

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang

1976/1977

no 5

januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. W. E. de Jong.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden f 30,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 85,—.

Het aanvangsonderwijs in de meetkunde

P. G. J. VREDENDUIN

Doorwerth

De meest ingrijpende wijziging in ons wiskunde-onderwijs bij de invoering van het nieuwe programma is de overschakeling geweest van de euclidisch-deductieve behandelingswijze van de meetkunde op een geheel andere. Wat is de grondgedachte die aan deze vernieuwing ten grondslag ligt? Deze vraag heeft mij lange tijd beziggehouden. De niveautheorie van Van Hiele en de verwante ideeën van Van Dormolen hebben mij geholpen meer licht in deze materie te zien. Ik wil proberen mijn gedachten hierover samen te vatten. Eerst wil ik, om misverstanden te voorkomen, met mijn eigen woorden weergeven wat ik van de niveautheorie begrepen heb. Van Hiele onderscheidt het nulde, het eerste en het tweede denkniveau. Mede aan een concreet voorbeeld wil ik de onderscheiding toelichten.

Nulde niveau. Dit bestaat uit het herkennen en benoemen van objecten. We herkennen dat een figuur een driehoek, een rechthoek, een cirkel is, zoals we in het dagelijks leven herkennen dat een voorwerp een tafel, een kast, een trein is. Van begripsomschrijving is nog geen sprake. Aan de hand van voorbeelden wordt de draagwijdte van een begrip duidelijk. Eigenschappen van een voorwerp resp. een figuur worden geconstateerd. Zo zien we dat de diagonalen van een rechthoek even lang zijn.

Nu het concrete voorbeeld. In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk. Dat zie je, constateer je. Iemand is er niet zeker van. Wat dan? Knip de driehoek uit en vouw hem dubbel. Nu zie je dat het werkelijk waar is. Of, iets gecompliceerder: meet de hoeken, je constateert dan dat ze even groot zijn. Door concreet manipuleren kom je tot de gelijkheid van de hoeken. Net zoals je door concreet manipuleren merkt, dat een brandende kachel heet is. Raak hem maar aan.

Eerste niveau. De draagwijdte van een begrip wordt niet alleen maar aan voorbeelden gedemonstreerd, maar geëxpliciteerd. We zeggen niet plompverloren: dat is een rechthoek. We brengen onder woorden wat een rechthoek is. Bijvoorbeeld: een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken. Of: een rechthoek is een vierhoek die twee symmetrieassen heeft die niet door de hoekpunten gaan. Wat we zullen zeggen, hangt af van het verband waarin de rechthoek ter sprake komt. In elk geval worden de visuele kenmerken van een rechthoek onder woorden gebracht.

Nu weer de gelijkbenige driehoek met zijn gelijke basishoeken. Op het nulde niveau constateerden we deze gelijkheid. Op het eerste niveau zijn we daar niet mee tevreden, maar vragen we naar een motivering. Hoe weet je zeker, dat de basishoeken gelijk zijn? Elke motivering heeft een voorgeschiedenis. De voorgeschiedenis bestaat hier daaruit, dat we weten dat de gelijkbenige driehoek een symmetrische figuur is. Hoe we dit weten is voor het moment niet relevant. Men kan het gevonden hebben door de driehoek te spiegelen in de bissectrice van de tophoek en dan te constateren dat we de oude driehoek weer terug krijgen. Door spiegeling gaat de driehoek dus in zichzelf over. De ene basishoek gaat daarbij in de andere over. Dus zijn de basishoeken gelijk.

Kort geformuleerd: de basishoeken zijn gelijk, omdat bij spiegeling de ene in de andere overgaat. Of: vanwege de symmetrie van de driehoek. De gelijkheid wordt hier dus niet slechts geconstateerd, maar ook gemotiveerd.

Tussen motivering en bewijs is een tweeledig verschil.

a Bij de bewijsvoering zijn geen lacunes toegestaan, bij de motivering wel. Men zou kunnen zeggen, dat de motivering een bewijsvoering in de dop is, waarbij het subject het resultaat van zijn gedachtengang weergeeft zonder alle tussengelegen trappen expliciet te vermelden.

b De motivering bestaat veelal uit één enkele uitspraak en niet, zoals de bewijsvoering, uit een keten van uitspraken.

Tweede niveau. Hier doet het bewijs zijn intrede. Men interesseert zich niet meer alleen voor de eigenschappen van de figuur, maar voor ruimere samenhangen.

Om duidelijk te maken waarin het tweede niveau zich nu precies van het eerste onderscheidt, neem ik weer mijn toevlucht tot de gelijkbenige driehoek met zijn gelijke basishoeken.

Ik neem de voorgeschiedenis iets beperkter. Ik ga uit van de eigenschappen van de spiegeling:

het beeld van een rechte lijn is een rechte lijn;

het beeld van een lijnstuk is een even groot lijnstuk;

het beeld van een hoek is een even grote hoek.

De symmetrie van de gelijkbenige driehoek reken ik nu dus niet tot de voorgeschiedenis, maar ik ga deze bewijzen.

Driehoek ABC is gelijkbenig; $AB = AC$. Trek de bissectrice l van de tophoek A . Spiegel in de lijn l .

Het spiegelbeeld van de lijn door A en B is een lijn.

Omdat A op l ligt, gaat deze lijn door A .

Omdat $\angle A_1 = \angle A_2$, is het spiegelbeeld van de lijn door A en B de lijn door A en C .

Omdat $AB = AC$, is het spiegelbeeld van B het punt C .

Net zo vinden we, dat het spiegelbeeld van C het punt B is.

Het spiegelbeeld van de lijn door B en C is dus de lijn door C en B . Het spiegelbeeld van hoek B is dan hoek C .

Dus is $\angle B = \angle C$.

Hiermee is niet alleen de symmetrie van de driehoek bewezen, maar tegelijk dat de basishoeken gelijk zijn.

Heel duidelijk is het verschil met het eerste niveau. De redenering bevat geen

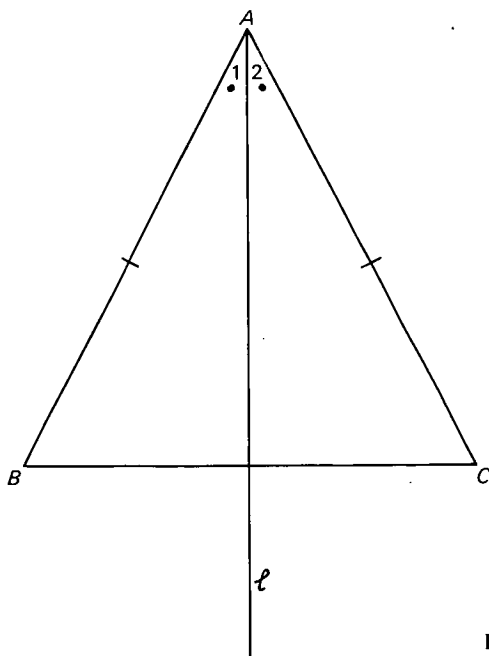


Fig. 1

lacunes meer (als men ook weet, dat een hoek een bissectrice heeft). De enkelvoudige motivering is vervangen door een keten uitspraken waarvan elke een gevolg is van een of meer voorgaande (inclusief de uitspraken uit de 'voorgeschiedenis').

Toch zit er nog een addertje onder het gras. In de tweede regel van het bewijs staat:

Omdat A op l ligt, gaat deze lijn door l .

Hier had nog een regeltje tussen moeten staan:

Het spiegelbeeld van A is A .

Hoe weten we dat? Dat volgt uit de definitie van 'spiegelen'.

Hier raken we een ander verschil tussen eerste en tweede niveau.

Op het eerste niveau legt men uit, hoe het spiegelbeeld van een punt verkregen wordt. Ik stel me voor, dat een leraar daarbij een punt buiten de symmetrieas neemt. Daarna zal hij vragen: welke punten blijven op zijn plaats? Ik kan me niet voorstellen, dat hij in dit stadium zal vertellen, hoe men het spiegelbeeld krijgt van een punt buiten de symmetrieas en dan zal vermelden: we spreken af dat het spiegelbeeld van een punt op de as dat punt zelf is. Op dit niveau gaat het nog wat gemoedelijker toe. Hoofdzaak is dat men elkaar begrijpt en door te rigoureuze omschrijvingen zou dit begrijpen wel eens eerder geschaad dan gebaat kunnen worden. Op het tweede niveau is de situatie anders. Daar zijn lacunes in de bewijsvoering verboden. Maar dan zullen ook lacunes (gemoedelijkheden) in de definities vermeden moeten worden. Aan de omschrijving van een begrip stelt men op het eerste niveau de eis, dat daardoor de betekenis van dit begrip goed overkomt. Natuurlijk stelt men op het tweede niveau aan een definitie nog dezelfde eis. De leraar moet de definitie zo voorbereiden, dat de

betekenis goed duidelijk wordt. Maar daarnaast wordt nu aan de definitie ook de eis gesteld dat ze precies en volledig weergeeft wat onder het gedefinieerde verstaan wordt.

Resumé van het onderscheid tussen de drie niveaus:

nulde niveau: benoemen-herkennen en constateren;

eerste niveau: omschrijven en motiveren;

tweede niveau: definiëren en bewijzen.

Het spreekt vanzelf, dat de overgang van een niveau naar het aangrenzende geen abrupte overgang is. In de praktijk kunnen de niveaus in elkaar overgaan. In detailkwesties zal het wel eens moeilijk uit te maken zijn op welk niveau men zich bevindt. Soms zal men tussen twee niveaus in zweven. Dit is echter niet essentieel. Van belang is de grote lijn en ik hoop, dat deze duidelijk geworden is.

Volgens welke principes gaven we meetkundeles, voordat de mammoetwet zijn intrede deed? Laat ik beginnen met de toestand voor 1958, dus voor het van kracht worden van het Wimecos-programma. Officieel werd toen gestart op het tweede niveau. Men begon liefst de eerste les, of anders de tweede, met enkele axioma's. Het behoeft geen betoog, dat dit tweede niveau onderwijs een schijnvertoning was. Het nulde niveau werd oogluikend toegelaten. Het eerste niveau werd geïgnoreerd. De enige die geprobeerd heeft consequent te zijn, is Schogt geweest. Hij heeft een zeer respectabele poging gedaan in de eerste klas les te geven geheel op het tweede niveau. In zijn schoolboek *Beginnelsen der vlakke meetkunde*, een leerboek voor beginners overeenkomstig de heden-daagsche inzichten in de Euclidische meetkunde, verschenen bij P. Noordhoff in 1929, heeft hij zijn methode op schrift gesteld. Zijn poging is in de kiem gesmoord; didactisch bleek zijn opzet onuitvoerbaar.

In 1958 werd het Wimecos-programma officieel ingevoerd. Dit vermeldt expliciet: intuïtieve inleiding in de planimetrie. Deze intuïtieve inleiding bevond zich in essentie op het nulde niveau. Wel trachtte men de geesten vroegtijdig rijp te maken voor het tweede niveau. Zo kon men bijv. als volgt bewijzen, dat de bissectrices van twee nevenhoeken loodrecht op elkaar staan.

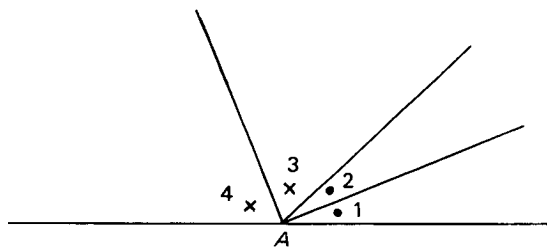


Fig. 2

Stel $\angle A_{1,2} = a^\circ$. Dan is achtereenvolgens $\angle A_2 = \frac{1}{2}a^\circ$, $\angle A_{3,4} = 180^\circ - a^\circ$, $\angle A_3 = 90^\circ - \frac{1}{2}a^\circ$, $\angle A_{2,3} = \frac{1}{2}a^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2}a^\circ = 90^\circ$.

Na verloop van een paar maanden werd de leerling voor de keus gesteld: wat vind je beter, kijken of het zo is of bewijzen dat het zo is.

Het spreekt vanzelf dat de leerling niet kiezen mocht. Maar hij werd van nu af aan geacht gemotiveerd te zijn zich op het tweede niveau te bewegen. Van

een opereren op eerste niveau als overgangstoestand tussen nulde en tweede was geen sprake.

In 1959 uitte Dieudonné in Royaumont de historische kreet: A bas Euclide. Deze leuze leidde een nieuw tijdperk in voor het aanvangs-onderwijs in de planimetrie. Ze had echter niets te maken met niveauonderscheid. Dieudonné wilde alleen beweren, dat de euclidische aanpak van de planimetrie verouderd en omslachtig was en dat er meer moderne methoden waren om dit onderwijs te geven die enerzijds sneller tot resultaat leiden en anderzijds zich beter lenen voor een wetenschappelijk verantwoorde opbouw van de meetkunde. Zo heeft de slagzin van Dieudonné in België uiteindelijk geleid tot een versterking van het onderricht op tweede niveau bij het aanvangsonderwijs.

In Nederland deed zich een complicatie voor. Tegelijk met de invoering van het nieuwe programma werden we geplaatst voor een herstructurering van het voortgezet onderwijs. We moesten lesgeven in de brugklasse zowel aan vwo als aan havo en mavo leerlingen. Deze ontwikkelingen hebben een versteviging van het tweede niveau in het aanvangsonderwijs onmogelijk gemaakt en hebben dus geleid tot niveauverlaging. Hoe naar ik dit woord in het algemeen vind, ben ik er hier toch wel gelukkig mee.

Ik zou de richtlijn voor het huidige planimetrie-onderwijs in het eerste leerjaar als volgt willen formuleren.

Het onderwijs in de vlakke meetkunde in de brugklas heeft plaats op het eerste niveau. Voorzover noodzakelijk worden beschouwingen op nulde niveau toegevoegd.

Tot slot wil ik de mogelijke consequenties nagaan die dit standpunt voor het brugklasonderwijs heeft. Ik zeg voorzichtig 'mogelijke consequenties', omdat geen twee collega's hierover dezelfde gedachten zullen hebben. Ik zou het volgende dan ook niet graag als een soort laatste wijsheid presenteren, maar meer als een uiting van privé-gedachten.

