EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang
1976/1977
no 7
maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Orgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 30,50. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: 1/1 pag. *f* 275,—, 1/2 pag. *f* 150,— en 1/4 pag. *f* 85,—.

Het centraal schriftelijk examen V.W.O.-Wiskunde I van mei 1976.

1 Inleiding

Dit artikel bespreekt een enquête over bovengenoemd examen. Aanleiding tot het houden van die enquête was een verzoek om advies van de inspectie aan het bestuur van de Ned. Ver. v. Wiskundeleraren betreffende de inhoud van het eindexamenprogramma kansrekening en statistiek. Het bestuur wilde dit advies graag geven, maar meende daarbij de wiskundeleraren te moeten betrekken. Bovendien was het van mening dat bij de formulering van het advies het gehele examenprogramma voor wiskunde-I in aanmerking genomen moest worden. Daarom is een onderzoek gedaan naar

1.1 het oordeel van leraren over het examenprogramma in het algemeen;
1.2 het oordeel van leraren over het examen van mei 1976.

In dat onderzoek is tevens betrokken:

1.3 een overzicht van de op dat examen toegekende punten;
1.4 een overzicht van de invloed van rekenfouten op het eindcijfer.

Het onderzoek bestond uit twee delen:

Eerste deel: Met betrekking tot punt 1.1 is met een aantal leraren, die al enige jaren ervaring hebben met het onderwijs in kansrekening en statistiek, een gesprek gevoerd over mogelijkheden en wenselijkheden voor het examenprogramma. Ook is gelet op wat volgens een rapport van een werkgroep van de afdeling Sociale Wetenschappen van de Academische Raad de wiskundige bagage zou moeten zijn van een aankomend student in de Sociale Faculteiten. Tenslotte is overleg gepleegd met leraren op vergaderingen van de vereniging op 30 oktober 1976 en 22 januari 1977.

Tweede deel: Met betrekking tot de punten 1.2, 1.3 en 1.4 is bovengenoemde enquête gehouden. Een uitgebreid verslag hiervan is uitgedeeld tijdens de bespreking van de eindexamens 1976 op 7 september 1976 te Utrecht. Belangstellenden kunnen dit verslag gratis verkrijgen van de secretaris van de vereniging.

Het nu volgende is eensdeels een uittreksel van dat verslag, anderzijds bevat het een toelichting op enkele begrippen daaruit, zoals *betrouwbaarheid* en r_{it}-*waarde*.

2 Wat er bij de enquête gevraagd is

Er is een steekproef van 25% uit alle dagscholen voor V.W.O. getrokken. Aan de wiskundeleraren met eindexamenkandidaten van die scholen is gevraagd:

- een overzicht te geven
  - 2.1 van de *puntenaantallen* die per kandidaat en per vraagstukonderdeel zijn toegekend (zonder de namen van de kandidaten);
  - 2.2 van het aantal punten dat per kandidaat en per vraagstukonderdeel is afgetrokken wegens *rekenfouten*;

2.3 van de vraagstukkenonderdelen per kandidaat, die niet maximaal konden worden gemaakt doordat *eerder een fout* gemaakt was;

- een oordeel te geven

  2.4 over de *moeilijkheidsgraad* van de vraagstukonderdelen;

  2.5 over de *uitgebreidheid van behandeling* van de leerstof waarop elk vraagstukonderdeel betrekking had;

- indien gewenst

  2.6 opmerkingen te maken over het examen als geheel, over onderdelen, over de normering, de volgorde van vraagstukken, de keuze van de onderwerpen, enz.

  Hiervoor kregen de leraren formulieren.

3 Wat er aan informatie ingezonden is

Van 83 scholen met 2807 kandidaten (ongeveer 20% van alle kandidaten) zijn antwoorden tijdig ontvangen. Deze zijn door medewerkers van het CITO met behulp van de computer verwerkt. Van 6 scholen zijn daarvoor de gegevens te laat binnengekomen. Elk van de 83 scholen heeft bij wijze van tegenprestatie voor de medewerking een computerafslag ontvangen. Hierop stonden resultaten van de gehele steekproef en een vergelijking van de resultaten van de school met de totale steekproef. Per vraagstukonderdeel werd vermeld of de school in vergelijking met de totale steekproef *laag*, *hoog* en *gewoon* te noemen is [1]).
Het steekproefresultaat kan representatief voor het landelijk resultaat geacht worden.

4 Resultaten van 2807 kandidaten, gesplitst over de afdelingen
(zie ook de grafieken aan het eind van deze paragraaf)

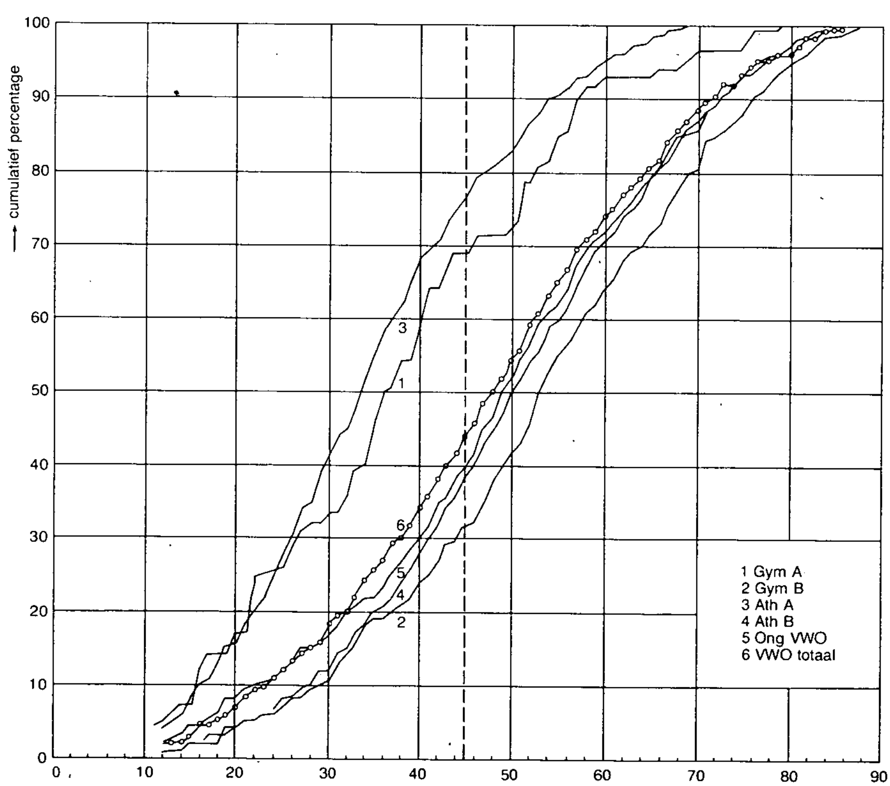
	aantal kandidaten	gemiddelde score	standaarddeviatie	%kandid. score < 45	%kandid. score < 50
Gymnasium A	72	37,9	16,7	69	71
Gymnasium B	500	53,4	17,6	30	40
Atheneum A	420	35,0	14,3	75	82
Atheneum B	1412	50,6	16,8	36	47
Ong. VWO	401	49,0	18,4	38	50
VWO totaal	2807	48,2	17,9	42	52

Er kon maximaal 90 punten gescoord worden. Daarom is het percentage kandidaten berekend met een score van minder dan 45 punten, want deze kandidaten zouden een onvoldoende gekregen hebben bij afronding van het eindcijfer voor het centraal schriftelijk op gehele getallen. (Zie ook de grafiek met de cumulatieve percentages). We vinden deze percentages bedenkelijk hoog. Het wordt nog erger als we kijken naar het percentage kandidaten die voor het werk zonder afronden tenminste een 6 hebben gehaald, ofwel tenminste 50 punten hebben gescoord. Meer dan de helft van alle kandidaten heeft dit resultaat niet verkregen. De reden voor deze zorgwekkende uitslag is niet uit de enquête te halen. We kunnen wel een paar mogelijke oorzaken noemen:

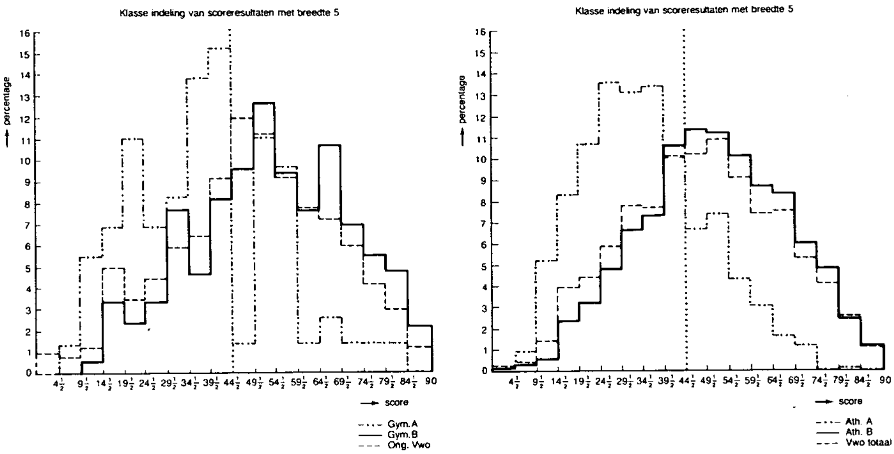
- het examenprogramma is te zwaar, wat betreft de hoeveelheid leerstof of de diepgang van de leerstof of beide;
- het eindexamen van mei 1976 was te zwaar;
- veel kandidaten horen eigenlijk in de eindexamenklas van het V.W.O. niet thuis;
- het onderwijs laat te wensen over.

Over de eerste twee mogelijkheden zullen we in de paragrafen 7 en 8 nog iets zeggen.
Over de laatste twee mogelijkheden kunnen we uiteraard geen oordeel geven. Wel vinden we dat de scholen zichzelf ernstig de vraag moeten stellen of hier mogelijk een deel van de oorzaken zou kunnen liggen. Als tenminste het beeld van de school niet beter is dan het landelijke beeld.
Kijken we naar het verschil tussen de A-kandidaten en de B-kandidaten dan dringt zich overigens wel de gedachte op dat afzonderlijke wiskundeexamenprogramma's voor elk van deze groeperingen geen overbodige luxe zou zijn [2]).

In de nu volgende grafieken worden de scoreverdelingen nog op een andere, meer gedetailleerde manier tot uitdrukking gebracht.



CUMULATIEVE SCOREVERDELINGEN [3])



5 Scoreresultaten gesplitst over de onderdelen

Opgave	1A	1B	1C	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4A	4B
Max. score per opg.	6	10	7	9	8	6	8	8	6	12	10
Gem. score	4,25	6,86	4,97	5,31	3,21	2,30	4,78	4,71	1,46	7,85	2,53
Standaarddeviatie	2,21	2,39	1,94	3,40	3,14	2,43	2,61	3,02	1,77	4,66	2,89
r_{it}-waarde[4])	0,47	0,61	0,51	0,58	0,60	0,62	0,60	0,62	0,54	0,61	0,63
rekenfouten aftrek[5])	0,05	0,29	0,40	0,09	0,24	0,07	0,09	0,25	0,10	0,10	0,13
Aantal kandid. met											
0 rekenfouten	2698	2215	1924	2619	2386	2636	2623	2296	2591	2603	2537
1 rekenfouten	79	429	662	132	239	146	140	383	164	146	192
2 of meer rekenfouten	30	162	222	56	182	25	44	127	52	58	78

De problemen bleken vooral te zitten in de onderdelen 2B en 2C, 3C, 4B. We komen daar in paragraaf 7 op terug.
We zien hier relatief hoge r_{it}-waarden. Dat wil zeggen, dat het examen goed onderscheid maakte tussen goed voorbereide en minder goed voorbereide leerlingen. Met andere woorden: leerlingen die op het totale examen hoog scoorden deden dat ook in de afzonderlijke onderdelen; leerlingen die op het totale examen laag scoorden deden dat ook in de afzonderlijke onderdelen. Een lage r_{it}-waarde voor een onderdeel zou aanduiden dat iemand, die over het totale examen laag scoorde, voor dat onderdeel wel hoog zou kunnen scoren. Dat zou betekenen dat dat onderdeel niet duidelijk het verschil tussen goede en slechte leerlingen zou aangeven. Als toets op zichzelf was het examen wat dat betreft dus niet zo slecht.
Een dergelijke indruk geeft ook de *betrouwbaarheid*[6]). Dit is een getal dat aangeeft in hoeverre een kandidaat bij herhaling van de toets, onder precies dezelfde omstandigheden (zonder de inhoud te kennen), dezelfde score zou behalen. In feite is zo'n herhaling natuurlijk niet mogelijk. Daarom benaderen

toetsdeskundigen zoiets, bijvoorbeeld op de manier van noot 6. Voor dit examen was de betrouwbaarheid 0,79, hetgeen hoog genoemd kan worden. Natuurlijk zeggen noch de r_{it}-waarde, noch de betrouwbaarheid iets over de *validiteit* van het examen. D.w.z. dat er niet mee wordt aangegeven of met dit examen ook datgene getoetst wordt, wat men zou willen toetsen. Als men op het V.W.O.-examen voor wiskunde vragen over aardrijkskunde zou stellen, zou misschien wel een hoge betrouwbaarheid bereikt worden, maar de validiteit ten aanzien van het wiskundeprogramma zou laag zijn.
Nog enkele woorden over de rekenfouten. Uit de resultaten zou men de indruk kunnen krijgen dat het met het maken van rekenfouten best meevalt. Maar dan moet men wel bedenken, dat
- de beoordelaars van het werk dikwijls nog wel een paar punten gaven voor een goed begin van het onderdeel, maar voor de rest niets als daarin nogal wat werd geknoeid. In dergelijke gevallen werd dan niet vermeld, dat er aftrek wegens rekenfouten was toegepast.
- er juist bij de onderdelen waar nogal wat rekenwerk aan vast zat, zoals bijvoorbeeld 1C, 2B, 3B nogal wat kandidaten zijn met 2 of meer rekenfouten.

