaten	41	152
„	Vierhoeken in en om vierhoeken	42	144
„	Over vierhoeken en merkwaardige punten	44	243
„	Isotrope coördinaten II	49	193
„	Toch maar y'' ?	50	388
D. VAN DEN HAAK,	Het wiskunde onderwijs op het hellende vlak	50	381
H. VAN DER HAK,	De doelstellingen van het wiskundeonderwijs	45	289
J. J. HARKEMA,	Het laatjesprobleem	44	57
PROF. DR. A. HEERTJE,	Wiskunde en economie	47	87
DR. P. M. VAN HIELE,	De discussienota's in het interimrapport van de CMLW voor zover betreft het mavo	43	254
„	Aan welke didactische principes behoort ons onderwijs van elke dag te voldoen en welke invloed heeft dat op de methode?	45	26
„	Evenredigheden	46	41
„	Het ontwerpen van een vertikale leerstofplanning voor de statistiek	49	247
„	Commentaar op het artikel . . . 'het is toch logisch!'	50	110
„	De intuïtieve grondslagen van de wiskunde	50	177
„	De kennismaking met vectoren in de onderbouw	50	276
R. A. HIRSCHFELD,	Gemeenschappelijke koordlengten	42	152
DR. R. HOLVOET,	Eigenvectoren van lineaire transformaties	43	177
„	Over eigenschappen van relaties	45	385
„	Monoïden en groepen I	46	293
„	Homomorfie in de schoolwiskunde (AMK).	45	309
GARETH HOWELL,	Books for science and mathematics teaching in the 1970 s	47	399
J. VAN IJZEREN,	Het ABC van de matrixrekening	42	65
L. H. JANSSEN,	De deellijnen van de hoeken van twee lijnen	50	106
LARS C. JANSSEN,	Spaces, functions, polygons and Pascal's triangle	49	207
„	Judging mathematical statements in the classroom	48	59
„	Some thoughts on instructional sequencing in mathematics	48	217
J. C. L. KETELAAR,	. . . 'Het is toch logisch!'	50	109

G. E. KIERS,	Magische kwadraten	46	181
"	Een tweetal vraagstukken uit de analytische meetkunde op te lossen met behulp van eenvoudige eigenschappen der vlakke meetkunde	48	346
W. KLEIJNE,	De lege verzameling in het mavo	45	17
"	Het parallellisme in ons onderwijs	47	203
W. J. KNIEP,	Wiskunde in de brugklasse	45	207
P. I. A. KNOPS,	Enkele opmerkingen over de leerstof goniometrie voor mavo	47	335
"	Aantekeningen over vectormeetkunde op het mavo	48	6
"	Mogelijke didactische aanpak van het inproduct; speciaal voor de mavo-leerling?	48	88
"	Het programma wiskunde mavo-4 en de voortzetting ervan op mts/hts	49	42
R. KOOISTRA,	Over de gebroken ongelijkheid	43	79
"	De parametervoorstelling van een punt op de parabool en op de lijn	43	167
"	Over de wortelvergelijking $\sqrt{a} = b$	43	17
W. KREMERS, J. PHILIPS,	Nog zonder kop of staart	50	212
PROF. J. KRIENS,	De besiskunde en haar toepassingen	44	225
DRS. B. W. VAN DER KROGT,	De betekenis van concreet materiaal voor het wiskundig leerproces	44	33
"	Het wiskunde onderwijs in Frankrijk	45	126
"	Het Dienes-groepen project	47	375
G. KROOSHOF,	De opbouw van een wiskunde-programma voor de niet-mathematische richtingen van het H.A.V.O.	41	108
"	Moderniseren - Nieuwbouw of verbouw?	42	193
"	De achtergronden van het klokrekenen	45	121
"	Doelstellingen	45	221
"	Hoe bewijst u dat?	45	81
"	Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren	46	256
"	Spel met een alfabet van vier letters	46	92
"	Werken met groepen. De methode Philips 6×6	46	47
"	Relaties	47	124
"	Het mavo-ontwikkelteam	48	369
DRS. R. L. KROOSHOF,	Statistiek in een industrieel concern	49	294
DR. A. Z. KRYGOWSKA,	Développement de l'activité mathématique des élèves; rôle des problèmes dans ce développement I, II.	43	65, 279
A. LAGERWERF,	Oefening baart kunst	49	374
R. LEHNERT,	Der Geschichtete Rhythmus in der Ebene, die Form-leiter einer Lichtmusik	45	361
P. W. H. LEMMENS,	Over het aantal afbeeldingen van V op W, II	50	361
A. LEURS,	Elektro, spel zonder wiskundegrens?	48	263
J. VAN LINT,	Het experiment moderne algebra en analyse	43	1
"	Voor de brugklassen?	45	2
"	Wel of niet de tweede afgeleide?	45	69
"	Gelijkwaardigheid	46	323

„ De meetkunde om ons heen	50	193
PROF. DR. J. H. VAN LINT, De 13e internationale Wiskunde Olympiade	48	47
W. A. J. LUXEMBURG, Een opmerking over P. Levy's uitbreiding van de stelling van Rolle	43	19
A. J. TH. MAASSEN, De rechte quantificator op de rechte plaats en het zuivere functiebegrip	43	159
„ De opwindfunctie	49	61
„ Een fundamentele stelling van de analyse	49	121
„ Monotonie, continuïteit en primitiveerbaarheid i.v.m. integreerbaarheid	50	339
„ Een paar meetkundelessen	50	226
DR. W. VAN DER MEIDEN, De betekenis van de meetkunde bij het V.W.O. voor het verder studeren	50	239
H. J. K. MOET EN P. TERLOUW, Differentiaalvergelijkingen of differentiaalachtige vergelijkingen?	49	91
PROF. DR. A. F. MONNA, Reële en p-adische getallen van topologisch standpunt uit bezien	41	169
„ Zwaartepunten en convexe verzamelingen	43	305
„ Some problems in distance geometry	44	163
„ Calcolo geometrico, een belangwekkend boek van G. Peano	47	211
ED DE MOOR, Leraar wiskunde en didaktiek aan een Pedagogische Akademie	49	321
„ ADRIE TREFFERS: Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (3)	50	81
„ De kubus in de brugklas	50	219
IR. H. M. MULDER, Kromme in de tram	44	136
„ De ossehuifformule	46	301
„ Een hyperbool in een vergrotingstoestel	48	401
„ Inhoud van vaten en vazen	50	66
L. A. G. M. MUSKENS, Wiskunde in de mavo-brugklas	45	201
DRS. J. NIENHUIS, De overtuigingskracht van het bewijs in de wiskunde	42	289
C. P. VAN NIEUWKASTEELE, Pythagoras met matrices	46	344
BERT NIJDAM, Experimenten ter voorbereiding van de introductie van de statistiek in de bovenbouw van het v.w.o. en het oranje boek	49	255
„ Een practicum	49	269
IR. W. NIJENHUIS, Hoe werkt men met een computer?	42	107
J. J. M. OERLEMANS, Machientjes	50	100
IR. G. A. OOSTERHOLT, Eliminatie van parameters	41	208
„ Practica bij meetkunde met vectoren	46	375
DR. IR. E. R. PAERL, Toegepaste wiskunde op het m.o.	44	151
PROF. DR. G. PAPY, De dimensiestelling voor vectorruimten	47	338
PROF. DR. J. POPKEN, De reële getallen van getaltheoretisch standpunt uit bekeken	41	244

A. ROODHARDT, Pool, poolverzameling en E-verzameling	47	361
B. VAN ROOTSELAAR, Het getalbegrip bij Bernard Bolzano	41	53
„ Nog eens iets over functie-notaties	41	144
P. TH. SANDERS, Wortels trekken?	50	113
„ Meetkunde en meetkunde-onderwijs bij het mavo	50	254
DRS. F. 'T SAS, Het gebruik van de statistiek in het levensverzekeringsbedrijf	49	306
C. VAN SCHAGEN, De determinerende en vormende functie van de wiskunde in de brugklas	45	214
„ Richtlijnen betreffende onderwijsresearch	46	12
„ Experiment met het eilandenprobleem	48	334
„ Strategieën nader bekeken	49	14
E. H. SCHMIDT, CENTRALE COMMISSIE BEGELEIDING MAVO-wiskunde	47	367
„ Waarom statistiek in het mavo?	49	252
P. C. SCHNETZ, Beschrijvende statistiek voor mavo?	50	356
H. N. SCHURING, Wiskundeonderwijs in de heterogene brugklasse?	45	207
S. SCHUSTER, On the teaching of geometry. A potpouri	50	167
PROF. DR. J. J. SEIDEL, Discrete meetkunde	44	38
DRS. GERARD SIERKSMA, Iets over het gebruik van de logaritmentafel	49	383
J. J. SLOFF, Experimenten en materiaal bij het onderwijs in de waarschijnlijkheidsrekening	49	265
PROF. DR. A. VAN DER SLUIS, Computer en wiskunde	43	145
„ Computerkunde bij het Algemeen Voortgezet Onderwijs	46	81
DR. A. J. E. M. SMEUR, August Ferdinand Möbius	44	27
„ Leonardo da Vinci	44	238
„ Simon Stevin	45	187
„ Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Algebra	46	94
„ Charles Hermite	48	151
„ Felix Klein's, 'Erlanger Programm' 1872	48	67
„ John Venn	48	282
DRS. J. SNOEP, Het wiskunde-onderwijs op de Engelse middelbare scholen	41	20
W. O. STORER, Modernization of school mathematics in England	41	161
S. STRASZEWICZ, Sur les nouveaux programmes de mathématiques scolaires en Pologne	41	238
L. STREEFLAND Kijk eens naar de zon	50	198
R. J. STROEKER, Pythagoras met een nevenvoorwaarde	47	217
PROF. DR. J. VAN TIEL, Differentiaal-calculus	48	125
H. W. VAN TILBURG, Hoe vertel ik het mijn leerlingen?	49	9
PROF. DR. R. TIMMAN, Over de betekenis van de numerieke analyse in het onderwijs aan de Technische Hogeschool	42	301
J. TIMMER Studietoetsen wiskunde voor de brugklas	45	227
A. VAN TOOREN, Decline and fall	43	294
„ Wat is een verhouding?	49	1

