

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

52e jaargang

1976/1977

no 3

november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 30,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 85,—.

G. Krooshof – Bert Zwaneveld

G. Krooshof heeft het voorzitterschap van de redactie neergelegd. De aanduiding 'G. Krooshof' staat ietwat wonderlijk. Waarom geen voornaam? De reden is simpel: wie hem bij zijn 'voornaam' noemde, zei 'Kroos' tegen hem. En je kunt moeilijk zeggen, dat Kroos Krooshof het redacteurschap van Euclides beëindigd heeft.

Toen Johan Wansink in 1968 te kennen gaf als voorzitter van de redactie te willen aftreden, was het niet gemakkelijk een opvolger te vinden. Kroos was zo bereidwillig ad interim het voorzitterschap op zich te nemen. Hij was van mening, dat eigenlijk een jongere deze post moest bekleden, maar wilde in afwachting van de komst van deze jongere het voorzitterschap wel waarnemen. Van deze bereidwilligheid hebben we een dankbaar en zelfs een onbescheiden gebruik gemaakt. Eerst na acht jaar is deze jongere gevonden. Ik moet toegeven, dat we niet altijd even hard gezocht hebben. Maar dat kwam doordat we met Kroos uitermate tevreden waren.

Hij heeft op de hem eigen bescheiden en plezierige manier de redactie geleid. Het karakter van Euclides is onder zijn leiding veranderd. Vroeger pretendeerde Euclides ook mee te moeten werken aan de bevrediging van wetenschappelijke behoeften van de lezers. Geregeld verschenen niet te moeilijke bijdragen die met het onderwijs weinig of niets te maken hadden, maar voor de leraren wel interessant geacht werden. Vanaf de intrede van Kroos is dit niet meer geschied. Uiteraard kwam dit niet alleen door het inzicht van de voorzitter, maar werd deze verandering van inzicht ook bevorderd door de intrede van het nieuwe programma. Toen de mavo-leraren opgenomen werden in de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren was het zaak het tijdschrift een ruimere didactische basis te geven. Kroos had hier een open oog voor en heeft getracht dit zoveel mogelijk te bewerkstelligen.

Kroos, we danken je voor alles wat je voor Euclides gedaan hebt. En we roepen een hartelijk welkom toe aan je opvolger, Bert Zwaneveld, met wie we even plezierig hopen samen te werken, als we dat met jou gedaan hebben.

Piet Vredenduin

Mathematisering en Maatschappij of Hoe loopt een succes-story af?*

H. J. M. BOS

Utrecht

Mijn terrein van onderzoek en onderwijs is de geschiedenis van de wiskunde of van de natuurwetenschappen in het algemeen. Ik ben ook geïnteresseerd in die zaken die men onder de titel 'Wiskunde en Maatschappij' of 'Wetenschap en Maatschappij' samenvat. Het overkomt mij daarom vaak dat ik bezig ben met onderwerpen uit de geschiedenis van de wiskunde en dan van daaruit een beetje in het wilde weg doordenk, en uitkom bij 'Wiskunde en Maatschappij'. Zoiets wilde ik ook hier doen; uitgaande van een paar verhalen wat gedachten ontwikkelen over wiskunde en maatschappij. Ik stel daarbij voorop dat het een erg persoonlijke gedachtengang is en zo hier en daar ook wel een wat losse gedachtengang. Maar in een praatje tussen een ochtend voetbal en een middag cabaret mag men, dunkt me, weleens wat grotere en wildere stappen door de geschiedenis maken dan gewoonlijk.