Er is dus wel degelijk aanleiding om op school (in alle klassen) veel aandacht aan dit punt te schenken, al geven de cijfers wel aan dat weinig kandidaten juist door moeilijkheden met het rekenen erg gedupeerd werden [7].

6 Invloed van fouten in vorige onderdelen [8])
(in percentage van de kandidaten)

Opgave:	1B	1C	2B	2C	3B	3C	4B	Gemiddeld
VWO-tot:	5,6	7,3	1,3	1,7	2,4	3,6	2,8	3,5

Men kan konkluderen, dat over het algemeen de invloed van fouten in een onderdeel op de behaalde score van een volgend onderdeel klein is. De hoogste percentages zijn gevonden bij opgave 1, vermoedelijk als gevolg van fouten bij het manipuleren met de derdemachtswortel.
Overigens valt het op (bij de gedetailleerde cijfers van het volledige verslag) dat juist de A-kandidaten bij de als moeilijk beschouwde onderdelen (zie paragraaf 7) het minst door voorgaande onderdelen beïnvloed zijn. Hieruit blijkt wel, dat bij een volgend onderzoek de vraagstelling op dit punt duidelijker moet zijn, want men mag concluderen dat juist de A-leerlingen het minst beïnvloed zijn omdat ze aan de moeilijkere onderdelen gewoon niet begonnen zijn.

7 Oordeel van leraren over de moeilijkheidsgraad [9])
(in percentage van de leraren)

Opgave:	1A	1B	1C	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4A	4B	Gem.
zeer moeilijk of moeilijk	23	3	1	20	38	76	20	14	92	12	80	34

Voor het overige werd het werk redelijk of gemakkelijk genoemd.
Weinigen vonden de onderdelen zeer gemakkelijk (gemiddeld 2,7% van de leraren). De top lag, behalve bij 2C, 3C en 4B, steeds bij het oordeel: redelijk.
Beschouwen we de vrije opmerkingen (zie punt 2.6 hierboven) dan valt het volgende op:

Het merendeel vindt, dat de opstellers van het examen zich duidelijk verkeken hebben bij de onderdelen 1A en 4B. Opgave 1A is eigenlijk helemaal niet moeilijk als men met de definitie van differentieerbaarheid werkt, maar veel leerlingen hebben dat kennelijk niet zo gedaan.
Opgave 4B vond men niet valide: het toetste geen kansrekening. Dat 2C en 3C moeilijk waren vond men blijkens de opmerkingen niet zo bezwaarlijk. Het waren vragen van hoog niveau, die voor de leerlingen geen nieuwe leerstof bevatten. Er is geen bezwaar tegen het beeindigen van een vraagstuk met een dergelijk onderdeel.

8 Oordeel van leraren over de uitgebreidheid van behandeling van de leerstof[10])
(in percentage van de leraren)

Opgave	1A	1B	1C	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4A	4B	Gem.
Niet of vluchtig behandeld	10	1	1	10	26	44	13	3	51	10	34	19
normaal of uitgebreid behandeld	85	94	93	75	69	50	81	90	41	80	55	74
overigen	6	6	6	6	6	6	6	7	8	10	11	7

De bedoeling van de vraag naar de uitgebreidheid van behandeling was om een indruk te krijgen van de mate van overlading van het examenprogramma. Gebleken is echter, dat deze vraag verschillend is geïnterpreteerd: sommige leraren beschouwden alleen de wiskundige theorie als leerstof; anderen betrokken daarin ook de tijd die besteed werd aan oefenen en toepassingen. Daardoor kon het gebeuren dat bijvoorbeeld 55% zegt de leerstof met betrekking tot 4B normaal of uitgebreid behandeld te hebben, terwijl dat percentage voor 4A 80 is. En toch verschillen de opgaven wat betreft wiskundige theorie weinig. Maar als men, terecht overigens, in de leerstof ook betrekt het leren van methodieken om bepaalde problemen aan te pakken, dan kan men het verschil tussen de twee getallen begrijpen. Maar dan zou men bij 4B eigenlijk een veel lager getal dan 55 verwachten. Bij een volgend onderzoek zal de vraagstelling hierover veel duidelijker moeten zijn.

9 *Slotopmerkingen*
Uit de bijgevoegde opmerkingen (zie punt 2.6) blijkt goed hoe verschillend men een examen als dit beoordeelt. De oordelen varieerden van 'veel te gemakkelijk' tot 'veel te moeilijk', met alle gradaties ertussen. De meesten vonden het werk echter redelijk voor B-kandidaten maar moeilijk voor A-kandidaten. (Zie overigens onze opmerkinggn bij paragraaf 4).
De normering werd door een aantal te soepel gevonden.
Voor detailopmerkingen bij de afzonderlijke onderdelen verwijzen we naar het in paragraaf 1 genoemde verslag.
Tot besluit willen we graag onze dank uitspreken voor deelname van de geenquêteerde leraren en van de medewerkers van het C.I.T.O. aan dit onderzoek.

Namens hen allen,
J. van Dormolen

Noten

1 De score van de school werd in vergelijking met de landelijke score *laag*, resp. *hoog* genoemd, als de gemiddelde school-score meer dan ongeveer één maal de standaarddeviatie afwijkt van de gemiddelde landelijke score.
2 Zie: Rapportage vanuit de subcommissie bovenbouw van de CMLW, Euclides 50, 1974/1975, p. 385–387.
3 Het cumulatief percentage geeft bij elke totaalscore aan hoeveel kandidaten ten hoogste die score behaalden. Zo kan men uit de grafiek aflezen, dat ongeveer 64% van de kandidaten Gym B hoogstens 60 scorepunten van de 90 kreeg.
4 De r_{it}-waarde is een maat voor de correlatie tussen de behaalde score op het onderdeel (i van item) en de behaalde score op het totale examen (t van totaal). Het getal wordt als volgt gedefinieerd:

$$r_{it} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \delta_t}{N \cdot S_{x_i} \cdot S_{x_t}}.$$

Hierbij is δ_i de deviatie $x_i - \bar{x}$ van een score van een kandidaat op onderdeel i; N is het aantal kandidaten; S_{x_i} is de standaarddeviatie van de scores x_i voor het onderdeel i; S_{x_t} is de standaarddeviatie van de scores x_t voor het totale examen.

Zo is bijvoorbeeld $r_{1A,t} = \dfrac{\sum_{i=1}^{2807} \delta_{1A} \cdot \delta_t}{2807 \cdot 2{,}21 \cdot 17{,}9} = \dfrac{52190}{2807 \cdot 2{,}21 \cdot 17{,}9} = 0{,}47.$

5 Deze getallen voor aftrek van rekenfouten geven aan hoeveel punten er gemiddeld per kandidaat voor elk onderdeel is afgetrokken. Zo is bijvoorbeeld bij onderdeel 1A gemiddeld 0,05 punten (van de maximale score van 6) afgetrokken.
6 Voor het berekenen van de betrouwbaarheid gaat men als volgt te werk: De variantie S_x^2 van de behaalde toetsscores wordt gelijk gesteld aan de som van de variantie S_w^2 van de ware score en de variantie S_e^2 van de toevallige meetfouten (zie hieronder voor de definitie van S_e): $S_x^2 = S_w^2 + S_e^2$. De betrouwbaarheid r wordt gedefinieerd door $r = S_w^2/S_x^2$.
De ware score kan echter niet gemeten worden, vanwege de toevallige meetfouten. De variantie ervan kan dus alleen via een indirecte berekening gebeuren. Hetzelfde geldt voor de variantie van de toevallige meetfouten en de variantie $S_{e_i}^2$ van de meetfout van onderdeel i. Daarom gaat de berekening van r als volgt:

$$r = \frac{S_w^2}{S_x^2} = \frac{S_x^2 - S_e^2}{S_x^2} = 1 - \frac{S_e^2}{S_x^2} = 1 - (\sum S_{e_i}^2)/S_x^2 = 1 - (\sum S_{x_i}^2)/S_x^2 + (\sum S_{w_i}^2)/S_x^2.$$

De ware score w is de som van de ware scores w_i van de onderdelen: $w = \sum w_i$. Als ieder onderdeel gelijkwaardig is, geldt $w_1 = w_2 = \ldots = w_k$ en dus bij k onderdelen: $w = k \cdot w_i$. Als de ware score vermenigvuldigd wordt met een factor k, wordt de variantie vermenigvuldigd met k^2, zodat

$$S_{w_i}^2 = \frac{S_w^2}{k^2}$$

Hieruit volgt:

$$\sum S_{w_i}^2 = k^2 \cdot S_{w_i}^2 = \frac{S_w^2}{k}$$

Dus geldt: $r = 1 - (\sum S_{x_i}^2)/S_x^2 + \dfrac{S_w^2}{k \cdot S_x^2} = 1 - (\sum S_{x_i}^2)/S_x^2 + \dfrac{r}{k}$

Hieruit volgt: $r = \dfrac{k}{k-1}\{1 - (\sum S_{x_i}^2)/S_x^2\}.$

Voor dit examen is de som van de varianties van de 11 onderdelen

$$\sum S^2_{x_i} = 90{,}8174, \text{ zodat } r = \frac{11}{10}\left(1 - \frac{90{,}8174}{320{,}41}\right) = 0{,}79.$$

De aanname dat ieder onderdeel gelijkwaardig is, is natuurlijk een benadering.
De standaardmeetfout S_e wordt gedefinieerd door $S_e = S_x\sqrt{1-r}$.
Voor dit examen geldt: $S_e = 17{,}9\sqrt{0{,}21} = 8{,}2$. Dit houdt in dat 68% van de kandidaten met een score x een ware score hebben die ligt in het interval $\langle x-8{,}2;\ x+8{,}2\rangle$.

7 Zie ook: J. van Dormolen, Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben. Verkrijgbaar bij het IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht.

8 Voorbeeld: 7,3% van alle kandidaten kon 1C niet maximaal maken als gevolg van een fout in 1A of 1B.

9 Voorbeeld: 76% van de ge-enquêteerde leraren vond 2C moeilijk of zeer moeilijk.

10 Voorbeeld: 13% van de ge-enquêteerde leraren heeft de leerstof, die betrekking had op onderdeel 3A volgens eigen oordeel niet of vluchtig behandeld.

Het l.b.o.c/m.a.v.o.3-eksamen wiskunde 1976

F. F. J. GAILLARD

Breda

Examenopgaven l.b.o.c/m.a.v.o. 3 (13 mei 1976)

1. De leerlingen van een scholengemeenschap zijn ingedeeld in groepen.
Het aantal leerlingen per groep blijkt uit onderstaande tabel.

Groepsgrootte	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Aantal groepen	1	0	0	2	0	4	7	0	3	0	5	3

a. Teken een histogram van deze verdeling.
b. Bereken het aantal leerlingen van deze scholengemeenschap.
c. Bereken het gemiddelde aantal leerlingen per groep.
d. Bereken het aantal groepen waarvan de grootte meer dan 15% van het gemiddelde afwijkt.

2. In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de lijn l met vergelijking $2x+3y-13=0$ en de lijn m met vergelijking $3x-2y=0$.
De lijnen l en m snijden elkaar in het punt S.
a. Bereken de coördinaten van S.
b. Teken l en m in het rechthoekig assenstelsel.

Bij de translatie over de vector $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is het punt O het beeld van S.

c. Voor welke p en q geldt dit?
d. Stel een vergelijking op van het beeld van l en een vergelijking van het beeld van m.

3. Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 12$, $AD = 6\sqrt{2}$ en $AE = 15$.
Op de ribbe CG ligt het punt P zo, dat $GP = 3$.
a. Toon door berekening aan dat $BD = BP = 6\sqrt{6}$.
b. Bereken de oppervlakte van driehoek BDP en rond de uitkomst af tot een geheel getal.
c. Bereken de grootte van hoek BDP in graden nauwkeurig.

4. De functies f en g met domein $\{x \mid 0 \leqq x \leqq 5\}$ zijn gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.
a. Los op $f(x) = g(x)$.
De functie h is gedefinieerd door $h(x) = f(x) + g(x)$.
b. Bereken $h(3)$.
c. Teken de grafieken van f, g en h in een rechthoekig assenstelsel.
d. Lees uit de figuur af voor welke x geldt $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$.

Op 25 mei 1976 heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in Amsterdam, Breda, Groningen, Roermond, Rotterdam en Zwolle bijeenkomsten georganiseerd om de open vragen van het eksamen wiskunde 1976 voor l.b.o.c(l.t.o.)/m.a.v.o. 3 te bespreken. Hiertoe waren de wiskundesekties van alle scholen voor l.b.o. per brief uitgenodigd, terwijl er een aankondiging gestaan had in alle voor het l.b.o. verschijnende vakbladen. In een paar bijeenkomsten is enig misverstand ontstaan omdat bleek dat de open vragen van het l.b.o.c-eksamen wiskunde voor l.h.n.o.- en l.e.a.o.-scholen afweken van het te bespreken eksamen.
De bijeenkomsten werden bezocht door 251 docenten, waarvan er 26 lid zijn van de N.V.v.W.
Het doel van de besprekingen was te praten over de redaktie en het nivo van de open vragen en aandacht te besteden aan de voorgeschreven normen.
Het was prettig dat het mogelijk bleek de besprekingen kort na het eksamen te houden.
De gespreksleiders hebben van de besprekingen een kort verslag gemaakt. Uit deze verslagen blijkt dat men algemeen vindt dat de tijd die vastgesteld is voor het maken van de open vragen te kort is.
Voor het maken van het werk in deze vorm zag men graag een uitbreiding van de tijd tot twee uur. Het nivo van het werk werd als redelijk beoordeeld. Op de redaktie in het algemeen waren er geen aanmerkingen. Toch is men niet helemaal gelukkig met het werk. Men komt in de verslagen opmerkingen tegen als: het werk was erg eenzijdig, het werk was te 'wiskundig', het rekenen met wortels is te moeilijk, sommige opgaven zijn te formeel, formaliseren is juist zo moeilijk voor l.b.o.-leerlingen.
Men heeft kritiek op het toekennen van tien punten zonder meer.
Men pleit voor overleg met andere eksamenkommissies (b.v. natuurkunde) om tot uniforme afspraken te komen op dit punt.

Enkele opmerkingen over de opgaven afzonderlijk.

Opgave 1.

De begrippen groep en groepsgrootte bleken bij een aantal leerlingen verwarrend te werken.

Als de waarnemingsgetallen met frequentie 0 niet in het histogram waren opgenomen dan kostte dat vier punten. Men vond dat een te strenge normering.

Opgave 2.

Niet bij iedereen was duidelijk dat het hele vlak verschoven werd.

Een betere redaktie zou zijn verkregen door bij *d*) in te voegen: ..... bij deze translatie.

Sommigen vonden *d*) te moeilijk.

Wat de normering betreft had men bij *a*) liever '4+2' gezien dan '3+3'.

Opgave 3.

Het nivo van deze opgave vond men te hoog. De kombinatie van stereometrie en goniometrie was te moeilijk. Het werken met $\sqrt{6}$ en andere irrationale getallen is te veel gevraagd van l.b.o.-leerlingen. Bovendien zijn ze in de techniek gewend te werken met benaderingen. Men vond dat men had moeten voorkomen dat een onjuiste oplossing van onderdeel *b*) zodanige gevolgen had voor *c*), dat de moeilijkheidsgraad hiervan beneden het aanvaardbare nivo daalde. Dit was mogelijk geweest door de grootte van een andere hoek te laten berekenen. De normering van onderdeel *b*) vond men te streng.

Opgave 4.

Ook het nivo van deze opgave wordt te hoog gevonden. Veel kritiek had men op: 'De funktie h is gedefinieerd door $h(x) = f(x) + g(x)$'.

Men vindt dat dit buiten het eksamenprogramma valt. Sommigen verbinden daar de konsekwentie aan dat bij de normering deze opgave buiten beschouwing moet worden gelaten.

Bij *c*) vroeg men zich af of de opdracht: 'teken de grafiek ...' impliceert: 'bereken de snijpunten van de grafiek met de x-as en met de y-as; bereken de uiterste waarde enz.'.

Onderdeel *d*) werd te moeilijk gevonden.

Tot slot werd hier en daar uitgesproken dat men het op prijs stelt bijeenkomsten als deze kort na het eksamen bij te wonen. Men wil de besprekingen uitgebreid zien met de opgaven voor l.h.n.o., l.e.a.o. en l.a.o. Men mist de bespreking van de meerkeuzeopgaven.

Eindexamen Middelbare Technische Scholen 1976-1977

Op de M.T.S.-en in Nederland wordt het eindexamen Wiskunde al een aantal jaren landelijk afgenomen door middel van drie deelexamens over het jaar verspreid. Het eerste van deze drie deelexamens is gehouden op donderdag 11 november j.l. van 9.00–11.30 uur.

De leerstof handelde over algebraïsche en transcendente functies, limieten en continuïteit en de differentiaalrekening tot en met de rekenregels toegepast op algebraïsche vormen. De landelijk gegeven opgaven volgen hier.

EINDEXAMEN MIDDELBARE TECHNISCHE SCHOLEN 1976/1977 WISKUNDE

Donderdag 11 november 1976, 9.00–11.30 uur

Aanwijzingen:

a Het gebruik van rekenliniaal, logaritmentafel en bijgaand formuleblad is toegestaan.
Het gebruik van rekenmachines is toegestaan indien de examencommissie van de school dit goed vindt;

b Uitkomsten zonder de bijbehorende berekeningen worden niet goedgerekend;

c Bij alle opgaven wordt uitgegaan van de getallenverzameling $\mathbb{R}$;

d Grafische oplossingen van ongelijkheden zijn toegestaan.

Opgave I

A Gegeven zijn de functies f: $f(x) = x^2+2ax+b$ en g: $g(x) = -x^2+bx$.

a Bepaal in f de waarde(n) van a en b zodanig, dat zowel de grafiek van f als de grafiek van f' door (2, 5) gaan.

b Bepaal in f en g de waarde(n) van a en b zodanig, dat $f(2) = g(2)$ en $f'(2) = g'(2)$.

B Gegeven zijn de functies f en g gedefiniëerd door:

$f(x) = |x^2-2x-3|$ en $g(x) = c(x+1)$.

a Door welk vast punt gaan alle grafieken van g?

b Teken in één assenstelsel de grafieken van f en g als $c = 2$.

c Bepaal voor welke waarde(n) van x geldt $f(x) > g(x)$ als $c = 2$.

Opgave II

A Bepaal de afgeleide functie van:

a f: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ *b* f: $f(x) = (x^2+3)\sqrt{(x^2+3)}$

B Bepaal de volgende limieten, indien ze bestaan:

a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$ *b* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2+\sqrt{(x+1)}}{x-3}$

c $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 2x}{\tan x}$ *d* $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x>8}} \dfrac{|x-8|}{x-8}$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{|x-3|}{x-3}$

Opgave III

Gegeven zijn de periodieke functies f en g, gedefiniëerd door:

$$f(x) = 1 - \sin \tfrac{1}{2}x \text{ en } g(x) = \cos x$$

a Bepaal het domein en het bereik van f en van g.
b Los op in $\mathbb{R}$ de vergelijking $f(x) = g(x)$.
c Teken in één figuur de grafieken van f en g op het interval $[0, 4\pi]$.
d Voor welke waarde(n) van $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x) \leqq g(x)$?

Opgave IV

Gegeven is de functie f: $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}$.

a Bepaal met behulp van een tekenoverzicht of een signatuurdiagram voor welke waarde(n) van x de ongelijkheid $f(x) \leqq 0$ geldt.
b Bepaal de volgende limieten indien ze bestaan:

$$\lim_{x \to -2} f(x);\ \lim_{x \to 4} f(x);\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

c De functie f is discontinu in $x = -2$ en in $x = 4$.
1 Waarom is de discontinuïteit in $x = 4$ niet ophefbaar?
2 Waarom is de discontinuïteit in $x = -2$ wel ophefbaar?
3 Hoe heft u de discontinuïteit in $x = -2$ op?
d Schets de grafiek van f.

Opgave V

Gegeven zijn de functies f en g gedefiniëerd door: $f(x) = 1 + 2^x$ en $g(x) = 3 - 4^x$.
a Bepaal van f en van g het domein en het bereik.
b Los op de vergelijking $f(x) = g(x)$.
c Schets in één assenstelsel de grafieken van f en g.
d Voor welke waarde(n) van x geldt $f(x) \geqq g(x)$?

Examens Wiskunde AVO-VWO tweede tijdvak 1976

MAVO 3

Vrijdag 20 augustus, 9.30–11.30 uur

WISKUNDE I
Lees dit eerst:
a Dit gedeelte van het examen bestaat uit vijfentwintig vierkeuzevragen.

Bij elke vraag staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters A, B, C en D: precies één van deze antwoorden is het goede antwoord. Controleer vóór het einde van dit examen of alle vragen zijn beantwoord; voor een niet-ingevuld antwoord wordt geen enkel punt toegekend.

b Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen of van een rekenliniaal.

c Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld:
$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Als bij een functie $x \rightarrow f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein bedoeld de verzameling van alle reële getallen waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1 $x-1$ is een factor van
A x^2+2x+1
B x^2+2x-1
C x^2-2x+1
D x^2-2x-1

2 De top van de grafiek van de functie $x \rightarrow -x^2-2x$ is het punt
A $(1, 1)$
B $(1, -1)$
C $(-1, 1)$
D $(-1, -1)$

3 Er wordt gespiegeld in de x-as.
Het beeld van de grafiek van $y = 2x+2$ is de grafiek van
A $y = 2x+2$
B $y = 2x-2$
C $y = -2x+2$
D $y = -2x-2$

4 $2x < -4$ heeft dezelfde oplossingsverzameling als
A $-3x < -6$
B $-3x > -6$
C $-3x < 6$
D $-3x > 6$

5 $\{x | 2(x+\frac{1}{2}) < x+\frac{1}{2}\} =$
A ϕ
B $\{x | x < -\frac{1}{2}\}$
C $\{x | x > -\frac{1}{2}\}$
D $\mathbb{R}$

6 Van welke van onderstaande rijen van 10 waarnemingsgetallen is de mediaan 7?

A 1, 2, 4, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12
B 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16
C 1, 2, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
D 0, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14

7 De zijden van een parallellogram hebben de lengte 4 en 8.
De oppervlakte is 16.
Hoe groot kan een hoek van dit parallellogram zijn?

A 30°
B 45°
C 60°
D 90°

8 De oppervlakte van een kubus met ribbe 1 en die van een balk met ribben 2, 3 en 6 verhouden zich als de getallen

A 1 en 6
B 1 en 12
C 1 en 18
D 1 en 36

9 Gegeven is de functie f gedefinieerd door $f(x) = x^2+px+q$.
Als $f(1) = -3$ en $f(-2) = -6$ dan geldt

A $p = 2 \wedge q = 6$
B $p = 2 \wedge q = -6$
C $p = -2 \wedge q = -2$
D $p = -2 \wedge q = -4$

10 Bij de translatie over de vector $\binom{0}{3}$ wordt de grafiek van $x \to x^2-2x-1$ afgebeeld op de grafiek van

A $x \to x^2-2x-4$
B $x \to x^2+x-1$
C $x \to x^2+x+2$
D $x \to x^2-2x+2$

11 Als $\tan\alpha = 1$ dan geldt

A $\sin\alpha+\cos\alpha = 1$
B $\sin\alpha-\cos\alpha = 1$
C $\sin\alpha+\cos\alpha = 0$
D $\sin\alpha-\cos\alpha = 0$

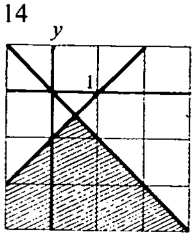
12 De verzameling $\{x|(x+1)^2 = 2(x+1)-2\}$ bevat

A geen elementen
B precies 1 element
C precies 2 elementen
D meer dan 2 elementen

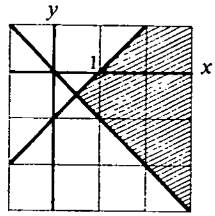
13 Gegeven is de functie $f: x \to -2x+2$ met $\mathbb{N}$ als domein.
Welk van onderstaande getallen is *geen* element van het bereik van f?

