

WISKUNDE

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang

1976/1977

no 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. W. E. de Jong.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9^{II}, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.)

Abonnementsprijs voor niet-leden f 30,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 85,—.

Verslag van de ingangstest in de wiskunde aan het begin van het cursusjaar 1975-1976 gehouden aan de TH-Delft, TH-Eindhoven en TH-Twente

Drs. W. F. J. EDELAAR

Delft

Inleiding

Begin september 1974 meldde zich de eerste generatie abituriënten met een V.W.O.-diploma (inhoudende de opleiding wiskunde nieuwe stijl) als eerstejaarsstudent bij het W.O.

Onder de eerstejaarsstudenten aan de T.H.-Delft werd toen een programma- en leermiddelentest in de wiskunde gehouden. Het doel van de test was gegevens te verzamelen om het wiskunde-onderwijs aan de TH-Delft zo goed mogelijk te doen aansluiten op het kennisniveau van de aangekomen eerstejaarsstudenten. Een verslag van deze test werd in kleine kring verspreid. (Ook aan de TH-Eindhoven en de TH-Twente werden enquêtes verricht, zij het op veel kleinere schaal en anders gericht).

De instellingen van Technisch Hoger onderwijs in Eindhoven en Twente spraken zich uit voor een samenwerking met de TH-Delft in de begin september 1975 te organiseren ingangstest Wiskunde. Besloten werd een zelfde test op alle drie de instellingen voor te leggen aan de studenten en een verslag hiervan gemeenschappelijk te publiceren.

Naast ondergetekende werkten een aantal medewerkers van de onderafdeling der Wiskunde van de TH-Delft, Dr. P. L. Cijssouw van de TH-Eindhoven en Dr. Tj. Plomp van de TH-Twente aan de voorbereiding mee. Veel steun ontvingen we van Drs. H. v. d. Vleugel van de onderwijskundige dienst van de TH-Delft.

De samenstellers zijn van mening dat de test in voldoende mate beantwoordt aan het doel, nl. het verkrijgen van een globaal inzicht in het kennisniveau voor wiskunde van de eerstejaarsstudenten in de techniek, teneinde het onderwijs daar zo goed mogelijk op af te stemmen.

De studenten hebben zich ingezet de test zo goed mogelijk te beantwoorden. De invultijd te weten $1\frac{1}{2}$ uur bleek ruim voldoende. Ook aan het verzoek om blanco in te vullen is in ruime mate voldaan. Alle alternatieven zijn redelijk vaak gekozen.

Bij de redactie van de vragen hebben we ons zoveel mogelijk aangesloten bij de V.W.O. terminologieën en definities, hetgeen achteraf een juiste handelwijze bleek.

De test geeft geen beeld van de Nederlandse vwo-gediplomeerde. Men bedenke dat het hier gaat om die personen met Wiskunde I die aan een T.H. gaan studeren. Dit is dus *geen* aselecte steekproef. Het totaalbeeld zal lager liggen.

Informatie voor de studenten

- U bent in het bezit van een diploma dat U het recht geeft deel te nemen aan de examens, die de T.H. organiseert.
- De onderafdeling der Wiskunde van de T.H. presenteert U in het komende cursusjaar een onderwijsprogramma, dat volgens haar inzichten, aansluit op de opleiding die U bij het V.W.O. heeft gevolgd.
- De staf van de onderafdeling der Wiskunde heeft leermiddelen samengesteld, conform het ontworpen programma.
- De colleges/instructies die U in dit cursusjaar zal gaan volgen en de tentamens/examens waaraan U zal deelnemen zijn volledig gebaseerd op het ontworpen programma en de bijbehorende leermiddelen.
- In het cursusjaar 1974-1975 is gebleken dat een aantal studenten, waaronder bezitters van het V.W.O.-diploma met Wiskunde I in het eindexamenpakket, niet bij machte waren de gevolgde lessen in de analyse/lineaire algebra om te zetten in redelijke resultaten bij de tentamens/examens.
- In het belang van de eerstejaars studenten is het noodzakelijk dat deze studenten reeds aan het begin van het cursusjaar voor zichzelf kunnen vaststellen of zij voldoende kennis van de Wiskunde I bezitten om de colleges/instructies in de T.H.-wiskunde, goed te kunnen volgen.
- De werkgroep heeft hiertoe de bijgevoegde test samengesteld, waarbij ervan uitgegaan wordt dat U, in Uw eigen belang, bereid bent deze test zo volledig mogelijk te beantwoorden, op het (*nog*) uit te reiken antwoordformulier. (Dit formulier mag U als klad beschouwen, U kunt er dus Uw berekeningen op uitvoeren en er voorlopig de antwoorden op aankruisen.)
- Voor studenten die niet in 1975 hun diploma gymnasium/atheneum hebben verworven is deelname aan deze test van nog groter belang.
- Vragen over onderwerpen die bij U op het V.W.O. niet behandeld zijn *moet* U onbeantwoord laten, d.w.z. niet gaan raden.
- Uw persoonlijke resultaten van deze test zullen *in geen de* Uw tentamen/examen resultaten beïnvloeden.

Testformulier

tijdsduur 1½ uur

Vraag 1: $\cos \frac{2}{3}\pi =$ 1) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
2) $-\frac{1}{2}$
3) $\frac{1}{2}$
4) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vraag 2: Welke formule is juist?

- $\cos 2\alpha =$ 1) $2 \sin^2 \alpha - 1$
2) $2 \cos^2 \alpha - 1$
3) $1 - 2 \cos^2 \alpha$
4) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

Vraag 3: Welke formule is juist?

- $\cos \alpha - \cos \beta =$ 1) $-2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
2) $-2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
3) $2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
4) $2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Vraag 4: Welke formule is juist?

- $\cos(\alpha + \beta) =$ 1) $\cos \alpha \sin \alpha + \cos \beta \sin \beta$
2) $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$
3) $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
4) $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Vraag 5: $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) =$ 1) $\sin x$

- 2) $-\sin x$
3) $\cos x$
4) $-\cos x$

Vraag 6: $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow$ 1) $x = \alpha + k\pi$ of $x = \pi - \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- 2) $x = \alpha + 2k\pi$ of $x = \pi + \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
3) $x = \alpha + 2k\pi$ of $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
4) $x = \alpha + 2k\pi$ en $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vraag 7: De bewering $\forall \exists_{x \in \mathbb{R} \ n \in \mathbb{Z}} n < x < n+1$

betekent:

- 1) Voor ieder reëel getal x is er precies één geheel getal n met $n < x < n+1$.
2) Voor ieder reëel getal x is er minstens één geheel getal n met $n < x < n+1$.
3) Voor ieder reëel getal x dat niet geheel is, is er één geheel n met $n < x < n+1$.
4) Als x reëel is maar niet geheel is, is er precies één geheel getal n met $n < x < n+1$, als x geheel is, is er geen getal n met $n < x < n+1$.

Vraag 8: Zij $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$ en $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

Ga de juistheid van de volgende uitspraken na:

I $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$.

II $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

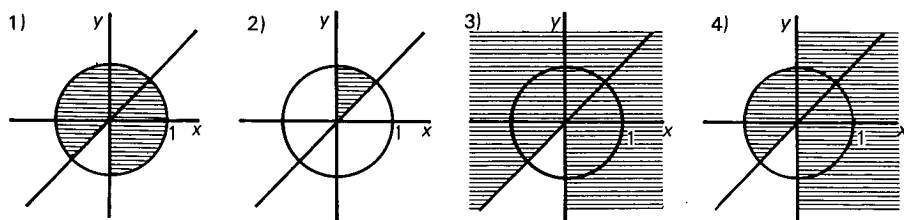
er geldt:

- 1) I en II zijn juist
2) I is juist en II is onjuist
3) I is onjuist en II is juist
4) I en II zijn onjuist

Vraag 9: $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0 \wedge 0 \leq n(n-1) \leq (n-1)^2\} =$

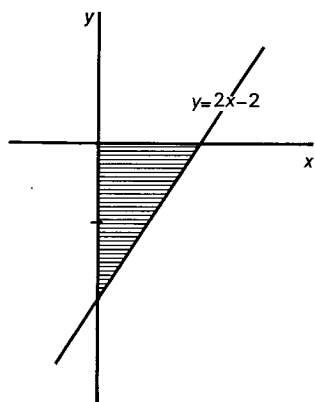
- 1) $\emptyset$
- 2) $\{0\}$
- 3) $\{1\}$
- 4) $\{0, 1\}$

Vraag 10: In welke van onderstaande figuren stelt het gearceerde deel met rand de verzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq x) \vee x \geq 0\}$ voor?



Vraag 11: $x \in [a, b]$ betekent:

- 1) $x = a \vee x = b$
- 2) $x < a \vee x > b$
- 3) $a < x < b$
- 4) $a \leq x \leq b$



Vraag 12: De verzamelingsnotatie voor het gearceerde deel met rand is:

- 1) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 2x \geq -2 \vee y \leq 0 \vee x \geq 0\}$
- 2) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 2x \geq -2 \wedge (y \leq 0 \vee x \geq 0)\}$
- 3) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 2x \leq -2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$
- 4) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 2x \geq -2 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0\}$

Vraag 13: Gegeven de functie f met $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{10 \log x}$

Dit voorschrift heeft zin voor alle waarden van x met

- 1) $0 < x$
- 2) $0 < x < 1$
- 3) $-1 \leq x \leq 1$
- 4) $-1 \leq x < 0$ of $0 < x \leq 1$

Vraag 14: $\frac{\ln 5}{\ln 3} =$

opm: $\ln$ betekent de natuurlijke logaritme.

1) $\frac{{}^{10}\log 5}{{}^{10}\log 3}$

2) $\ln \frac{5}{3}$

3) $\ln 2$

4) $\ln 5 - \ln 3$

Vraag 15: De functie f is gegeven door $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{voor } x < 0 \\ x & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$
 f is in $x = 0$:

1) continu en differentieerbaar

2) continu maar niet differentieerbaar

3) niet continu en niet differentieerbaar

4) niet continu maar wel differentieerbaar

Vraag 16: Een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heeft zeker geen inverse als

1) f niet continu is

2) $f(0) = f(1)$

3) $f'(3) = 0$

4) $f(x) > f(x+1)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$

Vraag 17: Als $f: x \rightarrow x^2$ en $g: x \rightarrow 1+x$ dan is de samengestelde functie $f \circ g$ de functie:

1) $x \rightarrow 1+x^2$

2) $x \rightarrow (1+x)^2$

3) $x \rightarrow x^2(1+x)$

4) $x \rightarrow x^2 + (1+x)$

Vraag 18: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} =$

1) 0

2) e^{-1}

3) 1

4) ∞

Vraag 19: Als $h(x) = f(g(x))$ dan is $h'(x) =$

1) $f'(g(x)) \cdot x'$

2) $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3) $f'(g(x)) + f(g'(x))$

4) $f'(g(x)) \cdot g(x) + f(g(x)) \cdot g'(x)$

Vraag 20: De afgeleide functie van $f: x \rightarrow \ln \cos 2x$ is $f': x \rightarrow$

- 1) $\frac{2}{\cos 2x}$
- 2) $\tan 2x$
- 3) $2 \tan 2x$
- 4) $-2 \tan 2x$

Vraag 21: De continue functie f gedefinieerd voor iedere $x \in \mathbb{R}$ heeft een maximum voor $x = x_0$ als

- 1) $f'(x_0) = 0$ en $f(x_0) > 0$
- 2) $f'(x_0) = 0$ en $f''(x_0) > 0$
- 3) $f'(x) > 0$ als $x < x_0$ en $f'(x) < 0$ als $x > x_0$
- 4) $f'(x) < 0$ als $x < x_0$ en $f'(x) > 0$ als $x > x_0$

Vraag 22: De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = |x|$ bezit

- 1) een primitieve g , gedefinieerd door $g(x) = \frac{1}{2}x^2$
- 2) een primitieve g , gedefinieerd door $g(x) = \frac{1}{2}x \cdot |x| + 5$
- 3) een primitieve g , gedefinieerd door $g(x) = \frac{1}{2}|x|^2$
- 4) geen primitieve functie

Vraag 23: De integraal $\int_0^3 x\sqrt{1+x} \, dx$ gaat door de substitutie $\sqrt{1+x} = t$ over in

- 1) $\int_1^2 (t^2 - 1)t \, dt$
- 2) $\int_1^2 (t^2 - 1)t^2 \, dt$
- 3) $\int_1^2 (t^2 - 1)2t \, dt$
- 4) $\int_1^2 (t^2 - 1)2t^2 \, dt$

Vraag 24: $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx =$

- 1) $\frac{\pi}{4}$
- 2) $\frac{1}{2} \ln 2$
- 3) $\ln 2$
- 4) onbepaald

Vraag 25: $d(\sin 2x)$ betekent:

- 1) $2 \cos 2x$
- 2) $2 \cos 2x \, dx$
- 3) $\sin 2x \cos 2x$
- 4) $\sin 2x \cos 2x \, dx$

Vraag 26: De functie $f: x \rightarrow x \sin x$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking:

- 1) $xy' - y = x^2 \cos x$
- 2) $xy' - y = -x^2 \cos x$
- 3) $xy' - y = x(\cos x - \sin x)$
- 4) $(\cos x)y' + (\sin x)y = \frac{1}{2} \sin 2x$

Vraag 27: Van de differentiaalvergelijking $y' + y + 1 = 0$ kunnen we zeggen dat

- 1) de variabelen te scheiden zijn terwijl hij niet van het lineaire type is
- 2) hij van het lineaire type is, maar de variabelen niet te scheiden zijn
- 3) de variabelen te scheiden zijn en hij ook van het lineaire type is
- 4) de variabelen niet te scheiden zijn en hij ook niet lineair is.