Ik begin met twee verhalen die mij dierbaar zijn. Het eerste gaat over Nicolo Tartaglia, (zijn naam betekent: de stotteraar), een Italiaans wiskundige uit de zestiende eeuw. Het verhaal vertelt hij zelf in zijn boek *Nova Scientia* – de nieuwe wetenschap – dat hij in 1537 publiceerde. Hij schrijft daar dat hij in 1531 bevriend was met een kanonnier van het oude kasteel te Verona. Vaak diskussieerden zij over de kunst van het schieten met kanonnen, in het bijzonder over de hoek waaronder men een kogel moet wegschieten om de grootste reikwijdte te verkrijgen. Door deze diskussies geïnspireerd, werkte Tartaglia een theorie over kogelbanen uit. Hij vatte de kogelbaan op als samengesteld uit drie delen; een recht deel waar de 'violente' beweging, die het kruit aan het projektiel heeft gegeven, overheerst, een cirkelvormig deel waar de 'violente' en de 'natuurlijke' beweging zich mengen, en een loodrecht gedeelte waar de 'natuurlijke' beweging van de kogel overheerst. Hij berekende de relatie tussen de elevatie en de schootsafstand bij vaste hoeveelheid kruit – althans dat zegt hij in zijn boek. Toen stond hij voor de vraag of hij deze theorie zou publiceren; eerst dacht hij, ja, ...

* Voordracht, gehouden op 13 maart 1975 te Delft, ter gelegenheid van de *dië's* van de Wiskunde-Studievereniging *Christiaan Huygens*.

‘Maar later, toen ik er op een dag zelf dieper over nadacht, leek het me een laakbare zaak, schandelijk en barbaars, voor God en de mensen streng strafbaar, om zich toe te willen leggen op de vervolmaking van een kunst die de naaste schaadt en gericht is op de ondergang van de menselijke soort, christenen in het bijzonder in de oorlogen die zij voortdurend onderling voeren’.

Dus schreef hij zijn theorie niet op, hij studeerde er niet verder over, ja zelfs hij verbrandde zijn papieren en besloot niet erover te vertellen, hoezeer men hem er ook om vragen zou. Maar hij bleef toch niet bij die mening – anders hadden we dit verhaal niet in zijn boek kunnen lezen. Hij vertelt verder:

‘Maar heden ten dage, oog in oog met de woeste wolf die zich opmaakt zich op onze kudde te werpen . . .

(die woeste wolf, dat waren de Turken die in 1529 al het eerste beleg voor Wenen sloegen en nu werkelijk gevaarlijk werden ook voor noord Italië), ziende ook dat onze herders nu eensgezind zich inzetten voor de gezamenlijke verdediging, lijkt het me niet meer geoorloofd deze dingen nog langer verborgen te houden, en ik heb besloten om ze openbaar te maken, deels in geschrifte, deels door mondelinge mededeling, ten voordele van ieder christen, zodat op die manier een ieder beter in staat is, òfwel om de gezamenlijke vijand aan te vallen, òfwel om zich tegen hem te verdedigen.’

[naar de franse vertaling van gedeelten uit de *Nova Scientia* in Charbonnier, P., *Essais sur l'Histoire de la Ballistique*, Paris 1928, p. 17].

De relatie tussen elevatie hoek en reikwijdte, het kernstuk van zijn theorie, heeft hij overigens niet in zijn boeken op schrift gesteld en of hij dit resultaat mondeling heeft meegedeeld is niet bekend. In elk geval weten we niet welke relatie hij op het oog had; zelfs weten we niet zeker of hij er werkelijk wel een gehad heeft. – Een mooi en leerzaam verhaal over de gewetensnood van wetenschappers, ik kom er straks nog op terug, eerst het andere verhaal.

Dat tweede verhaal gaat over Petrus Plancius, onze vaderlandse dominee die in de tijd van de jonge republiek vooral bekend was door zijn kartografische en zeevaartkundige studies. Het schijnt zelfs dat hij de zeevaart ook zo graag in zijn preken betrok dat bij hem de kerk vaak leek op een dependance van zijn school voor zeelieden. Het grootste zeevaartkundige probleem in Plancius' dagen was de positiebepaling op zee. Het probleem staat ook bekend als het lengteprobleem. Men kan namelijk op zee de geografische breedte, d.w.z. de hoekafstand tot de equator bepalen, (men doet dat bijvoorbeeld door de positie van de poolster te bepalen, poolshoogte nemen heet dat). Maar men kan niet rechtstreeks van de hemel de geografische lengte aflezen, d.w.z. de hoekafstand tot een vaste meridiaan, laten we zeggen de meridiaan door Delft. De aarde draait namelijk ten opzichte van de hemel (of de hemel ten opzichte van de aarde), zodat de stand der sterren telkens wisselt – je kunt dus de lengtepositie niet rechtstreeks bepalen. Dat dat een groot probleem was, speciaal voor het zeevarende Holland, is duidelijk. Nu had men ontdekt dat de kompassen niet overal precies naar het noorden wijzen, maar een afwijking vertonen. Deze afwijking, of miswijzing zoals men het noemde, is plaatsafhankelijk. Verscheidene zeevaartkundigen vóór Plancius hadden al gesug-