A -4
B -2
C 2
D 4

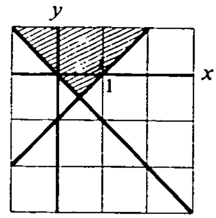
14



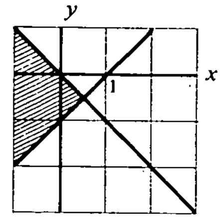
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

In welke van bovenstaande figuren geldt voor de coördinaten x en y van *elk* punt van het gearceerde vlakdeel $x+y < 0 \wedge x-y > 1$?

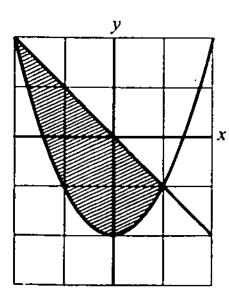
A in figuur 1
B in figuur 2
C in figuur 3
D in figuur 4

15 De grafieken van $y = ax$ en $y = x+b$ snijden elkaar in een punt van het tweede kwadrant.
Voor a en b geldt
A $a > 0 \wedge b > 0$
B $a > 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b > 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

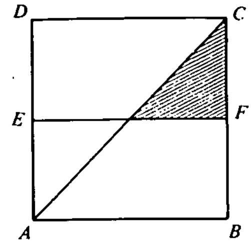
16 $\{(x, y) | y = x+3\} \cap \{(x, y) | y = -x+3\} = \{(a, b)\}$.
Voor a en b geldt
A $a > 0 \wedge b \geqq 0$
B $a > 0 \wedge b < 0$
C $a \leqq 0 \wedge b \geqq 0$
D $a \leqq 0 \wedge b < 0$

17 Gegeven is de functie f gedefinieerd door $f(x) = -2x+4$.
Het origineel van 0 van deze functie is
A -2
B 0
C 2
D 4

18 In nevenstaand assenstelsel zijn getekend de grafieken van $y = x^2-2$ en $x+y = 0$.
Voor de coördinaten x en y van elk punt van het gearceerde vlakdeel geldt
A $y \geqq x^2-2 \wedge x+y \geqq 0$
B $y \geqq x^2-2 \wedge x+y \leqq 0$
C $y \leqq x^2-2 \wedge x+y \geqq 0$
D $y \leqq x^2-2 \wedge x+y \leqq 0$

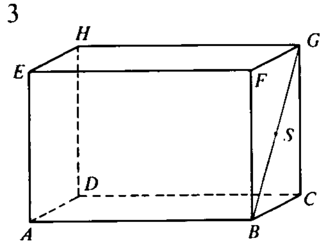


19 Van nevenstaand vierkant $ABCD$ zijn de punten E en F de middens van respectievelijk de zijden AD en BC.
Voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel geldt



A $d(P, AB) \geqq d(P, DC) \wedge d(P, BC) \geqq d(P, DC)$
B $d(P, AB) \geqq d(P, DC) \wedge d(P, BC) \leqq d(P, DC)$
C $d(P, AB) \leqq d(P, DC) \wedge d(P, BC) \geqq d(P, DC)$
D $d(P, AB) \leqq d(P, DC) \wedge d(P, BC) \leqq d(P, DC)$

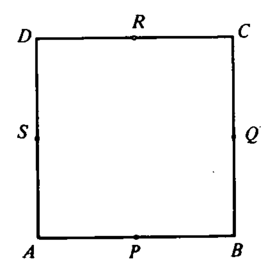
20 Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 6$, $AD = 3$ en $AE = 4$.
S is het midden van het lijnstuk BG.
De oppervlakte van $\triangle AHS$ is gelijk aan



A 15
B 16,25
C 30
D 32,5

21 Gegeven is de cirkel met middelpunt M en straal 6. A en B zijn punten van de cirkel. $AB = 8$.
Voor de grootte α van hoek AMB geldt
A $\alpha < 77°$
B $77° \leqq \alpha < 82°$
C $82° \leqq \alpha < 87°$
D $87° \leqq \alpha$

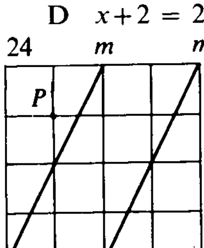
22 De middens P, Q, R en S van de zijden van vierkant $ABCD$ zijn de hoekpunten van vierhoek $PQRS$.
(1) De oppervlakte van vierhoek $PQRS$ is de helft van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.
(2) De omtrek van vierhoek $PQRS$ is de helft van de omtrek van vierkant $ABCD$.



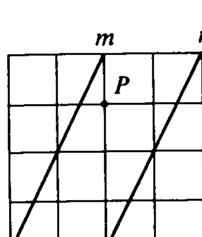
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar, (2) is niet waar
C (1) is niet waar, (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar

23 $\{0\}$ is de oplossingsverzameling van
A $x+2 = x+2$
B $x+2 = 2$
C $x+2 = x$
D $x+2 = 2x$

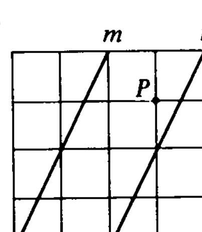
24



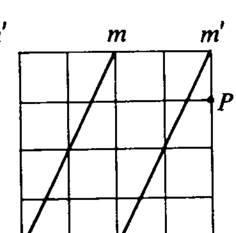
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

In elk van bovenstaande figuren is lijn m' het beeld van lijn m bij een vermenigvuldiging met centrum P en factor k.
In welke figuur is $k > 1$?
A in figuur 1
B in figuur 2
C in figuur 3
D in figuur 4

25 V is de verzameling van de veelvouden van 6.
W is de verzameling van de veelvouden van 10.
$V \cap W$ is
A de lege verzameling
B de verzameling van de veelvouden van 2
C de verzameling van de veelvouden van 30
D de verzameling van de veelvouden van 60

MAVO 3

Dinsdag 24 augustus, 9.30–11.00 uur

wiskunde II
Lees dit eerst:

a Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.
b Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen of van een rekenliniaal.
c Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld:
$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein bedoeld de verzameling van alle reële getallen waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1 In een rechthoekig assenstelsel zijn gegeven de punten $A(2, 2)$, $B(8, 2)$ en $C(6, 6)$.
a Bereken AC en BC.
b Bereken $\angle ACB$ in graden nauwkeurig.
c Bij rotatie om het punt $P(1, 0)$ over 90° is A' het beeld van A, B' het beeld van B en C' het beeld van C.
Bepaal de coördinaten van A', B' en C'.

2 Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 8$, $AD = 6$ en $AE = 12$.
S is het snijpunt van de diagonalen EG en HF.
a Bereken ES.
b Bereken DS.
c Bereken de oppervlakte van $\triangle ADS$ en rond de uitkomst af tot een geheel getal.
d Bereken $\angle ASD$ in graden nauwkeurig.

3 Met domein $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leqq x \leqq 0\}$ zijn gegeven de functies $f(x) = 2x+1$ en $g(x) = x^2+2x-1$.
a Bereken het grootste en het kleinste element van het bereik van f.
b Bereken het grootste en het kleinste element van het bereik van g.
c Teken de grafieken van f en g in één figuur.
d Los op $f(x) = g(x)$.

4 Gegevens zijn de relaties $V = \{(x, y) | x-y+2 = 0\}$ en $W = \{(x, y) | 3x-y-4 = 0\}$.
a Bereken $V \cap W$ en teken de grafieken van V en W in één figuur.
Er wordt gespiegeld in de y-as.
De grafiek van V heeft als beeld de grafiek van een relatie V'.
De grafiek van W heeft als beeld de grafiek van een relatie W'.
b $V' \cap W' = \{(p, q)\}$.
Voor welke p en q geldt dit?
c Stel een relatievoorschrift op voor V' en een voor W'.

MAVO 4

Vrijdag 20 augustus, 9.30–11.30 uur

wiskunde I

Lees dit eerst:

a Dit gedeelte van het examen bestaat uit dertig vierkeuzevragen.
Bij elke vraag staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters A, B, C en D; precies één van deze antwoorden is het goede antwoord.
Controleer vóór het einde van dit examen of alle vragen zijn beantwoord; voor een niet-ingevuld antwoord wordt geen enkel punt toegekend.

b Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen of van een rekenliniaal.

c Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld:
$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein bedoeld de verzameling van alle reële getallen waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1 Het aantal cirkels met straal 5 die twee snijdende lijnen raken, bedraagt

A 1
B 2
C 4
D meer dan 4

2 Als $a\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\end{pmatrix}$ dan geldt voor a en b

A $a \geqq 0 \wedge b \geqq 0$
B $a \geqq 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b \geqq 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

3 $\{(x, y)|x^2+y^2 = 25\} \cap \{(x, y)|7x+y = 25\} =$

A $\{(3, 4), (4, 3)\}$
B $\{(3, 4), (4, -3)\}$
C $\{(3, -4), (-4, 3)\}$
D $\{(3, -4), (-4, -3)\}$

4 De verzameling $\{(x, y)|(x+2)^2+(y-2)^2 < 4\}$ bevat alleen punten van het

A eerste kwadrant
B tweede kwadrant
C derde kwadrant
D vierde kwadrant

5 Bij een vermenigvuldiging met centrum P en factor $k > 1$ is het punt $(-4, -3)$ het beeld van het punt $(0, 0)$.
P ligt in het

A eerste kwadrant
B tweede kwadrant
C derde kwadrant
D vierde kwadrant

6 Van welke van onderstaande rijen van 10 waarnemingsgetallen is de mediaan 7?

A 1, 2, 4, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12
B 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16
C 1, 2, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
D 0, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14

7 De zijden van een parallellogram hebben de lengte 4 en 8. De oppervlakte is 16.
Hoe groot kan een hoek van dit parallellogram zijn?

A 30°
B 45°
C 60°
D 90°

8 De oppervlakte van een kubus met ribbe 1 en die van een balk met ribben 2, 3 en 6 verhouden zich als de getallen

A 1 en 6
B 1 en 12
C 1 en 18
D 1 en 36

9 Gegeven is de functie f gedefinieerd door $f(x) = x^2+px+q$.
Als $f(1) = -3$ en $f(-2) = -6$ dan geldt
A $p = 2 \wedge q = 6$
B $p = 2 \wedge q = -6$
C $p = -2 \wedge q = -2$
D $p = -2 \wedge q = -4$

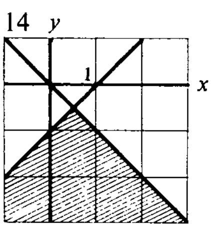
10 Bij de translatie over de vector $\binom{0}{3}$ wordt de grafiek van $x \rightarrow x^2-2x-1$ afgebeeld op de grafiek van
A $x \rightarrow x^2-2x-4$
B $x \rightarrow x^2+x-1$
C $x \rightarrow x^2+x+2$
D $x \rightarrow x^2-2x+2$

11 Als $\tan\alpha = 1$ dan geldt
A $\sin\alpha+\cos\alpha = 1$
B $\sin\alpha-\cos\alpha = 1$
C $\sin\alpha+\cos\alpha = 0$
D $\sin\alpha-\cos\alpha = 0$

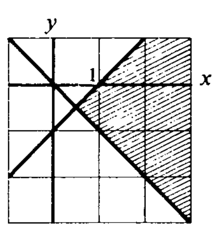
12 De verzameling $\{x|(x+1)^2 = 2(x+1)-2\}$ bevat
A geen elementen
B precies 1 element
C precies 2 elementen
D meer dan 2 elementen

13 Gegeven is de functie $f : x \rightarrow -2x+2$ met $\mathbb{N}$ als domein.
Welk van onderstaande getallen is *geen* element van het bereik van f?
A -4
B -2
C 2
D 4

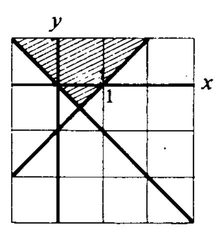
14



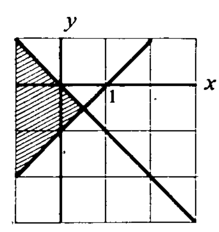
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

In welke van bovenstaande figuren geldt voor de coördinaten x en y van *elk* punt van het gearceerde vlakdeel $x+y < 0 \angle x-y > 1$?
A in figuur 1
B in figuur 2
C in figuur 3
D in figuur 4

15 De grafieken van $y = ax$ en $y = x+b$ snijden elkaar in een punt van het tweede kwadrant.
Voor a en b geldt
A $a > 0 \wedge b > 0$
B $a > 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b > 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

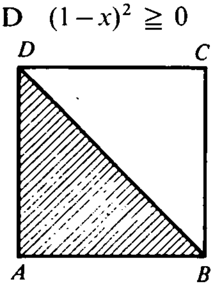
16 Gegeven is de vector $\vec{a} = \binom{4}{1}$.
Als $|\vec{a}-\vec{b}| = 5$ dan kan $\vec{b}$ *niet* zijn
A $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
B $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
D $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

17 Voor elke $a \neq 0$ snijdt de grafiek van $y = ax+a$ de
A positieve x-as
B negatieve x-as
C positieve y-as
D negatieve y-as

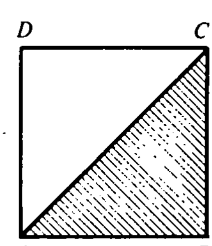
18 Gegeven zijn twee verschillende punten A en P.
A' is het beeld van A bij puntspiegeling in P.
A' is ook het beeld van A bij translatie over
A $\overrightarrow{AP}$
B $\overrightarrow{PA}$
C $2\overrightarrow{AP}$
D $2\overrightarrow{PA}$

19 De lege verzameling is de oplossingsverzameling van
A $(1-x)^2 < 0$
B $(1-x)^2 \leqq 0$
C $(1-x)^2 > 0$
D $(1-x)^2 \geqq 0$

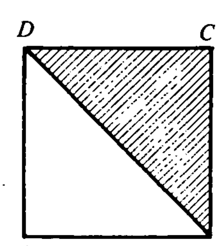
20



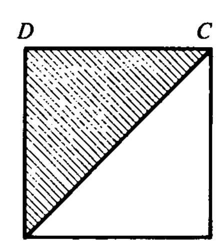
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

In welk van bovenstaande vierkanten geldt voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel $d(P, AB) \leqq d(P, BC)$?