Een inleiding op nulde niveau is natuurlijk onvermijdelijk. Over aard en omvang hiervan wil ik het niet hebben. Mij interesseert meer de vraag, hoe we tot het eerste niveau komen. Vroeger waren de congruentie-eigenschappen het startpunt voor het tweede niveau. Ik dacht dat thans de spiegeling een uitnemend startpunt voor het eerste niveau is. Nadat men verteld heeft, hoe spiegelen in zijn werk gaat en figuren heeft laten spiegelen, komt de hierboven vermelde gelijkbenige driehoek aan bod, die we in de bissectrice van de tophoek spiegelen. Dit alles is nog werken op nulde niveau. Op grond van symmetrie zien we dan, dat de basishoeken gelijk zijn, de bissectrice van de tophoek tevens hoogtelijn en middelloodlijn van de basis is, de hoogtelijnen uit de uiteinden van de basis gelijk zijn, deze hoogtelijnen elkaar op de hoogtelijn uit de top snijden enzovoorts. De juistheid van deze beweringen wordt gemotiveerd door ze uit de symmetrie af te leiden. Hier zijn we dus op het eerste niveau. Nu de vierhoeken. Zijn er symmetrische vierhoeken? Twee soorten: de symmetrieas kan door twee hoekpunten gaan of door geen enkel hoekpunt. Gaat de symmetrieas door twee hoekpunten, dan hebben we een vlieger. Gaat hij door geen enkel hoekpunt, dan een symmetrisch trapezium. Eigenschappen van de vlieger kunnen we weer in overvloed uit de symmetrie afleiden. Van het symmetrisch trapezium ook, maar onze belangstelling voor deze figuur is sterk

gereduceerd vergeleken bij vroeger. Kan een vlieger nog een symmetrieas hebben? Inderdaad, de verbindingslijn van de andere twee hoekpunten kan ook symmetrieas zijn; zo ontstaat de ruit. Beantwoording van dezelfde vraag met betrekking tot het symmetrisch trapezium levert de rechthoek op. Ten slotte kan het aantal symmetrieassen vier zijn, in welk geval we te maken hebben met een vierkant.

Na de lijnspiegeling komt de puntspiegeling aan bod. Puntsymmetrische driehoeken zijn er natuurlijk niet. Wel puntsymmetrische vierhoeken. Deze heten parallellogrammen. Van een parallellogram zijn daarom overstaande zijden gelijk en evenwijdig en delen de diagonalen elkaar middendoor. Verder zijn overstaande hoeken gelijk. Puntsymmetrisch is ook de cirkel.

De puntspiegeling is een bijzonder geval van de rotatie. Rotatiesymmetrisch is de cirkel. De hoek waarover geroteerd wordt, is hier van geen belang. Sommige figuren zijn rotatiesymmetrisch in die zin, dat ze alleen bij bepaalde rotaties in zichzelf overgaan. Eén soort is daarbij van veel belang: de in een cirkel beschreven veelhoeken die rotatiesymmetrisch zijn. Dit zijn de regelmatige veelhoeken. Ze hebben gelijke zijden en gelijke hoeken.

Bij al deze afbeeldingen zijn de beeldlijnstukken gelijk aan hun origineel en ook de beeldhoeken gelijk aan hun origineel. Er is nog een afbeelding waarbij dat het geval is: de translatie. (In de klas zullen we een wat simpeler terminologie gebruiken en de figuren in concreto laten bewegen.) De translatie levert ons een goed hulpmiddel om te geraken tot de gelijkheid van F-hoeken.

Teken een lijnstuk en zijn beeldlijnstuk. Dit zijn overstaande zijden van een vierhoek. Deze vierhoek blijkt een oude bekende te zijn: een parallellogram. Van dit parallellogram kunnen de hoeken recht zijn. We krijgen dan weer een oude bekende: de rechthoek. En als de vier zijden gelijk zijn, krijgen we de ruit. Ik begrijp, dat sommigen op dit punt driftig dreigen te worden. Het spel op eerste niveau is geen spel zonder grenzen. De grens is hier duidelijk bereikt. We krijgen drie oude bekenden terug: het parallellogram, de rechthoek, de ruit. Maar is dit werkelijk hetzelfde parallellogram dat we bij de puntsymmetrie tegenkwamen en zijn het dezelfde rechthoek en dezelfde ruit die bij de lijnsymmetrie hun intrede deden? Weet je zeker dat dit nieuwe parallellogram puntsymmetrisch is en dat de nieuwe rechthoek en ruit elk twee symmetrieassen hebben?

Voor de leerlingen ligt hier geen probleem. Zij herkennen in de figuur die ontstond door een lijnstuk een translatie te laten ondergaan, een parallellogram. En voor hen is even evident, dat als bovendien de hoeken recht zijn er weer een rechthoek op bord staat en ook dat bij gelijkheid van zijden we weer te maken hebben met een ruit. Merkwaardigerwijs is dit een terugval in niveau. Deze herkenning is een herkenning op nulde niveau. Dit moet een waarschuwing voor de docent inhouden. De lange termijn doelen die hij heeft, zullen niet gebaat zijn bij het laten terugvallen van de leerling naar niveau nul. Het andere uiterste is de leerlingen door een redenering te laten zien, dat we hier inderdaad te maken hebben met een parallellogram, rechthoek en ruit. Dan springen we echter op een abrupte manier van het eerste niveau over naar het tweede en ook dit lijkt me niet aan te bevelen. Ik stel hier het probleem zonder het op te lossen. Ieder moet zelf maar weten wat hij doen wil. Het sig-

naleren van het probleem lijkt me echter erg nuttig om nog eens duidelijk de scheiding tussen de drie niveaus te onderkennen.

In het oude programma was de meetkundestof in de eerste klas een vrij aardig afgesloten geheel waarin onder meer een hele reeks stellingen over het parallellogram, de rechthoek, de ruit afgeleid werden benevens hun omgekeerden. Zich beperken tot het eerste niveau houdt in, dat men ervan afziet deze omgekeerden te bewijzen. In de regel zou men hierbij op onoverkomelijke moeilijkheden stuiten in die zin, dat men gedwongen wordt op niveau twee te praten. Probeer maar aan te tonen dat uit $AB = BC$ en $CD = DA$ volgt, dat vierhoek $ABCD$ een vlieger is. Men komt dan op een hoger niveau terecht en merkt direct dat de leerlingen grote moeite hebben het betoog te volgen en niet in staat zijn analoge redeneringen zelf te produceren. 'Ze kunnen niets meer bewijzen.' Men mag hierover niet klagen. Welbewust is hun dit niet geleerd. Overschakelen op tweede niveau heeft eerst later plaats, in de tweede klas. Hoe dit kan gebeuren ligt buiten het kader van dit artikel.

Een ding moet me nog van het hart. Wie les geeft, heeft in zijn achterhoofd een doel dat hij op de duur wil bereiken. Dit zal zijn, althans voor aanstaande vwo-leerlingen, het bereiken van het tweede niveau en het correct op dit niveau denken. Wie dat in zijn achterhoofd heeft, mag niet in de brugklas aperte denkfouten maken. Zo heb ik eens meegemaakt dat een hospitant wilde laten zien, dat een gelijkbenige driehoek gelijke basishoeken heeft. Hij deed dit als volgt, met behulp van een overhead-projector. Begin met een rechthoek $ABCD$. Knip

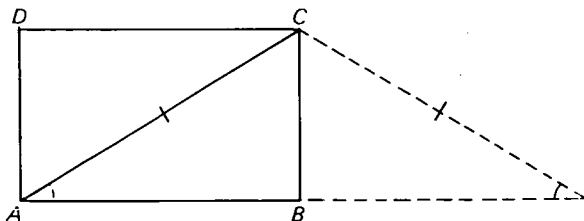


Fig. 3

deze volgens een diagonaal in twee delen, driehoek ABC en driehoek CDA . Leg deze naast elkaar zo, dat lijnstuk BC van driehoek ABC samenvalt met lijnstuk DA van driehoek CDA (B valt samen met D , C met A). Zo ontstaat een gelijkbenige driehoek. Deze heeft twee gelijke basishoeken. Dus: een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken. De hospitant had dit niet zelf bedacht. Niet ieder zal het met mij eens zijn, maar ik vind dit beslist af te keuren. Het onderwijs in de brugklas moet eenvoudig zijn, maar het moet wel correct zijn.

Hoe moet men

Dr. P. M. VAN HIELE

Voorburg

Hoe moet men bij het opstellen van een methode voor wiskunde in de brugklas rekening houden met de denknivo's?

1 Het bewijs van een eenvoudige stelling in de meetkunde

De stelling: 'In iedere gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk' behoort tot de zeer eenvoudige uitspraken in het begin van de meetkunde. Men zou zich kunnen voorstellen, dat het bewijs van deze stelling gekozen kan worden als eerste leerdoel van de meetkunde. Bij het opstellen van een strategie tot het bereiken van dit doel zien wij, dat aan de volgende voorwaarden moet worden voldaan:

- 1° De leerling moet weten wat een stelling is.
- 2° Hij moet weten, waarom men in de wiskunde gebruik maakt van stellingen.
- 3° Hij moet weten wat een gelijkbenige driehoek is.
- 4° Hij moet weten wat een hoek is.
- 5° Er moet bij hem een denkveld ontwikkeld zijn, dat het hem mogelijk maakt uitgaande van 'Van een driehoek is bekend, dat hij twee gelijke hoeken heeft' te komen tot 'We weten dan ook, dat er in deze driehoek twee bepaalde hoeken gelijk zijn'.

Het toepassen van deze strategie blijkt moeilijker dan we ons aanvankelijk hadden voorgesteld. Hoe moeten we aan een leerling uitleggen, wat een stelling is? We hebben daarbij niets aan een definitie van 'stelling'. Je hebt nu eenmaal niets aan een definitie van een begrip, als je van dat begrip niets afweet. Een definitie van een begrip is alleen mogelijk, als het denkveld waarin dit begrip voorkomt voor de leerling al enigszins geordend is. Een beschrijving van het begrip levert niets op, omdat men het begrip door middel van die beschrijving niet herkennen kan.

Als de leerling in een gewone gedachtengang langzamerhand de premissen en de konklusies heeft leren kennen, wordt het hem ook geleidelijk aan duidelijk, wat een stelling is. Het is mogelijk het begrip 'stelling' exemplarisch te begrijpen, alleen zijn er tamelijk wat exemplaren nodig, voor het begrip 'stelling' goed uit de verf komt. De eerste twee punten van bovenstaande analyse kosten dus veel meer tijd en voorbereiding dan men meestal aanneemt. Ook na de brug-

klas is de tijd nog niet gekomen dat de meetkundeleerstof in de vorm van stellingen kan worden aangeboden.

We zijn dus op grond van deze analyse genoodzaakt het leerdoel sterk te vereenvoudigen. We zullen niet moeten proberen de stelling te bewijzen, maar we zullen moeten proberen de leerling door middel van een zelfwerkzaamheid het verband tussen de zijden en de hoeken van een gelijkbenige driehoek te laten ontdekken. Daarbij zal de intuïtie een grote rol moeten spelen. Het zal er op neer moeten komen, dat een gelijkbenige driehoek een symmetrie-as heeft en op grond daarvan kan de leerling 'zien', dat twee hoeken van die driehoek, namelijk de basishoeken kongruent zijn. Er zijn echter veel zaken die een mens moet leren zien en daartoe behoort zeker het konstateren van de gelijkheid van twee hoeken.

Het begrip 'hoek' heeft weinig tastbaars en wordt heel gemakkelijk misverstaan. De halfrechten die een hoek begrenzen worden meestal afgebeeld als lijnstukken en het valt de leerling moeilijk de grootten van deze lijnstukken niet bij de beoordeling van de grootte van de hoek te betrekken. Als hulpmiddel kan men de grootte van een hoek eerst demonstreren aan de hoek tussen de wijzers van een klok. Daarbij wijst men steeds de boog van de eenheidscirkel aan als de 'grootte van de hoek'. Zou men de hoek meten in radialen, dan was de lengte van de boog meteen geschikt. We zitten dan echter meteen weer met het probleem, hoe de lengte van deze boog daadwerkelijk gemeten moet worden. We kunnen echter een kwart van de eenheidscirkelboog aanduiden met 'rechte hoek' en deze verder als hoekmaat gebruiken. Ook kunnen we deze rechte hoek in 90 of 100 gelijke delen verdelen en we zijn dan zo bij de traditionele hoekmeting aangeland.

Het vijfde punt van de strategie: 'het hanteren van een denkpatroon dat de weg tussen 'gelijkbenige driehoek' en 'gelijke basishoeken' mogelijk maakt, is een vrijwel onmogelijke opgave. Als we willen aantonen, dat een gelijkbenige driehoek een symmetrie-as heeft, komen we terecht in een serie uitspraken die een dogmatisch karakter hebben, of we moeten door vouwen laten zien, dat één papieren gelijkbenige driehoek een vouwlijn heeft waarom hij kan worden dubbelgevouwen en dan de leerling suggereren, dat dit voor iedere denkbeeldige gelijkbenige driehoek ook zo is. De docent die zo handelt is echter geheel op de verkeerde weg. Hij heeft nog steeds een logische rij van stellingen in zijn gedachte, ziet zich echter genoodzaakt van de bewijzen daarvan af te zien. In dit stadium heeft zo'n logische rij stellingen voor de leerling geen enkele betekenis. Wiskunde-onderwijs is iets geheel anders dan een poging om een ongelovige tegenstander te overtuigen. Het is zelfs zo, dat de stelling die we willen aantonen voor de leerling nog geen betekenis heeft. De as van de gelijkbenige driehoek moet in een structuur zijn opgenomen en niet zo maar toevallig als een konijntje uit een hoed tevoorschijn getoverd worden.

2 De taalbarrière tussen docent en leerling

De moeilijkheid die we zijn tegengekomen bij 'stelling' en 'definitie' en die van punt 5 'het hanteren van een geschikt denkpatroon' hangen ten nauwste samen. Steeds weer komt het er op neer, dat de docent het denken van de leerling tracht te beïnvloeden volgens zijn denkpatroon en de taal die daaraan eigen is.

Dit denkpatroon van de docent is bezaaid met dogma's die hijzelf axioma's noemt, hij beschikt over een bij hem ingesloten methode deze axioma's tot stellingen te combineren. Hij is er zich nu wel van bewust, dat de taal die bij dit denkpatroon behoort niet die van het kind is, maar hij begaat zeer dikwijls de kardinale fout zijn taal te willen 'vertalen'. Waar echter ieder begrip ontbreekt, heeft de vertaling geen zin. Als men het bewijs van de stelling 'iedere gelijkbenige driehoek heeft een symmetrie-as' heeft vervangen door een demonstratie met een papieren driehoek, dan is het bewijs van de stelling 'overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn samen 180° ' volgens onderstaande figuur voor de leerling volkomen onzinnig. Als men de gelijkheid van

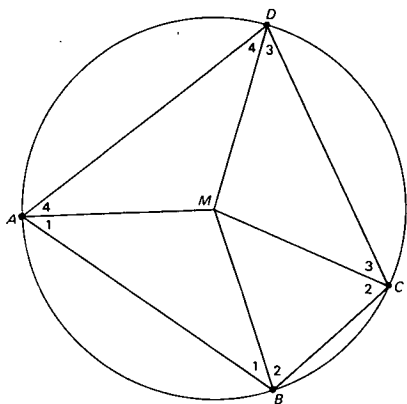


Fig. 1.

hoeken kan aantonen door middel van dubbelvouwen (op elkaar passen), waarom zou men dan de overstaande hoeken van de koordenvierhoek niet meten? Het spelletje met de syllogismen is voor de leerling onaanvaardbaar, omdat hij in die zin nog niet heeft leren denken.

De docent die een leerling werkelijk iets wil bijbrengen moet zich richten naar de taalschema's van het kind en hij zal heel veel leerstof lange tijd moeten laten liggen, omdat die leerstof met de taalschema's van het kind niet kan worden beschreven.