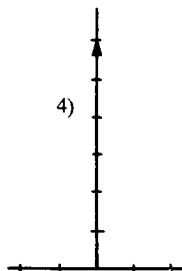
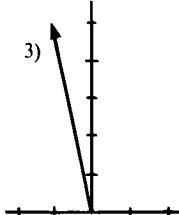
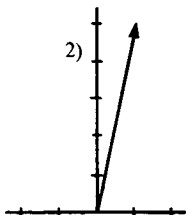
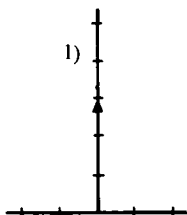
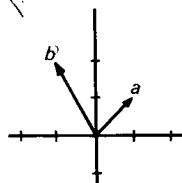
Vraag 28: Een parameter voorstelling van een kromme in het (X, Y) -vlak zou kunnen zijn:

- 1) $\begin{cases} x = t^2 - t + 1 \\ y = 2t^3 - t \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} t = x^3 - 3x \\ t = 2y^2 - y \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x = y^2 + 2y - 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x = xt^2 + 2x^3 - 1 \\ y = t^2 - y^2 + 2 \end{cases}$

Vraag 29: Gegeven de differentiaalvergelijking $(x^2 + y^2 - 1)dy + (y^2 - x^2)dx = 0$. De verzameling van de dragers met horizontale lijnelementen is:

- 1) de lijn $y = x$
- 2) de lijn $y = x$ uitgezonderd het punt $(0, 0)$
- 3) de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ uitgezonderd de snijpunten met het lijnenpaar $y = x$ en $y = -x$
- 4) het lijnenpaar $y = x$ en $y = -x$ uitgezonderd de snijpunten met de cirkel $x^2 + y^2 = 1$

Vraag 30: Gegeven $\underline{a}$ en $\underline{b}$ (zie figuur) nu is $\underline{a} + \underline{\bar{b}}$:



Vraag 31: Het inwendig produkt van de vectoren

$$\underline{a} = (a_1, a_2) \text{ en } \underline{b} = (b_1, b_2) \text{ is}$$

- 1) $a_1b_1 + a_2b_2$
- 2) $a_1a_2 + b_1b_2$
- 3) $\sqrt{a_1b_1 + a_2b_2}$
- 4) (a_1b_1, a_2b_2)

Vraag 32: Het inwendig produkt van de vectoren $\underline{a} = (1, 3)$ en $\underline{b} = (-1, 2)$ is:

- 1) 5
- 2) 7
- 3) de vector $(-1, 6)$
- 4) de vector $(2, -3)$

Vraag 33: Als het inwendig produkt van twee vectoren nul is

- 1) hebben ze beide de lengte 1.
- 2) is minstens een van beide de nulvector.
- 3) hebben ze dezelfde drager of is minstens een van beide de nulvector.
- 4) staan ze loodrecht op elkaar of is minstens een van beide de nulvector.

Vraag 34: $\underline{a}$ is een steunvector van de rechte l , $\underline{b}$ is een richtingsvector van l .
De volgende vector is dan ook een steunvector van l :

- 1) $\frac{1}{2}\underline{a}$
- 2) $-\underline{a}$
- 3) $\underline{a} - \underline{b}$
- 4) $\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$

Vraag 35: De lengte van de vector $(2, 8)$ is:

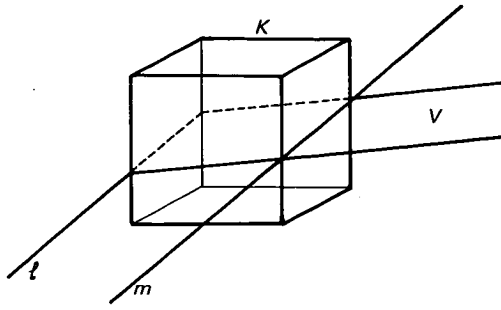
- 1) 68
- 2) $2\sqrt{17}$
- 3) $\sqrt{10}$
- 4) $4\sqrt{17}$

Vraag 36: De oppervlakte van een bol met straal R is gelijk aan

- 1) $\pi^2 R^2$
- 2) $4\pi R^2$
- 3) $4\pi^2 R^2$
- 4) $\frac{4}{3}\pi R^3$

Vraag 37: Een kubus K wordt door een vlak V gesneden. V snijdt het linkerzijvlak en het rechterzijvlak van de kubus volgens lijnstukken die liggen langs lijnen l en m . Dan geldt:

- 1) l is altijd evenwijdig aan m
- 2) soms zijn l en m evenwijdig, soms snijden l en m elkaar
- 3) soms zijn l en m evenwijdig, soms kruisen l en m elkaar
- 4) soms zijn l en m evenwijdig, soms snijden zij, en soms kruisen zij.



Vraag 38: $\sum_{k=1}^4 k =$

- 1) 5
- 2) 10
- 3) 16
- 4) 24

Vraag 39: $\arcsin(\sin \frac{2}{3}\pi)$

- 1) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- 2) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- 3) $\frac{2}{3}\pi$
- 4) $\frac{1}{3}\pi$

Vraag 40: Het totaal aantal mogelijke deelverzamelingen van 5 elementen uit een gegeven verzameling van 9 elementen is

- 1) 32
- 2) 45
- 3) 126
- 4) 61049

Vraag 41: De som van een sommeerbare oneindige meetkundige rij $t_1, rt_1, r^2t_1, \dots$ is

- 1) $s = \frac{t_1}{1-r}$
- 2) $s = \frac{rt_1}{1-r}$
- 3) $s = r \frac{1-t_1}{1-r}$
- 4) $s = r^n \frac{1-t_1}{1-r}$

De populatie

De getallen zijn aantallen studenten.

diploma plaats	V.W.O. dipl.	H.B.S. Gym. (oud)	H.T.S.	Buitenland	Totaal
Delft	918	44	91	30	1083
Eindhoven	538	23	59	10	630
Twente	285	6	1	11	303
Totaal	1741	73	151	51	2016

Resultaten van de afzonderlijke vragen

In de volgende tabel staan per vraag vermeld de verdelingspercentages van de gehele populatie over de alternatieven. Het juiste alternatief is steeds met een * gemerkt. De *p*-waarde van een vraag is de fraktie van de studenten die de vraag juist hebben beantwoord.

In de tabel is een indeling in groepen aangebracht, genummerd G_1 tot en met G_7 . De inhoud van deze groepen heeft betrekking op:

G_1 goniometrie G_3 functiebegrip G_5 differentiaalverg.
 G_2 lezen en begrijpen G_4 differ. en integr. G_6 vectorrekening

Deze zes groepen vormen de eigenlijke test. In groep G_7 werden enkele onderwerpen aan de orde gesteld, die in het V.W.O. in de cursus 1974/75 niet tot de verplichte stof behoorden, of binnenkort niet meer zullen behoren. 80 % van de deelnemers met een V.W.O.-diploma beantwoordde twee of minder vragen van deze groep goed.

item	niet ingevuld	1	2	3	4	<i>p</i> -waarde	
G_1	1	0.3	13.0	80.2*	4.6	1.8	0.80
	2	2.2	6.6	71.7*	9.9	9.5	0.72
	3	9.7	52.6*	14.4	12.9	10.3	0.53
	4	4.2	5.4	11.2	68.2*	10.9	0.68
	5	0.8	7.9	5.8	62.5*	23.1	0.62
	6	2.7	3.3	3.4	70.1*	20.4	0.70
G_2	7	11.7	16.3	50.9*	5.5	15.6	0.51
	8	9.0	9.7	65.7*	4.6	10.9	0.66
	9	6.6	10.2	2.7	65.2*	15.2	0.65
	10	7.1	4.6	40.8	4.1	43.4*	0.43
	11	3.2	7.2	0.1	2.6	86.8*	0.87
	12	7.0	7.1	12.3	2.3	71.3*	0.71
G_3	13	1.4	3.9	76.6*	5.0	13.0	0.77
	14	2.6	48.5*	5.2	10.5	33.2	0.49
	15	3.4	8.6	6.2	59.0*	22.8	0.59
	16	13.9	43.3	36.7*	3.2	2.9	0.37
	17	6.6	11.1	74.7*	2.8	4.7	0.75
	18	9.0	57.0*	1.6	11.9	20.4	0.57

item	niet ingevuld	1	2	3	4	<i>p</i> -waarde	
G ₄	19	3.8	2.8	69.4*	19.1	4.9	0.69
	20	6.6	7.6	1.9	11.5	72.4*	0.72
	21	5.8	4.9	31.5	53.3*	4.4	0.53
	22	10.2	16.5	14.8*	23.6	35.0	0.15
	23	13.0	49.0	3.2	6.5	28.3*	0.28
G ₅	24	13.1	11.7	60.6*	6.1	8.6	0.61
	25	11.7	28.3	58.2*	0.6	1.2	0.58
	26	33.6	48.5*	7.7	6.7	3.4	0.49
	27	33.3	12.4	16.0	28.2*	10.0	0.28
	28	10.2	79.1*	4.5	4.5	1.7	0.79
G ₆	29	23.9	5.1	3.1	15.5	52.3*	0.52
	30	2.9	6.3	0.9	88.7*	1.2	0.89
	31	9.3	82.7*	2.1	0.9	4.9	0.83
	32	9.9	82.1*	1.5	6.0	0.5	0.82
	33	10.7	0.2	4.4	4.2	80.5*	0.81
G ₇	34	16.6	4.5	3.2	73.8*	2.0	0.74
	35	4.1	2.9	90.6*	0.2	2.1	0.91
	36	12.0	3.0	43.0*	11.0	31.0	0.43
	37	4.0	90.0*	2.0	4.0	1.0	0.90
	38	36.0	5.0	55.0*	2.0	2.0	0.55
G ₇	39	8.0	1.0	4.0	70.0	17.0*	0.17
	40	38.0	6.0	11.0	34.0*	11.0	0.34
	41	55.0	12.0*	3.0	5.0	24.0	0.12

Het gemiddelde van de per student goed beantwoorde vragen uit de eigenlijke test (vragen 1–35) bedraagt 22.05 vraag of 63 %, met een standaarddeviatie van 5.90. Opvallend laag is het percentage goede antwoorden op de vragen 10, 14, 16, 22, 23, 26 en 27.

Speciaal hoog is het bij 11, 30 en 35.

Let op het verschil c.q. overeenkomst in de *p*-waarde bij verwante vragen zoals 10 en 12; 19 en 20; 23 en 24.

In de volgende tabel zijn alleen de studenten beschouwd met een V.W.O.-diploma.

dipl. V.W.O. alle T.H.'s:	groep	gem. aantal goed	percentage juiste antw.	standaard deviatie
	G ₁	4,23	70	1,35
	G ₂	4,12	69	1,30
	G ₃	3,77	63	1,30
	G ₄	3,14	53	1,32
	G ₅	2,88	58	1,25
	G ₆	5,31	89	1,25

31 % in G₄ beantwoorde twee of minder vragen goed. In G₅ is dat 37 %. In G₆ beantwoorde 66 % alle vragen goed.

Opmerkingen aangaande Wiskunde II

Ongeveer 25% van de aankomende studenten met een V.W.O.-diploma had geen Wiskunde II in zijn eindexamenpakket. In G_6 zijn vragen gesteld gebaseerd op een deel van het programma van de eerste vier leerjaren van het V.W.O. dat zijn doorwerking vindt in het programma van Wiskunde II, echter niet of nauwelijks in het programma van Wiskunde I. Zie de volgende tabel die betrekking heeft op deelnemers met V.W.O.-diploma.

Aantal goed beantwoorde vragen van G_6	0	1	2	3	4	5	6
Met wisk. II (1290 deelnemers)	1%	0%	0%	0%	2%	16%	80%
Zonder wisk. II (423 deelnemers)	3%	5%	15%	11%	17%	25%	22%

Conclusies en aanbevelingen

1. De test heeft in voldoende mate aan zijn doel beantwoord, nl. het verkrijgen van een globaal inzicht in het wiskunde kennisniveau van de aankomende eerstejaarsstudenten in de techniek, teneinde het wiskundeonderwijs er zo goed mogelijk op af te stemmen. Op grond van de scores op een aantal vragen verdient het aanbeveling bij het wiskundeonderwijs aan de TH toch aandacht te besteden aan een aantal onderwerpen waarvan terecht wordt verwacht dat ze door de studenten beheerst worden, op grond van hun vooropleiding. Genoemd kunnen worden:

- inzicht in goniometrische formules;
- het functiebegrip;
- de logaritmische en de exponentiële functie;
- de kettingregel;
- de cyclometrische functies;
- de beginselen van de differentiaalvergelijkingen.

2. Correct lezen is geen eenvoudige zaak, zoals blijkt uit de beantwoording van de leesvragen en uit het invullen van de datum op de aangegeven wijze. Een oorzaak is misschien dat ingeklede vraagstukken wel haast geheel uit het wiskundeonderwijs bij het V.W.O. zijn verdwenen. Bij het wiskundeonderwijs op de TH dienen we aan dit aspect dan ook aandacht te schenken.

3. Uit de test blijkt dat het onderwijs aan de H.T.S.-en nog niet aangepast is aan de vernieuwingen die bij het V.W.O. plaats gevonden hebben. Aan de gevolgen daarvan zal, zeker in de aanvang van het onderwijs aan hts-ers, aandacht en tijd besteed dienen te worden.

Een huiswerkopgave

Hoewel het onderstaande artikel misschien eerder thuis zou horen in Pythagoras dan in Euclides (maar voor Pythagoras zou het te lang zijn) dachten we dat het gesprek tussen de beide (brave) jongens ook voor de lezers van Euclides wel interessant zou zijn. Het geeft in ieder geval een stukje sfeer weer van achter het ijzeren gordijn.

Het artikel van de hand van G. I. Kopylov stond in het Russische tijdschrift KWANT, nummer 9 van de jaargang 1975. Het werd vertaald door Drs. J. Scheper te Stadskanaal.

Ik houd van het oplossen van moeilijke opgaven. Ik houd ervan om nieuwe bewijzen van stellingen te zoeken en om boeken over geleerden te lezen. Ik leer graag en in de schoololympiade heb ik een prijs gewonnen. Ik zou graag een geleerde willen worden. Maar kan ik er een worden? Deug ik voor geleerde? Hoe kan ik mij daarvan overtuigen?

Helaas zijn er geen kenmerken waaraan men de toekomstige geleerde zou kunnen herkennen. Successen op school garanderen volstrekt niet dat er zulke successen zullen zijn voor degene die de universiteit verlaten heeft: de scholier lost datgene op wat opgegeven is; neemt gedachten van anderen op, maar de geleerde stelt zich zijn eigen problemen. Zelfs als de leerling goed logisch kan redeneren betekent dat nog niet dat hij in staat is om een geleerde te worden. Het goed logisch kunnen redeneren is voor de geleerde inderdaad beslist noodzakelijk, maar daarnaast zijn er gevallen waarin juist sprongen in het logische bouwsel – dat betekent scherpzinnigheid in plaats van logica – de oplossingen van een probleem geven.