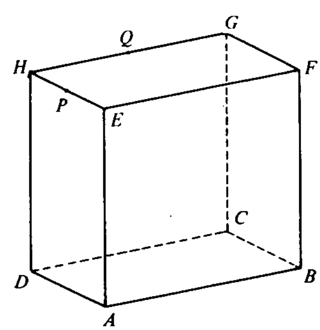
A in figuur 1
B in figuur 2
C in figuur 3
D in figuur 4

21 Het volledig origineel van 0 van de functie $x \to -x^2-5x+6$ is
A $\{-3, -2\}$
B $\{2, 3\}$
C $\{-6, 1\}$
D $\{-1, 6\}$

22 De oppervlakte van een kubus is 84. Voor de inhoud k van deze kubus geldt
A $k < 50$
B $50 \leqq k < 50$
C $60 \leqq k < 70$
D $70 \leqq k$

23 Van $\triangle ABC$ is gegeven $AB = 10$, $\angle A = 30°$ en $\angle B = 105°$
Voor BC geldt
A $BC = 5$
B $BC = 5\sqrt{2}$
C $BC = 5\sqrt{3}$
D $BC = 5\sqrt{6}$

24 Van kubus $ABCD.EFGH$ is de lengte van een ribbe 2.
P is het midden van lijnstuk EH en Q is het midden van lijnstuk GH.
Voor de grootte α van hoek PBQ geldt
A $\alpha \leqq 15°$
B $15° < \alpha \leqq 20°$
C $20° < \alpha \leqq 25°$
D $25° < \alpha$



25 De verzameling $\left\{x \mid \frac{x-1}{2} - \frac{1-x}{2} = 0\right\}$ bevat
A geen elementen
B precies één element; dit element is positief
C precies één element; dit element is niet positief
D meer dan één element

26 $\left\{x \mid \frac{x-3}{2} > \frac{x+1}{3}\right\} =$
A $\{x \mid x < -9\}$
B $\{x \mid x > -9\}$
C $\{x \mid x < 11\}$
D $\{x \mid x > 11\}$

27 Van $\triangle ABC$ is O het midden van zijde AB, N het midden van zijde BC en M het midden van zijde AC.

(1) $|\vec{OM}|+|\vec{ON}| = |\vec{OC}|$

(2) $|\vec{OM}+\vec{ON}| = |\vec{OC}|$

A (1) en (2) zijn beide waar

B (1) is waar, (2) is niet waar

C (1) is niet waar, (2) is waar

D (1) en (2) zijn beide niet waar

28 Gegeven is de verzameling V van rechthoeken met zijden x en $5-x$.
De grootste oppervlakte die een element van V kan hebben, is

A 4

B 6

C $6\frac{1}{4}$

D $8\frac{1}{4}$

29 Gegeven is een functie $f : x \to ax+b$ met $a < 0$ en $b < 0$.

(1) De grafiek van f snijdt de positieve x-as.

(2) De grafiek van f snijdt de positieve y-as.

A (1) en (2) zijn beide waar

B (1) is waar, (2) is niet waar

C (1) is niet waar, (2) is waar

D (1) en (2) zijn beide niet waar

30 Gegeven zijn de verzamelingen $\{p|p^2 = 4\}$ en $\{q|q^2 = 9\}$.
Het aantal mogelijke waarden van $p+q$ bedraagt

A 1

B 2

C 3

D 4

MAVO 4

Dinsdag 24 augustus, 9.30 – 11.30 uur

wiskunde II

Lees dit eerst:

a Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.

b Bij berekeningen mag, indien een benadering vereist is, gebruik worden gemaakt van tabellen van wortels en gyniometrische verhoudingen of van een rekenliniaal.

c Vragen over puntverzamelingen hebben, tenzij uit het gegeven anders blijkt, betrekking op het platte vlak.
Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel.
Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij uit het gegeven anders blijkt.

Evenzo wordt, tenzij uit het gegeven anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld:
$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w. $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein bedoeld de verzameling van alle reële getallen waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1 Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 12$, $AD = 4$ en $AE = 6$.
Op het verlengde van het lijnstuk DH ligt het punt P zo dat $HP = \frac{1}{2}DH$.
Het lijnstuk PC snijdt de ribbe HG in het punt Q.
a Toon aan dat $HQ : QG = 1 : 2$.
b Bereken de omtrek van $\triangle EPQ$.
c Bereken $\angle EPQ$ in graden nauwkeurig.
d Bereken de oppervlakte van $\triangle CEP$ in één decimaal nauwkeurig.

2 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn de punten $O(0, 0)$, $A(6, 0)$ en $B(0, 6)$ gegeven.
De lijn l is de middelloodlijn van het lijnstuk OA.
De lijn m is de middelloodlijn van het lijnstuk OB.
U is de verzameling van de punten P met de eigenschap $d(P, l) = 3$.
V is de verzameling van de punten Q met de eigenschap $d(Q, l) = d(Q, m)$.
a Teken de verzamelingen U en V in één figuur en schrijf de elementen op van $U \cap V$.
W is de verzameling van de punten R met de eigenschap $AR \leqq 6 \wedge AR \geqq BR$.
b Geef de verzameling W in de figuur aan.
c Bereken de omtrek en de oppervlakte van het door W bepaalde vlakdeel.

3 In een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven het punt $A(2, 6)$ met de plaatsvector $\vec{OA}$.
Bij elke $k \in \mathbb{R}$ behoort een plaatsvector $\vec{v_k} = \begin{pmatrix} k \\ 4 \end{pmatrix}$
a Neem $k = 8$ en bereken $|\vec{v_8}|$.
b Voor welke k hebben $\vec{OA}$ en $\vec{v_k}$ dezelfde richting?
c Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{v_8}$.

4 Met het gesloten interval $[-2, 3]$ als domein is de functie f gedefinieerd door $x \to -x^2+4$.
a Bereken de grootste en de kleinste waarde van $f(x)$ en teken de grafiek van f.
Voor elke $p \in \mathbb{R}$ is een functie g_p gedefinieerd door $x \to px$.
b Neem $p = 3$.
Los op $f(x) = g_3(x)$ en teken de grafiek van g_3.
c Voor welke p bevat de oplossingsverzameling van $f(x) = g_p(x)$ precies twee elementen?

HAVO

Dinsdag 24 augustus, 9.30 – 12.30 uur

wiskunde

Schrijf de uitwerkingen van de onderdelen van de volgende vijf vraagstukken zo op dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn

1 In R_3 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de punten $O(0, 0, 0)$, $A(6, 0, 0)$, $C(0, 6, 0)$ en $D(0, 0, 6)$.
Deze punten zijn hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$.
Punt M is het snijpunt van de lijnen AC en BO.
Op de ribbe DO ligt het punt $K(0, 0, 2)$.
De lijn door G en M wordt l genoemd.
a Bereken de coördinaten van het snijpunt van l en vlak ABK.
b Op l ligt een punt R zo dat DR loodrecht op l staat.
Bereken de coördinaten van R.
c Op l ligt een punt S zo dat $CS = KS$.
Bereken de coördinaten van S.

2 Met domein $[0, \pi]$ is gegeven de functie $f : x \rightarrow \cos 2x + \sin 2x - 1$.
a Geef het bereik van f.
b Stel een vergelijking op van de lijn die de grafiek van f raakt in het punt met x-coördinaat $\frac{1}{2}\pi$.
c Los op: $f(x) = 0$.

3 Gegeven zijn de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$
$f : x \rightarrow \left| \dfrac{x}{x-2} \right|$ en $g : x \rightarrow 2x$.
a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.
b Teken in één figuur de grafieken van f en g.
c Bewijs dat de grafiek van f één raaklijn heeft die evenwijdig is aan de grafiek van g.
Stel een vergelijking van deze raaklijn op.

4 Vier personen A, B, C en D spelen met een zuivere dobbelsteen waarbij D gooit.
Indien D 1 of 2 werpt, krijgt A één punt.
Indien D 3 of 4 werpt, krijgt B één punt.
Indien D 5 of 6 werpt, krijgt C één punt.
Degene die het eerst twee punten heeft, is winnaar.
a Bereken de kans dat A in twee worpen wint.
b Bereken de kans dat B in precies drie worpen wint.
c Bereken de kans dat C in precies vier worpen wint.

5 In R_2 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven:
de lijn l met vergelijking $x - 2y = 7$,
de cirkel γ met middelpunt $M(3, -2)$ en straal $\sqrt{10}$,
de verzameling V van de punten die een afstand tot M hebben die kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{10}$ is
en de verzameling W van de punten die een afstand tot l hebben die kleiner dan of gelijk aan $\sqrt{5}$ is.
a Bereken de coördinaten van de punten van γ die tot l de afstand $\sqrt{5}$ hebben.
b Teken de verzameling $V \cap W$.
c Bereken de extreme waarden van $3x + y$ als $(x, y) \in V \cap W$.

VWO

Dinsdag 24 augustus, 9.30 – 12.30 uur

wiskunde I
Alle kandidaten maken de opgaven 1, 2, 3 en 4 met één uitzondering: Alleen de kandidaten die in 1975 bij het V.W.O.-examen afgewezen werden, alsmede de staatsexamenkandidaten, mogen opgave 4 vervangen door opgave 5.

Schrijf de uitwerkingen van de onderdelen van de volgende vraagstukken zo op dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.

1 Voor elke $p \in \mathbb{R}$ is de functie f_p van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ gegeven door
$x \rightarrow x^3 - px^2 + 9x$.
a Onderzoek de functie f_6 en teken de grafiek van f_6.
b Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van f_6 en de x-as.
c Voor welke $p \in \mathbb{R}$ heeft elke lijn die evenwijdig is aan de x-as, met de grafiek van f_p precies één punt gemeen?

2 Voor elke $p \in \mathbb{R}$ is G_p de grafiek van de relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$
$R_p = \{(x, y) | x^2 + pxy = 2px + 2y\}$.
a Door welke punten gaan alle grafieken G_p?
b Voor welke $p \in \mathbb{R}$ geldt: $\{(x, y) | y = x\} \subset R_p$?
c Bewijs dat de punten van alle grafieken G_p waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as, op een parabool liggen.

3 De kromme K is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven door
$x = 2 \sin t$ en $y = t + 2 \sin t$ waarin $t \in [0, 2\pi]$.
a Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van K en de y-as.
Bewijs dat K slechts één punt gemeen heeft met de x-as.
b Bereken de coördinaten van de punten van K waarin de lijn die K raakt, evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.
Teken de kromme K.
c De richtingscoëfficiënt van de lijn die K in punt $(2 \sin t,\ t + 2 \sin t)$ raakt, noemt men m_t.
Bereken het bereik van de functie $t \rightarrow m_t$.

4 Men werpt met twee zuivere dobbelstenen.
De stochast X is de som van de aantallen ogen die met de twee stenen gegooid worden.
De stochast Y is het produkt van deze aantallen.
a Bewijs dat X en Y afhankelijke stochasten zijn.
b Bereken de kans dat de stochast X in 20 worpen precies 5 keer gelijk is aan 7.
c Twee personen A en B maken de volgende afspraak:
A betaalt 3 gulden aan B als de stochast Y gelijk is aan een even getal;
A ontvangt 9 gulden van B als de stochast Y gelijk is aan een oneven getal.
Bereken de kans dat A na 10 worpen meer geld van B ontvangen heeft dan hij aan B betaald heeft.