Ik heb vroeger de gaping tussen de taalschema's van het kind en die van de docent wel aangeduid als de gaping tussen twee denknivo's. Het kind, dat op het nulde nivo redeneert kan aan de redenering van de docent die op het eerste (of misschien wel het tweede) denknivo redeneert geen touw vastknopen. Zowel leerling als docent voelen zich machteloos en het onderwijsleerproces komt tot een stilstand.

Men kan deze afschuwelijke situatie vermijden door ervoor te zorgen, dat de docent de leerling steeds weer op het intuïtieve vlak ontmoet. Ik zal hierna laten zien, hoe men kan handelen om dit te bereiken. Eerst echter zal ik mijn opvattingen stellen, gedeeltelijk naast, maar gedeeltelijk ook tegenover die van Piaget.

3 De stadia in de ontwikkeling van het kind, zoals die door Piaget worden beschreven

In zijn uitvoerige werk heeft Piaget duidelijk aangetoond, dat er bij de ontwikkeling van het denken van een kind verschillende stadia optreden. Zo bijvoorbeeld bij de ontwikkeling van het getalbegrip. In het eerste stadium heeft het kind er nog geen enkel benul van, wat een getal is. Het zal van een gegeven verzameling voorwerpen rustig vertellen dat het meer elementen bevat dan een andere gegeven verzameling en even later, dat het er minder zijn.

In het tweede stadium is het zover, dat het inziet, dat de plaatsing van de voorwerpen het oordeel over meer of minder kan beïnvloeden, het is echter nog niet in staat operatief met dit gegeven om te gaan. Pas in het derde stadium heeft het kind de overtuiging, dat het aantal elementen onafhankelijk is van de plaatsing van die elementen en kan het ook de gelijkheid van aantallen feilloos vaststellen.

Het is natuurlijk duidelijk, dat een onderwijs dat op het getalbegrip gebaseerd is, pas kan starten, als het derde stadium bereikt is.

Verskillende didactici hebben gemeend, dat het doorlopen van de stadia een kwestie was van geestelijke groei in de meest letterlijke zin van het woord. Deze geestelijke voortgang zou 'van binnen uit' komen, men zou er geen invloed op kunnen uitoefenen en de onderwijskracht zou moeten afwachten tot het kind in zijn biologische ontwikkeling op het vereiste peil is gekomen. Het is niet zeker, dat deze denkwijze regelrecht van Piaget afkomstig is. Zijn geschriften suggereren heel dikwijls in deze richting. Maar er zijn ook uitspraken van deze tijd door volgelingen van Piaget gedaan, die aantonen dat men zich nog steeds niet van deze negatieve konklusie heeft losgemaakt.

Onder de onderwerpen die door Piaget zijn bestudeerd, komen er een groot aantal voor waarbij duidelijk sprake is van een ontwikkeling langs denknivo's. In elk van deze gevallen is het mogelijk door een aangepast onderwijsleerproces de overgang van het ene denknivo naar het andere te versnellen. Wat nog belangrijker is: als men zo'n onderwijsleerproces nalaat, wordt het kind overgelaten aan de incidentele leerprocessen die optreden, als het kind hier en daar flarden van kennis opvangt. In de volgende paragraaf zal ik nu laten zien, hoe een leermethode de overgang van het nulde naar het eerste denknivo in de meetkunde kan stimuleren.

4 Denkstructuren in de meetkunde

De ontwikkeling van het denken bestaat voor een groot deel uit het assimileren van structuren. Wat een structuur is, zal uit het vervolg duidelijk worden. Een gelijkbenige driehoek is een vrij onbelangrijke figuur die zich voordoet bij het onderwerp 'symmetrie ten opzichte van een rechte'.

Er zijn verschillende wijzen waarop de symmetrie ten opzichte van een rechte zich in de praktijk manifesteert. Twee daarvan zijn belangrijk om van deze symmetrie kennis te nemen. De eerste is de symmetrie die wordt waargenomen bij het dubbelvouwen van een stuk papier en het uitknippen of doorprieken van de dubbelgevouwen figuur. De tweede is de symmetrie die wordt waargenomen als men een spiegel loodrecht op een stuk papier plaatst. Beide

manieren zijn geschikt om de symmetrie ten opzichte van een rechte te leren kennen.

Als het er om gaat de symmetrie operatief te leren beheersen, is het roosterpapier het meest geschikt. Met roosterpapier bedoel ik papier dat is voorbedrukt met een patroon van congruente vierkantjes. Het is verstandig vierkantjes met een zijde van 1 cm te kiezen. Een dergelijk rooster heeft een structuur die de leerlingen goed aanspreekt. Ze zien bijvoorbeeld onmiddellijk, dat men, om een op roosterpapier getekende figuur over te nemen, overal op het roosterpapier kan beginnen. Als het papier geen rand had, zou de keuzemogelijkheid onbeperkt zijn. De kinderen zien ook, dat men het papier zonder bezwaar een kwart slag kan draaien. Na geschikte oefening zien ze ook, dat links en rechts en ook onder en boven verwisseld kunnen worden. Weliswaar ontstaan er dan figuren die niet geheel en al congruent zijn, maar 'spiegeleigenschappen' vertonen. Als men de figuur uitknipt en met de achterkant van het papier boven legt, is de 'spiegeltoestand' weer opgeheven.

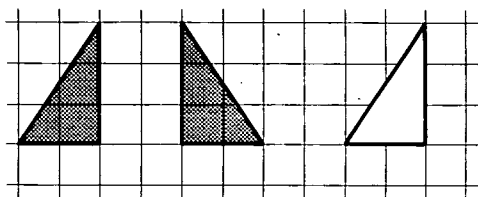


Fig. 2.

Tekent men op roosterpapier een verticale rechte, dan kan men daarin laten spiegelen. Het voorschrift is: 'Blijf op dezelfde horizontale rechte, ga voor het tekenen van het beeldpunt evenveel hokjes van de spiegelas naar rechts, als het originele punt links van de spiegelas ligt. Men kan het verband met de

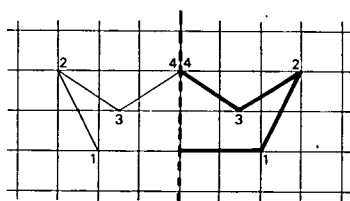
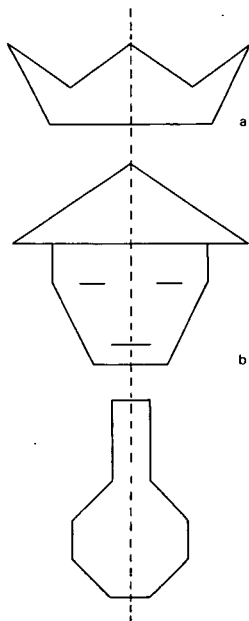


Fig. 3.

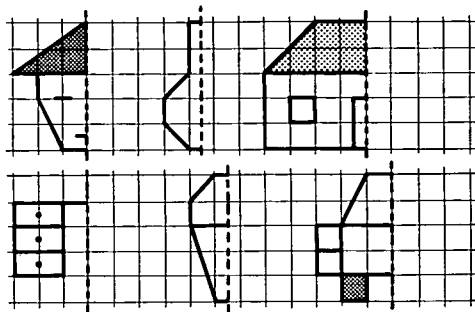


Fig. 4.

beide eerste vormen van spiegelen direct demonstreren door de figuur uit te knippen en langs de spiegelas dubbel te vouwen, of door een verticale spiegel te gebruiken'.

Men kan voor een geschikte emotionele basis zorgen door interessante figuren te laten spiegelen.

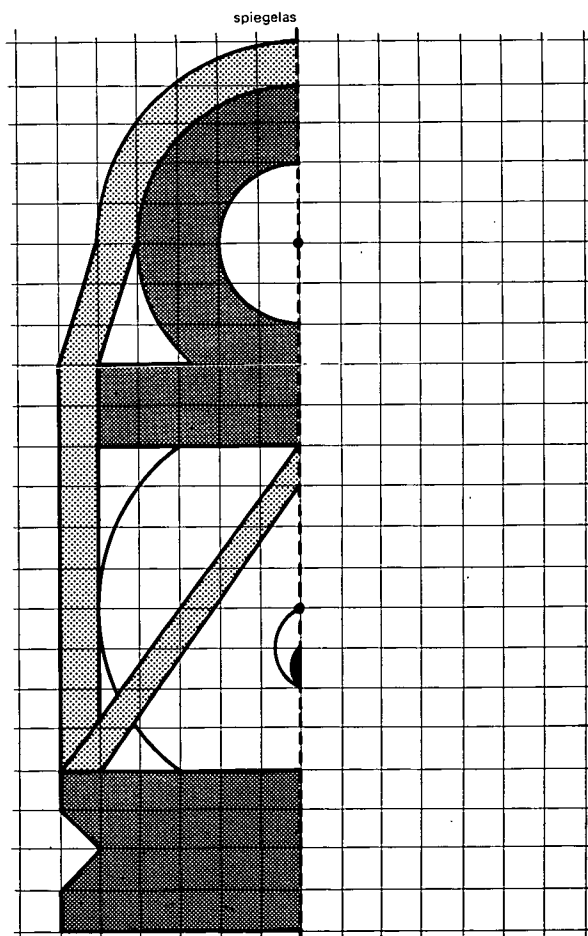


Fig. 5.

Natuurlijk kan men ook in horizontale spiegelingen laten spiegelen. Bij de actie 'spiegelen' ontstaan verschillende meetkundige figuren. De vierhoeken 'vlieger' en 'gelijkbenig trapezium' komen tevoorschijn als men in één spiegelglas laat spiegelen.

Rechthoek, ruit en vierkant ontstaan bij spiegeling in twee onderling loodrechte assen.

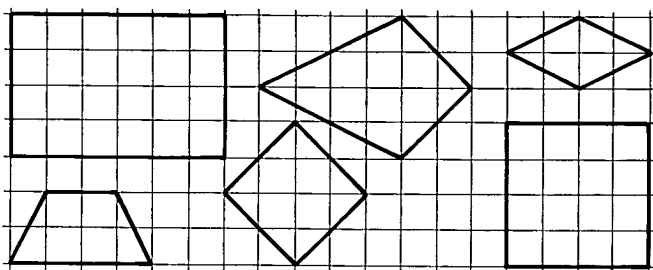


Fig. 6.

Het is nu duidelijk, waarom de beide soorten 'vierkant' oorspronkelijk niet als dezelfde figuur gezien worden. Ze zijn immers op verschillende manieren voortgebracht.

Ook de gelijkbenige driehoek wordt op deze manier verkregen.

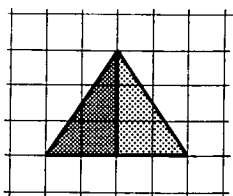


Fig. 7.

De gelijkheid van de basishoeken is van het begin af impliciet aanwezig. De leerlingen weten echter nog niet wat een hoek is. Bovendien zijn we uitgegaan van een driehoek met een symmetrie-as en niet van een driehoek met twee gelijke zijden.

De hierboven beschreven figuren zijn mét hun symmetrie direkte uitbreidingen van de roosterstructuur. Zij waren impliciet al in die structuur aanwezig. Het onderwijs-leerproces heeft geen andere functie dan deze structuur aan de kinderen bewust te maken. De waarheden worden afgelezen doordat de structuur als het ware tot de leerlingen spreekt. We hebben met een ware intuïtie te doen, omdat de resultaten niet duidelijk worden door een redenering, niet worden verkregen langs rationele weg, maar worden afgelezen. De gelijkbenige driehoek is zo maar een figuur die bij de spiegeling in een rechte optreedt. Het is hier wel op zijn plaats zijn naam te noemen en het feit, dat hij een symmetrie-as heeft. Eigenschappen van gelijkheid van lijnstukken en van hoeken moeten hier niet genoemd worden, omdat deze in de structuur direkt zichtbaar zijn en er op geen enkele manier zó uitspringen, dat het de moeite waard is ze te benadrukken.

5 De fasen van een onderwijs-leerproces dat de intuïtie hanteert

Het onderwijs-leerproces dat hier wordt toegepast kent ruwweg vijf fasen:

Eerste fase: de informatie: Het roosterpapier wordt aan de leerlingen voorgelegd en er wordt over de spelregels gesproken. De kontrôle-middelen: dubbelvouwen en de vertikale spiegel worden genoemd.

Tweede fase: de gebonden oriëntatie: De structuur moet tot de leerlingen spreken. Er worden dus oefeningen gegeven die moeten worden uitgevoerd. De kontrôle-middelen en de docent begeleiden de leerling bij zijn onderzoek.

Derde fase: de explicitering: Er wordt aandacht besteed aan de wijze waarop het waargenomen onder woorden kan worden gebracht. Er komen namen zoals 'spiegelas', 'symmetrie', 'rechthoek', en vele andere. *Er moet vooral op worden gelet, dat het aantal nieuwe begrippen niet te groot is. Wanneer dit boven de tien dreigt te komen, moet deze fase worden onderbroken en tot een nieuwe behandeling worden uitgesteld.*

Vierde fase: de vrije oriëntatie. Er worden nog een aantal opdrachten gegeven waarin het behandelde wordt ingeëfend. Er is nu een zekere vrijheid verschillende middelen te gebruiken die tot oplossing voeren. Er wordt ook gelet op de taal die in de derde fase ontwikkeld is.

Vijfde fase: de integratie. Deze kan dikwijls kort zijn. Er moet nog worden vastgelegd: wat hebben we eigenlijk geleerd? Wat zullen we daarvan onthouden?

De vijf fasen kunnen gespreid worden over twee of drie lesuren.

Het eerste leerdoel: 'het bewijzen van de stelling: in iedere gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken kongruent', is daarmee niet bereikt. Er ontbreken nog twee belangrijke onderdelen:

- 1° Waarom heeft iedere driehoek met twee gelijke zijden een symmetrie-as?
- 2° Wat zijn basishoeken?

Op deze twee punten zal ik later ingaan. Eerst ga ik na, welke onderwerpen in het brugjaar parallel met de hiervoor genoemde leerstof behandeld kunnen worden in de wiskunde, waarbij voorop staat, dat we niet verder gaan dan het eerste denknivo.

6 Onderwerpen in de wiskunde die parallel behandeld kunnen worden

De wiskunde van nu vertoont een grote eenheid. Dit is een bekend gegeven. Minder bekend is, dat de samenhang ook reeds bestaat bij de overgang van het nulde naar het eerste denknivo. Het roosterpapier is vanzelfsprekend geschikt om er koördinaten mee in te leiden. Deze koördinaten kunnen dienen voor een oriëntatie op het roosterpapier; men kan er boeiende tekeningen mee laten maken. Zie fig. 8.

Het roosterpapier is ook geschikt voor een inleiding in het onderwerp: 'vectoren'. Ook zo kan men tekeningen laten maken.