gereerd dat deze miswijzing benut kan worden bij de plaatsbepaling op zee. Plancius zelf propageerde dit idee sterk. Kent men, zo redeneerde hij, de waarde van deze miswijzing op de verschillende plaatsen op aarde, dan heeft men een soort tweede koördinaat, die samen met de geografische breedte plaatsbepaling op zee mogelijk maakt. Uitgaande van de schaarse toen bekende gegevens ontwikkelde Plancius een theorie over het verband tussen de geografische positie en de miswijzing. Het was een theorie die, gezien het belang voor de scheepvaart, om verdere 'Research and Development' vroeg, en de Hollandse Koopvaart, met name de Verenigde Oostindische Compagnie voelde daar wel voor. Dus werden de schippers en stuurlii geïnstrueerd overal gegevens te verzamelen over de miswijzing van het kompas, en deze gegevens bij thuiskomst in te leveren bij Petrus Plancius, de hoofdzeevaartkundige van de Compagnie. Dat deden deze schippers en stuurlii echter niet gaarne; er was tegenstand tegen de kamergeleerde, die nooit de zee had gezien en die met zijn wetenschap en met hulp van de hoge heren wilde ingrijpen in het beroep van de zeelui.

Een illustratie van deze weerstand neem ik uit een polemisch geschrift tegen Plancius uit 1600. De schrijver van dat geschrift maakt er zich druk over dat Plancius wordt geëerd voor het verzamelen van al die gegevens en vertelt even hoe dat werkelijk ging:

'Dit selfde is aldus te weghe ghebraght: Als dese Stuerluyden, daer dit voornoemde werck van ghesocht is, alsulcke verre ende periculose reysen nae Oost-Indien, ende op ander plaetsen bestaen, ende met groote gevaer van haer leven volbroght hadden, so dat die eerste Oost-Indische vaerders van 250 man die zy uyt voerden, door quade ordinantie, daer zy mede af ghestuert waren, niet meer als 60 persoonen, so krancken als ghesonden, wederom te rugghe en broghen, die alle door toevallende swarigheyt omghecomen waren, ende die overghebleven, waren soo veer ghecomen dat zijt gheen 14 daghen langher in Zee soude ghehardt hebben, of zy souden met die schepen van elende hebben moeten vergaen, als haere eygen boecken die daer van ghedruckt zijn, uyt wysen.

Ende als zy uyt alsulcken perykel. Schip. en goet in een behouden haven (te weten in Tessel) manlick ghebrocht hadden, doen hebben zy haere kisten moeten openen, om datmen dese voornoemde Auctuer, oft zynen aenhanck, haer vergaderde schriften, ende kunst overantwoorden soude, die daer even soo veel verstandts van hadden, als die blinde van die veruue doet. als die vergaderde Naeldt-wysinghe wel mede brenght. Ende dese Stuerluyden, hier van te voren wel verwitticht zijnde, hebben haere schriften en kund die zy met alsulcke groote perykel gehaelt hadden, niet willen overgheven; maer hebben alsulcke schriften in haer kisten ghelaten, die zy wel hebben willen missen, jae daer zijn sommige die haer wel doruen beroemen, dat zy dese haere Leermeesters recht contrary overgegeven hebben als zy dat wel bevonden hadden.