5 *a* Bereken $\int_2^3 \frac{x^2}{1-x}\,dx$.

b Gegeven zijn van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ de functies $f : x \to \frac{x^2}{1-x}$ en $g : x \to \frac{2x^2}{1-2x}$.

Bewijs dat de grafiek van g verkregen kan worden uit de grafiek van f door een vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong.

c De functie h van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven door $h : t \to \int_t^{2t} k(x)dx$

waarin k een functie is die een primitieve heeft met domein $\mathbb{R}$.
Bewijs dat $h'(t) = 2k(2t)-k(t)$.

VWO

Woensdag 25 augustus, 9.30–12.30 uur

wiskunde II
Schrijf de uitwerkingen van de onderdelen van de volgende vraagstukken zo op dat duidelijk blijkt hoe de antwoorden verkregen zijn.

1 In R_3 is ten opzichte van een orthonormale basis gegeven voor elke $p \in \mathbb{R}$ en elke $q \in \mathbb{R}$ de afbeelding $A_{p,q}$ met de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -p \\ 1 & 0 & q \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$.

a Bewijs dat voor elke p en elke q de beeldruimte (het bereik) van $A_{p,q}$ een vlak is.
Stel een vergelijking van dat vlak op.

b Bij welke relatie tussen p en q bevat de verzameling dekpunten van $A_{p,q}$ meer dan één punt?

c Neem $p = 1$ en $q = 2$.
Bewijs dat de lijn $l : \bar{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in de beeldruimte van $A_{1,2}$ ligt.
Stel een vergelijking op van het volledig origineel van l.

2 In R_2 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $A(3, 6)$, $O(0, 0)$ en de lijnen $l : \bar{x} = \lambda \binom{1}{1}$ en $m : \bar{x} = \binom{3}{6} + \mu \binom{1}{1}$.
Een punt P ligt op de lijn l.
Punt M is het midden van het lijnstuk OP.
Punt Q ligt op de lijn m zo dat de lijnen OQ en AM evenwijdig zijn.

a Bereken de coördinaten van P in het geval dat de oppervlakte van $\triangle OPQ$ gelijk is aan 6.

b Bewijs dat alle lijnen PQ door één punt gaan.
Welk punt is dat?

c V is de verzameling van alle lijnen PQ die l niet loodrecht snijden.
Bewijs dat bij elke lijn a uit V één lijn b uit V behoort die a loodrecht snijdt.

3 In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de lijn

$$l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ en het vlak $V : x_1 + x_2 = 0$.

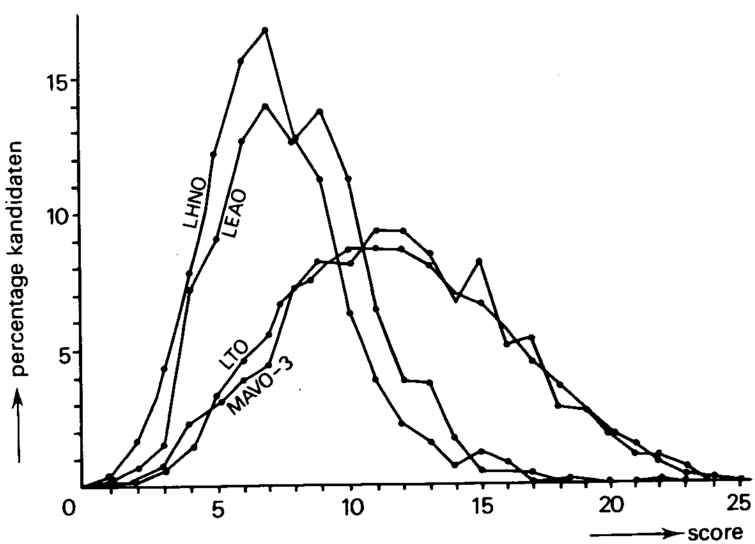
a S is de spiegeling in het vlak V.
D is de rotatie om de x_2-as die het punt (1, 0, 0) afbeeldt op het punt (0, 0, 1).
Leid een vectorvoorstelling af van het $D \circ S$-beeld van l.

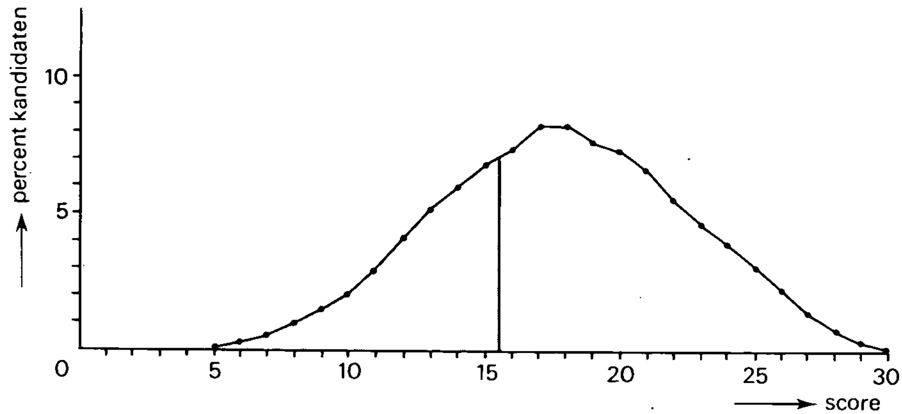
b Een bol met middelpunt M raakt V in het punt (2, −2, 1) en raakt de x_2-as.
Bereken de coördinaten van M.

c R is een rotatie om een lijn m door $O(0, 0, 0)$ die het punt (1, 0, 0) afbeeldt op het punt (0, 1, 0).
Een van de punten van l is een dekpunt van deze rotatie.
Stel een vectorvoorstelling van m op.

De eindexamens wiskunde 1976 in meerkeuzevorm

Naast een algemeen verslag over de eindexamens 1976 geeft het CENTRAAL INSTITUUT VOOR TOETSONTWIKKELING ook verschillende vakverslagen uit. Het vakverslag van de eindexamens wiskunde voor MAVO-4, MAVO-3/LTO en LEAO/LHNO in 1976 is kosteloos te bestellen bij het CITO, Oeverstraat 65 in Arnhem onder vermelding van CITO-memo 172.
Het aantal kandidaten voor het wiskunde examen 1976 was voor MAVO-4 35.275, voor MAVO-3 1.450, voor LTO 12.633, voor LHNO 1.091 en voor LEAO 621.





Uit bovenstaande grafiek blijkt dat de scoreverdeling voor MAVO-4 bij benadering een normale verdeling genoemd mag worden; de gemiddelde score van de kandidaten is 17.9. De grens onvoldoende/voldoende (de zogenaamde cesuur) is door de normencommissie vastgesteld op 15/16, waardoor 69% van de kandidaten een voldoende behaalde.

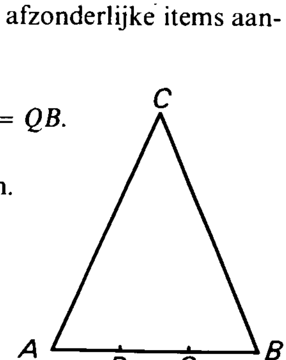
Ook in 1976 deden de MAVO-3 en LTO-kandidaten hetzelfde examen dat uit 25 items bestond (in 1977 zullen dit 30 items worden). De gemiddelde score die behaald werd was 12.0 (zie grafiek). De cesuur bij dit examen was vastgelegd op 10/11. Het percentage onvoldoenden bij MAVO-3 bedroeg 38 en bij LTO was dit 40.

Bij LHNO en LEAO waren betrekkelijk weinig scores hoger dan 15. De gemiddelde score was hier resp. 7.2. en 8.1. Het meerkeuze-examen dat door onverwacht veel kandidaten van LHNO en LEAO werd gemaakt bestond uit 25 items; 22 zoals in MAVO-3/LTO en 3 andere. De cesuur van dit examen was vastgesteld op 9/10. Het percentage onvoldoenden was resp. 83 en 71.

De populaties voor MAVO-4, MAVO-3 en LTO kregen een meerkeuze-examen met een goede betrouwbaarheid; voor LEAO en LHNO was het meerkeuze-examen een onbetrouwbaar meetinstrument.

Naast meer algemene gegevens en examenopgaven 1976 (eerste en tweede tijdvak) worden in het verslag ook besprekingen van afzonderlijke items aangetroffen. Hier volgt een voorbeeld:

9 Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$.
P en Q zijn punten op lijnstuk AB zodat $AP = PQ = QB$.
(1) $\triangle APC$ en $\triangle PQC$ hebben gelijke omtrekken.
(2) $\triangle APC$ en $\triangle PQC$ hebben gelijke oppervlakten.
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar, (2) is niet waar
C (1) is niet waar, (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



Een overzicht van de percentages goed taxerende kandidaten:

	MAVO-4	MAVO-3	LTO	LHNO	LEAO
(1) is niet waar	82%	70%	77%	52%	55%
(2) is waar	55%	57%	62%	59%	56%

Het is opvallend hoeveel kandidaten zo'n bewering als (2) niet waar vinden. Het item maakt volgens de toets- en itemanalyse goed onderscheid tussen kandidaten die de hele toets beter maken en kandidaten die de hele toets minder goed maken.

Het eindexamen wiskunde II 1976 *

Vorig jaar vielen de resultaten die door de kandidaten behaald werden bij het eindexamen wiskunde II, tegen. Een landelijke steekproef bij 80 scholen voor v.w.o. wees uit dat bij wiskunde II de cijfers voor het examen meer achterbleven bij die van het schoolonderzoek dan bij wiskunde I. Uiteraard maant een dergelijk resultaat tot voorzichtigheid. Alle betrokkenen waren het erover eens, toen het werk voor 1976 opgesteld werd, dat het beter was dan het voorgaande en beslist redelijk was.
Toch werd er ook dit jaar over geklaagd, dat het werk moeilijk was en dat de behaalde resultaten zeer matig waren. Natuurlijk gaat men de opgaven dan nog eens kritisch bekijken. Zowel het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren als de inspectie en de adviescommissie, belast met de opstelling van de concept-opgaven voor wiskunde II, zijn echter nog steeds van mening, dat het redelijk werk was.
Als dat zo is, dan moet er ergens een discrepantie zijn tussen het gegeven onderwijs en de aard van de examenopgaven. Dat kan heel goed bij een nog zo jong vak als wiskunde II.
We meenden dan ook verstandig te doen de voorzitter van de advies-commissie te vragen zijn gedachten over het wiskunde II-onderwijs en in het bijzonder over het laatste stel examenopgaven eens op papier te zetten. Hieronder volgt een artikel van zijn hand, dat om begrijpelijke redenen ongesigneerd blijft.
Natuurlijk verwacht de lezer, dat stilgestaan wordt bij de fout die in de tweede helft van opgave 3c zat. Deze opgave is, evenals alle andere opgaven, door acht 'normale' mensen onafhankelijk van elkaar gemaakt en ook nog door een hoogleraar. Het is hoogst verwonderlijk (en schrijver dezes durft deze kritiek te uiten, omdat hij zelf tot deze acht behoorde), dat geen van hen op de fout gestuit is. Hebben de kandidaten hier last van gehad? Dat moet wel haast uitgesloten geacht worden. Voor het betrokken onderdeel kon men slechts 3 punten verkrijgen. Bovendien was opgave 3c als laatste opgave meer in het

* Dit artikel, geschreven in augustus 1976, kon door diverse omstandigheden helaas niet eerder geplaatst worden.

bijzonder bestemd voor de goede leerlingen. Men kon alleen gewaar worden, dat er een fout in de tweede helft van 3c zat, als men de eerste helft tot een goed einde gebracht had en ingezien had, dat van de twee gevonden lijnen er slechts één voldeed. Nu is het theoretisch mogelijk, dat een goede leerling dit gezien heeft en bovendien gemerkt heeft, dat de tweede helft van 3c niet klopte, daarna zo geschrokken is dat hij dit resultaat niet aan het papier heeft durven toevertrouwen. Men kan gerust aannemen, dat deze leerling die 3 punten wel heeft kunnen missen. Maar deze kwestie lijkt ons meer academisch dan reëel.
Nu de bijdrage van de voorzitter van de adviescommissie. De inhoud heeft de volledige instemming van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Enkele opmerkingen naar aanleiding van het examen wiskunde II 1976.
Wiskunde II is nog steeds een nieuw vak; het is nog niet volledig uitgekristalliseerd. Dat blijkt uit de omstandigheid dat vele leraren (en dus ook hun leerlingen) vreemd aankijken tegen het examen dat zij voorgeschoteld krijgen. Weliswaar is er een examenprogramma, maar dat is zo ruim gesteld, dat men er weinig houvast aan heeft. Een omschrijving als 'Puntverzamelingen' kan van alles betekenen. Hoort het bissectriceloodvlak hierbij? En moeten de leerlingen erin geoefend worden om puntverzamelingen te vinden met behulp van het elimineren van parameters? Zo ja, tot welke moeilijkheidsgraad? Zo zijn er talloze onzekerheden, die m.i. inhaerent zijn aan het feit, dat wiskunde II een nieuw vak is.
Dat ook de bestaande leerboeken onvoldoende houvast bieden, is begrijpelijk: voor de auteurs gelden namelijk dezelfde onzekerheden als voor de man voor de klas. Niet alle ontwikkelingen kunnen voorzien worden. En verder kan een boek niet elk jaar bijgesteld worden.
Eigenlijk geven de examens nog de beste richtlijnen. Op verzoek van enige inspecteurs wil ik proberen aan de hand van het examen 1976 de lijnen voor het vak wiskunde II wat duidelijker te trekken. Laatste zekerheden kan ik natuurlijk niet bieden en deze zullen ook nooit geboden worden. Ongewenste verstarring zou hiervan het gevolg zijn.