Deze vectoren kunnen ook in verband gebracht worden met translaties. Men krijgt dan drie voorstellingen van de vektor: gericht lijnstuk, translatie, getallenpaar (of getallentripel, of getal). Wat een vektor precies is, heeft op dit nivo geen enkele betekenis, het zijn van de dingen komt vóór het tweede nivo niet ter sprake. Bij de zijswijze van vectoren gaat het grondleggende

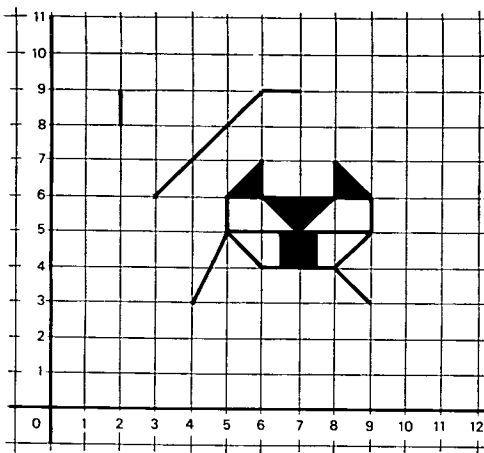


Fig. 8.

Opdracht: Maak de figuur af door de volgende punten te verbinden door een rechte streep: (9,3), (10,2), (10,1), (9,1), (7,3), enz.

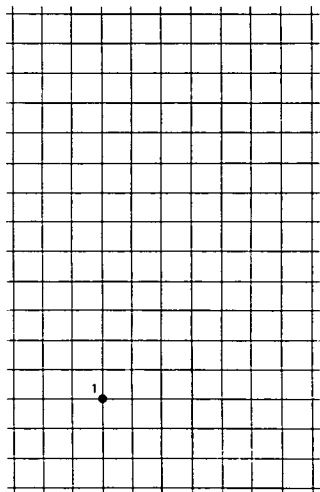


Fig. 9.

Maak de kale boom af door vanaf punt 1 achter elkaar de lijntjes te tekenen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ enz.}$$

axiomasysteem een rol spelen en op dat moment zijn de drie hiervoor genoemde voorstellingen alleen nog maar illustraties (of toepassingen).

Het optellen van vectoren kan geheel meetkundig worden verricht.

Op deze manier gaat het optellen van vectoren vooraf aan het optellen

van getallen. na $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ komt er op de getallenrechte

$(-4) + (-3) = (-7)$. De optelling van vectoren is in twee dimensies veel

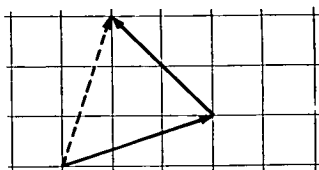


Fig. 10.

duidelijker afleesbaar dan in één dimensie op de getallenrechte.
Ook de kommutatieve en associatieve eigenschappen laten zich aan tweedimensionale vektoren veel duidelijker aflezen dan aan ééndimensionale. Bovendien – en dat is waarschijnlijk nog het belangrijkste – worden deze eigenschappen als ze toegepast worden op vektoren door de kinderen als iets nieuws ervaren.

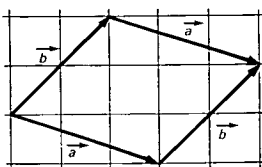


Fig. 11.

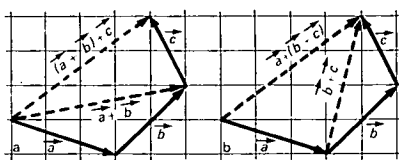


Fig. 12.

De distributieve wet: $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$ is voor de leerlingen veel duidelijker dan de distributieve wet toegepast op uitsluitend getallen.

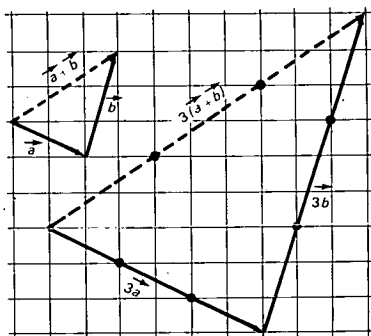


Fig. 13.

In deze overgang van het nulde naar het eerste nivo worden de eigenschappen steeds toegepast op vektoren die met kentallen zijn aangeduid, dus bijvoorbeeld:

$$2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + 2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De toepassing met letters heeft ten doel de algemeenheid van de wet uit te drukken. Van deze algemeenheid zijn de kinderen van het begin af overtuigd. Daarentegen is het 'werken' met in letters aangeduide vektoren nog niet aan de orde.

Parallel met deze leerstof kunnen ook verschillende afbeeldingen worden behandeld. We zijn al begonnen met de spiegeling. Behalve in de X-as en de Y-as, kan ook in de rechten met vergelijking $y = x$ of $y = -x$ gespiegeld

worden. De kinderen kunnen zien, dat het beeld van de vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bij spiegeling in de X -as de vektor $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ is, dat het beeld van deze vektor bij spiegeling in de Y -as de vektor $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ is en bij spiegeling in de rechte met vergelijking $y = x$ de vektor $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$. In dit stadium, waarin de structuur bij stukjes en beetjes wordt geëxpliciteerd, betekent: 'het beeld van de vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bij spiegeling in de X -as is de vektor $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ ' in nauwkeuriger taal: 'het beeld van de pijlvoorstelling van een vektor die wordt uitgedrukt door de kentallen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is de pijlvoorstelling van een vektor die kan worden uitgedrukt door de kentallen $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ '. Parallel kunnen we ook behandelen de spiegeling in het punt O waarbij het beeld van de vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de vektor $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ is. Ook kan aan de orde komen de rotatie om O over een hoek van 90° ; het beeld van de vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is dan de vektor $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

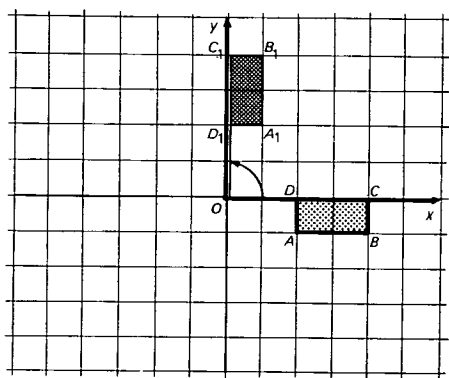


Fig. 14.

De leerlingen zien, dat bij al deze afbeeldingen het beeld van een gegeven figuur het best gevonden wordt door van één punt van de gegeven figuur het beeld te zoeken. Vervolgens wordt er alleen gebruik gemaakt van de beelden van vektoren. We zijn hier al bezig met de grondslag van de afbeeldingsmatrix die pas enkele jaren later aan de orde komt.

Typisch voor deze werkwijze die erop gericht is van het nulde naar het eerste nivo te komen, is, dat er steeds op een breed front gewerkt wordt. Van vele begrippen worden de grondslagen gelegd en deze hebben meteen een onderlinge korrespondentie. Verder wordt er steeds een natuurlijke grens bereikt, wanneer ontwikkelde begrippen gekombineerd zouden moeten worden. Het is bijvoorbeeld mogelijk in één les bij een functie het nomogram te laten tekenen en de inverse functie te zoeken; het tekenen van een nomogram van

de inverse funktie wordt tot een latere les uitgesteld, omdat het een combinatie is van twee nieuw ingevoerde begrippen. Een andere grens wordt bereikt, wanneer voortzetting van het onderwerp maar het tweede denknivo zou voeren.

Tussen de aanbidding van 'vektor' en het optellen van vektoren ligt een periode van rust, omdat 'vektor' eerst een bekend begrip moet zijn voor we aan optellen kunnen denken. Dat neemt niet weg, dat bij het tekenen van figuren met behulp van vektoren al een voorbereiding wordt gemaakt met het optellen van vektoren.

Het herkennen van vierhoeken met behulp van symmetrie-assen kan in het eerste jaar niet plaats vinden, omdat de relatie tussen 'vierhoek' en 'symmetrie-as' eerst tot een abstraktie moet zijn geworden voordat deze relatie als herkenningsmiddel kan worden gebruikt.

Er zijn nog zeer veel onderwerpen die in de brugklas van het nulde naar het eerste denknivo gebracht kunnen worden. Ik noem er enkele: 'gelijkvormigheid', 'kansrekening', 'machten', 'vergelijkingen', 'funkties', 'relaties', 'ruimtefiguren'.

Ik zal met deze opsomming niet doorgaan. In de eerste plaats zou een verdere uitwerking veel te véel plaatsruimte gaan vergen. Maar ik ben er bovendien van overtuigd, dat mijn opsomming toch in hoge mate onvolledig zou zijn. Er worden steeds weer nieuwe onderwerpen ontdekt die voor een wiskundige behandeling toegankelijk zijn en veel van deze onderwerpen zijn ook geschikt om aan jonge kinderen te worden voorgelegd, waarbij hun denken daarover van het nulde naar het eerste nivo gebracht kan worden.

Het onderwerp 'verzamelingen', dat men tegenwoordig aan zeer jonge kinderen voorlegt, is bizonder ongeschikt om zo'n plaats vooraan de rij van onderwerpen te krijgen. Het is namelijk niet geschikt voor een direkte intuïtieve benadering, omdat er geen intuïtieve structuur aan ten grondslag ligt. Bij het bestuderen van 'funktie', 'relatie', 'rechte' en 'cirkel' zal men op de duur willen spreken van verzamelingen. De beschrijving van verschijnselen wordt er eenvoudiger door. Maar noch de verzameling, noch de elementen van een verzameling worden direkt waargenomen. De verzamelingen die men als voorbeelden gebruikt om de kinderen aan het denken te zetten, zijn heel ongeschikt door de 'ruis' die daarbij optreedt. Van een zwerm vogels zijn de elementen niet te identificeren en als men de leerlingen uitnodigt zelf met voorbeelden aan te komen, noemen ze ook 'een schep zand', 'een brok klei'. Degeen die voor het eerst dit ongelukkige onderwerp op de basisschool of zelfs de kleuterschool als eerste kennismaking met 'wiskunde' gebracht heeft, was wel bekend met een wiskundig denken, maar beslist niet bekend met de wijze waarop een denken in het algemeen tot stand komt.

De structuur van de verzamelingen is een reststructuur. Het blijft over, als men van een wiskundige structuur de eerste intuïtieve structuur verwijderd heeft.

7 Begrippen van het tweede denknivo.

Begrippen zoals 'verzameling', 'symmetrie als kenmerk voor een vierhoek', komt men tegen bij de overgang van het eerste naar het tweede denknivo. Zij komen tevoorschijn, als men zich gaat verdiepen in het 'wezen' van de

onderwerpen die men heeft behandeld. Het vinden van de 'inverse' van een functie is nog op het eerste denknivo te bespreken. De uitspraak, dat in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de inverse van de functie $x \rightarrow x^2$ geen functie is, behoort tot de overgang van nivo 1 naar nivo 2. Geheel op het tweede denknivo behoort de vraag, hoe een functie is opgebouwd, waarvan de inverse geen functie is.

De begrippen 'implikatie', 'ekwivalentie', 'omkering van een implikatie' behoren alle tot het tweede denknivo. Voor de kinderen die nog werken met een roosterstructuur zijn ze geheel onbegrijpelijk. Een gelijkbenige driehoek vertoont voor hen ogenblikkelijk het totaal van zijn eigenschappen: de symmetrie-as, de twee gelijke zijden en de twee gelijke hoeken. De vraag, of één van deze drie voldoende is om tot het bestaan van de beide andere te kunnen konkluderen is bij hen nog niet opgekomen. Een gelijkbenige driehoek waarvan een been horizontaal geplaatst is, wordt niet als een gelijkbenige driehoek gezien, tenzij hij is opgenomen in een structuur (bijvoorbeeld driehoekjespapier) die de symmetrie afleesbaar maakt.

De vraag, of iedere hoek een bisectrix heeft, vinden de beginnende leerlingen belachelijk. Als men ze de volgende figuur heeft getoond:

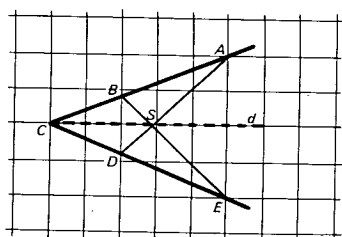


Fig. 15.

dan zijn ze wel in staat de navolgende konstruktie te begrijpen.

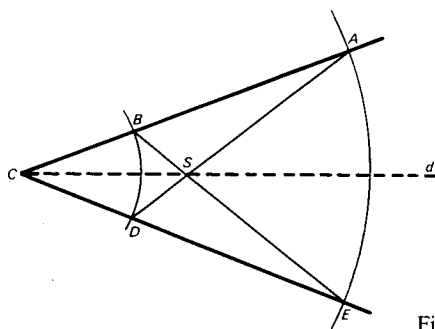


Fig. 16.

Het maakt dan voor hen niets uit, dat in de eerste figuur de bisectrix reeds gegeven was en dat in de tweede figuur nog moet worden aangetoond, dat de halfrechte d een bisectrix is. Er is een totaalstructuur tot stand gebracht en daarin is geen plaats voor implikaties.

Op het tweede nivo kan de stelling: 'iedere gelijkbenige driehoek heeft een symmetrie-as' als volgt worden bewezen:

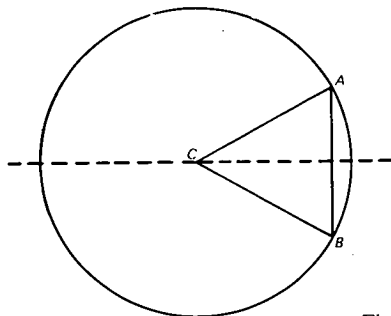


Fig. 17.

Laat van driehoek ABC gegeven zijn: $AC = BC$. Er is dan een cirkel die C tot middelpunt heeft en CA tot straal heeft. De cirkelomtrek bevat dan ook punt B . De bisectrix van hoek ACB is symmetrie-as voor de hoek, maar ook voor de cirkel. Hij is dus ook symmetrie-as voor de doorsnede van cirkel en hoek. De punten A en B liggen symmetrisch ten opzichte van de bisectrix. De bisectrix is dus symmetrie-as voor driehoek ACB .

Bij het boven behandelde bewijs is uitgegaan van de existentie van de bisectrix van een hoek.

Op het tweede nivo kan deze gemakkelijk worden bewezen. Laat $\vec{e}_1$ de eenheidsrichtingsvector zijn van het ene been van de hoek en $\vec{e}_2$ de eenheidsrichtingsvector van het andere been. Dan is $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ een richtingsvector van de bisectrix, immers $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$. Men kan dit noemen 'schieten op mussen met een kanon'. Was echter de stelling wel zo'n klein musje?

Op het tweede nivo is het ook mogelijk te zeggen, dat de stelling: 'in iedere gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk' direkt volgt uit de sinusregel. Ook al zo'n kanon, maar wel heel gemakkelijk. Wie, denkende aan de nivo's, de wiskunde opbouwt met behulp van structuren, komt voor de situatie te staan, dat op het moment waarop de leerlingen gaan begrijpen, wat bewijzen is, ook een geheel werkapparaat met kanonnen en al ontwikkeld is. Hoe moeten we daar nu een logische ordening in aanbrengen?