Maar hoewel het leren op school helemaal niet lijkt op wetenschappelijk werk kan men sommige kwaliteiten die voor de geleerde onmisbaar zijn, ontwikkelen bij het huiswerk maken. Men moet alleen, nadat men de som die aan de beurt is heeft opgelost, niet meteen tot de volgende overgaan. Nog even de gegevens overlezen, nog even kijken naar het gevonden antwoord – en de verbeelding de vrije loop laten. Je afvragen: hoe zou het ook kunnen zijn? Is het mogelijk om sommen op te lossen, die een beetje moeilijker zijn, uitgaande van die, welke net opgelost is?

Maar we kunnen beter het gesprek tussen twee jongens afluisteren. Ze zitten in dezelfde klas en maken vandaag hun huiswerk samen.

D. Wat hebben we op voor algebra?

O. Bewijzen dat als de getallen $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ en $\frac{1}{a+b}$ een rekenkundige rij vormen, de getallen a^2 , b^2 en c^2 ook een rekenkundige rij vormen.

D. Dat lijkt me niet moeilijk. Iedere term van een rekenkundige rij is het gemiddelde van de twee naburige termen, Dus:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right) = \frac{1}{c+a} \quad (1)$$

Als we de breuken en de haakjes wegwerken, krijgen we $a^2 + c^2 = 2b^2$ of $\frac{1}{2}(a^2 + c^2) = b^2$ en dat moeten we bewijzen. (2)

O. Ja, dat lijkt me allemaal goed . . .

D. Wat hebben we nog meer op voor morgen?

O. Wacht even; laat me nog even nadenken . . .

D. Waarover?

O. Over de som die we net opgelost hebben.

D. Wat valt daar nog over na te denken, als hij al opgelost is?

O. In het begin hadden we een paar termen die een rij vormden, maar aan

het eind hadden we heel andere. Wat hebben $\frac{1}{b+c}$ en a^2 met elkaar te maken?

D. Dat heb je net gezien.

O. Ik kan het niet precies uitleggen, maar er is iets aan de hand. Wat dacht je, zou het omgekeerde ook waar zijn? Dus als a^2 , b^2 en c^2 een rekenkundige

rij vormen, ook $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ en $\frac{1}{a+b}$ een rekenkundige rij vormen?

D. Absoluut. Hoe zou het anders kunnen zijn? Voer de berekening maar in de omgekeerde richting uit.

O. Dat is niets bijzonders. Weet je wat, laten we het eens met getallen proberen.

D. Wat? Met getallen bewijs je niets.

O. . . laten we eens nemen: $a^2 = 1$ $b^2 = 4$ $c^2 = 7$ (3)

Deze getallen vormen een rekenkundige rij. Laten we eens controleren of

$\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ en $\frac{1}{a+b}$ ook een rekenkundige rij vormen.

D. Waarom? Het is zeker dat het klopt, want ik heb het al met letters bewezen. Met getallen krijg je niets nieuws.

O. Maar ik wil zien hoe het eruit komt. Laten we de positieve wortels van (3) nemen: $a = 1$, $b = 2$ en $c = \sqrt{7}$

D. Uitschrijven: $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{2+\sqrt{7}}$; $\frac{1}{c+a} = \frac{1}{1+\sqrt{7}}$ en $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{3}$

Is dat wel een rekenkundige rij? Laten we de irrationaliteiten uit de noemers verwijderen:

$\frac{1}{b+c} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$; $\frac{1}{c+a} = \frac{\sqrt{7}-1}{6}$

O. Natuurlijk vormen de drie getallen een rekenkundige rij. De som van de eerste en de derde term is $\frac{\sqrt{7}-2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$ en dat is het dubbele van de middelste term.

Ja, en het verschil van de rij is $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}-1}{6} = \frac{3-\sqrt{7}}{6}$

O. Wacht. Nu weet ik hoe je moet bewijzen, dat uit (2) (1) volgt. Je hoeft

alleen maar de irrationaliteiten uit de noemer te verdrijven.

D. Wat? Er is helemaal geen irrationaliteit!

O. Nee natuurlijk niet, maar je moet doen alsof die er wel was. Kijk:

$$\frac{1}{b+c} = \frac{b-c}{b^2-c^2}; \frac{1}{c+a} = \frac{c-a}{c^2-a^2} \text{ en } \frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{a^2-b^2}$$

Gegeven is dat a^2 , b^2 en c^2 een rekenkundige rij vormen. Dan is $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$. Laten we dit verschil d noemen, dan hebben we $a^2 - b^2 = d$; $b^2 - c^2 = d$ en $a^2 - c^2 = 2d$

De getallen $\frac{b-c}{d}$; $\frac{a-c}{2d}$ en $\frac{a-b}{d}$ vormen duidelijk een rekenkundige rij.

D. Goed Wat hebben we nog meer op?

O. Wacht even. Begrijp je nu, wat de rijen $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$; $\frac{1}{a+b}$ en a^2 , b^2 , c^2 met elkaar te maken hebben?

D. Dat heb ik allang begrepen.

O. Laten we drie willekeurige getallen a , b en c nemen. Kijk nou naar het drietal $b-c$; $\frac{a-c}{2}$ en $a-b$. Dat is al een rekenkundige rij. De termen van deze rij kunnen we delen door een willekeurig getal d . In de opgave hebben ze d zo gekozen, dat die deling leidt tot de getallen $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ en $\frac{1}{a+b}$.

Daartoe moeten we in plaats van willekeurige getallen a , b en c zulke nemen, dat $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$ m.a.w. zulke dat a^2 , b^2 en c^2 een rekenkundige rij vormen.

Maar nu komt er een nieuwe vraag op: kunnen de drie getallen a , b en c alle drie geheel zijn?

D. Wat maakt dat nu uit?

O. Dat is juist interessant! Een drietal gehele getallen a , b en c zo, dat a^2 , b^2 en c^2 een rekenkundige rij vormen. Dan vormen de getallen $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ en $\frac{1}{a+b}$ ook zo'n rij.

Dat is toch mooi – twee rijen, beide bestaande uit gehele getallen . . .

D. Maar de tweede zal uit breuken bestaan. Als a en b geheel zijn, dat is $\frac{1}{a+b}$ een breuk.

O. Dat is niet belangrijk. Ik zou alleen maar willen, dat er geen wortels voorkomen. Als a , b en c niet geheel maar wel rationaal zijn dan is dat even goed. Maar hoe vinden we rationale getallen a , b en c zo, dat $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$? Dat is geen eerstegraadsvergelijking, dus kunnen we de wortels niet berekenen Maar wacht, we hebben een eerstegraadsvergelijking, nl. (1).

D. Dat zie ik niet.

O. Kijk. Laat $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ de bekende rij zijn, bijvoorbeeld 1, 3, 5. Of 100, 101, 102. Willekeurige getallen. Dat betekent dat we een stelsel hebben

van drie vergelijkingen van de eerstegraad met drie onbekenden a , b en c . Die kunnen we oplossen. De oplossing bestaat weer uit rationale getallen. En dan vormen a^2 , b^2 en c^2 automatisch weer een rij van rationale getallen.

D. Laten we het proberen. Stel de rij op, bijvoorbeeld 1, 3, 5.

O. Nee, laten we meteen het algemene geval nemen. Bekijk de rij $\alpha - \beta$, α , $\alpha + \beta$ met α en β willekeurige getallen. Voor de berekening van de getallen a , b en c krijgen we dan het volgende stelsel vergelijkingen:

$$b + c = \frac{1}{\alpha - \beta} \quad (4)$$

$$c + a = \frac{1}{\alpha} \quad (5)$$

$$a + b = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad (6)$$

D. Tel alle vergelijkingen bij elkaar op en deel de som door 2; dat geeft

$$a + b + c = \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} \quad (7)$$

Trek van (7) achtereenvolgens (4), (5) en (6) af dan krijgen we

$$a = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}; \quad b = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}; \quad c = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta}{2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}$$

Dus welke α en β we ook genomen zouden hebben, de getallen a^2 , b^2 en c^2 met a , b en c berekend volgens deze formules zullen een rekenkundige rij vormen. Laten we dat gaan controleren.

O. Een ogenblik. Ik heb er over nagedacht. Voor de getallen a , b en c hebben we breuken gevonden. Laten we de noemers weglaten, dan worden a , b en c met eenzelfde getal vermenigvuldigd en worden gehele getallen als we α en β geheel nemen. De getallen a , b en c blijven dan een rekenkundige rij vormen.

D. Natuurlijk. Als 1, 3, 5 een rekenkundige rij is, dan is 10, 30, 50 dat ook.

O. Dat wil zeggen dat we formules hebben afgeleid voor de rij a^2 , b^2 en c^2 waarbij a , b en c geheel zijn. En wel:

$$a = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta \quad (8)$$

$$b = \alpha^2 + \beta^2 \quad (9)$$

$$c = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta \quad (10)$$

met α en β willekeurig geheel.

D. Laten we het controleren. Stel $\alpha = 2$ en $\beta = 1$ dan is

$$\alpha^2 - \beta^2 = 3 \quad 2\alpha\beta = 4 \quad \alpha^2 + \beta^2 = 5 \quad (11)$$

O. Hé kijk, dat is een Egyptische driehoek . . .

D. Dat is toevallig. Laten we verder rekenen:

$$a = 3 - 4 = -1 \quad b = 5 \quad c = 3 + 4 = 7$$

Dat klopt, want 1, 25, 49 is een rekenkundige rij.

O. Dat betekent dat we ons zelf geleerd hebben hoe je de onbepaalde vergelijking $a^2 + c^2 = 2b^2$ (12)

in gehele getallen kunt oplossen. De oplossing wordt weergegeven door de formules (8)–(10).

D. Hoe kom je aan die vergelijking?

- O.* Die geeft alleen maar weer dat a^2 , b^2 en c^2 een rekenkundige rij vormen.
- D.* Ja, dat zie ik ook wel. Je hebt alleen niet bewezen dat de formules (8)–(10) alle oplossingen van die vergelijking geven.
- O.* Waarom? Dat is toch duidelijk; een willekeurige oplossing van vergelijking (12) is zodanig dat de getallen $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ een rekenkundige rij vormen en elke rekenkundige rij kun je voorstellen in de gedaante $\alpha - \beta$, α , $\alpha + \beta$.
- Door nu achter elkaar alle mogelijke paren (α, β) te nemen, krijgen we alle oplossingen van vergelijking (12). Accoord?
- D.* Dat lijkt wel zo. Ja.
- O.* Het interessantste is de methode waarmee we de oplossing gevonden hebben: in plaats van vergelijking (12) (die van de tweede graad is) op te lossen, hebben we het stelsel (4)–(6) van daarmee gelijkwaardige eerste-graads vergelijkingen met willekeurige rechterleden opgelost. Zouden er nog meer onbepaalde vergelijkingen van de tweede graad zijn, die als je ze wilt oplossen in gehele getallen leiden tot een stelsel vergelijkingen van de eerste graad?
- D.* Zullen we eens even rusten? Een plaatje draaien?
- O.* Ja graag . . . (Ze zetten een grammofoonplaat op. *O* kijkt de oplossing nog eens over. Uitroep van verbazing)
- D.* Wat?
- O.* Wijst naar regel (11). Kijk dit zijn formules voor Pythagoreïsche driehoeken. Die geven alle rechthoekige driehoeken waarvan de zijden gehele getallen zijn. Zijn de rechthoekszijden u en v en is de hypotenusa w dan geldt: $u = \alpha^2 - \beta^2$; $v = 2\alpha\beta$; $w = \alpha^2 + \beta^2$.
- Je kunt gemakkelijk nagaan dat $u^2 + v^2 = w^2$. Dus de Egyptische driehoek (11) was geen toevalligheid.
- Je kunt dus een willekeurige Pythagoreïsche driehoek met rechthoekszijden u en v en hypotenusa w nemen en uit de lengten van de zijden de oplossing van vergelijking (12) afleiden.
- $$a = u + v \quad c = u - v \quad b = w$$
- D.* Interessant. Laten we het controleren: Neem een driehoek met zijden 5, 12 en 13. Dan krijgen we $a = 12 + 5 = 17$, $c = 12 - 5 = 7$ en $b = 13$. Zo krijgen we 7^2 , 13^2 , 17^2 . Inderdaad. $7^2 + 13^2 = 17^2$.
- O.* Hoe is het toch mogelijk, dat ik bij het zien van vergelijking (12) er niet meteen aan dacht om de getallen a en c in de vorm van een som en een verschil van twee getallen u en v voor te stellen? Want dan leidt die vergelijking tot de stelling van Pythagoras. Kijk maar: $(u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2 + v^2)$ zodat (12) leidt tot $u^2 + v^2 = b^2$. En de oplossing in gehele getallen van deze vergelijking is bekend. Het is wel een mooi resultaat: $(u+v)^2$ is de oppervlakte van het vierkant dat beschreven kan worden op de som van de rechthoekszijden en $(u-v)^2$ is de oppervlakte van het vierkant dat beschreven kan worden op het verschil van de rechthoekszijden.
- We hebben dus bewezen dat de oppervlakten van de vierkanten die beschreven kunnen worden op achtereenvolgens het verschil van de rechthoekszijden, de hypotenusa en de som van de rechthoekszijden een rekenkundige rij vormen.