A. TREFFERS, E. DE MOOR, Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs		
(1)	50	1
„ Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (2) . . .	50	41
J. H. G. VAESSENS, Modellenbouw in de brugklas	45	233
PROF. DR. G. R. VELDKAMP, Nogmaals vierhoeken in en om vier-		
hoeken	42	238
„ Pythagoras rechtstreeks	47	215
H. C. VERNOUT, Wiskunde in de brugklas van een Montessori-		
lyceum	45	19
TJ. S. VISSER, Het melkglas van Brouwer	47	65
„ Mannoury's stijl	48	111
„ Van Nuñez tot Gudermann	48	358
G. A. VONK Aktie koppeling	46	215
DR. C. J. VOOYS, De helicograaf van Nicodemus	41	28
DR. P. G. J. VREDENDUIN, De alverzameling	41	97
„ Hoeken	41	257
„ Onderwijsvernieuwing in België	41	131
„ Uitbreiding van getsystemen	41	1
„ De bewijskracht van de diagrammen van Venn en		
de implicatie	42	33
„ Het experiment Papy	42	167
„ Papy, Mathématique moderne II	42	90
„ Papy, Mathématique moderne 6	42	161
„ Formele eigenschappen	43	313
„ Papy, Mathématique moderne 6	43	124
„ Verzamelingen	43	85
„ Gelijkheid en identiteit	44	115
„ Meetkunde met vectoren	44	289
„ Papy, mathématique moderne 3	44	14
„ Uitbreiding van N tot G en Q	44	268
„ Continuïteit	45	6
„ Differentialen	45	300
„ Een experiment op de basisschool in België . . .	45	153
„ Notaties voor verzamelingen	45	249
„ Vectoren	45	377
„ De implicatie	46	141
„ Vrije variabelen en open beweringen	46	231
„ Antwoord aan Freudenthal	47	141
„ Meetkunde met vectoren		
I Het uitgangspunt	48	1
II Affiene planimetrie	48	41
III Affiene driedimensionale meetkunde	48	81
IV Enkele voorbeelden; evenwijdigheid	48	121
V Verzamelingen	48	179
VI Determinanten	48	212
VII Het inwendig produkt	48	241
VIII Metrische driedimensionale meetkunde . .	48	327

	IX Uitgewerkte opgaven	48	377
	„ S. M. P. Books A-H	48	201
	„ Leraarsopleiding	49	59
	„ Grootheden	49	161
	„ Is het deductieve element in het meetkunde onder- wijs bij het V.W.O. verdwenen?	50	242
	„ S.M.P. Book 1-5	50	303
B. L. VAN DER	WAERDEN, Klassische und moderne Axiomatik	42	312
„	Über die Einführung des Logarithmus im Schul- unterricht	45	163
„	Over 'grootheden'	49	386
DR. JOH. H. WANSINK,	Rondom het gelijktken	42	269
„	Symbolen	43	10
„	I. Logische symbolen	43	12
„	Symbolen uit de verzamelingsleer	43	52
„	Figuren en symbolen	45	85
„	De inrichting van de vakbibliotheek voor wiskunde op school	47	131
„	Een jaar uit honderd; terugblik op het jaar 1872	48	135
„	Franse invloed op de meetkunde in Nederland	48	107
„	De zogenaamde 'nieuwere meetkunde' in de wis- kundeprogramma's van de hbs. Een terugblik	49	361
„	Over de afstanden van punten tot delen van rechte lijnen	50	11
„	Euclides in de twintiger jaren	50	142
„	Op weg naar een didaktiek van de wiskunde	50	403
L. WEIDE,	Teaching bij Exception	49	81
„	Teaching bij Exception 2	49	131
L. R. J. WESTERMANN,	Meetkunde en vectorruimte	46	207
WISKUNDE SECTIE 'Oude Hoven':	Enkele kritische opmerkingen bij de normen voor de beoordeling van het schrifte- lijk werk wiskunde van het HAVO-examen	50	282
	met reactie van Drs. W. E. de Jong en Drs. B. J. Westerhof	50	284
J. M. F. WIJENBERG,	Herexamen Wiskunde II	50	115
PROF. IR. D. H. WOLBERS,	Principe en ontwikkeling van de digitale computer	46	167
MARTIN S. WOLFE,	The UICSM program, old and new	41	277

KORRELS

DR. P. G. J. VREDENDUIN,	Wat is contradictoor?	41	83
R. KOOISTRA,	Over de cirkelbundel	41	182
W. BERGMAN,	Verzamelingen	41	270
P. G. J. VREDENDUIN,	Commutatieve en associatieve eigenschap	42	26
J. NIENHUIS,	Wat is een punt?	42	61
P. BRONKHORST,	Nieuw bewijs van een bekende stelling	42	89
P. WIJDENES,	$C_1 + kC_2 = 0$	42	114

JOH. H. WANSINK, Bestaan er onbestaanbare cirkels?	42	150
A. F. VAN TOOREN, Het kan ook goed	42	188
W. BUGERS, Het binomium	42	282
P. G. J. VREDENDUIN, Rij en reeks	43	22
P. BRONKHORST, Een eigenschap van een rekenkundige rij	43	266
VAN DEN BROM, Apollonius zou niet gekwadeerd hebben	43	293
R. H. PLUGGE, Over de afstand $d(P, l)$ van een punt P en een rechte l	44	26
P. BRONKHORST, Veelhoeken met een omgeschreven cirkel	44	55
A. VAN TOOREN, Uit de klassepriktijk	44	91
A. J. TH. MAASSEN, Zo simpel is het niet, het is veel simpeler!	44	106
P. G. J. VREDENDUIN, Definitie van een functie	44	147
G. KROOSHOF, De vergelijking $x^2 = 2$ in het brugjaar	44	189
E. BUISSANT DES AMORIE, Wat is een cirkelbundel?	44	219
R. KOOISTRA, Een bekend vraagstuk over het vierkant	44	280
J. H. WANSINK, De verzameling $\{X d(X, OA) = d(X, OB)\}$	45	55
L. VAN DEN BROM, Het limietbegrip	45	88
P. G. J. VREDENDUIN, Verhoudingen en evenredigheden	45	89
P. G. J. VREDENDUIN, Elimineren	45	137
E. C. BUISSANT DES AMORIE, Benadering van logaritmen	45	190
J. H. VAN DER VLIS, Een integraal	45	191
E. BUISSANT DES AMORIE, $P \subset R$ of $R \subset P$?	45	232
DR. W. A. M. BURGERS, Een isomorfie	45	273
G. A. OOSTERHOLT, Raaklijn en raakvlak	45	313
A. J. TH. MAASSEN, Afgeleide en monotonie	45	337
P. G. J. VREDENDUIN, Wat zou Leibniz hiervan zeggen?	45	390
P. G. J. VREDENDUIN, Volledige inductie	46	31
P. G. J. VREDENDUIN, Is 0 een natuurlijk getal?	46	70
J. SNOEP, Middelpunt van een derdegraadskromme	46	101
J. C. VAN RHIJN, Nog eens: de cirkelbundel	46	103
P. G. J. VREDENDUIN, Implicatie	46	151
DRS. JOH. RUNHAAR, Cartesius – cartesisch – cartesiaans	46	152
P. WIJDENES, Hoek van twee cirkels	46	190
J. SNOEP, Grafieken in gonio- en algebrales	46	191
HANS FREUDENTHAL, Cartesius – cartesisch – cartesiaans	46	270
H. STREEFKERK, Moderne wiskunde?	46	315
PROF. DR. A. F. MONNA, Opmerking naar aanleiding van het begrip functie	46	351
JOH. H. WANSINK, De Stelling van Pythagoras	46	352
TJ. S. VISSER, 100 000 per seconde	46	380
P. BRONKHORST, Puzzel	47	60
A. NIJENHUIS, An interesting theorem	47	105
P. BRONKHORST, Een andere oplossing voor recreatie 252	47	106
P. G. J. VREDENDUIN, Onderwijshervorming in België	47	220
P. G. J. VREDENDUIN, Wiskunde-onderwijs in Frankrijk	47	221
W. BURGERS, Associativiteit	47	223
P. G. J. VREDENDUIN, Grapje	47	398
A. F. VAN TOOREN, Recreatie 272	48	23

DR. JOH. H. WANSINK, Het klaverblad	48	184
E. C. BUISSANT DES AMORIE, De transformatieformules bij een ro- tatie	49	192
JOH. H. WANSINK, Het metrieke stelsel in Engeland	49	341
P. G. J. VREDENDUIN, Wiskunde voor ouders	50	285
P. G. J. VREDENDUIN, De of een vergelijking van een vlak	50	390

ZO DOE IK HET

DRS. JOH. RUNHAAR, Nogmaals: differentiaal	46	272
L. A. RANG, Met uitzondering van punt <i>B</i>	47	349
P. I. A. KNOPS, De breuken-t.v.	47	85
P. I. A. KNOPS, Overzichtsblad	49	185