De oplossing ligt voor de hand: via de axiomatiek van de vektoren. De bewijzen die bij dit axiomasysteem behoren, zijn vrij eenvoudig. Het is echter wel de vraag, of de leerlingen die niet wiskunde gaan studeren aan die bewijzen zoveel behoefte hebben.

Samenvatting

- 1 Het onderwijs in de wiskunde moet gericht zijn op het ontwikkelen van structuren.
- 2 Het is bekend, dat de docent en de leerling een verschillende taal spreken. Toch wordt daaraan nog te weinig aandacht besteed.
- 3 Dikwijls kan men de stadia van Piaget beschouwen als denknivo's. In dat geval is het mogelijk de overgang van het ene stadium naar het andere door een aangepast onderwijs te versnellen.
- 4 Veel wiskundige structuren kunnen direkt intuïtief worden begrepen. Daarom moet het onderwijs in de wiskunde op een breed front beginnen. De behandeling van de leerstof moet in ieder geval onderbroken worden, als het eerste denknivo bereikt is.

Het affiene vlak als gangmaker voor de reële vectorruimten

Een blik op het meetkunde-onderwijs in Vlaanderen¹

RIK VERHULST

Schoten (België)

Sinds de historische kreet 'A bas Euclide' in 1959 door Jean Dieudonné op het congres van Royaumont gelanceerd werd, zijn er uiteenlopende meningen blijven bestaan over het meetkunde-onderwijs in het algemeen en de bewuste uitspraak in het bijzonder. Niet de inhoud van de Euclidische meetkunde werd in opspraak gebracht, maar wel de volgens sommigen onvruchtbare wijze waarbij deze bijna uitsluitend op de gevallen van congruentie en gelijkvormigheid van driehoeken werd gebaseerd. En hoewel er nu volgens Gustave Choquet in alle landen 'un accord assez unanime' bestaat om de vlakke meetkunde te bekijken als een tweedimensionale reële vectorruimte met scalair produkt, blijkt toch niet iedereen bereid om mee te gaan op de lineaire toer en richten sommigen hun doelstellingen meer op ruimtelijk inzicht dan wel op structurele opbouw. De bedoeling van wat volgt is niet een pleidooi te houden voor één of andere zienswijze maar wel een beknopt overzicht te geven van de methodologische overwegingen die, geïnspireerd door het werk van het Belgisch Centrum voor Methodiek van de Wiskunde, hier bij ons aan de basis hebben gelegen van een nieuwe aanpak en tevens een schets te maken van een programma langs hetwelke we hopen deze doelstellingen te kunnen realiseren.

Laten we vooraf even bezig zijn met de vraag naar de motivatie: de steeds weer opduikende 'waaromvraag'.

Waarom aan meetkunde doen? Waarom aan wiskunde doen?

Waarom überhaupt iets doen? Een zeer actuele vraag.

Ongetwijfeld heeft het verlies van zijn paradijselijke staat de mens tot handelen gebracht. Het is de windstilte die de Corsikaan ertoe noopt over te gaan tot het vermoeiende plukken van de kastanjes. Overstromingen en gebrek aan sigaretten zijn motiverende elementen, verwenning nooit. Des te moeilijker de levenssituatie, des te groter de activiteit. Om het hoofd te kunnen bieden aan de problemen rond de dagelijkse strijd voor het bestaan is vindingrijke aanpassing belangrijker dan routine in voorbijgestreefde oplossingen. Een soepele en creatieve geest maakt de vrije keuze van de mens concreet.

¹ Voordracht gehouden op de bijeenkomst van Vlaamse en Nederlandse wiskundeleraren te Eindhoven op 13 maart 1976. De bijeenkomst werd georganiseerd door de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Aan wiskunde doen zou dan kunnen betekenen:

a het soepel vormen van de geest om problemen te kunnen oplossen

b het op een bepaalde wijze oplossen van problemen om de geest soepel te maken.

De vorming onder *a* zou dan op het oog hebben:

- het kritisch verwerken en logisch doorgeven van informatie
- analyse en synthese
- creativiteit door analogie en abstractie.

De bepaalde wijze onder *b* zou dan gekenmerkt worden door:

- het coderen (aanbreng van een taal en symboliek)
- het structureren (onderzoek van de eigenschappen en hun verband)
- het programmeren (ontwerp van oplossingsmethoden).

Wat betekent nu in het licht hiervan aan meetkunde doen? Het zal moeilijk vol te houden zijn dat iemand sterrenkunde studeert om sfeervollere avondwandelingen te kunnen maken, en allicht brengt een onderzoek van de symmetrieën van de kubus een dobbelaar niet veel baat. De meetkunde beoefenen om een rijkere ruimtelijke ervaring te verwerven lijkt ons ook een weinig rendabele onderneming. Heel wat fysische, fysiologische en psychologische factoren spelen hierbij een grotere rol dan bewuste ontleding, om dit in te zien volstaat het voor een spiegel te gaan staan of even scheel te kijken. Aan meetkunde doen kan volgens ons alleen maar betekenen: aan wiskunde doen in een bevoorrecht intuïtief kader.

‘Intuïtief’ omwille van de suggestieve kracht van het ervaringsmateriaal en de mogelijkheid tot verificatie van door deductie verkregen resultaten.

‘Bevoorrecht’ omdat het zich richt tot het voornaamste zintuig en omdat het de belangrijkste wiskundige structuren herbergt die we op het oog hebben.

Hoe zullen we dit alles nu ondernemen en aanbieden?

Kan men Jantje op het orgel Bach leren spelen door hem maar onmiddellijk een eerste fuga voor te zetten?

Om in de kunst van het mathematiseren ingewijd te worden moet men ook een do-re-mi-fa-sol proces doormaken, een opleiding in etappes is nodig.

Om te beginnen moet er een voldoende lange ervaringsperiode zijn.

Op de basisschool heeft de leerling ruimschoots de tijd om via het spelen met bouwdozen, het tekenen op roosterpapier, het knippen, plakken en plooiën vertrouwd te raken met de voornaamste eigenschappen van eenvoudige vlakke en ruimtelijke figuren en illustraties te verwerven van begrippen zoals evenwijdigheid, loodrechte stand, symmetrie, verplaatsing, vergroting en verkleining. Geleidelijk aan zal het kind echter een benadering vragen die van een louter beschrijvende en lucratieve instelling overgaat op een meer verklarend onderzoek.

Dan breekt het ogenblik van de tweede fase aan: het aanbrengen van de hulpmiddelen:

a de taal (der verzamelingen en relaties)

b de logica (die impliciet in het gewone redeneren vervat ligt).

Dit kan volgens ons best op 12 à 13 jarige-leeftijd in het eerste jaar van het secundair onderwijs gebeuren.

Vervolgens kan dan in een derde fase aan de eigenlijke opbouw van de meetkun-

de begonnen worden met 13 à 14-jarige leerlingen door het ordenen van het ervaringsmateriaal, het onderzoeken van de afhankelijkheid der eigenschappen en het bewust maken van de structuren. Bij deze aanvang is het stofferen en bemeubelen van de ruimte belangrijker dan het voorbarig met de blote hand oplossen van problemen die verderop een eenvoudige oplossing kunnen krijgen. Dit alles verloopt in een deductieve aanpak die de natuur van de wiskunde zelf is. Vanuit grondbegrippen en axioma's begint schoorvoetend de lange weg waarbij het bewijs, weliswaar nog erg onformalistisch, het enige hulpmiddel is om te vorderen.

Nu stelt zich dwingend de vraag van de leerstofkeuze: waarop mikken we?

Een eerste objectief is, zoals aangekondigd in de titel, de reële vectorruimte van het vlak.

Dit vergt uiteraard:

a het veld van de reële getallen, d.i. de reële rechte met daarop de twee bewerkingen $+$ en $\cdot$:

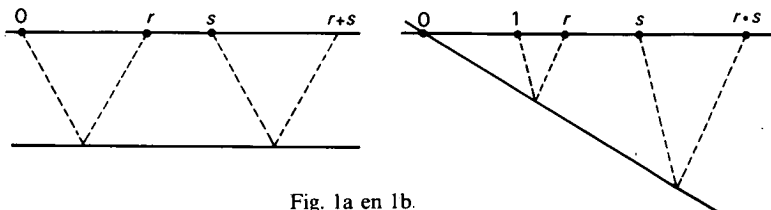


Fig. 1a en 1b.

b de groep van de vectoren van het vlak, d.i. het gepunte vlak met daarop de bewerking $+$:

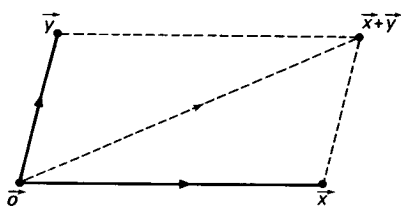


Fig. 2

c het produkt van een vector met een reëel getal:

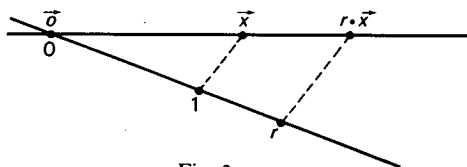


Fig. 3

Hieruit blijkt dat enkel de relatie 'is evenwijdig met' en het samenstellen van evenwijdige projecties een rol spelen.

Hoewel metrische begrippen zoals *lengte* en *hoek* erg intuïtief zijn is het toch niet wenselijk deze van bij de start mee te nemen, omdat de verleiding te groot zou zijn om *midden* te definiëren met behulp van *lengte*, en *parallelisme* met behulp van *hoeken*, waarbij de invariantie onder affiene transformaties dan

verwarring zou stichten. Het is eleganter het affiene vlak op te bouwen met louter affiene begrippen.

Langs welke rubrieken bereiken we nu dit eerste doel?

1. Punten, rechten en incidentie-relaties.

De leerlingen aanvaarden vrij gemakkelijk uitspraken zoals

A1 Het vlak is een oneindige verzameling van punten.

A2 Elke rechte is een echte, oneindige deelverzameling van het vlak.

A3 Elk paar punten is in precies één rechte bevat.

Def. Twee rechten snijden elkaar asa die twee rechten precies één punt gemeen hebben.

Twee rechten zijn evenwijdig asa die twee rechten elkaar niet snijden.

A4 Door elk punt van het vlak bestaat er precies één evenwijdige aan een gegeven rechte.

Door het aanwenden van de klassieke voorstellingen van rechten, punten en evenwijdigen worden deze situaties voor de leerlingen zo evident dat elke denkactiviteit overbodig en bijgevolg uitgeschakeld wordt. Opgaven in de volgende vorm kunnen hierin verhelpen:

– Teken rechten A en B die voldoen aan het volgende diagram:

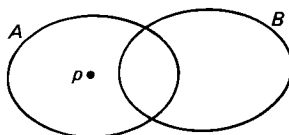


Fig. 4

– Met welk axioma is het volgende diagram in tegenspraak?

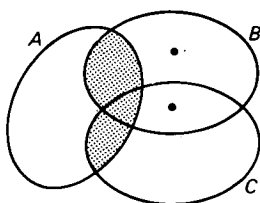


Fig. 5

Heel wat onderwijsmensen staan afwijzend t.o.v. dergelijke 'abstracte' problemen en verkiezen zogenoemde 'concrete' vraagstukjes die 'aansluiten bij de leefwereld van de kinderen' omdat dit motiverend zou werken. We vinden dit een merkwaardig modeverschijnsel waarover toch wel eens grondiger zou mogen geobserveerd worden. In 17 jaar praktijk hebben we zelf overduidelijk gemerkt dat problemen inderdaad motiverend werken, maar voornamelijk omwille van hun uitdagend karakter, en ook dat leerlingen vlot op zulke uitdagingen ingaan als zij voldoen aan twee voorwaarden:

- het probleem moet tot de context van de aangeboden theorie behoren, d.w.z. dat het begrijpelijk is in die taal,
- de hulpmiddelen tot de oplossing moeten in die theorie binnen het bereik van de leerlingen liggen.

De aard van het probleem speelt slechts in uitzonderlijke omstandigheden een rol zoals ondermeer bij nog gepratikeerde kansspelen. Maar een vraag zoals 'Op hoeveel wijzen kan een kubus met aanwending van 6 verschillende kleuren voor de zijvlakken geschilderd worden?' is voor verstandige leerlingen niet noodzakelijk boeiender dan

'Definieer op een rechte een orderrelatie die verschilt van haar twee natuurlijke orderrelaties'. Vlijtige Vliebergh-cursisten zullen dit beamen.

We hebben uiteraard niets tegen praktische opgaven maar wel tegen de gezochte wijze waarop sommige pseudo-dagelijkse problemen bij de leerinhoud betrokken worden.

2. Richting van het vlak, evenwijdige projecties.

Met behulp van de relatie 'is evenwijdig met' bouwen we nu de instrumenten op die nodig zijn voor de constructie van de reële vectorruimte van het vlak.

Def. De richting van een rechte A is de verzameling van die rechten die evenwijdig zijn met A .

De bundel rechten door een punt o is de verzameling van die rechten die het punt o bevatten.

We beschouwen nu enkele afbeeldingen die steunen op het begrip *richting*.

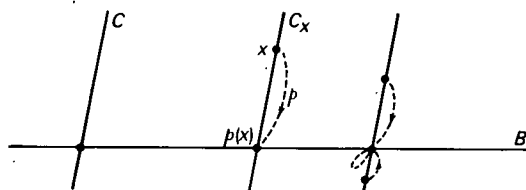


Fig. 6

'de evenwijdige projectie van het vlak op de rechte B volgens richting C '

Het is niet eenvoudig van hieraf een bepaalde methodische uitwerking als model naar voren te brengen, daar de verschillende handboeken hier eigen creatieve wegen opgaan. We beperken ons dan ook tot een synthese van de kernproblemen waarlangs toch iedereen moet passeren en veroorloven ons enkele suggesties voor mogelijke toekomstige aanpassingen.

Beperken we de evenwijdige projectie van het vlak zoals hierboven beschreven tot een rechte A , die niet tot de projectierichting behoort, dan verkrijgen we een bijectieve afbeelding van de rechte A op de rechte B die we gemakshalve verder zullen noemen:

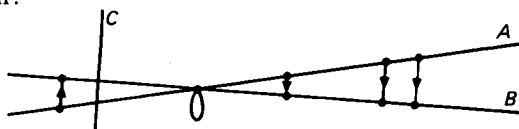


Fig. 7

'de éénprojectie met componenten (A, B) volgens richting C '

De samengestelde relatie van een eindig aantal dergelijke éénprojecties zullen we dan verder een *multiprojectie* noemen.

Behoren alle componenten van al de samenstellende éénprojecties tot een zelfde richting A (bundel door o) dan spreken we van een multiprojectie op richting A (bundel door o).

Nemen we bij zulk een multiprojectie een zelfde rechte A als eerste en allerlaatste component, dan verkrijgen we een permutatie van A .