- D. Wat een ontdekking! Het bewijs is in één regel op te schrijven.
- O. Het is geen grootse ontdekking, maar we hebben hem zelf gedaan. Dit wisten wij tot nu toe nog niet.
- D. Het staat vast wel ergens in een of ander boekje.
- O. Wat zou dat? Ik heb zonder boekje . . .
- D. (ook in hem ontwaakt tenslotte de nieuwsgierigheid)
 Maar waarom moeten we beslist de som en het verschil van de rechthoekszijden nemen? Stel bijvoorbeeld eens $a = 2u + v$; $c = u - 2v$ dan vinden we $a^2 + c^2 = 5(u^2 + v^2) = 5w^2$.
 Dus de oplossing in gehele getallen van de onbepaalde vergelijking
- $$a^2 + c^2 = 5w^2 \quad (13)$$
- kun je halen uit Pythagoreïsche driehoeken u, v en w (w = de hypotenusa) met behulp van de formules $a = 2u + v$; $c = u - 2v$ en $b = w$.
- O. Dat klopt. Klaarblijkelijk kunnen we op deze manier alle vergelijkingen van de vorm $a^2 + c^2 = (m^2 + n^2)b^2$ met m en n geheel in gehele getallen oplossen.
- D. Maar hoe lossen we nu op $a^2 + c^2 = 3b^2$? (14)
- O. Dat weet ik niet. Daar moeten we over nadenken. We hebben één vraag nog niet opgehelderd: Welke onbepaalde vergelijkingen van hogere graad kunnen we overvoeren in een stelsel eerstegraadsvergelijkingen? Vergelijking (12) bijvoorbeeld hebben we overgevoerd in het stelsel (4)–(6). Maar toen wisten we nog niet of er nog meer voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn. Ik begrijp nu dat je net zo veel van deze vergelijkingen kunt bedenken als je maar wilt. Dikteer mij maar eens een vergelijking die op (1) lijkt maar met andere coëfficiënten. Begin bijvoorbeeld met

$$\frac{2}{3a+2b}$$

D. (dikteert $\frac{2}{3a+2b} - \frac{3}{c-a} = \frac{1}{b+4c}$ (15)

- O. Goed. Door deze vergelijking worden drie onbekenden a, b en c met elkaar verbonden. De vergelijking (15) komt neer op de volgende vergelijking van de tweede graad:

$$3a^2 - 6b^2 + 8c^2 - 9ab - 47ac - 24bc = 0 \quad (16)$$

We zoeken rationale oplossingen van deze vergelijking. Als a, b en c rationaal zijn, dan zijn de breuken in (15) dat ook. Laten we de eerste breuk aangeven met 2α en de tweede met 3β . Dan is de derde gelijk aan $2\alpha - 3\beta$ (met α en β rationaal)

We krijgen nu het stelsel:

$$3a+2b = \frac{1}{\alpha} \quad c-a = \frac{1}{\beta} \quad b+4c = \frac{1}{2\alpha-3\beta} \quad (17)$$

Als we dit oplossen krijgen we:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-16\alpha^2 + 24\alpha\beta + 3\beta^2}{5\alpha\beta(2\alpha-3\beta)} & b &= \frac{24\alpha^2 - 31\alpha\beta - 12\beta^2}{5\alpha\beta(2\alpha-3\beta)} \\ c &= \frac{-6\alpha^2 + 9\alpha\beta + 3\beta^2}{5\alpha\beta(2\alpha-3\beta)} \end{aligned} \quad (18)$$

Dat is de gezochte rationale oplossing van vergelijking (16). De tellers van

de uitdrukkingen (18) geven de geheeltallige oplossing als α en β geheel zijn. Als we niet drie onbekenden a , b en c hadden genomen, maar meer, dan zouden we, als we i.p.v. (15) in de linker- en rechterleden zoveel breuken hadden genomen als er onbekenden zijn, een onbepaalde vergelijking van veel hogere graad gekregen hebben. In het algemeen zal de graad van de vergelijking die ontstaat, hoger zijn, als we meer breuken hebben en dan zal ook het aantal parameters α , β , γ , ... waarmee de oplossing wordt uitgedrukt, groter zijn.

- D.* Maar je weet niet van te voren wat voor vergelijking je precies krijgt. En niet iedere vergelijking van hogere graad is gelijkwaardig met een vergelijking bestaande uit een som van breuken. En hoe vind je die breuken in geval van gelijkwaardigheid?
- O.* Daar ligt nu de moeilijkheid. We moeten er nog verder over nadenken.

Hier onderbreken we het denkbeeldige gesprek van twee vrienden. Ze hebben verschillende karakters: *D* wil de hele tijd de opgaven zo snel mogelijk af zien te krijgen, terwijl *O* ze volledig wil doorgronden. In plaats van één opgave, die als huiswerk opgegeven is, bedenkt hij verschillende andere, zonder te weten of die opgelost kunnen worden. Op het eerste gezicht gedraagt hij zich onverstandig, verspilt de tijd die voor het huiswerk bestemd is. Maar juist bij *O* komen de eigenschappen die kenmerkend zijn voor de geleerde het duidelijkst tot uiting. Het zoeken naar grandoorzaken van opgemerkte feiten; het onderzoek naar de verbanden tussen de problemen is de drijvende kracht die de geleerde tot werken dringt. We spreken van nieuwsgierigheid; neiging tot generaliseren. Er zijn slechts weinigen die vragen kunnen stellen – en je moet ze ook beantwoorden. Het zou alleen maar belachelijk zijn als *O* in plaats van het concrete, opgegeven vraagstuk op te lossen, alle verwante problemen zou opsommen zonder er één van op te lossen.

In het onderzoeken van oplossingen van nieuw opkomende problemen – voor een deel onverwachts – is intuïtie belangrijk.

Intuïtie, scherpzinnigheid, doorzicht – dat zijn de vruchtbare onderbrekingen in de logica en daardoor worden er onverwachte stappen gedaan in onvoorspelbare richtingen; de grootte van deze stappen geven het talent van de man weer.

Wij moeten nog eens herhalen: niet haasten met het dichtslaan van boek en schrift als het huiswerk gemaakt is. Kijk nog eens naar de opgaven: wat hebben ze ons voor nieuws geleerd? Welke problemen los je net zo op? Is het mogelijk zonder de oplossingsmethode te veranderen de opgave ingewikkelder te maken? En wat gebeurt er als je een deel van de gegevens weglaat? Of als je die vervangt door het tegenovergestelde? Wat, als je de gegevens strenger maakt? Of als je nieuwe grenzen toevoegt? Dat zijn allemaal prachtige methoden om de fantasie, de scherpzinnigheid, het doorzicht en de nieuwsgierigheid die misschien in de lezer van dit artikel sluimeren, in beweging te brengen.

Keuze-onderwerp op het HAVO

MARJA MEEDER

Amsterdam

Met veel belangstelling heb ik in Euclides gelezen over de ervaringen met het keuze-onderwerp bij wiskunde II op het VWO. Ik geef les op een categoriale HAVO en ben al een aantal jaren bezig om de gedachte van een keuze-onderwerp ook op het HAVO vorm te geven. Eén van de grootste problemen daarbij is om materiaal en boeken te vinden die voor de leerlingen van het HAVO geschikt zijn. Voor sommige onderwerpen zijn er min of meer geschikte boekjes; bij andere onderwerpen moet je zelf voor materiaal zorgen. En dan is het triest om te merken dat een geschikte serie ook nog uit de markt wordt genomen. Ik doel hierbij op de Torus-reeks van Wolters met uitgaven als; Meetkunde gewoon en anders, Inductie en iteratie, Tellen zonder en met cijfers.

In het schooljaar 1971/1972 ben ik met het experiment begonnen aan de Gemeentelijke School voor HAVO in Amsterdam. Een aantal leerlingen (het was toen niet verplicht) heeft toen een werkstuk over een wiskundig onderwerp gemaakt. Die onderwerpen varieerden nogal: een aantal bewijzen voor de stelling van Pythagoras, het begrip oneindig, integraalrekening (behoort niet tot de examenstof HAVO), het rekenen met Romeinse getallen, een overzicht van allerlei soorten functies met hun eigenaardigheden, enz. Zo'n werkstuk was een belangrijk onderwerp van gesprek op het mondelinge examen, dat een gedeelte is van het schoolonderzoek (SO). In de jaren daarna was het maken van een werkstuk verplicht. We hebben toen getracht om onderwerpen te zoeken die zoveel mogelijk bij de belangstelling en/of de pakketten van de leerlingen aansloten. Er ontstond toen ook samenwerking met andere vakken, zoals aardrijkskunde (kaartprojecties, statistiek), geschiedenis (– van de wiskunde, – van de getallen, het leven en werk van Pythagoras) en textiele werkvormen/kunstbeschuwing (Escher). Het gebeurde ook wel dat de keuze van het onderwerp verband hield met de vervolgopleiding: integraalrekening, bolmeetkunde, statistiek, computerkunde, landmeten. Vaak ook gingen de werkstukken over getallen en allerlei eigenaardigheden. Leerlingen zonder enige fantasie maakten een uitgebreid overzicht over een deel van de examenstof. Elke leerling maakte een eigen werkstuk.

Dit jaar hebben we het aantal onderwerpen waaruit de leerlingen mochten

kiezen beperkt en per onderwerp precies omschreven minimum-eisen gesteld en wel om twee redenen. In de eerste plaats omdat het begeleiden van de leerlingen zeer tijdrovend is en in de tweede plaats omdat het (wiskundig) niveau van de werkstukken in de voorgaande jaren nogal verschillend was. Er was dit jaar keuze uit vier onderwerpen, te weten: integraalrekening (speciaal aanbevolen voor toekomstige HTS-ers), de 'oude' meetkunde van de cirkels, getallen en kaartprojecties. Bij elk onderwerp hadden we aangegeven wat de leerling minimaal moest doen, daarna kon hij/zij dit zelf uitbreiden. Ook dit jaar zijn we nog niet tevreden over de vorm en de inhoud die we gevonden hebben voor een extra-onderwerp op het wiskunde-examen. Volgend jaar zal het experiment worden voortgezet, maar hoe is nog niet bekend.

Na onze experimenten ben ik er wel van overtuigd dat er naast het eindexamen-programma HAVO nog ruimte overblijft voor een extra-/keuze-onderwerp. Het materiaal dat nodig is om dit inhoud te geven is echter moeilijk te vinden. Als er collega's zijn die met soortgelijke experimenten bezig zijn, stel ik veel prijs op hun ervaringen en adviezen. Misschien kan het IOWO, dat prachtig materiaal maakt voor VWO en basisschool, ook eens aan het HAVO denken? Een schooltype als HAVO bestaat nog niet zo lang en is zeker de moeite waard om een goede inhoud te krijgen.

Redactie

In verband met drukke werkzaamheden heeft drs. B. J. Westerhof gemeend zijn werkzaamheden als redacteur van *Euclides* te moeten beëindigen. Voor datgene, wat hij de afgelopen jaren voor ons tijdschrift heeft gedaan, danken wij hem, ook op deze plaats, ten zeerste. Zijn plaats wordt ingenomen door drs. W. E. de Jong te Drachten, inspecteur avo, vwo. Tevens zal de heer D. P. M. Krins te Utrecht namens het Ibo tot de redactie toetreden. Beiden roepen we een hartelijk welkom toe.

W. Kleijne

Wintersymposium Wiskundig Genootschap

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op zaterdag 8 januari 1977 in het gebouw van de Ref. Scholengemeenschap 'Guido de Brès', Haastrechtstraat. Rotterdam-Lombardijen.

Als thema is gekozen: Logica en Boole-algebra.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom. Ieder die deze bijeenkomst wenst bij te wonen wordt verzocht, hiervan zo spoedig mogelijk bericht te geven aan A. M. van Steensel, Stad en Landschap 15 te Krimpen aan de IJssel (telefoon 01807-18913) en tevens te vermelden of hij aan de gezamenlijke lunch wenst deel te nemen. De kosten voor de lunch ten bedrage van f 8,- gelieve men te storten op postrekening 1892582 t.n.v. A. M. van Steensel te Krimpen aan de IJssel, onder vermelding van Wintersymposium Wiskundig Genootschap, of ter plaatse te voldoen. Voor deelname aan de lunch is opgave tevoren *noodzakelijk*.

Naar aanleiding van de leerzame reis van de heer Van Dalen

ONDERTITEL: TWEEHONDERDVIJFTIG RETOURTJES
APELDOORN-UTRECHT

J. ROELOFSEN

Apeldoorn

In Euclides no. 6 van februari j.l. verscheen een artikel van de hand van D. van Dalen, Utrecht, getiteld 'Een leerzame, doch aangename reis'. Daarin trekt de schrijver ten strijde tegen de huidige heerschappij van de verzamelingenleer. Dat is zijn goed recht. Maar ik vind het onderwerp te belangrijk om het op zo'n geboorneerde wijze te behandelen als hij doet. Wie er zich eerst op beroept, het verschil te weten tussen goede en slechte filosofie, om vervolgens argumenten van de tegenstander af te doen als sick joke en goedkope diepzinnigheid-van-de-borreltafel, discussieert niet op een eerlijke manier. Wie onderwijst moet niet spotten met de domheid van zijn publiek.

Het onderstaande is geen aanval op de inhoud van het stuk, want wat dat betreft heb ik geen been om op te staan. Het gaat mij er meer om dat van Dalen mij dat been, dat ik niet heb, ook nog wil afnemen.

Vooraf mijn excuus: ik heb weinig tijd. Ik moet twee tentamens opstellen vandaag, waarvan één over complexe getallen, plus een repetitie over statistiek (voor het eerst), plus een syllabus voor onze oudercursus moderne wiskunde (i.e. verzamelingen e.d.). En mijn conditie is slecht, want ik heb slecht geslapen van die reis naar Mons.

Wat moet ik nou met dat artikel?

Ik zit, al jaren, in het 'veld', zoals ze dat aan de Universiteit zo complimenteus noemen. Mijn naam is, derhalve, Haas.

Ik heb indertijd m'n A en m'n B gehaald, na opgemelde retourtjes, en gemeend dat ik een goede, moderne opleiding had gehad. Na zo goed en zo kwaad als het ging de laatste HBS-klassen te hebben afgeleverd, me braaf ingepast in de moderne stroom van wiskundig denken en noteren. De 'moderne wiskunde' verdedigd tegenover ouders, conservatieve collegae en anderen. Als sectieleider gepiekerd over een collega uit de HTS-hoek, die wiskunde geeft in 3-HAVO, en die me heeft gevraagd: 'Dat gemeier met die haakjes en die streepjes en die accolades, dat hoeft toch niet hè?', als die kinderen nou die sommetjes kunnen maken, dan zijn we toch klaar?'

Van de week van een collega gehoord, dat een andere, nieuwe en pas begonnen collega in de brugklas de oplossingsverzameling niet tussen accolades laat zetten. Moet je daar wat aan doen?

Een oudercursus georganiseerd, 75 aanmeldingen, we doen het met z'n drieën, de zaak loopt als een trein, we leren die mensen in acht lessen alles over verzamelingen, beweringen, implicaties, relaties. Ze zijn enthousiast. Wij ook. Soms denken we dat we goed zijn.

En dan krijg je opeens een grote schop onder je derrière van ene D. van Dalen, Utrecht.

Wat moet je daar mee?

Je wordt nijdig.

Want zo langzamerhand heb je door, dat je voor die tweehonderdvijftig retourtjes een voor het vak van wiskundeleraar volstrekt waardeloze opleiding hebt gekregen.

Je kunt niks.

Een leerling die economie wil studeren een advies geven: kun je niet. Je weet niet wat economen met wiskunde doen. Vertellen wat numerieke wiskunde inhoudt, of topologie, of intuïtionisme: idem dito. Geschiedenis van de wiskunde: vergeet het maar. Statistiek, kansrekening, computerwiskunde: zelf zo'n beetje geleerd uit boekjes die Wolters toevallig uitgeeft. Me wel vijf keer opgegeven voor een cursus: vergeet U het maar meneer, er is geen plaats, U kunt nog naar een cursus over meetkunde in de brugklas. (Doe ik dat ook al niet goed? Toe dan maar, kijken wat die lui te zeggen hebben.)