HET IOWO-NUMMER	47
1 Bij de instelling van het IOWO	237
2 Ter inleiding	238
2.1 Wiskunde-onderwijskunde	238
2.2 Leerplanontwikkeling als service	238
2.3 Nadenken over het begin	240
3 Toevalligheden - de nulde fase in een leerplan- ontwikkeling	248
Baken 1, kwalitatief kansbegrip	250
Baken 2: een statistisch onderzoek	259
Baken 3: de toto	264
Baken 4: mathematische verwachting	273
Baken 5: aanzet tot hypothesetoetsing	282
College: markovprocessen	295
Baken 6: wachttijden	298
Een kans voor de opleiding	310
4 Computerkunde en informatica	317
5 Leerplanontwikkeling in het voortgezet onder- wijs	322
6 Wiskobas-bulletin	324
7 Nationale brainstorm	329

RECREATIE

onder redactie van P. G. J. Vredenduin

41 - 32, 63, 95, 124, 160, 191, 221, 255, 287, 316
42 - 30, 62, 95, 127, 159, 191, 222, 254, 286, 319
43 - 31, 61, 94, 137, 174, 206, 239, 271, 304, 335
44 - 31, 63, 95, 128, 159, 191, 222, 255, 279, 287, 319
45 - 40, 80, 120, 151, 199, 247, 287, 320, 359, 399
46 - 39, 79, 119, 159, 200, 239, 278, 322, 361, 402
47 - 42, 83, 119, 159, 199, 232, 372, 412

48 – 38, 77, 119, 157, 200, 238, 279, 364, 408
49 – 39, 79, 118, 159, 199, 236, 316, 357, 400
50 – 39, 79, 122, 292, 334, 379, 417

MEDEDELINGEN, DIVERSEN, BOEKBESPREKINGEN

Voor de vele mededelingen en boekbesprekingen verwijzen we naar de inhouds-
overzichten van de afzonderlijke jaargangen.

REDACTIE

De samenstelling van de redactie in de 41ste tot en met de 50ste jaargang was
als volgt:

DR. W. A. M. BURGERS,	sinds 1-9-1952
DRS. F. GOFFREE,	sinds 1-3-1969
DR. P. M. VAN HIELE,	sinds 1-12-1962
W. KLEIJNE,	sinds 1-10-1973
DRS. A. M. KOLDIJK,	tot 1-10-1973
G. KROOSHOF,	sinds 1-3-1964
CH. KRIJNEN,	van 1-4-1969 tot 1-11-1971
DRS. H. W. LENSTRA,	tot 1-3-1969
DRS. J. VAN LINT,	sinds 1-3-1969
L. A. G. M. MUSKENS,	sinds 1-9-1969
DR. D. N. VAN DER NEUT,	tot 1-1-1971
P. TH. SANDERS,	sinds 1-10-1973
DR. P. G. J. VREDENDUIN,	sinds 1-9-1956
DR. JOH. H. WANSINK,	tot 1-3-1969
DRS. B. J. WESTERHOF,	sinds 1-2-1972

Biljarten op een rond biljart

Ir. H. M. MULDER

Breda

naar een idee van J. C. van Rhijn, Rotterdam

Al is het in café's gebruikelijk te biljarten op een rechthoekig biljart, waarvan de zijden zich verhouden als 1 : 2, in de wiskunde zouden we het best eens kunnen proberen op een cirkelvormig biljart. Als probleem stellen we: hoe loopt het af als we zoals in fig. 1 met een bal A een andere bal B via een bandstoot zonder effect willen treffen. We veronderstellen dat daarbij de bekende



terugkaatsingswet moet gelden: de hoek van inval is gelijk aan de hoek van terugkaatsing.

We kiezen ons assenstelsel zo dat de beide assen de hoeken gevormd door de lijnen MA en MB middendoor delen. Als in dat geval de coördinaten van A gesteld worden als (a, b) dan worden die van B beide met een zekere faktor p vermenigvuldigd en mede gelet op het teken dan $(-pa, pb)$. We willen nu de positie van P vastleggen met behulp van zijn coördinaten (x, y) bij gegeven cirkelstraal r (fig. 1).

De relatie volgt uit de gelijkheid van de hoeken S_1 en S_2 .

Nu geldt: $\tan \alpha = \frac{y-b}{x-a}$ $\tan \beta = \frac{y}{x}$ en $\tan \gamma = \frac{y-pb}{x+pa}$

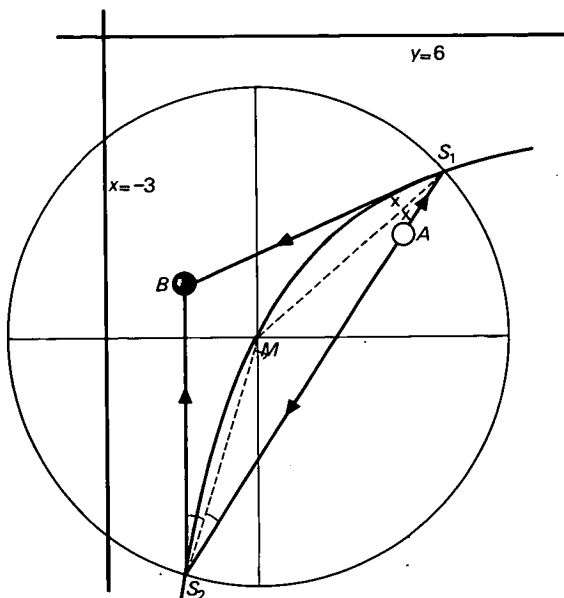


Fig. 2. De gezochte punten S zijn de snijpunten van de cirkel met een hyperbool.

Slechts één tak van de hyperbool snijdt de cirkel in 2 punten S_1 en S_2 . Dit zijn dan de enige oplossingen. Maximaal zouden er 4 oplossingen kunnen zijn. Het resultaat lijkt nogal chaotisch. Het is niet gemakkelijk mogelijk aan te geven waar de gezochte punten S zich bevinden.

We zouden enige bijzondere gevallen kunnen bekijken. We komen dan vaak bij ontaarde hyperbolen terecht.

- 1 We stellen a of b gelijk aan 0. Dit betekent dat beide uitgangspunten A en B op een en dezelfde middellijn liggen. In fig. 3 staat het geval dat $b = 0$.

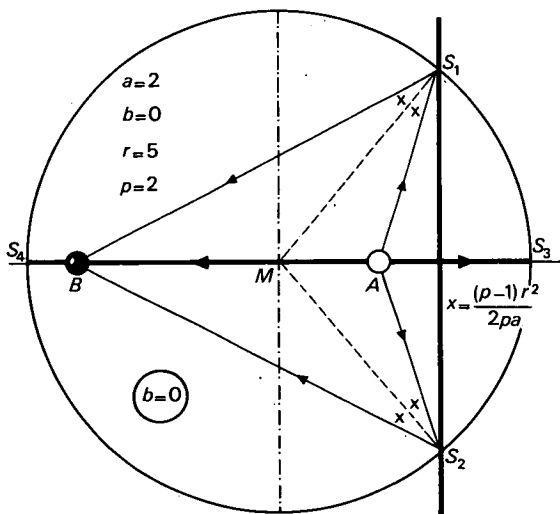


Fig. 3. A en B liggen op eenzelfde middellijn; 4 oplossingen.

De hyperbool ontaardt nu in de lijnen

$$y = 0 \quad \text{en} \quad x = \frac{(p-1)r^2}{2pa}$$

De punten S_1 en S_2 liggen symmetrisch ten opzichte van bedoelde middellijn. Tevens voldoen S_3 en S_4 .

- 2 We stellen $p = 1$ ofwel A en B liggen even ver van M . De ontaarde hyperbool valt nu uiteen in:

$$x = 0 \quad \text{en} \quad y = b \frac{r^2}{a^2 + b^2}$$

In de tekening van fig. 4 komen op deze manier 4 oplossingen tevoorschijn.

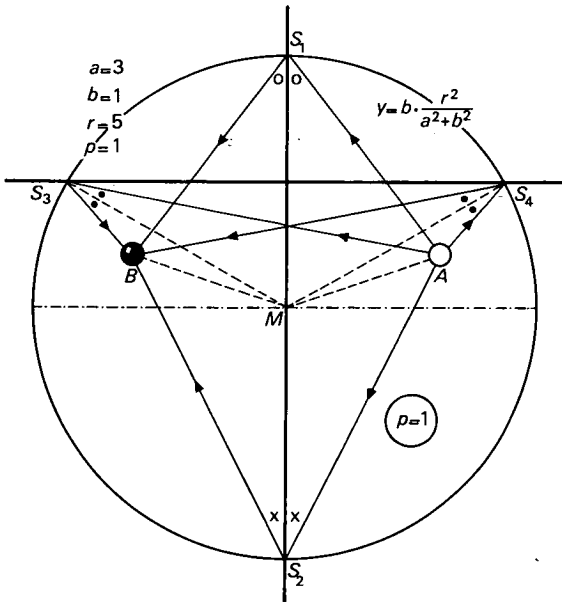


Fig. 4. A en B liggen evenver van M ; 4 oplossingen.

- 3 Voor het geval dat we $p = 0$ stellen, komt punt B in het middelpunt terecht. Dat lijkt erg triviaal.

De gehele oplossing bestaat nu uit enkel een rechte en wel: $y = \frac{b}{a} \cdot x$ (fig. 5).