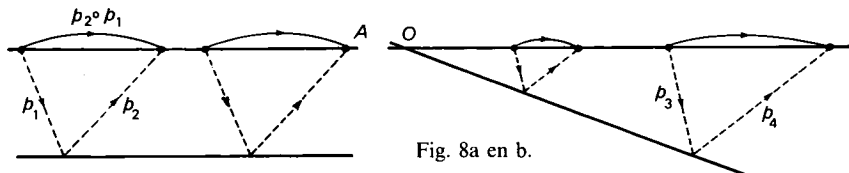


Fig. 8a en b.

de multiprojectie $p_2 \circ p_1$ op rich A 'alias een verschuiving'

de multiprojectie $p_4 \circ p_3$ op de bundel door o 'alias een homothetie met centrum o '

We zullen ons verder slechts bezig houden met deze laatste twee situaties.

Welke zijn nu de grondproblemen in verband met een te ontwikkelen axiomatiek?

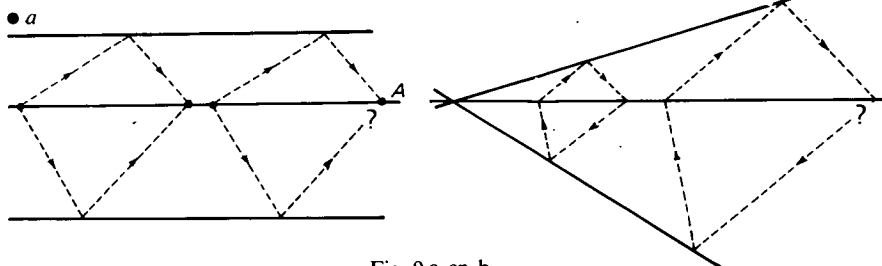


Fig. 9 a en b.

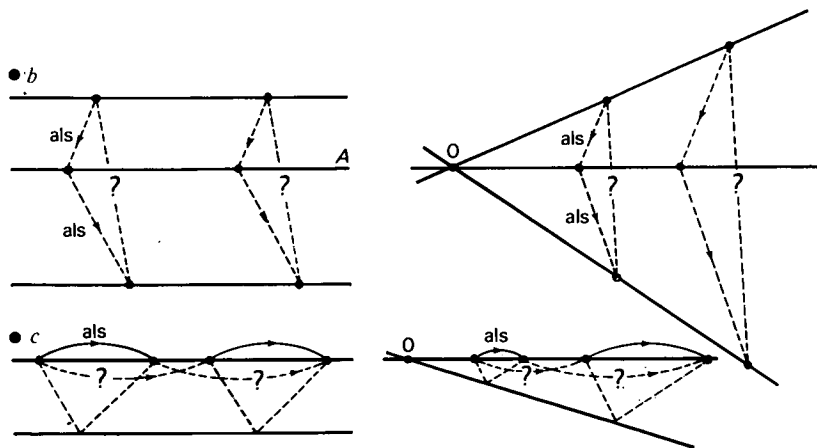


Fig. 10 a, b, c en d.

a en b hebben beide te maken met de vraag tot hoeveel multiprojecties op een richting (bundel) een gegeven koppel kan behoren. c stelt de vraag naar de

commutativiteit van de samenstelling van multiprojecties op een richting (bundel).

Het is vrij eenvoudig aan te tonen dat b uit a en c volgt.

De eerlijkste en bondigste keuze lijkt ons dan ook a en c als axioma's te aanvaarden.

A5 Elk koppel (verschillend van (o, o)) behoort tot precies één multiprojectie op een richting A (bundel door o).

A6 Als twee koppels (verschillend van (o, o)) tot een zelfde multiprojectie op een richting (bundel door o) behoren, dan behoren de gekruiste koppels ook tot een zelfde multiprojectie op die richting (bundel).

Vooraleer met de leerlingen hier verder te gaan is het noodzakelijk talrijke constructie-opgaven te maken, omdat voortaan enkel nog dit materiaal aangewend wordt om het eerste doel te bereiken. Bovendien kunnen we, door de natuurlijke getallen aan te wenden als termen om punten op een rechte te bepalen, meetkundige problemen stellen die leiden tot het uitbreiden van het getalbegrip. Bv.:

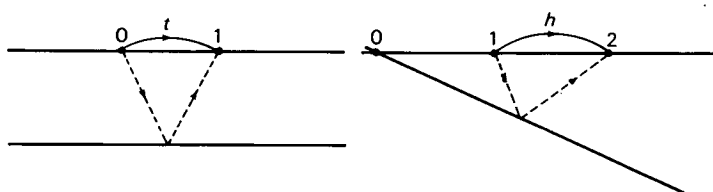


Fig. 11 a en b.

Construeer $t(1)$, $t^{-1}(0)$, enz. . . .

Construeer $h(2)$, $h^{-1}(1)$, enz.

Hier wordt een natuurlijke brug geslagen tussen de getallenleer en de meetkunde die vruchtbaar is voor beide. Sommigen blijven zich met Griekse kuisheid deze vrijheden ontfengen.

3. Equipollente koppels, verschuivingen en vectoren.

We construeren het beeld van een koppel (a, b) door enkele multiprojecties op de richting ab .

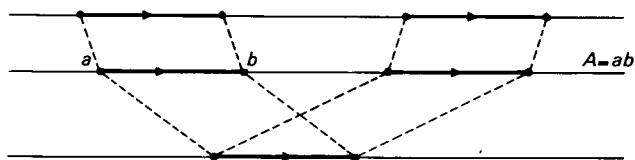


Fig. 12

Def. Twee koppels zijn equipollent als het ene koppel beeld is van het andere koppel onder een multiprojectie op een richting.

We noemen verschuiving die het koppel (a, b) bevat de verzameling $\{(x, y) | (x, y) \text{ is equipollent met } (a, b)\}$.

We bewijzen dan ondermeer:

St. De samengestelde relatie van twee verschuivingen is een verschuiving.

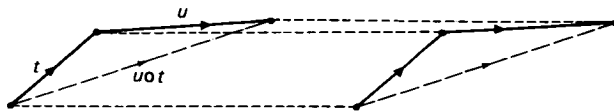


Fig. 13

Om redenen van comfort veranderen we van terminologie en notatie. In plaats van de verschuiving die (a, b) bevat, spreken we van de vector $\vec{ab}$.

De samengestelde relatie van twee verschuivingen laten we dan corresponderen met de som van twee vectoren.

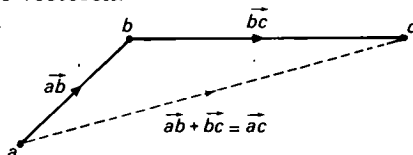


Fig. 14

Omdat een vector volkomen bepaald is door één van zijn koppels en elk punt van het vlak oorsprong is van precies één zulk een koppel, kunnen we vectoren in het vervolg steeds bepalen door koppels die als oorsprong een vast gekozen punt o hebben.

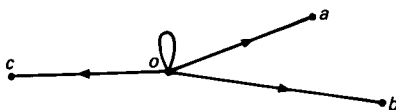


Fig. 15

Elk punt a van het vlak bepaalt dan een vector $\vec{oa}$ die we kortweg $\vec{a}$ noteren. Het vlak waarin zo een vast punt o gekozen is noemen we het gepunte vlak Π_o .

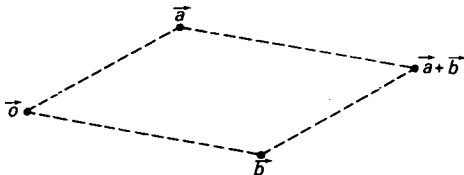


Fig. 16

4. Homothetische koppels, homothetieën en vermenigvuldigingen.

We construeren het beeld van een koppel (a, b) verschillend van (o, o) door enkele multiprojecties op de bundel door o .

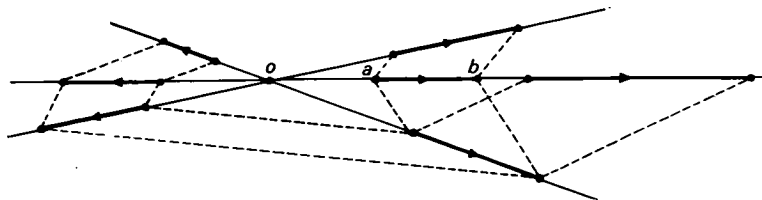


Fig. 17

Def. Twee koppels zijn homothetisch in het centrum o als het ene koppel beeld is van het andere koppel onder een multiprojectie op de bundel door o .

We noemen homothetie met centrum o die het koppel (a, b) bevat de verzameling $\{(x, y) | (x, y) \text{ is homothetisch in } o \text{ met } (a, b)\} \cup \{(o, o)\}$.

We bewijzen dan ondermeer:

St. De samengestelde relatie van twee homothetieën met centrum o is een homothetie met centrum o .

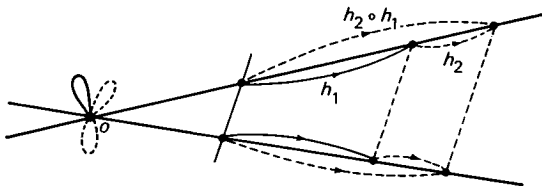


Fig. 18

We veranderen ook nu om redenen van comfort van notatie en terminologie. In de plaats van homothetie die het koppel (a, b) bevat, spreken we van de vermenigvuldiging $\vec{ab}$.

De samengestelde relatie van twee homothetieën laten we dan corresponderen met het produkt van twee vermenigvuldigingen.

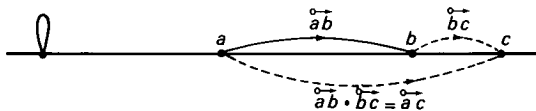


Fig. 19

5. Reële getallen, abscis van een vector, factor van een vermenigvuldiging.

De eenvoudigste introductie van de reële getallen is deze die decimale of binaire termen laat kennen als termen die punten op een geijkte rechte bepalen. Een reëel getal kan dan beschouwd worden als de klasse van dergelijke termen die een zelfde punt bepalen.



'de reële rechte A_{01} ' bepaalt volkomen de verzameling der reële getallen $\mathbb{R}$

Fig. 20

We verbinden nu de begrippen 'vector' en 'vermenigvuldiging' met een reëel getal om zo de bewerkingen op vectoren en vermenigvuldigingen te kunnen overdragen op de reële getallen.

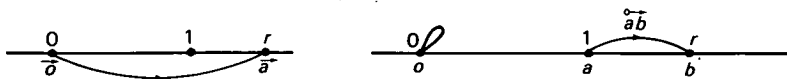
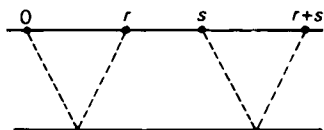


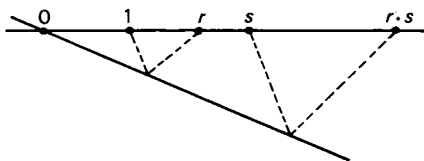
Fig. 21 a en b

r is de abscis van $\vec{a}$ t.o.v. $(0, 1)$

r is de factor van $\vec{ab}$



som van reële getallen is abscis van een som van vectoren



produkt van reële getallen is factor van het produkt van vermenigvuldigingen

Fig. 21 c en d

6. De reële vectorruimte van het vlak.

We voltooien nu de structuur van vectorruimte van het vlak door de definitie van het produkt van een vector met een reël getal:

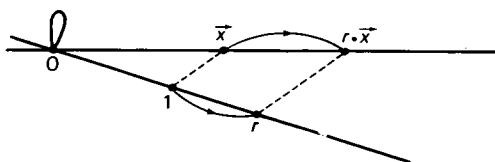


Fig. 22

Het vlak heeft nu een eerste meubilering verkregen, de transformatiegroepen gaan hand in hand met de optellings- en vermenigvuldigingsgroep van de reële getallen zodat de leerlingen beschikken over de nodige dynamische hulpmiddelen om veelvuldige, praktische meetkundige toepassingen te maken, zoals ondermeer:

- de evenwijdige projectie van equipollente koppels

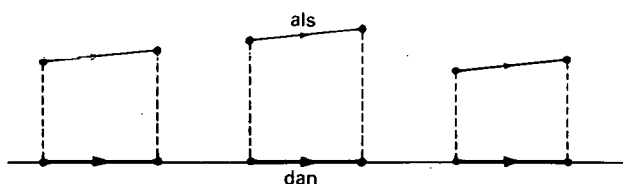


Fig. 23

met constructietoepassingen op de verdeling van lijnstukken, midden en zwaartepunt:

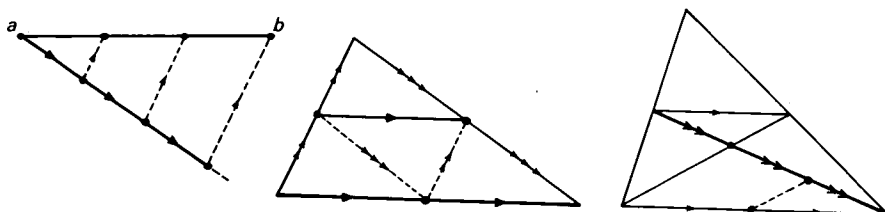


Fig. 24 a, b, c

– de stelling van Thales

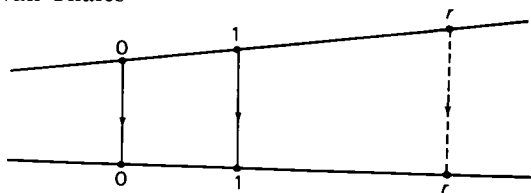


Fig. 25

met toepassingen op de verhouding van vectoren en lijnstukken :

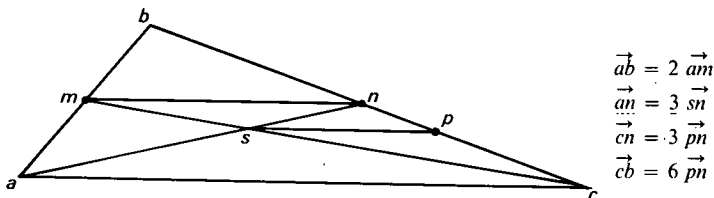


Fig. 26

Al deze punten vormen in hoofdzaak het jaarprogramma van de leerlingen van het tweede jaar secundair onderwijs waarbij zij voortdurend werken in het eenheidskader van het vlak met als instrument bij uitstek de evenwijdige projectie, wat volkomen verantwoordbaar is voor deze eerste affiene studie. Volledigheidshalve suggereren we nog even de wijze waarop vervolgens de metrische begrippen worden ingevoerd om de studie van de vlakke Euclidische meetkunde te voltooien.

Hoewel 'lengte van een koppel punten' en 'hoek van een koppel halve rechten met dezelfde oorsprong' nogal intuïtief zijn is het voor de leerlingen praktisch onmogelijk uit te drukken wanneer twee dergelijke koppels een zelfde lengte of hoek bepalen, omdat de nodige transformaties daartoe nog ontbreken.