Dan vraagt Gottmer medewerkers voor een nieuwe serie wiskundeboeken. Gamma. Leuk, denk je. Je hebt vijftien jaar ervaring en je kunt een beetje schrijven. Je zou kunnen proberen eindelijk eens een beetje humor in zo'n boek te krijgen. Want dat ontbreekt in de hele paedagogie. En dan lees je: 'De studieboeken van nu zijn te zuiver-wetenschappelijk (sic! het woord is aan U, heer v. D.) van inhoud en te weinig gericht op *vakkennis* en het gebruik daarvan in de praktijk'.

De HTS-leraren hebben dus een uitgever bereid gevonden naar hun pijpen te dansen?

Of zitten de heren H. en I. uit de trein hier achter? Je weet het niet. Je bent er te stom voor, je bent een MO-mannetje, je zit in het Veld, knollen te graven. Je denkt: ik doe het maar niet, wie weet, waar ik me in steek. En ik ben er niet voor opgeleid.

Ik moet nog vijftien of twintig jaar en ik kan ook weer gaan schilderen, in m'n vrije tijd. En zo lang veertig procent van alle wetenschappelijke research geschiedt voor militaire doeleinden (Tinbergen) dien je de vrede misschien beter door een slecht wiskundeleraar te zijn. Maar dat is negatief, dus eindig ik maar met een concreet voorstel: veel meer schriftelijke cursussen voor leraren, eventueel begeleid via televisie. Geen gereis en getrek. Onderwerpen: alles wat in aanmerking komt als keuzevak bij wiskunde II. Vooral geschiedenis van de wiskunde van de laatste 100 jaar.

En geen stoten onder de riem meer, graag.

Verder een goede reis, heren. Ik stap uit, ja. Maar misschien kom ik U nog achterna.

Ik moet aan 't werk. Als een haas.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

didaktiekcommissie

Hier en daar in den lande leiden regionale werkgroepen voor de didactiek van de wiskunde een min of meer kwijnend bestaan. Aanvankelijk leek het idee om enkele malen per jaar als wiskundeleraren regionaal bij elkaar te komen om over de didactiek van de wiskunde te praten, goed aan te slaan. Helaas viel vanaf het begin de belangstelling wat tegen. Niettemin blijft het bestuur en de didaktiekcommissie heilig geloven in deze vorm van samen met de wiskunde bezig zijn. Temeer daar de A-, B- en C-cursussen een onverminderde belangstelling genieten.

Misschien is het gemakkelijker om een paar dagen, los van de dagelijkse besommeringen, met de didactiek van de wiskunde bezig te zijn, dan op enkele avonden, waarop het soms net beroerd uitkomt. Misschien is het een soort drempelvrees, die velen er van weerhoudt aan deze werkgroepen mee te doen. Misschien een onbekendheid met wat daar zoal gedaan wordt. Toch dachten wij dat juist in die regionale bijeenkomsten de vereniging het best kan functioneren.

Om de leden wat meer informatie over het doen en laten van de regionale werkgroepen te verschaffen, lijkt het ons zinvol om van tijd tot tijd in Euclides één van de nog bestaande werkgroepen aan het woord te laten. Vandaag willen we beginnen met wat algemene suggesties voor de werkwijze en activiteiten van de regionale werkgroepen.

Nog een opmerking vooraf: tot nu toe hebben we alleen het oog gehad voor werkgroepen die zich met de didactiek van de wiskunde bezig hielden. Blijkens een schrijven van één onzer leden, kan er ook belangstelling bestaan voor regionale werkgroepen, die zich wat meer met de inhoudelijke aspecten van de wiskunde bezig houden. Gedacht wordt b.v. aan vectormeetkunde of andere onderwerpen van het keuzeprogramma. Mocht dat zo zijn, dan graag reacties. *Suggesties voor activiteiten van regionale werkgroepen.*

1 De bedoelingen van deelnemers aan de werkgroepen kunnen verschillend zijn:

- 1.1 Het verkrijgen van *informatie* over de wijze waarop bepaalde technische zaken op andere scholen geregeld zijn, zoals b.v.
 - a omvang en inhoud van schoolonderzoek;
 - b determinatie beslissingen bij overgang van brugklas naar tweede klas;

- c het opstellen, bespreken, afnemen en normeren van gemeenschappelijke proefwerken;
- d de wijze waarop sektievergaderingen in het rooster zijn ingebouwd en de onderwerpen die daarbij ter sprake komen;
- e de voor wiskunde beschikbare tijd in de verschillende klassen;
- f de manier waarop beslissingen genomen worden over het al dan niet invoeren van een nieuwe leergang of/en het aanvullen ervan door middel van stencils e.d.

1.2 *Leren* op het gebied van didactiek van de wiskunde ten behoeve van kwaliteitsverbetering van eigen onderwijs.

Onderwerpen kunnen b.v. zijn:

- a het kiezen van leerstof voor de verschillende schooltypen en jaarklassen;
- b het ordenen van eenmaal gekozen leerstof zodanig, dat het zo goed mogelijk geschikt is voor de leerlingen;
- c het analyseren van leergangen (of gedeelten daaruit) op basis van a en b;
- d het voorbereiden van een les op basis van b;
- e het evalueren van een gegeven les;
- f niveauverschillen binnen een klas;
- g niveauverschillen binnen een proefwerk;
- h het beoordelen van antwoorden van leerlingen op gestelde vragen in de klas;
- i het beoordelen van antwoorden van leerlingen op een proef- of ander schriftelijk werk;
- j analyse van eigen doelstellingen;
- k analyse van doelstellingen van anderen, zoals b.v. de auteurs van de gebruikte leergang of van collega's aan dezelfde school;
- l bestuderen van leertheorie(ën) en deze toepassen in het eigen onderwijs;
- m bestuderen van theorie(ën) over didactische werkvormen en deze toepassen in het eigen onderwijs;
- n bestuderen van theorie(ën) over evalueren en toetsen en beoordelen en deze toepassen in eigen onderwijs;
- o het verschil tussen 'teacher centered' en 'pupil centered' onderwijs;
- p motivatieproblemen: eigen ervaringen confronteren met die van anderen en met wat daarover geschreven is;
- q het bereiken van korte-termijn-doelen(leerdoelen) en het nastreven van lange-termijn-doelen en de wijze waarop dit in het eigen onderwijs tot uiting komt;
- r enz.

2 *Werkwijze*

Er zijn verschillende manieren denkbaar waarop men te werk kan gaan:

- a Zonder of met heel weinig voorbereiding een gesprek over een of ander onderwerp aangaan. Dit heeft het voordeel dat men weinig of geen thuisarbeid heeft. Het nadeel is dat het gesprek oppervlakkig dreigt te worden en nogal eens verloopt naar andere onderwerpen. De deelnemers moeten dus wel een grote gespreksdiscipline hebben. In dat geval spreekt ieder dus vanuit ervaring en kennis die hij op dat moment heeft. De onder 1.1 genoemde doeleinden kunnen met dergelijke gesprekken heel goed bereikt worden, omdat

- het daarbij gewoonlijk gaat om zuiver informatieve zaken. Voor onderwerpen als genoemd onder 1.2 is gewoonlijk meer voorbereiding thuis nodig.
- b Eén of enkele leden van de groep bereiden een onderwerp thuis voor en brengen daar in de werkgroep verslag over uit. Het voordeel is dat het huiswerk beperkt blijft tot een enkeling. Men kan dan op toerbeurt werken. Het nadeel is, dat er tijdens de bijeenkomsten nogal wat tijd nodig is om de anderen in te werken, voordat een vruchtbare discussie mogelijk wordt.
 - c Allen werken zich thuis in het afgesproken onderwerp in. Het voordeel is, dat de discussie snel op behoorlijk niveau kan komen. Nadeel kan zijn dat een of meerdere deelnemers door (overigens legitieme) omstandigheden niet aan het huiswerk toe zijn kunnen komen en daardoor de gesprekken kunnen vertragen.
 - d Combinatie van b en c: Allen lezen een stuk en enkelen verdiepen zich er extra in, b.v. door een uitwerking in de eigen onderwijspraktijk en een verslag hiervan in de werkgroep.
 - e Een combinatie van c met het uitnodigen van een vreemdeling, die in het betrokken gebied wat meer thuis is.

Tijdens de werkgroepen hoeven de activiteiten niet beperkt te blijven tot discussies. Er kan ook afgesproken worden gezamenlijk iets te produceren, zoals b.v.

- a een leerlingentekst;
- b een toets;
- c een analyse van een (leerboek)tekst.

Kortom allerlei onderwerpen, die in 1.2 genoemd zijn, hoeven niet noodzakelijk alleen thuis voorbereikt te worden. Men kan thuis het een en ander voorbereiden en op de werkgroep verder uitwerken in gezamenlijk overleg.

Belangrijk lijkt het ons steeds te proberen de bestudeerde theorie in samenhang met de praktijk van het onderwijs te brengen. Vandaar dat we in de hierboven opgesomde onderwerpen zo vaak de toevoeging 'en deze toepassen in het eigen onderwijs' geschreven hebben. Het lijkt ons voor de motivatie van de deelnemers onontbeerlijk hun eigen dagelijks werk zoveel mogelijk in de activiteiten van de werkgroep te betrekken.

3 Voor informatie over het bestaan of het oprichten van een regionale werkgroep kan men terecht bij L. Bozuwa, Abeelstraat 7, Dordrecht, tel. 078-63946.

Auteurs

Het is voor de drukker erg lastig en tijdrovend om vage en met de hand geschreven kopij te behandelen. Als in een dergelijk artikel ook nog moeilijke woorden staan, is het voor een niet-wiskundige praktisch niet te doen om er achter te komen wat er staat. Daarom een dringend verzoek aan auteurs van artikelen getypte kopij in te zenden.

W. Kleijne

Statistiek in het Mavo? Ja, maar

J. P. Aldershof

Bergum

In het programma wordt de omschrijving van dit onderdeel met drie woorden afgedaan: eenvoudige beschrijvende statistiek. Het eerste woord is terecht; van alle onderdelen vinden de leerlingen de statistiek over het algemeen een gemakkelijk deel. Ook onder leraren leeft zeker die mening, want toen in het examen 1974, open vraagstukken 1e tijdvak, geen statistiek-vraagstuk voorkwam, werd tijdens de september bespreking dit examen als moeilijk ervaren. De vraagstukken vond men elk apart genomen niet van uitzonderlijke zwaarte, maar omdat een statistiek-opgave ontbrak was het geheel aan de moeilijke kant ¹⁾.

Statistiek vergemakkelijkt een stel examen-vraagstukken. Er zit altijd wel iets bekends in. Modus, gemiddelde en mediaan zijn telkens terugkerende vragen. Een normaalwerkende leerling kent deze berekening in een handomdraai. Goede leerlingen zoeken in een vraagstuk soms meer dan de samenstellers erin gestopt hebben, b.v. in de zeehondensom van 1973 — 1. Van de vijf vragen moesten de leerlingen drie maal het gemiddelde berekenen. Dat vele onnauwkeurige lezers zeehonden in tienden hadden uitgerekend, werd slechts met min één punt gestraft. De moraal van de som is deze leerlingen ontgaan, ze hebben de opgave niet begrepen. In dat jaar zullen vele leraren hun leerlingen wel de een of andere 25 % afwijking van het een of ander hebben geleerd, want zowel in 1971 als in 1972 werd iets in die geest gevraagd. In 1971 moesten de leerlingen eerst van een aantal absenten een frequentietabel samenstellen, een histogram tekenen en het gemiddelde berekenen. Allemaal bekende termen; ze konden hooguit een rekenfout maken. Onderdeel d: op hoeveel dagen wijkt het verzuim minder dan 25 % van het gemiddelde af? Met deze vraag werd meer een appèl aan het inzicht gedaan. In 1972 moest van proefwerkcijfers gemiddelden berekend en modus bepaald worden. Onderdeel c leek erg veel op 1971-4d: Hoeveel leerlingen behaalden een cijfer dat minder dan 25 % afwijkt van het gemiddelde van de hele klas? Binnen het kader van 'eenvoudige beschrijvende statistiek' hebben de samenstellers van examen-vraagstukken slechts weinig fantasieruimte meer over. Ook examen-vraagstukken dienen het verband van deze wiskunde met de werkelijkheid te laten zien. Voor maatschappijbetrokkenheid leent dit programma-onderdeel zich uitstekend, meer dan welk ander deel. Elke Mavo-leerling moet weten wat hem of haar als 'modale' werknemer

te wachten staat. Of dan persé elk onderdeel uit het programma in het examen-deel open vragen vertegenwoordigd moet zijn, betwijfel ik. Zolang vraagstukken inzicht-toetsend zijn, accoord; maar als het meer op een puzzeltje gaat lijken, nee.

Tijdens de mei-besprekingen, vlak na het schriftelijk examen 1975, bleek duidelijk dat vele leraren weinig waardering konden opbrengen voor opgave 4, zo je deze som tenminste als statistiek beoordelen moest. Onderdeel a, het berekenen van modus en gemiddelde van zeven getallen is te eenvoudig. Terecht is in de verslaggeving opgemerkt dat de modus enkel te bepalen is. Bij b moet de leerling weten dat je met een dobbelsteen minimaal 1 en maximaal 6 moet gooien om de kleinste en de grootste waarde van het gemiddelde te kunnen berekenen. In een spelletjesspelend volk als het onze weet elke middelbare scholier dit. Ook onderdeel b is eenvoudig.

Onderdeel c nog: 'Bij de negende worp gooit hij evenveel ogen als bij de achtste worp; na de tiende worp blijkt dat de modus van de tien uitkomsten even groot is als het gemiddelde. Beredeneer hoeveel ogen hij bij de tiende worp gegooid heeft. 'Een leerling begrijpt niet wat hieraan te beredeneren valt. Hij moet grondig bespreken dat de tiende worp twee moet zijn geweest. Na even proberen vindt hij dat. Hij snapt niet wat hieraan te beredeneren valt. Te meer daar hem zeker het laatste halfjaar meermalen gewezen is op een laatste vraag van een stel sommen: dat is de hamvraag. Dit is natuurlijk geen wet van Meden en Perzen, toch is het m.i. juist dat een stel examensommen een zekere opklimming in moeilijkheidsgraad vertoont. Vele leerlingen verongelukt in deze beredenering. Als puzzel van de week in de plaatselijke krant hadden ze de oplossing zeker gevonden. Als examenopgave was deze som m.i. een misgreep wegens het niveau, de plaats als laatste som en wegens het puzzelkarakter.