- 4 In het geval $a^2 + b^2 = r^2$, ligt A op de cirkel en krijgt de hyperbool de eenvoudiger gedaante:

$$2pxy - (1+p)bx + (1-p)ay = 0.$$

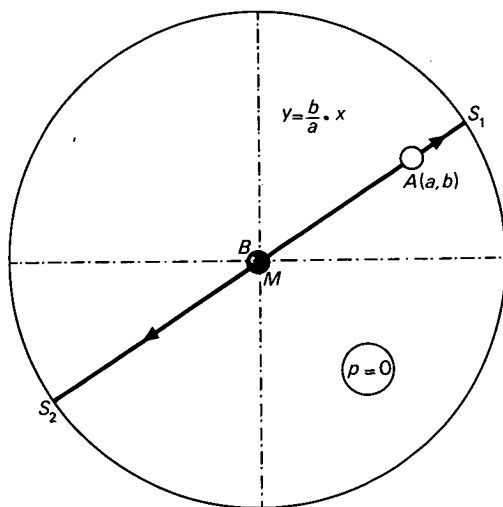


Fig. 5. Eén der punten A of B komt in M .

Voor het geval dat dan ook nog $p = 1$, dus ook B op de cirkel ligt, gaat de hyperbool over in:

$x = 0$ en $y = b$ (fig. 6).

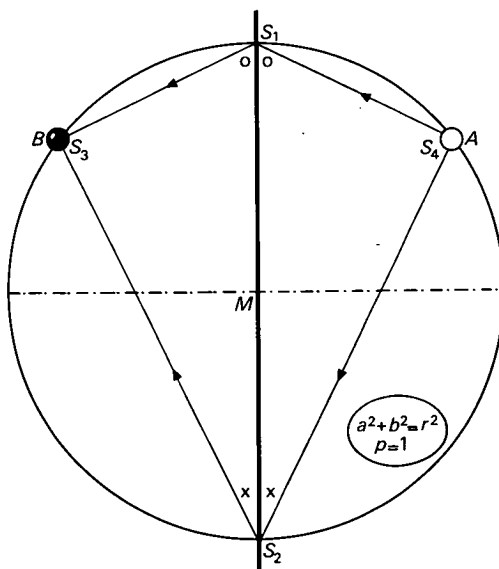


Fig. 6. De punten A en B liggen op de cirkel.

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Eerste ronde: donderdag 8 april 1976, 14.00–17.00 uur.

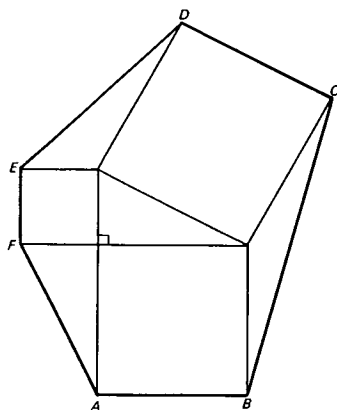
1. Op het in te leveren papier alleen de *eindantwoorden* vermelden (geen berekeningen of beredeneringen).
2. Er mogen *geen* tabellen, rekenlinialen, rekenmachines e.d. gebruikt worden.
3. Dit is geen proefwerk. Dat betekent dat het aantal opgaven vermoedelijk te veel is om binnen de gestelde tijd af te krijgen. Werk dus rustig.

Waardering: categorie A: 2 punten.

 categorie B: 3 punten.

 categorie C: 4 punten.

- A1: Bepaal alle natuurlijke getallen van twee cijfers die gelijk zijn aan de som van het kwadraat van het eerste cijfer en de derde macht van het tweede cijfer.
- A2: De velden van een schaakbord hebben zijden van lengte 1. Wat is de straal van de grootste cirkel die men op het schaakbord kan trekken zonder binnen de witte velden te komen?
- A3: Bepaal de rest bij deling van de veelterm $x^{97} + 2x^{79} + 3x^{31} + 4x^{13} + 5x$ door $x^3 - x$.
- B1: Maak uit de cijfers 0, 1, 2, ..., 9 twee getallen van 5 cijfers waarvan het produkt zo groot mogelijk is (elk cijfer moet precies één keer gebruikt worden).
- B2: Een rechthoekige driehoek heeft oppervlakte A en de lengte van de schuine zijde is p. Op de zijden worden naar buiten toe vierkanten geconstrueerd. Druk de oppervlakte van de aangegeven zeshoek ABCDEF uit in A en p.



- B3: Om de jonge spelers van een damclub te trainen, wordt een wedstrijd gehouden waaraan een aantal junioren en een kleiner aantal senioren meedoet. De junioren spelen elk tegen alle senioren en alle overige junioren één partij. De senioren spelen alleen maar tegen junioren. In totaal moeten er 95 partijen gespeeld worden. Hoeveel senioren en junioren zitten er in de groep?
- B4: Wat is het kleinste natuurlijke getal x waarvoor $(9^x - 7^{x+1})/100$ een natuurlijk getal is?
- B5: De ingeschreven cirkel van een gelijkbenige rechthoekige driehoek heeft straal 1. Bereken de omtrek van de driehoek.
- B6: Van drie verschillende cijfers $\neq 0$ vormt men op alle mogelijke manieren een getal van drie (verschillende) cijfers. Het kleinste van deze getallen is even, terwijl de som van al deze getallen gelijk is aan 1776. Welke zijn die drie cijfers?
- C1: De zijden van een driehoek hebben lengte a , b en c . Deze getallen zijn geheel, en $a \leq b \leq c$. Druk het maximale aantal verschillende driehoeken van dit type uit in c , als c een gegeven even getal is.
- C2: Gegeven is de verzameling $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en de bewerking*.
 Voor elke $x, y, z \in V$ geldt
 $x * y \in V$,
 $x * y = y * x$,
 $(x * y) * z = x * (y * z)$,
 $1 * x = x$.
 Verder is gegeven: $2 * 4 = 1$, $3 * 5 = 1$ en $2 * 3 \neq 4$.
 Bepaal de uitkomst van $5 * 5$.
- C3: Men heeft 27 kubussen van gelijke afmetingen. Sommige zijn rood, de andere blauw. Het is mogelijk deze kubussen zo tot één grote kubus samen te voegen, dat elk paar tegenover elkaar liggende zijvlakken van de grote kubus samen hoogstens de helft van het totale aantal blauwe kubussen bevat. Hoeveel blauwe kubussen zijn er dan maximaal?

Antwoorden

(Voor categorie A maximaal 2 punten per opgave).

A1: 43, 63. Voor elk goed antwoord 1 punt.

A2: $\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

A3: $15x$.

(Voor categorie B maximaal 3 punten per opgave).

B1: 96420 en 87531.

B2: $4A + 2p^2$.

B3: 5 senioren, 10 junioren.

B4: $x = 25$. Voor de incorrecte uitkomst $x = 5$ (de breuk is dan een *negatief* geheel getal): 1 punt.

B5: $6 + 4\sqrt{2}$.

B6: 1, 3, 4.

(Voor categorie C maximaal 4 punten per opgave).

C1: $\frac{1}{4}c(c+2)$. Heeft men $2(1+2+\dots+\frac{1}{2}c)$ (dus de reeks niet gesommerd) dan is de waardering 3 punten.

C2. 2.

C: 16.

Voor alle andere incorrecte of onvolledige oplossingen worden *geen* punten toegekend.

Overzicht van de resultaten van de eerste ronde van de Wiskunde-Olympiade 1976 ingezonden door 187 scholen.

Maximaal aantal te behalen punten: 36

Punten	Aantal deeln.			Punten	Aantal deeln.			Punten	Aantal deeln.		
	vwo-4	vwo-5	totaal		vwo-4	vwo-5	totaal		vwo-4	vwo-5	totaal
1	20	38	58	14	19	46	65	27	2	0	2
2	94	51	175	15	15	36	51	28	0	1	1
3	33	35	68	16	13	39	52	29	1	2	3
4	43	27	70	17	5	19	24	30	0	1	1
5	128	105	233	18	5	16	21	31	1	1	1
6	57	46	103	19	6	10	16	32	1	2	3
7	40	45	85	20	4	20	24	33	0	0	0
8	82	95	177	21	4	15	19	34	0	1	1
9	48	48	96	22	3	8	11	35	0	1	1
10	32	59	91	23	2	7	9	36	0	0	0
11	49	30	119	24	5	2	8	Totaal	769	934	1703
12	32	34	66	25	0	5	6	$\bar{x} =$	7,7	9,9	8,9
13	25	41	66	26	1	5	6	$\sigma =$	4,91	5,97	5,62

53 deelnemers met 22 of meer punten zijn uitgenodigd voor de tweede ronde op 30 augustus 1976 te Utrecht

Aantal punten per opgave, behaald door 53 deelnemers aan de tweede ronde:

Opgave	m = max. te behalen	t = totaal behaald	t/m = gem. aantal goede antw.
A ₁	2	91	45,5
A ₂	2	84	42
A ₃	2	46	23
B ₁	3	120	40
B ₂	3	147	49
B ₃	3	135	45
B ₄	3	92	30,7
B ₅	3	130	40
B ₆	3	147	49
C ₁	4	71	17,8
C ₂	4	148	37
C ₃	4	140	35

Boekbespreking

H. Meschkovski, *Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik*, B.I. Mannheim, 1976, 219 blz.

De auteur heeft op boeiende wijze de problematiek beschreven, die door de titel wordt aangegeven. Hij stelt de vraag of het juist is dat wiskundig geformuleerde uitspraken, waarvan ook politici, sociologen, psychologen en historici zich graag bedienen, wel zo enorm 'kredietwaardig' zijn om 'zekerheid' en 'waarheid' te verkrijgen.

En waarom zouden deze wiskundig geformuleerde argumenten 'waar' en 'zeker' zijn?

De aanhangers van de Platonische filosofie verwijzen voor de grondbegrippen naar de Ideeënleer van Plato. Een wiskundige heeft inzicht in de transcendente wereld, die de mens in het collectief onderbewustzijn meedraagt (Jung, Pauli).