1. Totnogtoe heeft ongeveer de helft van het examenwerk bestaan uit opgaven waarin afbeeldingen geen rol speelden, terwijl in de andere helft dit wel het geval was. Natuurlijk is hiermee niet gezegd, dat ook in de toekomst in elk examen aan beide soorten opgaven hetzelfde gewicht gehecht zal worden. Maar vast staat wel, dat de leraar er verstandig aan doet beide typen vraagstukken gelijkmatig tot hun recht te doen komen.

2. Wat ook wel duidelijk geworden is, vooral in de examens 1975 en 1976, is dat van wiskunde-II kandidaten verwacht wordt, dat zij met een zeker inzicht proberen de opgaven op te lossen. De mening dat iedere wiskunde II-opgave door noest rekenwerk kan worden opgelost, zal niet veel aanhangers meer hebben. Er wordt van de kandidaten verwacht, dat zij goed nadenken over de oplossingsmethode, voordat zij beginnen te rekenen. Doen zij dat niet en beginnen zij |direct| (met veel parameters) te rekenen, dan blijkt vaak dat zij

op een doodlopende weg verzeild geraakt zijn, wat weer tijdnood tot gevolg heeft. Het is daarom voor de leraren zaak hun leerlingen op dit aspect te wijzen. Enkele voorbeelden uit het examen 1976:

Opgave 1c. Gegeven: de lijnen

$$l : \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } m : \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gevraagd: de matrices van de orthogonale afbeeldingen die l op m afbeelden.

Oplossing. Een mogelijkheid is de matrix $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ te noemen en vervolgens negen vergelijkingen met negen veranderlijken op te stellen. Hoewel deze methode tot een oplossing kan leiden, is zij zeker niet aan te bevelen. Alleen zeer goede leerlingen komen er op die manier uit.
Liever gaan we als volgt te werk. Orthogonale afbeeldingen laten lengten invariant en dus wordt A(0, 0, 1) afgebeeld op B(0, 0, −1).

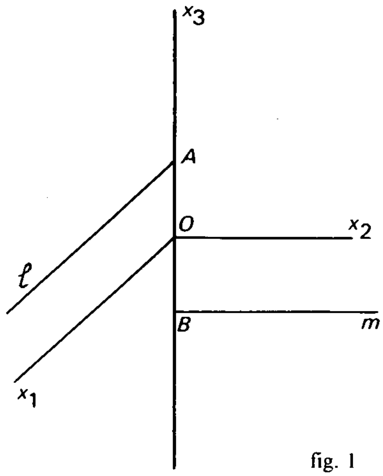


fig. 1

Daarmee is de laatste kolom van de matrix al bekend.
Verder zal een richtingsvector van l afgebeeld worden op een even lange richtingsvector van m, dus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{of} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dat geeft twee mogelijkheden voor de eerste kolomvector van de matrix.

De getallen uit de tweede kolom vinden we door er gebruik van te maken, dat de afbeelding orthogonaal is. Men kan ook gebruik maken van het uitprodukt; de beeldvector van het uitprodukt[1]) van twee vectoren is bij een orthogonale afbeelding het uitprodukt van de beeldvectoren of het tegengestelde hiervan. Een methode die nog meer op stereometrisch inzicht gebaseerd is, is de volgende. De orthogonale afbeeldingen die l in m doen overgaan, zijn:
de spiegeling in het vlak $x_3 = 0$ gevolgd door een rotatie om de x_3-as over $90°$ of $-90°$; de spiegeling in het vlak $x_3 = 0$, gevolgd door een spiegeling in het vlak $x_1 = x_2$ of het vlak $x_1 = -x_2$.

Opgave 1b. Zowel in 1b als in 2b komen verhoudingen van langs één lijn gelegen lijnstukken voor. Veel kandidaten drukten de lengten van de lijnstukken in één of meer parameters uit en pasten vervolgens de gegeven verhouding toe. Dit gaf aanleiding tot tijdrovend rekenwerk, dat bovendien nog alleen door goede leerlingen tot een goed einde gebracht werd. Veel eenvoudiger is het gebruik te maken van de parameter uit de vectorvoorstelling van de gegeven lijn.
Gegeven: E ligt zo op het lijnstuk CD, dat $CE : ED = 1 : 2$.
$C = (\lambda, 0, 1)$, $D = (0, \mu, -1)$.
Gevraagd: de plaatsvector van E.

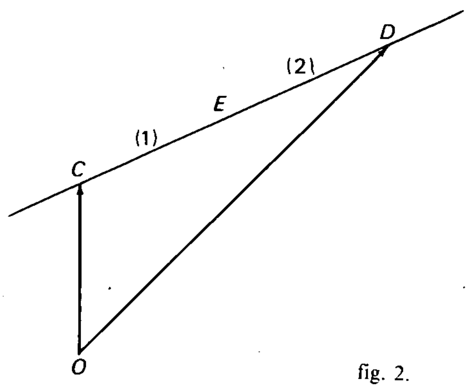


fig. 2.

Oplossing. Een vectorvoorstelling van de lijn CD is

$$\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{c}+\lambda(\bar{d}-\bar{c}) \\ \lambda_C = 0 \wedge \lambda_D = 1 \\ CE : ED = 1 : 2 \end{array} \rightarrow \lambda_E = \tfrac{1}{3}$$

dus

$$\bar{e} = \bar{c}+\tfrac{1}{3}(\bar{d}-\bar{c}) = \tfrac{2}{3}\bar{c}+\tfrac{1}{3}\bar{d} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{1}{3}\mu \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

[1]) Het uitproduct behoort niet tot de verplichte stof.

In opgave 2b kan analoog gehandeld worden.

Opgave 3a. Ook in deze opgave zien we, hoe noodzakelijk het is, dat er nagedacht wordt.

Gegeven: de afbeelding A_k met matrix $\begin{pmatrix} -2k & 4k-1 \\ -k+1 & 2k \end{pmatrix}$.

Te bewijzen: er bestaat een k waarvoor beeldruimte en kern van A_k samenvallen.

Oplossing. Veel kandidaten stelden stelsels vergelijkingen op om kern en beeldruimte te vinden en kwamen zo via allerlei omwegen tot $k = \frac{1}{5}$.

Eenvoudiger en fraaier is te constateren, dat
'de beeldruimte en de kern vallen samen'
gelijkwaardig is met
'beeldruimte en kern hebben beide dimensie 1'
dus met
'de rang van de matrix is 1.'
Nul stellen van de determinant levert dan direct $k = \frac{1}{5}$.

3. In de examens komen soms vragen voor die doen denken aan de vroegere stereometrie. Het lijkt ons nuttig, dat er vragen gesteld worden, waarmee het ruimtelijk inzicht getoetst wordt, mits er geen cultus ontstaat, zoals in de oude stereometrie. Vraag 2c kan door de kandidaten gemaakt worden, zonder dat zij over een uitgebreide stellingenkennis beschikken.

Opgave 2c.
Gegeven: lijn l, vlak V, punt P.
Gevraagd: een lijn m door P en een lijn s in V zo, dat s de loodrechte snijlijn is van l en m.
Oplossing. Bij deze opgave komt men er niet uit door op de rekentoer te gaan. De opgave moet meetkundig opgelost worden.

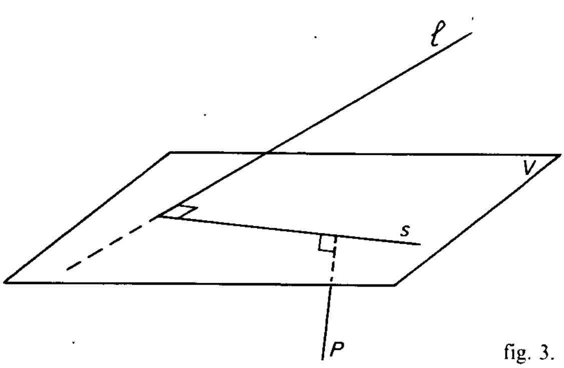


fig. 3.

Lijn s ligt in V en staat loodrecht op l. De richtingsvector van s is daardoor bepaald (loodrecht op de normaalvector van V en op de richtingsvector van l). Is s eenmaal gevonden, dan brengt men een vlak door P aan loodrecht op s

en vindt zo m. Ook kan men een variabel punt Q op s nemen en de parameter van Q berekenen voor het geval PQ loodrecht op s staat.

4. Opgave 1b. In deze opgave moet bewezen worden, dat punten die aan een bepaalde voorwaarde voldoen, op een ellips liggen.
Het komt erop neer, dat voor deze punten geldt

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}\lambda \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}\mu \\ x_3 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

waarin λ en μ voldoen aan de betrekking $\lambda^2+\mu^2 = 45$.
Hieruit volgt

$$\begin{aligned} x_1^2+4x_2^2 &= 20 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Door de kandidaat moest herkend worden, dat hier de vergelijking staat van een ellips in het vlak $x_3 = \frac{1}{3}$.
Dit valt stellig niet buiten de normale stof, zoals sommige leraren echter wel gedacht hebben. Hopelijk behoort dit misverstand nu definitief tot het verleden.

5. In de examenvraagstukken zijn totnogtoe alleen vectoren voorgekomen die met kentallen aangegeven werden. We moeten hieruit toch niet de conclusie trekken, dat vraagstukken met vectoren zonder kentallen (coördinatenvrije vraagstukken), zoals die in de experimentele examens geregeld voorkwamen, definitief verdwenen zijn. In het boekje 'Opgaven wiskunde I en II' komen ze wel voor. Deze bundel lijkt overigens niet goed meer aan te sluiten bij het huidige examen wiskunde II. Een herziening lijkt op zijn plaats. [1])
Ik hoop hiermee een bijdrage geleverd te hebben tot oplossing van de problemen rond wiskunde II. Het vak gaat ons zeer ter harte en daarom betreuren we het als minder goede resultaten behaald worden. Anderzijds zijn we van mening, dat het ongewenst zou zijn verbetering van resultaten te verkrijgen door het vak te reduceren tot een verzameling aangeleerde technieken.

[1]) Aan deze herziening wordt gewerkt (bestuur N.V.v.W.)

Moeten ellips en hyperbool op het eindexamen gekend worden?

In het Voorstel Leerplan Rijksscholen komt voor 'vergelijkingen van ellips, hyperbool en parabool'. Men zou kunnen denken, dat hiermee de weg geopend was om, net als voor 1968, te verwachten dat de leerlingen in staat zijn velerlei vraagstukken over dit onderwerp te maken. Om aan dit misverstand het hoofd te bieden, is door de inspectie uitdrukkelijk verklaard, dat met bedoelde passage alleen datgene bedoeld is, wat er staat. Men moet de ellips, de hyperbool en de parabool kunnen herkennen, als men een vergelijking ervan tegenkomt. Men hoeft dus geen vraagstukken te kunnen maken over raaklijnen, pool en poollijn, richtlijnen, brandpunten en dergelijke.
Nu het Voorstel Leerplan Rijksscholen vervangen is door het Leerplan Rijksscholen november 1975 is voor de toekomst de situatie minder duidelijk en is toelichting vereist. De woorden ellips, parabool en hyperbool komen niet meer expliciet in het leerplan voor. Over de parabool behoeven we verder niet te praten; deze komt automatisch in de algebra aan de orde. Blijven over de ellips en de hyperbool. Het is de gemeenschappelijke mening van de inspectie en van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, dat er de facto niets veranderd is. Nog steeds moeten de ellips en de hyperbool herkend kunnen worden. Om het duidelijk te zeggen:
men moet weten dat

$x^2+p^2y^2 = a^2$ de vergelijking van een ellips is;

$x^2-p^2y^2 = a^2$ de vergelijking van een hyperbool is;

$x^2-y^2 = a^2$ en ook $xy = c$ vergelijkingen van een orthogonale hyperbool zijn
($a \neq 0, p \neq 0, c \neq 0$).