Moet statistiek dan wel gehandhaafd blijven in het Mavo?

Statistiek leent zich uitstekend als motivatiebevorderend middel in klas 2, als voor sommige leerlingen de keuze aan het einde van het schooljaar in zicht komt en wiskunde dreigt af te vallen. De werklust, de animo en de sfeer in de klas is op te peppen met voor alle leerlingen zeer interessante sommetjes over verkeerstellingen (kunnen ze zelf verzamelen), loop van de bevolking van eigen dorp of stad, vergelijkend onderzoek rapportcijfers van de klas, e.d. In groepen maar ook individueel worden allerlei gegevens statistisch verwerkt op grote vellen ruitjespapier, die dan later aan de wand worden gehangen. Met deze zelf verzamelde gegevens spreekt de leerstof meer aan. 'Is dit ook wiskunde, meneer?'

Alleen al om deze maatschappijbetrokkenheid moet m.i. statistiek gehandhaafd blijven in het programma. Maar als de examencommissie meent dat één van de open vragen een zo langzamerhand ontaard statistiek vraagstuk moet zijn, dan zijn we m.i. op de verkeerde weg. Het onderdeel is te beperkt om steeds maar weer zinvolle vragen te blijven scheppen. Het meerkeuzedeel kan zeker enkele items statistiek bevatten. Het vak kan dan niet van de tafel geveegd worden. Elke leraar kan in zijn schoolonderzoek een opgave als 1971-4 of 1972-2 opnemen.

Conclusie: Het onderdeel statistiek moet gehandhaafd blijven in het school-

onderzoek en in het meerkeuzedeel van het schriftelijk examen, het moet geschrapt worden voor de open vraagstukken ²⁾).

Nu de leraren goed ingewerkt zijn in het nieuwe programma en overlading schijnt mee te vallen is het zeker de moeite van het overwegen waard het onderdeel statistiek in de nabije toekomst uit te breiden met een stuk waarschijnlijkheidsrekening.

Een maximum bij filevorming

Ir. H. M. MULDER

Breda

Leerlingen vragen ons vaak hoe de moeilijke wiskunde die wij hen dagelijks voorschotelen in de werkelijkheid toepasbaar is. Hier volgt een voorbeeld hoe de wiskunde opereert bij de oplossing van een verkeersvraagstuk.

Een onafgebroken rij auto's trekt door de maastunnel. Een half uur geleden is er een voetbalwedstrijd in het Feijenoordstadion afgelopen. De verkeerspolitie probeert een vlotte doorstroming op gang te houden. Hoe moet dat. Je zou zo zeggen: zorg dat de auto's zo snel mogelijk rijden, dan geschiedt alles het vlotst. Is dat zo?

Er moet toch een zekere afstand tussen de wagens blijven. Houd remafstand, is de leus.

Voor een auto die sneller rijdt, is ook de remweg groter. De politie schrijft een minimale remvertraging van ongeveer 4 m/s^2 voor. De remweg van een auto neemt toe met het kwadraat van de snelheid. De politie hanteert voor de remweg van een auto de formule:

$$s = \frac{v^2}{8} \text{ (bij de minimale remvertraging)}$$

Dit is dan tevens de formule voor de minimale afstand tussen 2 wagens. Door de auto's dus sneller te laten rijden verkrijgt men nog geen optimaal rendement voor het gebruik van de tunnel, immers de auto's moeten dan ook verder uit elkaar blijven.

1) September 1974 nabespreking in Zwolle en Leeuwarden.

2) Euclides 49e jaargang no. 7/8 blz. 252.

Voor de verkeerspolitie is de vraag interessant:

bij welke snelheid passeren er per minuut zoveel mogelijk auto's?

Het is hierbij van geen belang hoe lang de tunnel is. Immers als er in zekere tijd x auto's de tunnel inrijden, gaan er in diezelfde tijd ook evenveel uit.

maximale frekwentie

We willen nu de snelheid berekenen waarbij een maximale frekwentie bereikt wordt.

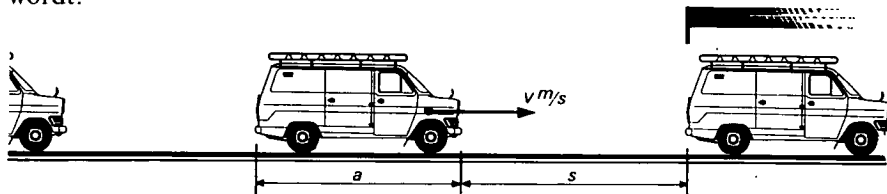


fig. 1. autofile

Stel: alle auto's rijden met dezelfde snelheid v (fig. 1), hun lengte is a en de onderlinge afstand van de auto's in de file is s . Dit laatste is dan ook tevens de beschikbare remweg.

Als een auto in de file net de tunnel is binnengereden dan zal een volgende wagen binnen zijn na een tijd:

$$T = \frac{a+s}{v} \text{ waarbij } s = \frac{v^2}{8} \text{ dus } T = \frac{8a+v^2}{8v}$$

Onder de frekwentie verstaan we het aantal auto's dat per tijdseenheid de tunnel binnenrijdt of passeert.

We geven dit aan met f . Men ziet gemakkelijk in dat f het omgekeerde van T is.

$$\text{zodoende } f = \frac{8v}{8a+v^2}$$

Hiermede is f een funktie van v .

In fig. 2 staat de grafiek van deze funktie.

We stellen daartoe eerst de wagenlengte op 4 m.

$$\text{De funktie wordt dan } f = \frac{8v}{32+v^2}$$

We gaan deze funktie nader onderzoeken.

Voor $v = 0$ geldt $f = 0$. Vrij logisch, immers als de auto's stil staan passeert er ook niets. Maar dat geldt ook als de auto's zeer snel rijden. Dan moeten de afstanden tussen de wagens dermate groot gehouden worden dat er ook vrijwel geen doorstroming optreedt. Als v nadert tot oneindig, nader f tot nul.

We kunnen dus ergens een maximum verwachten.

snelheid v		fre- kwentie f		rem weg s
m/s	km/h	1/s	1/min	m
0	0	0	0	0
2	7,2	0,40	24,0	0,5
4	14,4	0,67	40,2	2,0
5,7	20,5	0,71	42,6	4,0
10	36,0	0,61	36,6	12,5
15	54,0	0,47	28,0	28,1
20	72,0	0,37	22,2	50,0

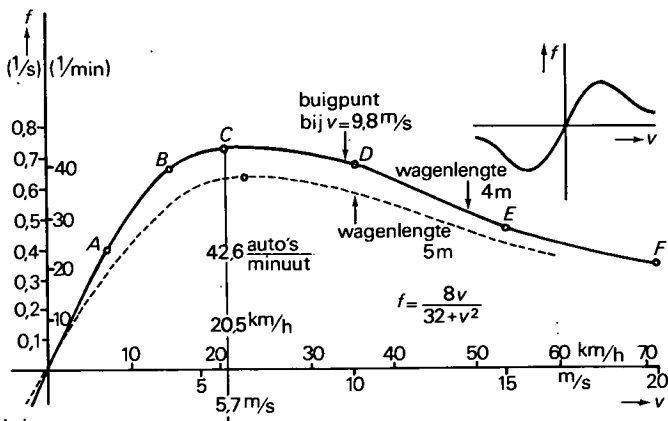


fig. 2. grafiek van de functie

We gaan daartoe de functie differentiëren.

$$f = \frac{8v}{32 + v^2} \quad \frac{df}{dv} = \frac{8(32 + v^2) - 8v(2v)}{(32 + v^2)^2} = \frac{256 - 8v^2}{(32 + v^2)^2}$$

Een maximum treedt op als $256 - 8v^2 = 0$ $v^2 = 32$ $v = 4\sqrt{2}$. Hierbij wordt $f = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Konkreet betekent dit dat de verkeersstroom het vlotst verloopt bij een snelheid 5,7 m/s of ruim 20 km/h. In dat geval passeren er per sec 0,71 of per minuut bijna 43 wagens.

In fig. 2 zijn de situaties A, B, C, D, E en F nader aangegeven.

verdere analyse van de grafiek

De grafiek vertoont puntsymmetrie in de oorsprong. Heeft dat enige werkelijkheidszin? Wel, een negatieve snelheid zou kunnen betekenen: achteruit rijden. Dus ook als de auto's achteruit zouden rijden zou bij diezelfde snelheid de doorstroming maximaal zijn.

De grafiek heeft buigpunten. Waar liggen die? Met behulp van tweede afgeleiden zijn ze te vinden.

$$\frac{d^2f}{dv^2} = 0 \text{ als } -16v(32 + v^2)^2 - 2(256 - 8v^2)(32 + v^2) \cdot 2v = 0$$

Uitgewerkt resulteert dit in: $-16v(96 - v^2) = 0$.

Eerste buigpunt bij $v = 0$; dit is de oorsprong.

Tweede buigpunt bij $v = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} = 9,8$ m/s.

De bijbehorende waarde van f wordt dan $f = \frac{1}{4}\sqrt{6} = 6,1$ m/s.

hoe bij andere autolengte?

In de algemene relatie

$$f = \frac{8v}{8a + v^2}$$

ligt het maximum bij $v = 4\sqrt{\frac{1}{2}a}$ waarbij $f = \sqrt{2/a}$.

In de grafiek is met een stippellijn ingetekend hoe de situatie wordt voor langere wagens (gekozen werd $a = 5$ m).

Het maximum voor de frekwentie ligt daar lager, echter bij hogere snelheid. Dat betekent dus als het bijvoorbeeld om vrachtwagenverkeer gaat, dat de topfrekwentie voor zulk verkeer lager ligt, terwijl daarvoor toch sneller moet worden doorgereden.

de remafstand

De afstand tussen de wagens bij de vlotste doorstroming volgt uit de formule

$$s = \frac{v^2}{8} = \frac{1}{8} \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}a = a$$

We doen hiermee dus de volgende ontdekking: als de verkeersstroom zo vlot mogelijk dient te worden afgewerkt moeten de wagens een onderlinge afstand houden die gelijk is aan de wagenlengte. Een merkwaardige conclusie.

eindconclusie

Zoals boven gebleken is lopen de wensen van de verkeerspolitie en van de weggebruiker niet geheel parallel. De automobilist wil zo hard mogelijk rijden om zo vlug mogelijk thuis te komen. De politie wil zo veel mogelijk auto's per minuut zien passeren om van de verkeerschaos af te komen.

Om beide verlangens te combineren lijkt het wenselijk op het bord bij het begin van de tunnel aan te geven:

„verplichte snelheid 25 km/h; houd wagenlengte afstand”

Onderwerptoetsen Wiskunde

Momenteel is er voor de bovenbouw van het HAVO een serie onderwerptoetsen in ontwikkeling. In september 1975 is er onder alle docenten wiskunde die toen les gaven in het vijfde leerjaar van het HAVO door het CITO een enquête gehouden.

Het doel was het peilen van de mening over en belangstelling voor onderwerptoetsen wiskunde. Veel docenten vulden het enquêteformulier in en van hen toonde 80 % belangstelling voor het eventueel op te zetten project.

De onderwerptoetsen hebben steeds betrekking op een groot deel van de bovenbouw-leerstof, bijvoorbeeld VEKTORMEETKUNDE IN R^3 .

Het doel van de onderwerptoetsen is het meten van door de leerling verworven kennis, inzicht en vaardigheden. Dit vindt plaats op het eindniveau van het betreffende onderwerp. Onderwerptoetsen dienen in de eerste plaats voor evaluatie van de resultaten van het onderwijsleerproces: hoe staat het bij de verschillende leerlingen met het verwerven van nagestreefde doelstellingen? Hierop dienen leerlingen en docenten door middel van de toetsresultaten een (globaal) antwoord te krijgen. Bij tekorten van individuele leerlingen of groepen leerlingen of de hele klas is terugkoppeling uiteraard van het grootste belang.

Bij het samenstellen van de toets wordt ernaar gestreefd zoveel mogelijk de essentiële vragen over de leerstof te stellen. Er wordt een evenwichtige keuze gemaakt uit de 'deel' onderwerpjes en de verschillende vaardigheden die bij dat onderwerp centraal staan. Ook wordt aandacht aan het niveau van vragen besteed.

Voor het ontwikkelen van een goed meetinstrument is de medewerking van bevoegde leraren nodig. Het constructieteam voor de onderwerptoetsen wiskunde bestaat uit 6 leraren.

Zodra de eerste toets over een onderwerp gereed komt is er nog slechts sprake van een proefversie. Voor verbetering van een proefversie zijn twee dingen nodig. Ten eerste dat een aantal docenten z'n mening geeft over de kwaliteit en relevantie van de vragen en de inhoud van de toets. Ten tweede dat een groot aantal leerlingen (die klaar zijn met dat onderwerp) de proeftoetsen maakt. Het oordeel van de leraren én de resultaten van de leerlingen stellen de toetsconstructeurs in staat betere, meer acceptabele versies samen te stellen.

In november 1976 zullen een verbeterde versie van MEETKUNDE IN R^2 en twee eerste versies van RATIONALE FUNCTIES op beperkte schaal worden afgenomen.

Het constructieteam hoopt voor februari 1977 ook een proefversie van KANSBEREKENING en STATISTIEK gereed te hebben. Tot nu toe bestaan de onderwerptoetsen uit 18 tot 24 vierkeuze-vragen. Voor het afnemen van zo'n toets zijn 2 lesuren nodig.

Als van de onderwerptoetsen definitieve versies beschikbaar zijn krijgt U bericht.

Gert Bakker

Cito, Arnhem

Boekbespreking

Wiskunde en Onderwijs

Driemaandelijks tijdschrift van de
Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars

Dit tijdschrift, bezig aan zijn tweede jaargang, is het Vlaamse pendant van Euclides. Inhoudelijk zijn er wel wat verschillen aan te geven.

Euclides oriënteert zich steeds meer op didactisch gebied. Wiskunde en Onderwijs doet zijn naam eer aan *wiskunde* en *onderwijs*.

Het geeft, naast wetenschappelijk wiskundige achtergronden van de schoolwiskunde, analyses van schoolwiskundige kwesties. Opvallend is de aandacht, die in deze twee jaar al geschonken is aan de meetkunde.