Vele moderne wiskundigen wijzen alle metafysische fundamenten 'hooghartig' van de hand. Voor hen is wiskunde de wetenschap van formele systemen. H. Weil zegt dit kort a.v. 'We are lost in our symbols'. Het gaat niet om de 'waarheid' maar om de zekerheid dat een theorie niet zo wel A als $\bar{A}$ kan afleiden.

Hilbert heeft zijn axioma, dat van elk theorema een oplossing kan worden gevonden, hetzij positief, hetzij negatief nog in 1941 staande gehouden, hoewel Gödel al in 1931 het tegendeel bewees. Hilbert's: 'wir müssen wissen wir werden wissen' staat tegenover Stegmüller's interpretatie van Gödel's theorema: 'Eine Selbstgarantie des menschlichen Denkens auf welchem Gebiet auch immer, ist ausgeschlossen'.

De auteur meent, dat als men een formeel systeem ontwikkelt op een axiomatisch fundament, het ook nodig is dat men onderzoekt wat de oorsprong is van deze z.g. willekeurig gekozen axioma's. Daarom zal men de ontwikkeling van het grondslagen-onderzoek in historisch verband moeten bestuderen.

Dat men dit boek 'in één adem uitleest' is niet te verwachten. Daarvoor vragen de argumenten pro en contra teveel bezinning.

Maar juist daarom kan ik dit boek volgaarne aanbevelen.

W. Burgers

B. van Rootselaar, *Lineaire Algebra*, H. D. Tjeenk Willink, Groningen, 2-de druk, 1975, 151 blz., f 25,-

Deze inleiding in de lineaire algebra behandelt achtereenvolgens:

deelruimten, onafhankelijkheid, eindig dimensionale vectorruimten, inwendige produkten, toepassingen van het inwendige produkt, lineaire afbeeldingen, matrices, transformatie-meetkunde, determinanten, rekenmethoden, lineaire programmering. Een antwoordenlijst en een register sluiten het werk af. Hoewel het boek aansluit bij het eindniveau wiskunde I van het vwo, betwijfel ik toch of, zoals achterop het boek vermeld, dit boek geschikt is voor zelf-studie. Het geheel is nl. vrij abstract opgezet. De introductie van de diverse onderwerpen is uitstekend. Zo worden de lineaire afbeeldingen uitvoerig behandeld voor de matrices. Hierdoor wordt vermeden dat men te zeer een lineaire afbeelding identificeert met zijn matrix. Door deze behandelingswijze wordt goed duidelijk gemaakt dat matrices een beschrijvingsmiddel vormen voor lineaire afbeeldingen. Door de transformatie-meetkunde pas na de bovengenoemde onderwerpen te bespreken, bestaat misschien het gevaar, dat tot aan deze toepassing de lineaire afbeeldingen een te abstracte status gaan innemen. Een enigszins aparte, maar daarom niet minder belangwekkende plaats, nemen de toepassingen in: betreffende het inwendige produkt en de rekenmethoden.

De uitvoering van het boekje is keurig. Het aantal drukfouten is gering

Een uitstekend leerboekje, dat een moderne inleiding tot de lineaire algebra geeft.

W. Kleijne

Ontdaan van de vele drukfouten die de eerste druk sierden is, bij een andere uitgever, de tweede vermeerderde druk verschenen van *Algebra en Analyse*. In een 500-tal bladzijden, verdeeld over 8 hoofdstukken, maken wij kennis met de inhoud van de collegestof zoals door beide auteurs wordt gedoceerd aan de TH-Eindhoven (pre-candidaatsopleiding).

Hoewel de auteurs vrijwel geheel voorbijgaan aan toepassingen van de Analyse en ook geen vaardigheden willen aanleren, is het zeker géén ontoegankelijk puur-theoretisch geheel geworden. Vrijwel elke behandelde stelling wordt, indien nodig, toegelicht met één of méér voorbeelden, men wordt gewaarschuwd voor mogelijke verkeerde conclusies, er wordt op notatieproblemen ingegaan e.d. De honderden opgaven, voorzien van antwoorden en aanwijzingen, stellen de lezer in staat z'n kennis te toetsen.

Voor hen die de Analyse vanaf het begin willen of moeten leren, lijkt het boek mij minder geschikt. Wie echter al een zekere routine heeft opgedaan in zaken als continuïteit, berekenen van limieten, integreren e.d., vindt in het boek zeker iets van zijn gading. Om te kunnen beoordelen of de behandelde onderwerpen de aanschaf van het boek rechtvaardigen, volgt hier de lijst van titels der hoofdstukken

Hfdst. I	(64 blz.) Verzamelingen en afbeeldingen
Hfdst. II	Relaties
Hfdst. III	(103 blz.) Algebra
Hfdst. IV	(23 blz.) De reële en complexe getallen
Hfdst. V	(47 blz.) topologische en metrische ruimten
Hfdst. VI	(42 blz.) differentieërbaarheid.
Hfdst. VII	(89 blz.) integraalrekening
Hfdst. VIII	(57 blz.) integreren in het complexe vlak.

De vrij grote lengte van hoofdstuk 3 rechtvaardigt een iets uitvoeriger beschrijving. Behandeld worden o.a. groepen, ringen, lichamen, homomorfismen, idealen, vectorruimten, lineaire afbeeldingen, matrices en determinanten. Voor het goed kunnen volgen van de analyse-onderwerpen is het zeker niet nodig om hoofdstuk 3 in z'n geheel te beheersen. Wellicht is het mogelijk om in een volgende druk de paragrafen die men zou kunnen overslaan apart aan te geven. Dit terwille van hen die slechts in de Analyse geïnteresseerd zijn.

Vanwege de geringe afstand tussen de huidige leerstof in de hoogste klassen van ons VWO en de in dit boek behandelde onderwerpen is het een bruikbaar boek voor leraren.

Prijs: 50 gulden.

M. F. Blommestijn.

B. Kanitscheider, *Vom absoluten Raum zur dynamischen Geometrie*. Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich (1976). 139 S.; DM 24, —.

De auteur, hoogleraar in de filosofie der natuurwetenschappen te Gieszen, vat de inhoud van zijn geschrift samen in de volgende, in meer dan één opzicht duitse zin: 'Leitgedanke des vorliegenden Büchleins war, die Idee des absoluten Raumes in der Form, dasz geometrische Objekte gleichberechtigte Mitglieder einer physikalischen Ontologie sein können, und die rivalisierende Auffassung, wonach die primäre Existenzweise nur den materialen Körper zukommt und den dazwischen bestehenden raumzeitlichen Relationen nur eine abstrahierte Existenz zuzubilligen ist, ohne vorhergehende Abwertung historisch und dann systematisch einander gegenüberzustellen'. Het citaat is karakteristiek voor de stijl van het boek. Daar komt bij dat wij de compositie als onrustig hebben ervaren. Beschouwingen over de vraag of de ruimte een autonoom begrip is of dat zij alleen bestaat bij de gratie van de materie worden inderdaad in historische volgorde besproken, te beginnen bij Plato en Aristoteles om dan via Descartes, Newton, Kant, Riemann, Helmholtz, Mach, de Sitter, Einstein en vele anderen, te eindigen bij de moderne physica. Maar systematisch kan het werk niet genoemd worden. Zo volgt op hoofdstuk VI met een kritische beschouwing over het beginsel van Mach, in VII een bespreking van de controverse

Ptolemeus-Copernicus. Herhaaldelijk begeeft zich de auteur op zijpaden van biologie, theologie en logica, en de gedachte wil wel eens opkomen dat hij er behagen in vindt geleerdheid en belezenheid uit te stallen. Wij willen niemand weerhouden van het boek kennis te nemen maar waar-schuwen de lezer dat hem moeizame uren wachten.

O. Bottema

Proceedings of the ICM-1-1DM Regional Conference on the Teaching of Geometry
Bericht über die IMUK-1DM Regionaltagung zu Fragen des Geometrie-Unterrichts
Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, Schriftenreihe des 1DM 3/1974,
XV + 311 blz.

Opvallend is hoe snel de inzichten met betrekking tot het onderwijs in de meetkunde aan verandering onderhevig zijn. Vijftien jaar geleden stonden verbaal-deductieve problemen in het centrum van de belangstelling. Essentieel was een deductief-streng opbouw, bij voorkeur uitgaande van axioma's. Men stelde prijs op precieze definities en op een zuivere reproductie van de gedachten-gang.

In dit boek komen deze problemen nauwelijks meer aan de orde. Het centrum van de aandacht is van het verbaal-deductieve verlegd naar het intuïtief-aanschouwelijke. De vraag: hoe integreren we meetkunde en algebra? is vervangen door de vraag: wat is het typische van het meetkundige denken?

Op verschillende wijzen wordt door diverse auteurs gepoogd een antwoord op deze vraag te geven en het verwante probleem te behandelen hoe meetkundeonderwijs moet zijn om het typisch meetkundige denken tot ontwikkeling te brengen. Zo observeert Freudenthal zijn kleinkinderen en trekt daaruit in een fijnzinnig geschreven artikel conclusies over het meetkundeonderwijs op de basisschool. Stowasser gaat uit van een andere benadering. Hij onderzoekt op welke wijze meetkunde in de praktijk nuttig is en geeft een veelheid van praktische problemen die geschikt zijn om als springplank voor geometrieonderwijs te dienen. Bishop zoekt het meer in het presenteren van visuele problemen die een meetkundige verwerking behoeven. Fletcher geeft enige bijzonder fraaie opgaven die, hoewel in origine niet van meetkundige aard, door middel van meetkundige voorstelling elegant tot oplossing gebracht kunnen worden. Twee ervan vindt men in de rubriek recreatie in dit nummer.