Wie gaarne de voorschriften in de hand neemt, mag het bovenstaande beschouwen als interpretatie van het woord 'puntverzamelingen' dat in het programma voor wiskunde II op de vijfde regel staat.
Uit de aard der zaak is iedere leraar vrij in de wijze waarop hij tot deze vergelijkingen wil komen. Het meest instructief en het minst tijdrovend lijkt ons de volgende methode.
Bij de relaties vindt men dat de grafiek van de relatie

$$\{(x, y)|x^2+y^2 = a^2\}$$

een cirkel is.
Door hierop een lijnvermenigvuldiging ('afplatting') toe te passen, krijgt men een kromme die grafiek is van een relatie

$$\{(x, y)|x^2+p^2y^2 = a^2\}$$

Deze kromme noemen we een ellips.
Voor de hand ligt ook te onderzoeken de grafiek van de relatie

$$\{(x, y)|x^2 - y^2 = a^2\}$$

Desgewenst stelt men dit uit tot de zesde klasse. De grafiek noemen we een orthogonale hyperbool. De asymptoten zijn de lijnen

$$y = x \text{ en } y = -x$$

Door lijnvermenigvuldiging vinden we hieruit de grafiek van

$$\{(x, y)|x^2 - p^2y^2 = a^2\}$$

Deze kromme noemen we een hyperbool.
Voor $p^2 = 1$ is deze hyperbool orthogonaal.
De orthogonale hyperbool treedt ook op als grafiek van een functie

$$x \to \frac{c}{x}$$

Men kan vrij eenvoudig laten zien dat deze kromme uit de hierboven gedefinieerde orthogonale hyperbool door een rotatie ontstaan kan.
Dit is uiteraard slechts een raad. Uit het programma is stellig niet af te leiden, dat men het zo zou moeten doen. Men heeft dan ook de volle vrijheid een andere weg te bewandelen.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Redactie.

In de pagina-nummering van het januari nummer is een fout geslopen.
I.p.v. de nummers 121 t/m 160 dient men te lezen 161 t/m 200.

De Wiskunde Olympiade voor 1977 veilig gesteld

Beide rondes van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en deelname van een Nederlandse ploeg aan de Internationale Wiskunde Olympiade (dit jaar in Joegoslavië) kunnen in 1977 doorgaan. Dit is te danken aan een eenmalige, maar substantiële subsidie van het Prins Bernhard Fonds en aan eveneens genereuze bijdragen van het Wiskundig Genootschap, de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren, Wolters-Noordhoff, Educaboek, Philips, Shell en IBM.

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977

Op vrijdag 1 april wordt de eerste ronde gehouden van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977. Het is de bedoeling dat deze ronde zoals gebruikelijk op de scholen wordt georganiseerd. Deelname staat open voor alle leerlingen van de klassen 4 en 5 VWO met belangstelling voor wiskunde. De

secties wiskunde van alle Nederlandse scholen met een VWO-afdeling zullen half maart vertrouwelijk de opgaven ontvangen, tezamen met een correctiemodel. De scholen wordt gevraagd geïnteresseerde leerlingen op *vrijdag 1 april van 14.00 uur tot 17.00 uur* in de gelegenheid te stellen de antwoorden op de opgaven te vinden. Bij elke opgave is er slechts één kort correct antwoord mogelijk. Aan de hand van het correctiemodel bepaalt de leraar na afloop de behaalde puntenaantallen. Hij stuurt een lijstje hiervan op naar de organisatoren. Deze selecteren de deelnemers met de hoogste puntenaantallen, vragen hun werk ter controle op, en nodigen hen uit voor deelname aan de tweede ronde, tevens finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Deze wordt gehouden op 2 *september in Utrecht*. Afhankelijk van het aantal deelnemers aan de eerste ronde, en de beschikbare financiële middelen zullen hiervoor 60 of meer leerlingen worden uitgenodigd. De beste 10 van de tweede ronde ontvangen een prijs. Uit de beste 15 wordt een ploeg van 8 geselecteerd voor de Internationale Wiskunde Olympiade van 1978.
De Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt georganiseerd door de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, p/a Wiskundegebouw, Budapestlaan 6, Utrecht, tel: 030-531725 of 071-151015.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgaven

362 Bij een spel gooit met met één dobbelsteen. Een speler gooit, als het zijn beurt is, zo vaak achter elkaar als hij wil. Zijn score bedraagt het totaal aantal ogen dat hij gegooid heeft. Echter zodra hij 1 gooit, moet hij zijn beurt beëindigen en wordt zijn score voor die beurt tot 0 gereduceerd. We beschouwen de volgende twee strategieën:

a de speler stelt van te voren vast, hoe vaak hij gooien wil;

b de speler stelt van te voren vast, dat hij zijn beurt beëindigt, zodra het totaal aantal gegooide ogen een bepaald bedrag overschrijdt.

Wat is in elk van beide gevallen de beste strategie? En hoeveel is dan de verwachte score? (Drs. H. van der Lek, Wijchen)

363 In de stad Aristotepolis wonen drie soorten mensen, namelijk
personen die steeds de waarheid spreken;
personen die steeds liegen;
personen die soms de waarheid spreken en soms liegen.
Zij kennen elkaar goed.

a Een bezoeker komt in de stad en wil een inwoner vinden die steeds de waarheid spreekt. Hij stelt daartoe vragen waarop de aangesprokene zo mogelijk antwoord geeft. Mogelijke antwoorden zijn alleen, ja, neen, ik weet het niet.
Hoe bereikt hij zijn doel?

b Een bezoeker stelt vragen waarop de inwoners alleen met ja of neen mogen antwoorden en dit ook kunnen. Door vragen is hij in staat twee deelverzamelingen van inwoners af te zonderen. De ene deelverzameling bestaat uit één inwoner die steeds de waarheid spreekt en verder uitsluitend inwoners die soms liegen en soms de waarheid spreken. De andere uit één inwoner die altijd liegt en verder uitsluitend inwoners die soms de waarheid spreken en soms liegen. Beide deelverzamelingen hebben evenveel elementen. Het is principieel niet mogelijk op deze manier de waarheidsspreker te vinden.
Mocht iemand een modificatie van de tweede versie vinden waarbij de waarheidsspreker gevonden wordt, dan houd ik mij aanbevolen.

Oplossingen

360
Van een verzameling woorden wil men een gesloten ketting maken zo, dat de eindletter van elk woord dezelfde is als de beginletter van het volgende. Elke letter komt even vaak als eindletter

voor als als beginletter. Gevraagd een noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaronder een dergelijke ketting gevormd kan worden.
Als de letters a en b (cursief gedrukte letters zijn variabelen) voorkomen, moet b vanuit a bereikbaar zijn. D.w.z. er moet een ketting woorden zijn waarvan het eerste als beginletter a en het laatste als beginletter b heeft. Deze voorwaarde is niet alleen noodzakelijk maar ook voldoende.
Bewijs. Vorm uit de gegeven woordverzameling een gesloten ketting. Zijn niet alle woorden daarbij gebruikt, vorm dan uit de resterende weer een gesloten ketting. Enzovoorts, totdat alle woorden gebruikt zijn.
Als in twee kettingen eenzelfde letter a als beginletter voorkomt, breken we de kettingen bij deze letter open en verenigen ze tot een nieuwe gesloten ketting. Uiteindelijk houden we zo òf één gesloten ketting over, òf een aantal gesloten kettingen die twee aan twee geen enkele beginletter gemeen hebben.
Onderstel de kettingen I en II hebben geen beginletter gemeen. In I komt de beginletter a voor en in II beginletter b. Er is dan een ketting woorden waarvan het eerste met a begint en het laatste met b. Kies uit deze ketting het eerste woord dat niet tot I behoort. Onderstel dit woord heeft als beginletter p. Tot een van de van I verschillende gesloten kettingen zou dan een woord behoren dat met p begint. Tot I behoort echter een woord dat op p eindigt en dus ook een woord dat met p begint. Dit is in strijd met het feit dat geen twee kettingen een beginletter gemeen hebben. Dus behoort de gehele ketting die a en b verbindt, tot I. Maar dan behoort tot I een woord dat met b begint en dit is weer in strijd met de onderstelling dat I en II geen beginletter gemeen hebben. Waarmee aangetoond is dat alle woorden tot één gesloten ketting aaneengeregen kunnen worden.

361
Gevraagd wordt hoeveel verschillende kettingen we kunnen maken van 12 rode en 18 blauwe kralen. Tweè kettingen die elkaars spiegelbeeld zijn, worden niet als verschillend beschouwd.
We vragen eerst hoeveel niet gesloten snoeren we van de 30 kralen kunnen maken en rekenen twee snoeren die elkaars spiegelbeeld zijn, wel voor verschillend. Dit aantal is gelijk aan het aantal manieren waarop we uit een rij van 30 ongekleurde kralen er 12 uit kunnen kiezen om deze blauw (en de overige rood) te verven. Dus aan $\binom{30}{12}$.
Nu maken we van de rechte snoeren gesloten kettingen door ze bijv. rechtsom dicht te buigen. We rekenen symmetrische kettingen voorlopig nog voor verschillend.
Als er zich niets bijzonders voordoet, zijn er 30 verschillende rechte snoeren die dezelfde ketting opleveren. De ketting kunnen we immers op 30 verschillende manieren openbreken.
Maar er kunnen zich bijzonderheden voordoen. Het kan zijn dat een snoer samengesteld is uit 6 congruente delen die aan elkaar gezet zijn. Een zo'n stuk bestaat dan uit 2 rode en 3 blauwe kralen. Snoeren van 2 rode en 3 blauwe kralen kunnen we op $\binom{5}{2}$ manieren maken. Voegen we 6 dergelijke snoeren tot een ketting samen, dan kan deze ketting slechts op 5 verschillende manieren opengebroken worden.
Het kan ook zijn, dat een snoer samengesteld is uit 3 congruente delen. Er zijn $\binom{10}{4}$ dergelijke snoeren. Hier zijn ook die snoeren bij die uit 6 congruente delen bestaan. Blijft over $\binom{10}{4}-\binom{5}{2}$ snoeren die uit 3, maar niet uit 6 congruente delen bestaan. De daaruit gefabriceerde kettingen kunnen we op 10 verschillende manieren openbreken.
Net zo behandelen we de snoeren die uit 2 congruente delen bestaan.
Zodat we in totaal krijgen

$$\binom{5}{2}\tfrac{1}{5}+\left(\binom{10}{4}-\binom{5}{2}\right)\tfrac{1}{10}+\left(\binom{15}{6}-\binom{5}{2}\right)\tfrac{1}{15}+\left(\binom{30}{12}-\binom{10}{4}-\binom{15}{6}+\binom{5}{2}\right)\tfrac{1}{30}$$

verschillende kettingen.
Nu moeten we nog twee symmetrische kettingen voor niet verschillend gaan rekenen. Anders gezegd: we moeten nagaan hoeveel van de hierboven gevonden kettingen geen symmetrieas hebben. Hun aantal moet door 2 gedeeld worden en opgeteld worden bij het aantal kettingen dat wel een symmetrieas heeft.
We moeten twee soorten symmetrie onderscheiden, namelijk symmetrie waarbij de symmetrieas niet door twee kralen loopt, en symmetrie waarbij de symmetrieas de verbindingslijn van twee kralen is. Ik geef nu verder alleen de hoofdlijnen aan.
Bij de symmetrie waarbij de as niet door twee kralen loopt, kunnen we de ketting opgebouwd

denken uit twee symmetrische snoeren van elk 6 rode en 9 blauwe kralen. Dit zijn er $\binom{15}{6}$. Twee dergelijke snoeren die elkaars spiegelbeeld zijn, geven aanleiding tot dezelfde ketting.
Nu de kettingen met symmetrieas door twee kralen. Behoudens deze twee kralen bestaan deze uit twee symmetrische delen van elk 5 rode en 9 blauwe kralen of elk 6 rode en 8 blauwe kralen. Omdat 6 en 8 beide even zijn, moeten we nog voorzichtigheid betrachten. Er zijn blijkbaar kettingen met symmetrieas door twee blauwe kralen met aan weerszijden 6 rode en 8 blauwe kralen, die nog een symmetrieas hebben. Ter weerszijden van deze symmetrieas bevinden zich dan 6 rode en 9 blauwe kralen. Deze kettingen hebben we in de vorige alinea al gevonden en moeten niet opnieuw meegerekend worden.
En ten slotte zijn er nog andere gevallen van meervoudige symmetrie mogelijk. Er kunnen namelijk drie symmetrieassen zijn die de ketting verdelen in 6 delen met elk 2 rode en 3 blauwe kralen. We moeten nog een correctie aanbrengen om deze niet meervoudig te rekenen.
Uit dit voorbeeld wordt duidelijk, hoe het probleem in het algemeen opgelost wordt. De echte gemeenschappelijke delers van 12 en 18 (2, 3 en 6) spelen blijkbaar een belangrijke rol.

INHOUD