En niet alleen aandacht aan, maar ook een pleidooi voor meer meetkunde op school. Ik denk hierbij bijv. aan het artikel van L. Vanhecke: 'Actuele problemen in verband met het meetkunde-onderwijs in de eindklas van het M.O.' Een pleidooi om nu eindelijk eens ernst te maken met het Erlanger Programm van Felix Klein, vormt het artikel van R. Pelsmaekers: 'Meetkunde-onderwijs in de eindklas van het M.O.'

Inleiding tot een moderne tak van meetkunde nl. over differentieerbare variëteiten geeft het artikel van D. Janssens.

Problemen betreffende de analyse komen uiteraard ook aan bod: limieten, continuïteit, convergentie, enz.

Ook zuiver wiskundig didactische onderwerpen, zoals evaluatieproblemen e.d. komen regelmatig aan de orde.

Evenals in Euclides is er in Wiskunde en Onderwijs een rubriek Boekbespreking.

Kortom een tijdschrift als het onze met toch kenmerkende verschillen voortvloeiend uit het feit, dat het betrekking heeft op de Belgische situatie. Het lijkt mij erg belangrijk dat ook Nederlandse wiskundeleraars kennis nemen van wat er leeft onder onze burens. Alleen al daarom is een abonnement op dit tijdschrift aan te bevelen. De kwaliteit van de artikelen draagt bij aan een goede besteding van het abonnementsgeld.

Men kan zich bij dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148 te Doorwerth opgeven als abonnee op Wiskunde en Onderwijs.

(Abonnementsgeld f 20,- per jaar, vóór 1 januari 1977 over te maken op giro 933434 tnv de penningmeester van Euclides te Doorwerth).

W. Kleijne

P. Lauwen, *Moderne wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs*, Nijgh en van Ditmar, tweede druk, f 33,90. ISBN 9023601556. Deel 3.

Een boek, dat ondanks zijn prijs (van welke prijs schrikt men tegenwoordig niet?) het geld zeker waard is. De uitvoering in twee kolommen per bladzijde maakt het lezen gemakkelijk als bij smalle krantenkolommen. Een verticale streep ertussen zou de leesbaarheid nog meer ten goede komen. De wiskundetaal is zorgvuldig. Er is onderscheid tussen *hetzelfde* en *eenzelfde*, wat ik noem als voorbeeld van hoe in dit boek ook op de kleinigheden is gelet. (40). De figuren zijn netjes en duidelijk en het geheel maakt een welverzorgde indruk. Geen wonder, dat na een goed jaar een herdruk nodig was.

De aan het begin geplaatste lijst van wiskundeteken roept mijn eerste reacties op. Is het wel gewenst een aparte letteraanduiding $\Im$ te besteden aan de verzameling der imaginaire getallen? En dito I voor de irrationale getallen? Ik heb ze zelden een rol zien spelen, zonder gezelschap van andere

getallen. De auteur heeft geluk, dat beeldverzameling en bereik beide met B beginnen. Ik vermoed, dat hij evenals ikzelf het woord 'bereik' een afschuwelijk germanisme vindt. Waarom laat hij het dan niet weg? Matrix van gelijke verhoudingen en evenredigheidsmatrix dienen niet gescheiden te worden. Als Wijdenes nog leefde, zou hij fel met een 'DOE HET EENVOUDIG' te keer gaan tegen het bovenstrepjen van lijnstuk AB. Vooral het quotiënt van twee lijnstukken (blz 8) is om van te rillen en te beven. Didactisch gezien zou ik het product van twee rotaties (of andere transformaties) liever schrijven als $R_2 \circ R_1$ dan andersom. En voelt de auteur niets voor het Franse hoekteken? (Niet vóór, maar boven de hoek geplaatst) Kleine slipjes komen natuurlijk voor. Leuk is, dat ze verderop in het boek vaak verbeterd worden. Zo staan de voorwaarden bij de vierkantsvergelijking op (37) beter dan op (10). De eerste figuur is incompleet. De titel òp (5) wekt de indruk, dat alle functies een graad zouden hebben. 'Wat is' (7) vraagt om een definitie als antwoord. De juiste vraag is 'Hoe groot'.

Deze polynoom is geen goed Nederlands (25). De eis, waaraan een logaritmengrondtal moet voldoen ontbreekt (14). De leerlingen zullen niet de vergelijking, maar de vergelijkingen van twee assen moeten noteren (9). Het enkelvoud zal geen examenstof zijn.

Als de auteur machsexponent en wortlexponent beperkt tot de verzameling $\mathbb{N}$, (blz. 13) dan lees ik daar met genoegen uit af, dat hij daar 1, 2, 3, 4, . . . mee bedoelt. Ik ken de lagere delen evenwel niet.

Mijn weinige echte bezwaren zijn grotendeels van didactische aard. Waarom eerst oneigenlijke limieten behandeld en daarna de gewone? (23) De auteur verhaspelt differentiatie en bepaling van de afgeleide functie (71, 72, 73). De afgeleide van $\sin x$ is $\cos x$, maar de differentiaal is $\cos x \cdot dx$. Het is didactisch zo belangrijk, omdat – naar mijn ervaring – de hele differentiaalrekening veel gladder behandeld kan worden uit foutenleer. Om de bedoeling te verduidelijken:

$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x \approx \cos x \cdot \Delta x$. Voor de kettingregel komt dan $\Delta \sin 3x \approx \cos 3x \cdot \Delta 3x = \cos 3x \cdot 3 \cdot \Delta x$, enz. Het limietnemen is dan het slot van de zaak.

Op (87) staat een onjuiste definitie van integreren. Ook didactisch is het beter te starten met de som van b.v. 10 kleine termen.

Is het vervangen van het deelteken door de breukstreep een verklaring? (12) M.i. blijkt hieruit hoe overbodig het deelteken is!

Tot slot signaleer ik een fout, die men bijkans overal aantreft, n.l. de verwarring van breuk, quotiënt en verhouding. Breuken zijn elementen van $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Een quotiënt is de uitkomst van een deling en een verhouding is een oneindige verzameling getallenparen. Een evenredigheid is een eindige (vaak uit 2 elementen bestaande) deelverzameling daarvan. Met goniometrische verhoudingen is niet te werken, men kan twee verhoudingen niet optellen. Zie (26, (27), (30) en (65), (47) en (58).

Auteur, dit is een boek, waarvan het recenseren mij een genoegen was.

J. K. Timmer

Dr. A. v. Dop e.a. *Vectormeetkunde* 2 2de druk f 27,—. Uitg. Wolters-Noordhoff.

De druk verschilt niet van de vorige. Op blz. 135 stelling 20 staat nog steeds dat de oorsprong kern kan zijn, i.p.v. het enige element van de kern. De invoering van matrices onafhankelijk van afbeeldingen is naar mijn ervaring voor veel leerlingen een te abstracte en daardoor weinig motiverende aanpak.

L. v. d. Zijden

K. de Bruin e.a. *Getal en Ruimte*, Tjeenk Willink-Noorduyn.

dl 3M IV-1 f 10,50 wiskunde voor de derde klas Mavo IV 3de geheel herziene druk.

dl 3M IV-2 f 11,25 idem.

Beide delen geheel herzien, hebben aan bruikbaarheid gewonnen. Ruime hoeveelheid oefenstof maken differentiatie mogelijk.

dl 4 V 2 wiskunde II voor de vierde klas vwo f13,— derde druk te gebruiken naast tweede druk.

Enkele zeer welkome wijzigingen in de herhalingsstof zoals: herhalingsvraagstukken per hoofdstuk en een prettig overzicht voor de leerling om zelfstandig te repeteren maken dit bijzonder goede deel nog meer waardevol.

dl 4/5 H2 meetkunde en statistiek voor de vierde en vijfde klas havo f 18,— derde druk.

Op enkele wijzigingen na gelijk aan de tweede druk.

dl 4V Wiskunde I voor de vierde klas vwo f 15,75. Dit deel vervangt de oude delen 4V1 en 4/5V0

Als gebruiker van de serie Getal en Ruimte bevat dit deel mij het minst. Ik noem drie redenen. Invoering van het begrip afgeleide functie zonder voortdurend verwijzen naar de meetkundige betekenis is met name voor A leerlingen een te zware opgave. De oefenstof bij dit hoofdstuk is m.i. ontoereikend. Invoering van goniometrische functies onafhankelijk van hoeken heeft mijn voorkeur. Prettig is, dat enige aandacht is geschonken aan economische onderwerpen.

Deel 5/6 VI. Analyse en statistiek voor de vijfde en zesde klas vwo. f 18,50. 3de druk.

In vergelijking met de 2de druk de volgende wijzigingen: Theorie over functies van twee variabelen is thans in dit deel opgenomen. De statistiektekst is aangepast aan de richtlijnen van de inspectie. Door nummering van vraagstukken en pagina's overeenkomstig te houden met de tweede druk is deze druk naast de tweede uitstekend bruikbaar.

L. v. Zijden

B. Anger und H. Bauer, *Mehrdimensionale Integration* (Sammlung Götschen, Band 2121), W. de Gruyter (Berlin), 1976, 188 p., DM 16.80.

Dit boekje is bedoeld als inleiding in de theorie van de integraal van Lebesgue in de ruimte $\mathbb{R}^n$. De opzet is zodanig dat een groot gedeelte van de theorie even goed in een willekeurige metrische ruimte (in plaats van in $\mathbb{R}^n$) behandeld kan worden, hetgeen dan ook geschiedt. Uitgangspunt is de integraal van een continue functie, genomen over een begrensde interval. Door herhaalde integratie wordt onmiddellijk de integraal van een continue functie (van n veranderlijken) over een n -dimensionaal blok ingevoerd. Op dit moment nu wordt het gezichtspunt verruimd; in plaats van continue functies op een blok in $\mathbb{R}^n$ worden continue functies op een compacte metrische ruimte beschouwd: de rol van de 'gewone' integraal wordt overgenomen door een 'positieve lineaire functionaal', die dezelfde 'begineigenschappen' heeft als de gewone integraal. Door zekere limietprocessen (via uitwendige en inwendige integraal) wordt dan de integraaldefinitie tot een veel grotere klasse van functies uitgebreid. Door specialisering ontstaat hieruit de maat (d.w.z. de 'inhoud') van zekere deelverzamelingen van de metrische ruimte. Door nogmaals een limietproces toe te passen kan men de compactheidsbeperking voor de metrische ruimte laten vervallen. In het geval van $\mathbb{R}^n$ krijgt men aldus de integraal van Lebesgue. Bij deze methode van behandeling wordt het maatbegrip (oppervlakte in $\mathbb{R}^2$, inhoud in $\mathbb{R}^3$) afgeleid uit het integraalbegrip; bij de oorspronkelijke opzet van Lebesgue is de volgorde juist andersom. De schrijvers sluiten zich, wat dit betreft, aan bij de behandelingswijze van de integratietheorie in lokaalcompacte ruimten in het bekende werk van Bourbaki.

Het laatste gedeelte gaat uitsluitend over de integraal van Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ (voorbeelden; verandering van integratievolgorde; coördinatentransformaties, waarbij de functionaaldeterminant optreedt).

Het boekje eindigt met een nabeschuiving over de samenhang tussen de diverse manieren waarop men de integratietheorie kan behandelen. Een literatuurlijstje, lijstjes voor de gebruikte vaktermen en symbolen, en niet te vergeten een jaartallenlijstje, dragen bij tot de bruikbaarheid.

Het boekje is geschreven in een nogal compacte stijl. Aanbevolen voor gebruikers die al enige ervaring met de wiskundige analyse hebben, al behoeft die ervaring slechts tamelijk bescheiden te zijn.

A. C. Zaanen

H. Hasse, *Mathematische Abhandlungen*. Herausgegeben von H. W. Leopoldt und P. Roquette. Band I 535 p., Band II 525 p., Band III 532 p., Berlin-New York, Walter de Gruyter & Co. 1975, geb. in linnen, prijs DM 474,—.

Deze drie banden bevatten een keuze uit het werk van Helmut Hasse. Hasse is geboren in 1898. Zijn werk is zeer omvangrijk en ligt voornamelijk op het gebied van de getallentheorie, van de algebra en van bepaalde delen van de algebraïsche meetkunde. Hij is een getallentheoreticus in hart en nieren; ook zijn werk op het gebied van de algebra en algebraïsche meetkunde heeft steeds een duidelijk arithmetisch karakter.

Het totale mathematische werk van Hasse bestond in 1974 uit 165 artikelen en verschillende grotere en kleinere boeken. De redacteurs Leopoldt en Roquette, beiden leerlingen van Hasse, hebben een keuze gemaakt van 77 artikelen. Deze verhandelingen zijn gegroepeerd rond verschillende thema's die we hierna nader zullen vermelden.

Hasse is een leerling van K. Hensel (1861–1941), de ontdekker van de p -adische getallen. Eén van de (vele) verdiensten van Hasse is het inzicht dat hij ons gegeven heeft in de rol van de p -adische getallen naast de reële getallen en de complexe getallen. Beroemd is het zg. Hasse-principe waarvan we hier als voorbeeld noemen de stelling van Hasse-Minkowski: een kwadratische vorm met rationale coëfficiënten representeert de nul in het lichaam van de rationale getallen dan en slechts dan als ze de nul representeert in het lichaam van de reële getallen en in het lichaam van de p -adische getallen voor ieder priemgetal p . Dit principe komt reeds voor in de eerste verhandeling van Hasse in 1923 over kwadratische vormen en Band I opent met dit artikel. Band I handelt over de volgende thema's: kwadratische vormen (5 artikelen), norm-resten en lokale klassenlichamentheorie (10 artikelen), wederkerigheidswetten (9 artikelen), klassenlichamentheorie (4 stuks) en algebra's (4 artikelen).

Zeer bekend is ook het werk van Hasse over functielichamen van één variabele met eindig constantenlichaam (Kongruenzfunktionenkörper), d.w.z. in meetkundige taal: onderzoeken van algebraïsche krommen gedefinieerd over een eindig lichaam. In het bijzonder noemen we hier zijn bewijs, in 1933/34, van het vermoeden van Riemann voor de zeta-functie behorende bij zo'n elliptische kromme. Deze verhandelingen treffen we aan in Band II. Dit deel bevat 16 artikelen over 'Kongruenzfunktionenkörper', 5 artikelen over complexe vermenigvuldiging bij elliptische krommen en 7 artikelen over arithmetische functielichamen.

In Band III vinden we 3 artikelen over sommen van Gauss, 7 over inbeddingsproblemen, 3 over berekeningen van klassengetallen en eenheden en nog 4 andere artikelen.