Alleen Servais verdedigt nog hardnekkig het deductief-axiomatische gezichtspunt.

Verder noem ik nog een artikel van Pickert, waarin hij het belang van projectiemethoden aantoont. In dit artikel kan men een manier vinden om op natuurlijke wijze met het inproduct van twee vectoren in aanraking te komen. In een tweede artikel laat Fletcher zien, uiteraard met gebruikmaking van de geometrische aanschouwing, dat het niet mogelijk is een vijfdegraadsvergelijking op te lossen, als men alleen maar de vier hoofdbewerkingen en de worteltrekking toelaat. Dit vrij moeilijke probleem wordt op zeer goed verteerbare manier in betrekkelijk kort bestek behandeld. Hiermee zijn nog niet alle auteurs tot hun recht gekomen. Wie nieuwsgierig wordt, kan ik de lezing van dit congresverslag zeer aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

H. B. Griffiths en P. J. Hilton, *Klassische Mathematik in zeitgemässer Darstellung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen en Zürich, band 1, 223 blz.

Dit boek is de neerslag van door de schrijvers in Engeland gegeven heroriënteringcursussen voor leraren wiskunde aan Grammar Schools. De gehele stof is behandeld in 3 banden. Dit eerste deel behandelt: 'Grundlagen, Mengenlehre und Arithmetik'. Het boek is verdeeld in 3 delen:

deel 1. De taal der wiskunde. Hierin wordt ingegaan op de verzamelingsleer als beschrijvings-middel, functies, Cartesische produkten, relaties, volledige inductie.

deel 2. Vervolg van verzamelingen. Functieverzamelingen, transfinitie aritmetiek, verzamelings-algebra en propositie-algebra.

deel 3. Aritmetiek. Commutatieve ringen en lichamen, rekenen modulo m , ringen met gehele norm, ontbinden in priemfactoren, partieel-breuksplitsing, kettingbreuken.

Het boek wordt besloten met een literatuurlijst, een lijst van de gebruikte symbolen en een register. De behandeling van de genoemde onderwerpen geschiedt zorgvuldig en is zeker modern te noemen. Duidelijk wordt het verband getoond tussen de oude en de modernere benadering van diverse wiskundige onderwerpen. Een ieder die een niet te moeilijke inleiding in moderne stukken van de wiskunde wenst, zal in dit boekje veel van zijn gading kunnen vinden.

W. Kleijne

Lucas N. H. Bunt, Philip S. Jones, Jack D. Bedient, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976, XIII + 299 blz.

Velen van ons zullen zich L. N. H. Bunt c.s., Van Ahmes tot Euclides nog wel herinneren. Vele jaren hebben we de A-leerlingen van het gymnasium met behulp van dit boek de historisch-filosofische grondslagen van de wiskunde trachten bij te brengen, eerst in het experimentele stadium en na 1958 als mogelijk keuzeonderwerp.

Bunt werd hoogleraar in de didactiek van de wiskunde in Arizona. Van Ahmes tot Euclides werd in de V.S. vertaald en bewerkt. Het ziet er nu niet meer uit als een schoolboek, maar als een echt volwaardig leerboek. Het heeft dan ook een geheel andere functie gekregen. Het dient niet langer om gymnasium-A leerlingen uit les te geven, maar heeft universitaire status gekregen. Toch is de kern van dit boek de oude Van Ahmes tot Euclides. Men vindt er de stof in terug die in het oude schoolboek behandeld werd, met uitzondering van het hoofdstuk over Plato. Dit is sterk bekort en dat is geen wonder, nu het boek van bestemming veranderd is. Jammer is dat de auteurs in de samenvatting aangaande Plato vermelden, dat volgens Plato het eigenlijke object van de wiskunde de ideeën (in Platonische zin) zijn. Dit is niet juist. Was het juist dan zou de wiskunde een deel van de filosofie en niet een propaedeuse tot de bestudering van de filosofie zijn, zoals volgens Plato het geval is.

In de laatste drie hoofdstukken vinden we verschillende uitbreidingen van de stof. In hoofdzaak betreffen deze uitbreidingen aardige wetenswaardigheden. We vinden een aanduiding over de geometrische algebra bij Euclides, gevolgd door construeerbaarheid van regelmatige veelhoeken met passer en liniaal (Euclides, Gauss). Verder in kort bestek (10 blz.) opmerkingen betreffende het werk van Archimedes, Eratosthenes, Apollonius, Heron, Diophantus, Ptolemaeus en Pappus. Het ietwat droge hoofdstuk uit Van Ahmes tot Euclides over de schrijfwijze van de getallen door de eeuwen heen is herschreven en ziet er nu wat gezelliger uit. De lijn van de historie is wat verder doorgetrokken en eindigt in de axiomatic van Peano en de betekenis van een geordend lichaam. Ik vind het jammer dat men in deze toevoegingen nogal sterk aan de oppervlakte blijft. Wat ik mis is een verdieping van het boek.

De redentheorie van Eudoxus en de exhaustiemethode voor het bepalen van oppervlakten, die voorlopers zijn van de theorie van het reële getal en van de infinitesimaalrekening, zouden een waardevolle aanvulling geweest zijn van het oude schoolboek. Vanzelfsprekend konden deze onderwerpen de gymnasium-A leerlingen niet voorgezet worden, maar op universitair niveau kunnen ze eigenlijk niet gemist worden.

P. G. J. Vredenduin

Imre Rusze, *Die Begriffswelt der Mathematik*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, 471 blz., \$ 18, -

Een populair wetenschappelijk wiskundewerk, dat zich richt tot een breed, niet wiskundig geschoold, lezerspubliek. De schrijver heeft zich ten doel gesteld geen wiskundige formules te gebruiken. Inderdaad komen er in het boek geen formules voor. Het gevolg is wel, dat het werk

breedspakig wordt. Wat kernachtig met een formule uitgedrukt kan worden, wordt nu uitvoerig besproken. Het boek leest daarom niet gemakkelijk. De schrijver probeert telkens in te gaan op de grondslagen van de wiskunde.

Verzamelingen met beschouwingen omtrent 'het oneindige' waarbij nogal wat populaire onzin gedebiteerd wordt. Filosofische uitweidingen komen veel voor, waarbij de schrijver duidelijk maakt, dat hij uit het Oostblok komt. Hier en daar een schimpscheut op de kerken (blz. 353: '.... es gibt mindestens einen Sonderling, nämlich den Besitzer der Kirche' bij de bespreking van paradoxen). Zelfs Marx en Engels worden ten tonele gevoerd om maar duidelijk te stellen, dat de wiskunde een objectieve wetenschap is en uiteindelijk van materialistische oorsprong. Wanneer dit duidelijk is gesteld wordt de mathemaat in de schrijver weer wakker en gaat hij wat degelijker verder. Zo behandelt hij beginselen der analyse, niet-Euclidische meetkunde, verzamelingenleer, logica.

Conclusie:

een aardig boek om als wiskundige eens door te lezen, om je aan te ergeren, om over te glimlachen, om toch ook eens een aardig ideeetje uit te halen.

Voor niet-wiskundigen en voor mensen die menen een hekel te hebben aan wiskunde totaal ongeschikt.

W. Kleijne

Commentaar op een recensie (Euclides, november '76, blz. 116/117)

Als examinator heb ik getracht de belangen van kandidaat en van degenen, die aan de zorgen van de geslaagde worden toevertrouwd eerlijk tegen elkaar af te wegen. Consequent heb ik als recensent ook de belangen van de lezers gezien en geoordeeld zonder aanzien van persoon en firma. Was mijn speciale aandacht voor de taal in bijna al mijn recensies een stokpaardje? Maar ... wat zei Wim Kan op 31/12 over ons Nederlands?

In bovenvermelde recensie staan twee zinnen, die met 'Jammer' beginnen. In de eerste heb ik mij te fel uitgedrukt, wat me *oprecht spijt*. Men leze: *dat was dan bevorderlijk geweest voor de eenheid van het Nederlands in het algemeen en van het Wiskundenederlands in het bijzonder*.

De tweede zin met 'Jammer' is bedoeld als compliment en als aanmoediging voor de Vlamingen. Immers *juist zij* staan pal tegen Franse invloeden, terwijl *wij* ons Nederlands laten verduitsen en vooral verengelsen. Alleen jammer, dat zij niet consequent verder zijn gegaan.

Ik acht mijzelf volledig verantwoordelijk voor alles, wat ik schrijf. De Redactie verdient geen enkele blaam.

De lezer van dit epistel is nog steeds niet vergeten, hoe ik bedoelde recensie heb aangevangen en besloten?

J. K. Timmer.

Op het congres van de ICMI in Bielefeld gaf Fletcher enkele voorbeelden van niet-meetekundige problemen die een elegante meetkundige oplossing toelaten. Hieronder volgen er twee.

Opgaven

364. In een wedren lopen drie paarden tegen elkaar. Men kan inzetten op het paard

Darlington 5 4

Bradford 1 1

Southend 5 1

(d.w.z. als men op Darlington 1 gulden inzet, krijgt men zijn geld plus $5/4$ gulden terug als Darlington wint, en is men zijn geld kwijt als Darlington verliest).

Een klant wenst zijn aankopen van de drie verschillende soorten loten zo te verdelen, dat hij zeker wint. De bookmaker wenst echter zijn verkopen zo te reguleren dat hij zeker wint. Wie kan in zijn opzet slagen?