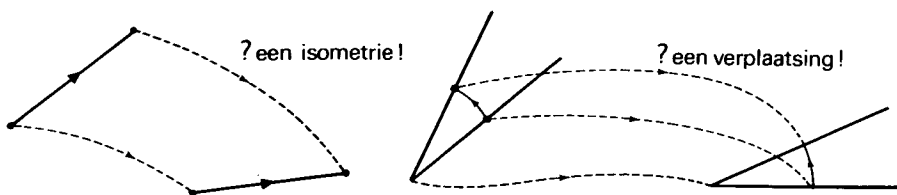


Fig. 27 a en b

Een isometrie definiëren we als de samengestelde relatie van een eindig aantal spiegelingen en een verplaatsing van een even aantal spiegelingen. Om een spiegeling te kunnen definiëren hebben we echter de relatie 'loodrecht op' nodig die dus klaarblijkelijk voor de metrische onderwerpen dezelfde belangrijke rol vervult als de relatie 'is evenwijdig met' voor de affiene. Bovendien kunnen we met behulp van de begrippen 'lengte' en 'loodrechte stand' nu ook het scalair produkt van twee vectoren definiëren, waarmee het vlak dan zijn structuur van Euclidische ruimte verkrijgt.



Fig. 28

Met de invoering van het begrip 'basis van het vlak' verschijnen dan de coördinaten en vormt de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^2$ als perfect model van het vlak een ideale springplank voor veralgemeningen.

We hopen dat de lezer, die de aansluiting kan maken tussen deze rubriekjes en de voordracht van professor BINGEN gehouden ter gelegenheid van de jongste jaarvergadering van de V.V.L.W. (zie Wiskunde en Onderwijs 8), een behoorlijk overzicht heeft verkregen van wat wij in Vlaanderen met het onderwijs in de meetkunde op de middelbare school nastreven. We weten dat deze manier om de dingen te bekijken niet door iedereen bijgetreden wordt. Er blijven in onze wiskundige rangen voornamelijk twee strekkingen bestaan: enerzijds de strekking die vooropstelt dat leerlingen een soort nuttige opleiding behoren te krijgen in programmatisch opgestelde technieken die zo vlug mogelijk moeten in staat stellen in toegepaste wetenschappen spectaculaire resultaten te verduidelijken; het vak wiskunde komt hierbij in een dienende rol en is in haar methodiek afhankelijk van het verlanglijstje van natuurkundigen, economen, statistici, werkhuiskundigen enz. . . . Anderzijds is er een 'bende' die de wiskunde als vormend vak een eigen gedaante wil geven op de middelbare school met leerinhouden die te allen tijde een praktische oriëntatie kunnen krijgen maar die niet onmiddellijk een specifiek gedrag nastreven; zij beklemtonen vooral het deductief karakter en de eenheid van de wiskunde en proberen aan de leerlingen het motiverende gevoel van vrijheid t.o.v. onderwerpen en methoden over te dragen die nodig zijn om dit vormingsproces te realiseren.

Het is volgens ons niet noodzakelijk dat alle leerlingen die aanspraak maken op voortgezet onderwijs precies hetzelfde aangeboden wordt, maar we blijven aandringen op ruimte voor deze tweede categorie die helemaal geen 'gehalte elitaire dilettanten' willen zijn.

Boekbespreking

Horst Herold, *Differentialgleichungen im Komplexen*, Studia Mathematica skript 2, Van denhoeck & Ruprecht Göttingen, 1975, 190 blz, DM 22, —

In dit boekje komen achtereenvolgens aan de orde:

- existentie- en éénduidigheidsstellingen
- niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde
- lineaire differentiaalvergelijkingen
- geïsoleerde singulariteiten bij lineaire dv. van de tweede orde
- Fuchsse dv.
- lineaire dv. van de tweede orde met periodieke coëfficiënten
- nulpunten van de oplossingen van lineaire dv. van de tweede orde.

Dit alles uiteraard in het complexe vlak. Er worden methoden besproken waarmee men in staat is de eigenschappen van een oplossing van een dv. uit de vorm van de dv. af te leiden. Daar de oplossingen analytische functies zijn kunnen bij het vermelde onderzoek functietheoretische methoden gebruikt worden. De lezer dient daarom enige kennis van de functietheorie te bezitten.

Een gedegen werkje waarin de stof op heldere wijze uiteengezet wordt.

W. Kleijne

W. Jochems en J. Vastenhouw, *De didaktische waarde van onderwijs gebaseerd op handelings- en leerstofstructuren*, 57 p.; Technische Hogeschool, Delft.

Wanneer leerlingen een bepaald onderwerp onvoldoende meester worden ondanks de normale inspanning van ervaren leraren en het gebruik van een bekend en goed aangeschreven leerboek, is het dan mogelijk het onderwijs over het desbetreffende onderwerp zodanig te herzien, dat èn betere leerresultaten worden bereikt, èn dit onderwijs in onveranderde omstandigheden frontaal, klassikaal gegeven kan worden, èn de vernieuwde aanpak gebaseerd is op een strikte toepassing van bepaalde psychologische inzichten met betrekking tot het verloop van oplossings- en leerprocessen. Aldus de auteurs in een inleiding op hun verslag, Als onderwerp werd gekozen '*machtsverheffen in de brugklas*'.

Het verslag van het onderzoek verdient de aandacht van de wiskundeleraren, zowel van de leraren in functie als van hen die zich op het leraarschap voorbereiden.

Het rapport is verkrijgbaar bij de auteurs, Afdeling der algemene wetenschappen aan de TH te Delft, onderafdeling der wijsbegeerte en maatschappijwetenschappen, vakgroep psychologie, Kanaalweg 2b.

Joh. H. Wansink.

R. Verhulst e.a., *Wiskundig Leerpakket 1*, Wiskunde voor alle eerste jaren van het V.S.O., T.O., M.O., Standaard Uitgeverij, Antwerpen Amsterdam, 1975.

De ondertitel van het boek vereist enige toelichting. In België had men het M.O. (middelbaar onderwijs) en het T.O. (technisch onderwijs). Het technisch onderwijs omvat niet alleen datgene wat wij in Nederland technisch onderwijs noemen, maar meer algemeen het beroepsonderwijs.

Naast dit M.O. en T.O. is thans het V.S.O. (vernieuwd secundair onderwijs) in ontwikkeling. De bedoeling is dat hierin een veel ruimere groep leerlingen opgenomen wordt dan in het M.O. het geval was. De eerste twee leerjaren van het V.S.O. bestaan uit een zogenaamde observatiecyclus. Deze vernieuwing van het secundair onderwijs maakt, dat het niet meer mogelijk is met de oude

leerboeken te volstaan. Deze zouden voor een deel van de leerlingen te moeilijk zijn. Vandaar dat begonnen is met het omwerken van de leergang Wis en Kundig van R. Verhulst e.a., een bekende leergang in Vlaanderen, die echter in Euclides niet besproken is. Zo is het eerste deel van Wiskundig Leerpakket gereedgekomen. Ook het tweede deel is reeds bijna klaar.

Wiskundig Leerpakket bestaat uit:

1. Tekstboek (R. Verhulst, M. Verwulgen, F. van Roey)
2. Werkstructuren (R. de Weerd, G. Vanbaelen)
3. Observatiebladen (R. de Weerd, G. Vanbaelen, M. Verwulgen)
4. Rekenbloc (G. Vanbaelen)
5. Handleiding (R. Standaert)
6. een serie transparanten.

Het Tekstboek is een lijvig geheel van 372 bladzijden. De inhoud bestaat uit de in België traditionele leerstof voor het eerste leerjaar. Ruim de eerste helft van het boek wordt besteed aan het aanleren van de wiskundige taal. Aan de orde komen daarbij achtereenvolgens verzamelingen, relaties, functies en afbeeldingen. Daarna volgt een inleiding in de meetkunde. Vastgehouden is aan de overtuiging dat deze streng axiomatisch-deductief moet zijn. U moet hier niet te zeer van schrikken. Men gaat ervan uit dat een intuïtieve inleiding niet nodig is, omdat deze op de basisschool al gegeven is. Verder heeft men langzamerhand wel de nodige ervaring opgedaan deze strenge opbouw in een verteerbaar kleed te hullen. Desondanks kijk ik er elke keer weer met verbazing naar. Ten slotte volgen hoofdstukken over de natuurlijke en over de gehele getallen. In deze hoofdstukken staat de structuur van de bewerkingen en de orderrelatie centraal; van training in algebraïsch rekenwerk is nog vrijwel geen sprake. Enkele hoofdstukken zijn van een sterretje voorzien, waarmee aangeduid is dat deze door een deel van de leerlingen overgeslagen kunnen worden.

Na elk hoofdstuk vindt men een serie vraagstukken. Bij het opstellen van deze vraagstukken is met grote zorgvuldigheid tewerk gegaan. Het is duidelijk dat men niet alle leerlingen hetzelfde vraagstukkenmateriaal kan voorzetten. Vandaar dat series vraagstukken gemaakt zijn voorzien van de letter A, B, C, D en soms ook E. Zeer duidelijk is serie A bestemd voor elke leerling; de opgaven zijn concreet. Naarmate men verder gaat en de series B, C, D, E bekijkt, ziet men een vergroting van de algemeenheid, een sterker beroep op het vermogen te redeneren en (in E) een beroep op de creativiteit. Men ziet heel duidelijk principiële verschillen tussen de vijf series. Dat de auteurs in staat zijn geweest de vraagstukken zo doelmatig te groeperen vind ik buitengewoon knap.

De Werkstructuren leveren naast de vraagstukken uit het tekstboek een andere methode voor de leerling om de leerstof te verwerken. Om duidelijk te maken wat met de Werkstructuren bedoeld is, meen ik niet beter te kunnen doen dan te citeren wat R. Standaert er in de Handleiding over schrijft (op blz. 70-71).

‘De werkstructuur is een vrij recente methode, die helemaal uit de praktijk gegroeid is. Het is een werkbundel, bestemd voor individueel gebruik door de leerling.

‘Kenmerkend voor de werkstructuur is de variatie, die erin terug te vinden is. In een werkstructuur kan de docent zijn creativiteit en fantasie uitwerken. Hij verwerkt er humoristische teksten in, anekdotes, leesstukjes, korte verduidelijkende stukjes, allerlei opgaven en oefeningen die van weinig tot sterk geleid kunnen voorkomen.

‘Het enige vaste kenmerk en criterium voor een werkstructuur is dat ze individueel doorgemaakt wordt. Voor de rest kan men er allerlei methodische werkwijzen en strategieën in terugvinden.

‘De werkstructuur is een bijzonder rijke en waardevolle methode, omdat zij enerzijds de functie van de leraar bij het voorbereiden ervan sterk valoriseert en anderzijds uitstekende mogelijkheden biedt om de leerstof en methodiek aan te passen aan de specifieke leerlingen en de specifieke situatie. De variatie die erin terug te vinden is, garandeert het gespannen blijven van de aandacht en motivatie. Dit is bijvoorbeeld een probleem bij geprogrammeerde instructie. Na verloop van tijd kunnen er vervelingsverschijnselen optreden, precies door een gebrek aan afwisseling.’

Deze eulogie op de werkstructuren heeft het bezwaar, dat men overdreven verwachtingen gaat koesteren. In elk geval is het voorliggende deel Werkstructuren een knap stuk werk en zal het door een deel van de leerlingen met relatief gejuich begroet worden.

De observatiebladen bieden de mogelijkheid te toetsen of de leerling de stof voldoende verwerkt heeft. Ze zijn gemerkt A, B, C, D parallel met de vraagstukken in het Tekstboek. Verder is elk blad voorzien van het opschrift Begrijpen, Toepassen of Redeneren.

De observatiebladen zijn geen proefwerken. Deze moet de leraar zelf samenstellen.

De klacht dat de rekenvaardigheid te wensen overlaat is in Vlaanderen al even sterk als bij ons.

Vandaar het Rekenbloc. De leerlingen kunnen door middel van dit bloc hun vaardigheid opfrissen in het rekenen met breuken, decimale breuken, interest, metriek stelsel, omtrek, oppervlakte en inhoud, het hanteren van meetlat, tekendriehoek en geodriehoek.

Ten slotte de handleiding. Deze bestaat voor het grootste deel uit een zeer lezenswaardig overzicht van datgene wat elke leraar tegenwoordig van algemene didactiek behoort te weten.

Daarna volgt een overzicht over de wijze waarop Tekstboek, Werkstructuren, Observatiebladen en Transparanten naast elkaar gebruikt kunnen worden.

Het geheel is een imposant stuk werk. De democratisering van het onderwijs heeft als gevolg, dat er grote eisen gesteld worden aan capaciteiten en werkkraft van auteurs. Het koppel auteurs van het Wiskundig Leerpakket heeft bewezen deze capaciteiten te bezitten en er niet voor terug te schrikken een zo omvangrijk geheel aan te pakken en tot een goed einde te brengen.

P. G. J. Vredenduin

Jahrbuch Überblicke Mathematik 1976 (herausgegeben von B. Fuchssteiner, U. Kulisch, D. Laugwitz, R. Liedl), B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1976, 204 bl., DM 28.

Evenals het Jahrbuch 1975 is dit boekje hoofdzakelijk gewijd aan overzichtsartikelen van onderscheiden aard en graad van moeilijkheid. Enige der behandelde onderwerpen zijn: (1) Kenschetsing van de ellipsoïde binnen de verzameling van alle convexe begrensde lichamen (in R^n); (2) Galoisgroepen; (3) Een overzichtsartikel over het zog. 'approximatieprobleem', dat enige jaren geleden in negatieve zin zijn oplossing gevonden heeft; (4) Functies van Walsh (een speciaal orthonormaal stelsel functies); (5) Stellingen over 'invariante punten'; (6) Theorie van de prijsindex; (7) Mogelijkheden om via een computer bewijzen te construeren; (8) Programmaverificatie bij de computer. Het boekje bevat verder een kort artikel (van D. Laugwitz) over het op eenvoudige wijze algebraïsch inzien dat zekere meetkundige constructies 'onmogelijk' zijn (driedeling van de hoek, kubusverdubbeling). Tenslotte wordt er in het kort iets verteld over de geschiedenis van de Fields-medaille (het equivalent voor de wiskunde van een Nobelprijs).

A. C. Zaanen.

D. Lovelock and H. Rund, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*; John Wiley and Sons. New York/London/Sydney/Toronto, 1975; 364 bladz., \$ 13.00.

De auteurs van dit mooie boek geven een voortreffelijke inleiding in de tensor-analyse en in de theorie van de differentiaalvormen, bestemd voor toegepast-wiskundigen, fysici en ingenieurs. Het tweede deel van het boek bevat beschouwingen over de samenhang tussen invariantie-postulaten en de variatierekening, waarbij de behandelingswijze aansluit bij methoden die door Carathéodory zijn ontwikkeld.

In de eerste vier hoofdstukken wordt de tensor-analyse ontwikkeld. Daarbij valt het op hoe iedere stap zorgvuldig voorbereid en gemotiveerd wordt. Bij de theorie der differentiaalvormen spelen het lemma van Poincaré en het theorema van Stokes (waarvan wordt aangetoond dat het een generalisatie is van de hoofdstelling van de integraalrekening) een centrale rol.