Het werk van Hasse is zeer diepgaand. Zijn artikelen zijn verre van gemakkelijk, maar ze zijn wel steeds zeer nauwkeurig en met grote zorg voor details geschreven. Zijn ideeën hebben grote invloed gehad in de ontwikkeling van de gebieden waarin hij werkzaam was. De uitgave van deze werken is dan ook een waardevolle en verheugende gebeurtenis.

De artikelen zijn zonder verandering fotomechanisch gereproduceerd. De uitgever, Walter de Gruyter, heeft de banden royaal, fraai en met zorg uitgevoerd. In deel III treffen we een volledige bibliografie tot 1974, verder zijn opgenomen twee foto's en de reproductie van enige bladzijden van een manuscript in handschrift.

Het werk is uiteraard bestemd voor specialisten. Het mag niet ontbreken op een mathematisch instituut, maar voor de bibliotheek van een school is het te geavanceerd. De individuele liefhebber zal wel even schrikken van de prijs; voor een getallentheoreticus zijn deze delen echter niet alleen kostbaar, doch ook een waardevol en waardevast bezit.

J. P. Murte

G. Preusz, *Grundbegriffe der Kategorientheorie* (B.I. Hochschultaschenbücher, 739), B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 105 bl.

De hoofdstukken van dit boek hebben de volgende titels:

K1, Kategorien; K2, Funktoren; K3, Limites und Colimites; K4, Darstellbare Funktoren und adjungierte Situationen.

Het is de bedoeling om een breed wiskundig publiek vertrouwd te maken met de taal van de categorieën. De eerste twee hoofdstukken beantwoorden aan dit doel. Het gebrek aan concrete voorbeelden in de hoofdstukken 3 en (vooral) 4 lijkt echter een bezwaar. De lezer zij gewaarschuwd dat hier en daar enigszins ongewone begrippen (bijv.: extreem homomorfisme) worden ingevoerd.

J. Brinkhuis

G. Gottschalk, R. E. Kaiser, *Einführung in die Varianzanalyse und Ringversuche*. Hochschultaschenbücher Band 775, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1976, 164 bldz.

Bij het schrijven van dit boekje hebben de auteurs zich ten doel gesteld de lezer te leren enige veel gebruikte statistische methoden voor het bewerken van waarnemingsuitkomsten zelf in de praktijk toe te passen. Zij hebben daarbij afgezien van 'alle Schnörkel abstrakter mathematischer Beweisführung und Ableitungen'. De behandelde methoden worden als in een kookboek in de vorm van recepten gepresenteerd en aan de hand van voorbeelden uit de praktijk toegelicht. Of de lezer op deze wijze ook enig inzicht zal krijgen in de werkelijke betekenis van de beschreven procedures en de veronderstellingen waarop zij zijn gebaseerd, moet ernstig worden betwijfeld.

J. Fabius

Mary Sime, *Zoals een kind het ziet*, Wegwijzer in de theorieën van Piaget, Muusses Purmerend 1976, 134 blz., f 18.50. Met een voorwoord en een nawoord van Dr. P. M. van Hiele.

Piaget heeft vele proeven gedaan om na te gaan hoe het natuurwetenschappelijk en het wiskundig denken zich ontwikkelt bij kinderen. Door de schrijfster zijn deze proeven nagedaan. Zij geeft in dit boek een verslag van haar bevindingen.

Men wordt daardoor op een gemakkelijke en toch erg duidelijke manier ingeleid in de grondideeën van Piaget. Men ziet gedemonstreerd hoe de probleemaanpak en de verwerking sterk afhankelijk is van de leeftijd van het kind. Niet duidelijk wordt hoe groot de bijdrage van de school is bij het bereiken van de derde fase, waarin de wetenschappelijke aanpak begint door te dringen.

In series experimenten wordt steeds weer de ontwikkeling gedemonstreerd. Enkele voorbeelden: experimenten betreffende even veel, oppervlakte, niveau van vloeistof in een ondoorzichtige fles, sorteren (klassificatie naar verschillende kenmerken), de baan van een biljartbal, schaduw, het hefboomprincipe. Elke serie wordt verduidelijkt door vele foto's, zodat men de inrichting van de proeven goed kan nagaan.

Men heeft m.i. het meeste profijt van het boek als men het zonder veel kritiek leest en de betekenis van de experimenten tot zich laat doordringen. Men kan er dan ten volle van genieten.

Stelt men zich kritisch in, dan wordt men nogal eens gestoord door onduidelijkheden in de formulering en niet voldoende gefundeerde conclusies. Dit laatste mag men de schrijfster niet al te kwalijk nemen, want dit treft men bij Piaget zelf ook aan. In het nawoord zag ik dat mijn kritiek tot zekere hoogte door Van Hiele gedeeld wordt. De titels van de hoofdstukken doen soms wat 'dik' aan. Als men de titel overslaat, kan men meer van het hoofdstuk genieten dan als men een soort theoretische wijsheid verwacht. Bepaald storend vond ik de titel van het zevende hoofdstuk: de ontwikkeling van het inzicht in het omkeren van uitspraken bij jonge kinderen. Er is in dat hoofdstuk geen sprake van een uitspraak en zijn omkering, hoewel de schrijfster dit wel vermoed heeft.

In alle hoofdstukken onderscheidt de schrijfster drie stadia. Op blz. 77 werd ik gewaar, dat dit de 'drie stadia van Piaget' waren. Al lezende wordt het onderscheid van de stadia natuurlijk wel duidelijk, maar tevergeefs zocht ik naar een uiteenzetting in het begin van het boek. Tenslotte ben ik erachter gekomen. In de inleiding kwamen deze stadia wel voor, maar ze waren genummerd 3, 4 en 5. Een potentiële lezer heeft misschien iets aan deze opmerking. Jammer heb ik gevonden, dat de leeftijden van de kinderen nergens vermeld zijn. Uit de foto's kan men deze wel zo ongeveer opmaken, maar een precieze vermelding zou het de lezer makkelijker maken.

En toch, ondanks de bezwaren die ik bij de lectuur heb ondervonden, raad ik ieder aan dit boek wel te lezen. Maar met zijn eigen hersens en zijn eigen conclusievermogen. Hij zal er dan ten volle van genieten.

P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

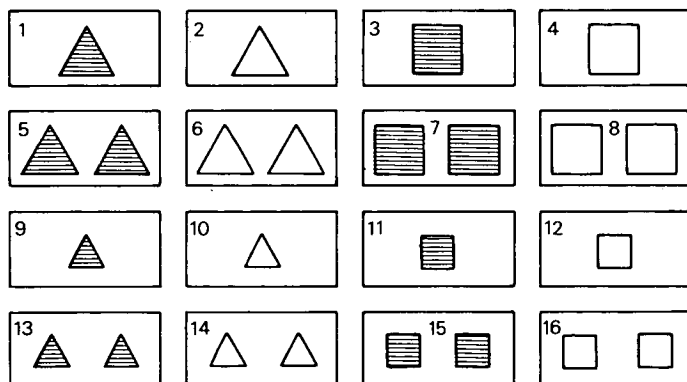
Opgaven

356. Neem een getal van tien cijfers waarin de cijfers 0, 1, 2, ..., 9 alle voorkomen. Het mag met 0 beginnen. Schrijf daarna het getal achterste voren op. Trek de twee zo verkregen getallen van elkaar af; het kleinste van het grootste. Kies het oorspronkelijke getal zo, dat dit verschil deelbaar is door p , waarin p een priemgetal kleiner dan 100 is.

De heer Kootstra beweert, dat dit voor elke p mogelijk is. Ik geloof dit graag op zijn gezag, want hij vergist zich nooit.

Maar hij beweert nog iets en dat wilde ik graag de lezers van Euclides voorleggen. Voor $p = 101$ vindt men geen oplossing. Toon dit aan.

357. In de onderstaande figuur ziet men zestien figuurtjes die elk zijn driehoekig, of vierkant; enkel of dubbel; groot of klein; gestreept of effen.



A verdeelt in gedachten de zestien figuurtjes in twee verzamelingen van acht gelijksoortige door bijv. onder V te verstaan de verzameling van alle grote figuurtjes en onder W de verzameling van alle kleine. Hij toont aan B telkens één van de figuurtjes en deelt mee of deze tot V of tot W behoort. Hij toont bijv. resp. 1, 6, 11 en 16 en zegt dat deze behoren tot resp. V, V, W, W . Heeft B nu al voldoende informatie om te weten, dat met V de verzameling van de grote figuurtjes bedoeld is? A wil de figuurtjes die hij toont, zo kiezen dat B zo snel mogelijk voldoende informatie heeft om te beslissen welke verzameling V is. Hoeveel figuurtjes moet hij minstens tonen?

Hoeveel figuurtjes kan hij maximaal tonen, als hij wil dat B zo lang mogelijk in het onzekere blijft? Beantwoord daarna dezelfde twee vragen, als het aantal figuurtjes 2^n is en het aantal tegengestelde kwaliteiten n .

Oplossingen

354. Iemand zet een muntstuk op de bovenste rij van een schaakbord. Om beurten mag men de munt een veld in horizontale richting verplaatsen of een veld naar beneden. De munt mag niet gezet worden op een veld waar hij al eens geweest is. Wie de munt op de onderste rij plaatst, heeft gewonnen. Waar zal men de munt de eerste keer plaatsen?

Wie de munt van de derde naar de tweede rij verplaatst, verliest. Onderstel A zet de munt van de vierde naar de derde rij, bijv. van d4 naar d3. B speelt dan d3-c3, A c3-b3, B b3-a3, A a3-a2 en verliest. Onderstel A speelt c4-c3. Dat helpt niet, want dan speelt B c3-d3, A d3-e3 enz. en A verliest

ook. Speelt A a_4 - a_3 , dan B a_3 - b_3 enz. met hetzelfde fatale resultaat voor A . Wie dus de munt van de vierde rij naar de derde verplaatst, verliest.

Maar evenzo verliest diegene die de munt van de vijfde naar de vierde rij verplaatst. Zo voortredenerend zien we, dat degene die de munt van de (fictieve) negende rij naar de achtste verplaatst, d.w.z. degene die begint, in elk geval verliest.

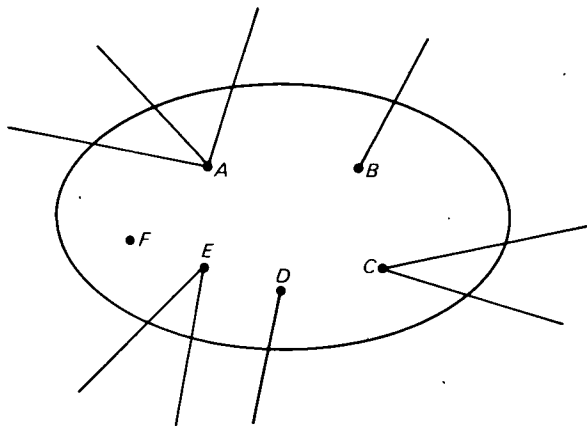
355. Men kleurt een kaart zo, dat twee landen die een grens gemeen hebben, verschillend gekleurd worden. Men kan daarbij met twee kleuren volstaan. Noodzakelijk is daartoe dat in elk inwendig hoekpunt een even aantal landen samenkomen. Is dit ook voldoende?

Onderstel in elk punt komen een even aantal landen samen. We beschrijven een gesloten weg die door geen hoekpunt gaat en geen grenslijn raakt. We bewijzen dat deze een even aantal grenzen snijdt.

In onderstaande figuur is de gesloten weg getekend. Daarbinnen liggen bijv. de punten A , B , C , D , E , F en geen andere. De weg zal een aantal grenzen snijden, die van de punten A - F lopen naar punten buiten de weg. Onderstel dit aantal is oneven. In de figuur zijn het er 9. Dan zullen van A naar B - F een oneven aantal grenzen lopen, van B en D naar de overige punten binnen de weg eveneens, van C , E en F naar de overige punten binnen de weg een even aantal. In totaal is dat een oneven aantal. Contradictie.

Men kan tegenwerpen, dat ook de grens van bijv. A naar B nog door de weg gesneden kan worden. Omdat deze grens dan in elk geval een even aantal keren gesneden zal worden, wordt het resultaat van de redenering niet aangetast.

Kleur nu een land blauw, alle daaraan grenzende weer blauw, enz. Een land zal dan nimmer rood en blauw gekleurd worden, omdat dan een gesloten weg zou bestaan die een oneven aantal grenzen snijdt.



sigma

Het complete leerpakket voor wiskunde voor mavo, en onderbouw havo/vwo door K.H. Cohen, dr. A. van Dop, dr. ir. B. Groeneveld, drs. L.W. van der Horst, F.D.A. van der Houven, K.J.L. Rogier, dr. P.G.J. Vredenduin, N.B. Walters, drs. A.J. Westermann.

Sigma
is gebaseerd op jaren ervaring met wiskundeleergangen voor mavo, havo en vwo.

Sigma
biedt de leerstof aan in overzichtelijke hoofdstukken afgesloten door een groot aantal in moeilijkheid opklimmende opgaven.

Sigma
heeft docentenhandleidingen.
Deze bevatten suggesties voor de les, toetsenmateriaal en volledige uitwerkingen van de vraagstukken.

Sigma
splitst na het brugklasdeel in afzonderlijke delen voor havo/mavo en voor havo/vwo en het jaar daarop in mavo, havo en vwo. De mavo-delen bevatten de gehele voor de examens vereiste leerstof. De havo- en vwo-delen zullen aansluiten op de bestaande series 'Wiskunde bovenbouw havo' en 'Wiskunde bovenbouw vwo' van dr. A. van Dop e.a. Ook de vormgeving sluit hierbij aan.

Voor nadere informatie kunt u zich wenden tot
Wolters-Noordhoff, postbus 58 in Groningen,
telefoon 050 - 162314.

WNI Wolters-Noordhoff

4074-244/13

INHOUD

Drs. W. F. J. Edelaar: Verslag van de ingangstest in de wiskunde aan het begin van het cursusjaar 1975—1976 gehouden aan de TH-Delft, TH-Eindhoven en TH-Twente	121
Een huiswerkopgave	133
Marja Meeder: Keuze-onderwerp op het HAVO	140
Mededelingen	141
J. Roelofsen: Naar aanleiding van de leerzame reis van de heer Van Dalen	142
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	144
Mededeling	146
J. P. Aldershof: Statistiek in het Mavo? Ja, maar	147
Ir. H. M. Mulder: Een maximum bij filevorming	149
Onderwerptoetsen wiskunde	153
Boekbespreking	154
Recreatie	159