365. Een katalysator bevordert een bepaalde reactie. De invloed van de katalysator neemt evenredig met de tijd af. Neem als eenheden van werkzaamheid de werkzaamheid van de katalysator bij toevoeging en van tijd de totale werkingsduur van de katalysator. Men laat de werkzaamheid van de katalysator niet tot 0 afnemen, maar zet op een gegeven ogenblik het proces stil om de katalysator te vervangen en zo het proces opnieuw te starten. Hiervoor is een vaste tijd α nodig.

Wat is het beste tijdstip voor vervanging van de katalysator, wil men een optimale produktie per tijdseenheid bereiken?

Niet moeilijk als men vertrouwd is met differentiaalrekening of met andere processen om maxima van functies te berekenen. Maar als men dat nu niet kan of niet wil, hoe kan men er dan op heel simpele manier uitkomen?

Oplossingen

362. Bij een spel gooit men met één dobbelsteen zo vaak achter elkaar als men wil. De score bedraagt het totaal aantal gegooide ogen. Zodra men echter 1 gooit, moet men met gooien ophouden en wordt de score tot 0 gereduceerd.

a. De speler stelt van te voren vast, hoe vaak hij gooien wil.

Wat is de beste strategie en hoeveel de verwachte score?

Gooit hij slechts 1 keer, dan is de verwachte score

$$\frac{1}{6}(2+3+4+5+6) = \frac{5}{6} \cdot 4$$

Gooit hij precies 2 keer, dan is de verwachte score

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2 \cdot 4$$

Algemeen bij n worpen

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot n \cdot 4$$

De verwachte score neemt toe, zo lang $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{5}{6} > 1$.

De beste strategie is te stoppen na 5 of 6 worpen.

De verwachte score is dan 8,04 (in twee decimalen nauwkeurig).

b. De speler stelt van te voren vast, dat hij met gooien ophoudt, zodra zijn totale score een bepaald bedrag overschreden heeft.

Gevraagd weer de beste strategie en de verwachte score.

Onderstel men heeft totnogtoe in totaal s gegoooid. Gooit men nog een keer, dan is de verwachte score

$$\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6}(s+4)$$

Men zal dus nogmaals gooien, indien

$$\frac{5}{6}(s+4) > s$$

dus als $s < 20$.

Men zal dus met gooien stoppen, zodra de behaalde score het bedrag 19 overschrijdt. (Men kan ook vaststellen, dat men ophoudt zodra de score 20 overschrijdt; de verwachte totaalscore blijft dan hetzelfde.)

Om de verwachte totaalscore te berekenen maken we een tabel van de kansen na een of meer worpen als totaalscore s te bereiken. Noem deze kans $p(s)$.

Het is duidelijk dat $p(2) = \frac{1}{6}$ en $p(3) = \frac{1}{6}$. Als totaalscore bereiken we 4 door direct 4 te gooien of, uitgaande van de totaalscore 2, te gooien 2. Dus is $p(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p(2)$. We bereiken 5 door direct 5 te gooien of uitgaande van 2 te gooien 3 of uitgaande van 3 te gooien 2. Zodat $p(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p(2) + \frac{1}{6}p(3)$. Net zo berekenen we $p(6)$. Daarna geldt

$$p(s+6) = \frac{1}{6}(p(s) + p(s+1) + \dots + p(s+4))$$

Het ligt voor de hand deze kansen te schrijven in het zestallig stelsel. Ze blijken te zijn

$$p(2) = 0,1$$

$$p(3) = 0,1$$

$$p(4) = 0,11$$

$$p(5) = 0,12$$

$$p(6) = 0,131$$

$$p(7) = 0,043$$

...

$$p(15) = 0,0425431$$

$$p(16) = 0,04152441$$

$$p(17) = 0,04034212$$

$$p(18) = 0,035210001$$

$$p(19) = 0,034131113$$

$$p(20) = 0,0333121131$$

Wordt 20 bereikt, dan stoppen we. Het kan echter zijn, dat 20 niet bereikt, maar overschreden wordt. We kunnen dan 21, 22, 23, 24 of 25 bereiken. De kans hierop is resp.

$$p(21) = 0,0323035144 \quad (= \frac{1}{6}(p(15) + p(16) + \dots + p(19)))$$

$$p(22) = 0,0323035144 \quad (= \frac{1}{6}(p(16) + p(17) + \dots + p(19)))$$

$$p(22) = 0,0240052044$$

$$p(23) = 0,0154123234$$

$$p(24) = 0,0113341114$$

$$p(25) = 0,0034131113$$

De verwachte totaalscore is

$$20p(20) + 21p(21) + \dots + 25p(25) = 12,0503433255$$

Of, afgerond in twee decimalen, 8, 14.

Zoals te verwachten was, levert deze strategie een hogere verwachting dan de eerste.

363. In de stad Aristotepolis wonen drie soorten mensen:

waarheidssprekers (w), d.z. personen die steeds de waarheid spreken;

leugenaars (l), d.z. personen die steeds liegen;
 twijfelaars (t), d.z. personen die soms de waarheid spreken en soms liegen.
 Ze kennen elkaar goed.

a Een bezoeker komt in de stad en wil een waarheidsspreker vinden. Hij stelt daartoe vragen waarop de aangesprokene zo mogelijk antwoord geeft. Mogelijke antwoorden: ja, neen, ik weet het niet. De bezoeker kiest twee inwoners A en B . Hij stelt A de volgende vraag:
 als ik straks B vraag hoeveel $3 + 4$ is, zal hij dan 7 antwoorden?

Onderstel A is een leugenaar en B een twijfelaar. A kan dan niet 'ja' antwoorden, want dan spreekt hij misschien de waarheid. Om dezelfde reden kan hij niet 'neen' antwoorden. En hij kan zeker niet zeggen, dat hij het niet weet, want dan spreekt hij gegarandeerd de waarheid.

In alle andere gevallen is wel een antwoord mogelijk. Door vast te stellen in welke gevallen het antwoord uitblijft, kan men alle leugenaars en alle twijfelaars vinden. De waarheidssprekers blijven dan over.

b We brengen de beperking aan, dat slechts de antwoorden 'ja' en 'neen' mogelijk zijn en dat de vragen zo gekozen worden, dat iedereen antwoord kan geven.

Weer kiest de bezoeker twee inwoners A en B en stelt A de volgende twee vragen:

als ik straks aan B vraag hoeveel $3 + 4$ is, is het dan mogelijk dat hij 7 antwoordt;

als ik straks aan B vraag hoeveel $3 + 4$ is, is het dan mogelijk dat hij 6 antwoordt?

In onderstaande tabel zijn de antwoorden weergegeven die A achtereenvolgens zal geven, indien hij een waarheidsspreker is en indien hij een leugenaar is. Het geval waarin A twijfelaar is, is niet opgenomen; de antwoorden kunnen dan willekeurig zijn.

$B \backslash A$	w	l	t
w	+-	-+	++
l	-+	+-	--

Gemakshalve zeggen we in deze gevallen, dat A tegen B gezegd heeft:

+-, -+, ++ of --.

Vorm nu maximale verzamelingen van personen die tegen elkaar allemaal +- zeggen.¹ Een dergelijke verzameling bestaat

of uit alleen waarheidssprekers, of uit alleen leugenaars, of uit alleen twijfelaars.

Als iemand tegen een ander +- zegt, echter de ander tegen hem niet +- zegt, dan is hij een twijfelaar.

Als twee van bovengenoemde verzamelingen een element gemeen hebben zonder samen te vallen, bestaan ze dus beide geheel uit twijfelaars. In dat geval ecarteren we ze.

Van de overgebleven maximale verzamelingen bestaat er nu één uit alle waarheidssprekers, één uit alle leugenaars en de overige uit twijfelaars. Noem deze verzamelingen resp. W , L , T_1 , T_2 , ...

W (d.w.z. de elementen van W) zegt tegen L -+ en tegen de overige verzamelingen ++. L zegt tegen W -+ en tegen de overige verzamelingen --.

Een verzameling die zich anders gedraagt, bestaat uit twijfelaars en wordt geëcarteerd.

Blijven over twee groepen verzamelingen I en II. De verzamelingen uit I zeggen -+ tegen één van de verzamelingen uit II en ++ tegen de overige; de verzamelingen uit II zeggen -+ tegen de verzamelingen uit I en -- tegen de overige. $W \in I$; $L \in II$.

Mocht een verzameling uit I(II) -+ zeggen tegen een verzameling uit II(I), echter niet omgekeerd, dan bestaan beide verzamelingen uit twijfelaars en worden ze geëcarteerd.

Blijven over verzamelingen uit I en II waartussen een bijectie bestaat; twee bijectief verbondeneneen zeggen -+ tegen elkaar.

Kies uit elke verzameling een representant. We krijgen dan twee verzamelingen waartussen een bijectie bestaat; de ene verzameling bestaat uit één waarheidsspreker en verder twijfelaars, de ander uit één leugenaar en verder twijfelaars.

Verder komen we niet, want vanaf dit moment gedragen de elementen van de eerste verzameling zich alsof ze de enige waarheidsspreker zijn en hun maat de enige leugenaar en de elementen van de tweede verzameling alsof ze de enige leugenaar zijn en hun maat de enige waarheidsspreker.

¹ Zo'n maximale verzameling kan ook uit één enkel element bestaan.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Bijeenkomst ter bespreking van de normen open werk wiskunde m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3 (l.t.o.-c) examen 1977.

Evenals voorgaande jaren organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundelearen ook dit jaar in 36 plaatsen bijeenkomsten ter bespreking van de normen open werk m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3 (l.t.o.-c) examen 1977. Tijdens 30 van de 36 bijeenkomsten worden de normen open werk wiskunde m.a.v.o.-4 aan de orde gesteld, terwijl tijdens 6 bijeenkomsten uitsluitend de normen open werk wiskunde m.a.v.o.-3 (l.t.o.-c) zullen worden besproken.