In hoofdstuk VI worden invariantieproblemen in de variatierekening behandeld, met als belangrijk resultaat het theorema van Noether, zowel voor enkelvoudige als voor meervoudige integralen. Met behulp van dit theorema is het mogelijk om in de fysica relaties te verkrijgen die als behoudswetten geïnterpreteerd kunnen worden.

In twee slothoofdstukken gaan de auteurs in op hun eigen vakgebied. In een mooi hoofdstuk over Riemann-meetkunde laat Rund zien hoe de bekende stellingen uit de elementaire differentiaalmeetkunde gegeneraliseerd kunnen worden voor het geval van een Riemann-variëteit. Eerst in dit hoofdstuk speelt een metriek, aan de variëteit opgelegd, een rol. Lovelock (een jong mathematicus, die in 1973 promoveerde op mathematische aspecten van variatieprincipes in de algemene relativiteitstheorie) past in het achtste hoofdstuk variatieprincipes op veld-theorieën toe.

In een appendix wordt een abstracte inleiding in de theorie der tensoren en van de differentiaal-

vormen gegeven. Aan het eind van ieder hoofdstuk is een verzameling interessant oefenmateriaal bijeengebracht.

Een boek met een rijke inhoud, dat aan iedereen die belangstelling heeft voor de toepassing van belangrijke wiskundige methoden kan worden aanbevolen

W. J. Claas sr.

I. Niven/H. S. Zuckerman, *Einführung in die Zahlentheorie I*, Hochschultaschenbücher, Band 46, Bibliografisches Institut, Mannheim.

Tesamen met deel II vormt deze uitgave een vertaling van de Amerikaanse uitgave 'An introduction to the theory of numbers'.

Het boekje is bedoeld voor pre-kandidaten in de Wiskunde en geeft na elke paragraaf een fors aantal in moeilijkheidsgraad opklimmende vraagstukken die het begrip van de theorie moeten bevorderen. Ten gerieve van de handzame (pocket-) uitgave heeft men wel wat concessies moeten doen aan de lay-out: de tekst is hier en daar flink in elkaar geperst. Overigens is de tekst helder geschreven en biedt een gedegen inleiding in de getaltheorie.

Inhoud deel I: deelbaarheid, congruenties, kwadraatresten, arithmetrische functies, diophantische vergelijkingen en Farey-rijen.

Index en literatuuropgaven bevinden zich in deel II.

A. W. Boon

Een internationale ontmoeting van pedagogen uit heel de wereld:

16e DIDACTA - EURODIDAC

EUROPESE LEERMIDDELENVAKBEURS BRUSSEL

10-14 APRIL 1978

Het tentoonstellingspark van Brussel (Eeuwfeestpaleizen) zal in april 1978 voor de tweede maal de Europese Leermiddelenvakbeurs DIDACTA - EURODIDAC herbergen.

Het Europees Verbond van Ondernemingen op Leermiddelengebied EURODIDAC en de Internationale Jaarbeurs van Brussel hebben inderdaad een nieuw samenwerkingsakkoord vastgelegd voor de organisatie van de 16e DIDACTA - EURODIDAC.

In juni 1974, bracht de 12e DIDACTA 500 deelnemers samen, herkomstig uit 25 landen op een netto-oppervlakte van 24.700 m².

Men kan nu al vooropzetten dat de 16e Vakbeurs DIDACTA in belangrijkheid de editie van 1974 zal overtreffen en dat zij het rendez-vous zal uitmaken van de pedagogische middens uit Europa en de overige werelddelen.

The mathematics teacher

Het meinummer 1976 van The Mathematics Teacher (vol. 69, nr. 5) is geheel gewijd aan de individualisering van het onderwijs.

Wie belangstelling voor dit onderwerp heeft, kan er veel informatie over vinden. Eén resultaat viel mij erg op en wil ik daarom vermelden. Door R. L. Miller zijn 145 studies over dit onderwerp onderzocht. In 88 hiervan waren onderzoeken gedaan waarbij individueel onderwijs (waarbij elke leerling dus in zijn eigen tempo werkt) vergeleken werd met aan een controlegroep gegeven traditioneel onderwijs. Aan het resultaat werd het cijfer 2 toegekend als geen significant onderscheid gevonden werd, 3 of 4 als de geïndividualiseerde leerlingen betere resultaten behaalden en 1 of 0 als de traditionele betere prestaties leverden. Hier ziet u de uitslag:

0	1	2	3	4	gemiddeld
4	10	42	14	18	2,36

Bij 33 onderzoeken werd de attitude vergeleken die de leerlingen verkregen. Uitslag:

0	1	2	3	4	gemiddeld
1	0	25	4	3	2,24

De individuele prestaties wonnen het sterker van de traditionele naarmate de duur van instructie korter was:

korter dan een semester	2,75
semester	2,58
jaar	2,24
langer	2,00

Uitsplitsing naar leeftijdsgroepen geeft geen duidelijke verschillen.

De auteur deelt nog mee, dat het sterk van de aard van de leerling afhangt, welke methode het best bij hem aanslaat.

Ik onthoud me van commentaar, maar beveel wel aan deze cijfers zorgvuldig te bekijken. Het artikel vindt men op blz. 345-351.

P. G. J. Vredenduin

Opgaven

358 Een convexe veelhoek wordt door diagonalen, die elkaar binnen de vierhoek niet snijden, in driehoeken verdeeld. Men ziet gemakkelijk in, dat het mogelijk is met drie kleuren de hoekpunten zo te kleuren dat geen twee door een zijde of diagonaal verbonden hoekpunten dezelfde kleur hebben.

Nu omgekeerd. Gegeven een kleuring van de hoekpunten met drie kleuren. Is het dan mogelijk de verdeling van de veelhoek op bovenstaande manier door middel van diagonalen zo tot stand te brengen, dat geen twee hoekpunten die door een zijde of een diagonaal verbonden worden, dezelfde kleur hebben?

Noodzakelijk is, dat de drie kleuren alle drie voorkomen en dat geen twee consecutieve hoekpunten van dezelfde kleur voorzien worden. Maar is deze voorwaarde ook voldoende?

359 Gevraagd vier verschillende natuurlijke getallen a, b, c en d te vinden waarvoor

$$a^{-2} + b^{-2} = c^{-2} + d^{-2}$$

Bedenk een methode met behulp waarvan men onbegrensd veel oplossingen kan vinden. (B. Kootstra)

Olossingen

356. Het getal $a_0a_1a_2 \dots a_9$ bestaat uit de tien cijfers 0 tot en met 9. Vorm het getal $a_9a_8a_7 \dots a_0$, dat dus ontstaat door het oorspronkelijke getal achterstevoren op te schrijven. Neem het absolute verschil van beide getallen. Bewijs dat het onmogelijk is, dat dit door 101 deelbaar is.

$$10^0 = 1 \pmod{101} \quad 10^5 = 10 \pmod{101}$$

$$10^1 = 10 \pmod{101} \quad 10^6 = 100 \pmod{101}$$

$$10^2 = 100 \pmod{101} \quad 10^7 = 91 \pmod{101}$$

$$10^3 = 91 \pmod{101} \quad 10^8 = 1 \pmod{101}$$

$$10^4 = 1 \pmod{101} \quad 10^9 = 10 \pmod{101}$$

Neem aan dat $a_0 > a_9$. Het verschil van het oorspronkelijke getal en het achterstevoren geplaatste is dan

$$(a_0 - a_9)(1 - 10) + (a_1 - a_8)(10 - 1) + (a_2 - a_7)(100 - 91) + (a_3 - a_6)(91 - 100) + (a_4 - a_5)(1 - 10)$$

$$\pmod{101} = 9(a_9 - a_0 + a_1 - a_8 + a_2 - a_7 + a_6 - a_3 + a_5 - a_4) \pmod{101}$$

Hieruit volgt

$$a_9 - a_0 + a_1 - a_8 + a_2 - a_7 + a_6 - a_3 + a_5 - a_4 = 0$$

$$a_0 + a_8 + a_7 + a_3 + a_4 = a_9 + a_1 + a_2 + a_6 + a_5$$

Omdat $a_0 + a_1 + \dots + a_9 = 45$, is dit niet mogelijk.

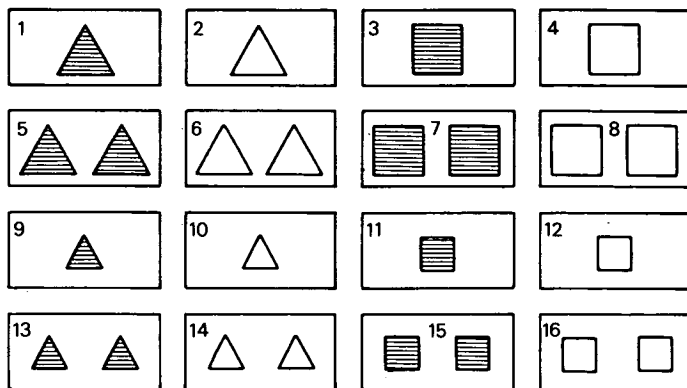
357. De onderstaande zestien figuurtjes zijn elk driehoekig of vierkant, enkel of dubbel, groot of klein, gestreept of effen. A verdeelt in gedachten de figuurtjes in twee groepen van acht. Hij noemt bijv. de verzameling van de grote figuurtjes V en die van de kleine W . Hij toont B achter-eenvolgens de figuurtjes 1, 6, 11, 16 en zegt dat ze behoren tot resp. V, V, W, W . Heeft B nu voldoende informatie om te weten welke verzameling met V bedoeld wordt?

Hoeveel figuurtjes moet A minimaal aan B tonen om hem voldoende informatie te verschaffen? En hoeveel maximaal?

Zelfde twee vragen voor 2^n figuurtjes en n paar kwaliteiten.

1, 6, 11 en 16 geven onvoldoende informatie. V kan zijn de verzameling van de grote figuurtjes, maar ook de verzameling van de driehoekige.

Laten we aannemen, dat met V de verzameling van de grote figuurtjes bedoeld is. A toont 1 en 8 en zegt beide malen dat ze tot V behoren. B weet nu dat V de verzameling van de grote figuurtjes is. A toont resp. 1, 16, 2, 15, 3, 14, 4, 13 en nog steeds is het pleit niet beslist. Bij het eerstvolgende



figuurtje, dus het negende, weet B het. Merk op, dat A na elk figuurtje dat figuurtje toont, dat er geen enkele kwaliteit mee gemeen heeft. We zullen dit het complementaire figuurtje noemen. Zo toont A eerst 1 en zegt, dat dit tot V behoort. Daarna zegt hij, dat 16 tot W behoort. Daarmee geeft hij geen nieuwe informatie.

Nu algemeen. Er zijn 2^n figuurtjes met n paar kwaliteiten a_1 en b_1 , a_2 en b_2 , ..., a_n en b_n . Neem aan dat V de verzameling van alle figuurtjes met kwaliteiten a_1 is en dat A eerst het figuurtje toont met kwaliteiten a_1 , a_2 , ..., a_n . Daarna toont hij het figuurtje met kwaliteiten a_1 , b_2 , ..., b_n , dat met het eerste dus alleen kwaliteit a_1 gemeen heeft. Beide behoren tot V . Daarmee ligt V vast. Neem weer aan dat V de verzameling van alle figuurtjes is met kwaliteit a_1 en dat A eerst a_1 , a_2 , ..., a_n toont. Hij toont nu alle figuurtjes die a_1 en a_2 bezitten, maar die naar willekeur a_3 of b_3 , a_4 of b_4 , ..., a_n of b_n bezitten. Dit zijn er 2^{n-2} . B weet nu nog niet of V met a_1 of met a_2 correspondeert. Daarna toont hij de 2^{n-2} complementaire. In totaal zijn er nu al 2^{n-1} figuurtjes getoond en nog steeds weet B het niet. Bij het eerstvolgende figuurtje heeft hij echter voldoende informatie.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

In Euclides van januari 1976 heeft een uiteenzetting gestaan over de totstandkoming van de examens wiskunde voor v.w.o., h.a.v.o. en m.a.v.o.

Daar de adviescommissies het concept examenwerk aan de hand van de bij hen ingediende opgaven van *inzenders* maakt, kunnen de docenten uit het veld een grote inbreng hebben bij de totstandkoming van het examenwerk.

Op voordracht van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren worden docenten uitgenodigd opgaven in te zenden.

Daarom doet het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook dit jaar een

OPROEP

aan docenten, werkzaam bij het v.w.o., h.a.v.o. en m.a.v.o. zich aan te melden als inzender van examenopgaven voor de examens 1978.

AANMELDING dient te geschieden vóór 1 februari 1977 bij de secretaris van de vereniging, drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag-2036, telefoon 070-687998 of 070-687670.

Bij de aanmelding gelieve u te vermelden of het m.a.v.o.-3, m.a.v.o.-4, h.a.v.o., v.w.o.-wiskunde I of v.w.o.-wiskunde II betreft.

Als iemand na de aanmelding wordt uitgenodigd opgaven in te zenden ontvangt hij of zij tevens alle nodige aanwijzingen.

De inzending van een compleet stel examenopgaven (uiterlijk 15 augustus) wordt beloond met een bedrag gelijk aan drie vacaties (momenteel driemaal f60,-).

Degenen die zich opgeven maar door een overvloed van aanmelders niet in aanmerking komen voor een uitnodiging krijgen hiervan bericht en worden een van de volgende jaren uitgenodigd.

tuiskrant

Kent u de Wiskrant al?

Een viermaal per jaar verschijnend blad over wiskunde in het voortgezet onderwijs. Uitgewerkte praktische ideeën voor Uw werk in de klas.

Met informatie over ontwikkelingen in het wiskunde-onderwijs, zoals:

- * het schoolwerkplan 12-16 jarigen
- * wiskunde A en B voor bovenbouw v.w.o.
- * leerstofanalyses.

Een uitgave van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.

Abonnementen f 10,- per jaargang. (Voor België B.frs.150.)

U kunt kennismakingsexemplaren aanvragen of abonnementen opgeven aan onderstaand adres:



IOWO, abonnementenadministratie Wiskrant,
Antwoordnummer 1566, Utrecht.

GEU-exposities 1977

Informatie over uitgaven voor:

- kleuteronderwijs
- lager onderwijs
- algemeen voortgezet onderwijs
- beroepsonderwijs

door de Groep Educatieve Uitgeverijen

Rotterdam	19 en 20 januari	'De Doelen'
Groningen	26 en 27 januari	'Martinihal'
Arnhem	2 en 3 februari	'Musis Sacrum'
Beverwijk	9 en 10 februari	'De Nieuwe Slof'

Openingstijden: 14.00 tot 21.30 uur. Toegang gratis.



GEU-secretariaat
Nieuwe Zijds
Voorburgwal 44,
Amsterdam,
telefoon (020)
22 27 79 / 25 70 39

INHOUD

P. G. J. Vredenduin: Het aanvangsonderwijs in de meetkunde	121
Dr. P. M. van Hiele: Hoe moet men ...	128
Rik Verhulst: Het affiene vlak als gangmaker voor de reële vectorruimten	142
Boekbespreking	154
Mededeling	157
The mathematics teacher	158
Recreatie	159
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	160