Deze bijeenkomsten worden gehouden

voor m.a.v.o.-3 (l.t.o.-c) op woensdag 25 mei a.s. en

voor m.a.v.o.-4 op donderdag 26 mei a.s.

De normen zijn bindend, zodat daarin geen wijzigingen kunnen worden aangebracht. Er kunnen wel afspraken gemaakt worden over een bepaalde verfijning van de normen. Tijdens deze bijeenkomsten zullen bovendien de opgaven worden besproken. De gemaakte op- en aanmerkingen worden opgenomen in een verslag, dat de Commissie Vaststelling Opgaven zal worden aangeboden.

De bijeenkomsten, die ook door niet-leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren kunnen worden bijgewoond, beginnen om 16.00 uur en worden voor de diverse inspecties gehouden in onderstaande plaatsen.

m.a.v.o.-4

No. inspecties	Naam inspecteurs	Plaats	Adres van de school	Gespreksleider
IA-1	D. F. Bruins (waarnemend)	Zwolle	Carolus Clusius College, Veerallee 17; tel. 05200-16426	S. R. Zwaan
IA-2	A. Petersen	Balk	Christelijke school voor m.a.v.o., noodgebouw, Jachthavendijk; tel. 05140-2216	J. Stekelenburg
IA-3	drs. W. E. de Jong	Leeuwarden	M.a.v.o. 'Nijlan', Prinsesseweg 4; tel. 05100-27624	C. Gras
IA-4	mr. H. J. M. Megens	Groningen	Menno van Coehoorn- school, Goeman Borgesiuslaan 163; tel. 050-250212	L. Wesselink

IA-5	drs. R. van der Wal	Hoogezand	Dr. Aletta Jacobsscholengemeenschap, Nieuweweg 67; tel. 05900-92384	R. A. Pijlman
IA-6	D. F. Bruins	Emmen	Alleeschool voor mavo, Oranjelaan 4; tel. 05910-11223	H. Hendriks
IB-1	drs. B. J. Westerhof	Nijmegen	Klokkenberg Mavo, Hugo de Grootstraat 43; tel. 080-221345	C. M. Bos
IB-2	drs. O. Mechelink	Apeldoorn	Van Kinbergen Mavo, Sterrenlaan 15; tel. 055-253638	B. J. de Beer
IB-3	drs. W. J. Buijs	Lochem	Openbare Mavoschool 'Mr. A. C. W. Staring- school', Van Luttenveltplein 4A; tel. 05730-1453	J. Bargeman
IB-4	N. J. Zimmerman	Hengelo	R.K. school voor m.a.v.o. 't Lansink', Lansinkweg 80 (hoek Huygenslaan); tel. 05400-13297	C. Th. J. Hoog- steder
IB-5	dr. J. P. Naeff	Arnhem	Thorbeckescholenge- meenschap, Thorbeckestraat 1; tel. 085-423028	L. Hoekstra
IB-6	H. Wijk	Tiel	Gemeentelijke Mavo- school; Rozenstraat 44	J. Stel
IIA-1	drs. J. Smit	Alkmaar	Gemeentelijke school voor m.a.v.o., Kreglagestraat 5; tel. 072-13438	R. Pijning
IIA-2	A. van Voskuilen			
IIA-3	D. J. Steenkamp	Amsterdam	Mavo-Oostschool, Polderweg 7 (bij Muider- poortstation, invalsweg Diemen); tel. 020-351850	G. F. Smit
IIA-6	Mevr. drs. M. J. E. Niesten			
IIA-7	drs. W. F. Brands			
IIA-4	Mevr. drs. H. C. M. Kamphof (waarnemend)	Naarden	Scholengemeenschap 'Godelinde', Tenierslaan 2 (oude rijksweg bij voetbrug); tel. 02159-40664 02159-41200	H. J. Moerman
IIA-5	drs. D. C. Monté	Haarlem	Maria Mavo, Koningsstraat 26; tel. 023-311572	Rommelse
IIB-1	Mevr. drs. H. van der Vliet	Gouda	Prof. J. H. Gunning- school voor Mavo, Tesselschadestraat 3; tel. 01820-17432	C. Slobbe
IIB-2	L. J. Stortenbeker			
IIB-3	A. G. Castermans	's-Gravenhage	Groen van Prinsterer College, Albardastraat 25; tel. 070-256260 070-256261	W. van der Ley
IIB-4	B. J. H. Boers			

IIB-5	dr. J. J. Vaisier	Leerdam	Christelijke Prins Willem Alexander Mavo, Eksterlaan 48; tel. 03451-3531	J. W. Sluimer
IIB-6	drs. Chr. Kok	Utrecht	R.K. Mavo 'Overvecht', Pahud de Montagneweg; tel. 030-616946	G. Hilten
IIB-7	L. Pieper	Amersfoort	Christelijk Andreas Mavo, Ringweg Koppel 1A; tel. 033-20103	J. C. H. Vos
IIIA-1 IIIA-5	drs. J. Groen E. L. C. Kalle	Breda	Rooms Katholieke Scholengemeenschap voor h.a.v.o. en m.a.v.o. 'Markenhage', Markendaalseweg 27; tel. 076-41512	J. E. J. Dörr
IIIA-2 IIIA-3	drs. J. de Lange ir. A. Beverloo	Rotterdam	Christelijke school voor m.a.v.o. 'Het Lage Land', Kromhoutstraat 3-5; tel. 010-205393	L. Bozuwa
IIIA-4	drs. E. N. Pelten	Bergen op Zoom	Heilige Geest Mavo, Rooseveltlaan 225; tel. 01640-37389	L. Veraart
IIIA-6	C. H. J. Rijk	Middelburg	Oranje Nassaschool voor Christelijk Mavo, Oranjelaan 11; tel. 01180-25274	A. J. L. Osté
IIIB-1	dr. H. J. W. Verhaak	Heerlen	Rooms Katholieke Mavo 'St. Henricus', Schimmelpenninkstraat 2; tel. 045-714912	A. H. T. Heutinck
IIIB-2	J. W. Gerlach			
IIIB-3	drs. J. J. A. Zonneveld	Roermond	Rooms Katholieke Mavo 'Kapel-Landanus', Roersingel 28; tel. 04750-14054	W. Crijns
IIIB-4	drs. B. H. Jürgens	Eindhoven	Eckartcollege, scholengemeenschap voor v.w.o., h.a.v.o. en m.a.v.o., Argonautenlaan 26; tel. 040-436403	J. C. G. W. van den Berg
IIIB-5	Mevr. W. G. van Lokven	's-Hertogenbosch	St. Leonardus Mavo-school, Emmaplein 19; tel. 073-135674	F. J. Mahieu
IIIB-6	Mevr. dr. A. J. M. Alkemade	Tilburg	St. Jozef-mavo, Oude Dijk 3; tel. 013-432816	A. G. J. Klomberg

m.a.v.o.-3 (l.t.o.-c)

Amsterdam	Osdorperscholengemeenschap, Hoekenespad 3; tel. 020-198399	E. G. Doevedans
Arnhem	Technische school, Boulevard Heuvelink 48; tel. 085-453455	J. van Wijk J. Bargeman

Breda	Katholieke Technische School 'De Blauwe Kei', Van Riebeecklaan 2; tel. 076-139352	A. Braat W. Heynen
Groningen	Scholengemeenschap 'Vinkenborgh', Travertijnstraat 12; tel. 050-714588	F. de Boer S. Kooiman
Roermond	Lagere technische school 'Dr. Cuypers', St. Otgerusstraat 1; tel. 04750-22940	P. Knops O. P. D. Bolech
Rotterdam	Christiaan Huygens- school, Bentheimstraat 15; tel. 010-656088	L. Bozuwa

Sigma/Wiskunde Bovenbouw wordt herzien!

sigma

In het voorjaar van 1978 verschijnt de herziening van de huidige delen 'Analyse met Gonio' en 'Wiskunde Bovenbouw havo' deel 1, 2 en 3.

De herziene delen zullen verschijnen onder de nieuwe naam 'Sigma/Wiskunde Bovenbouw vwo' (*Analyse*) en 'Sigma/Wiskunde Bovenbouw havo' (*Analyse en Vectormeetkunde en Statistiek*). Het aantal delen voor de bovenbouw van het havo wordt dus twee.

De herziening van 'Sigma/Wiskunde Onderbouw' verschijnt in de daarop volgende jaren. De herziene uitgave van het brugklasdeel zal het eerst verschijnen: in het voorjaar van 1979.

Nadere informatie over de herziening verschijnt regelmatig in **INFORMATIEF**

U kunt ook bellen: Wolters-Noordhoff bv
Postbus 58 Groningen
Tel. 050-162314 (J. Emmelkamp)

Wolters-Noordhoff Groningen

4355-244/04

INHOUD

Fred Goffree: Vakdidaktische Notities	281
H. Bosscher: Keuze en ordening van vraagstukken	284
Hans Freudenthal: Wiskunde-onderwijs anno 2000	290
Ontvangen boeken	295
Edu Wijdeveld: $x \in V$	296
Mededeling	298
E. C. Buissant des Amorie: De matrices van spiegeling en rotatie nogmaals	299
P. G. J. Vredenduin: Rectificatie definitie differentiaalvergelijking	301
Mededelingen	302
Ir. H. M. Mulder: Biljarten op een rond biljart	303
Nederlandse Wiskunde Olympiade	308
Boekbespreking	311
Recreatie	316
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	319