Alsoo noodt somtijts die Vos die Kraen te gast, als men bedrogh met bedrogh betaelt, daermen in die Fabulen AESOPi van lesen.

Want die stuerluyden seggen, met seer goede reden, sullen zy ons leeren ende van ons haelen, ende vergaderen daer zy haer hier nae mede soecken

te behelpen, dat is ons ongelegghen, want een stuerman is zijn kunt, kunst, ende besochtheit zijn eyghen rijckdom, ja zijn acker ende zijn ploegh, daer hy hem mede soeckt te behelpen, oft te ernenen.'...

[geciteerd in Burger (jr), C. P. *Amsterdamsche Rekenmeesters en Zeevaartkundigen in de zestiende eeuw*, Amsterdam 1908, pp. 50–51.]

Tot zover dit verhaal over tegenwerking, zoniet rechtstreekse sabotage, van wetenschappelijk onderzoek dat men wantrouwde.

Waarom zijn deze twee verhalen mij dierbaar? Het zijn tenslotte niet zulke vrolijke verhalen. Ze gaan over pogingen om door de wetenschap veroorzaakte ontwikkelingen tegen te houden. De ene poging kwam vanuit die wetenschap zelf. Een wetenschapper, Tartaglia, trachtte door geheimhouding, een toepassing te voorkomen die hij niet verantwoord vond. Het is dus een poging om gestalte te geven aan de eigen verantwoordelijkheid van de wetenschapper – hoewel een beetje een halfslachtige poging. In het andere geval verzette zich een beroepsgroep, de zeelui, tegen de invoering van wetenschappelijke methoden in hun beroepspraktijk, omdat zij vreesden daardoor een stuk zelfstandigheid en zekerheid te verliezen (de zeeman zijn kunst is zijn rijkdom, zijn akker en zijn ploeg, die mag je hem niet ontnemen).

Dit soort dingen komt vandaag de dag ook voor en dat is zorgelijk genoeg. Toch heb je het idee dat het in deze verhalen nog niet zo zorgelijk was als nu. De verhalen, zeker het verhaal over Tartaglia, komt eigenlijk als een beetje aandoenlijk en futiel over. Hoe komt dat? Dat komt omdat in die tijd de wetenschap waartegen men zich verzette nog niet zo erg effectief was. Geheim of niet geheim – Tartaglia's theorie heeft geen merkbare invloed gehad op de effectiviteit van de toenmalige artillerie, en Plancius' theorie is later niet houdbaar en niet bruikbaar gebleken voor de zeevaart.

Kortom, de wetenschap was toen nog niet zo succesrijk als zij nu is. Op het ogenblik zijn dit soort problemen van verantwoordelijkheid zo moeilijk juist omdat men zich zo machteloos voelt tegenover de ontwikkeling van wetenschap en technologie. De ontwikkeling van nieuw wapentuig, de automatisering van arbeidsprocessen waarin voorheen geschoolde, zelfstandig werkende mensen betrokken waren, deze zaken lijken nu vaak niet meer tegen te houden door simpele persoonlijke actie of door simpele tegenstand.

Waarom niet? Omdat de wetenschap en de technologie zo omvangrijk en zo succesvol zijn geworden dat het onmogelijk lijkt als enkeling of als kleine groep de effecten ervan tegen te houden of zelfs te sturen.

Hoe is dat zo gekomen? Hoe is die success-story van wetenschap en technologie verlopen? Met die vraag houden zich de historici der wetenschap bezig en het is een zeer ingewikkelde affaire. Maar ik wil toch proberen om er iets naders over te zeggen en het lijkt me het beste om dat te doen door zeer globaal de vervolgh verhalen op de twee eerste verhalen te vertellen.

Tartaglia's boek geldt als het begin van de teoretische *uitwendige ballistiek*, dat wil zeggen de leer van de beweging van projectielen na het verlaten van het

geschut (wat er binnen het geschut gebeurt valt onder inwendige ballistiek). De volgende stap in de geschiedenis van de uitwendige ballistiek was Galileo's ontdekking dat, in vacuo, projectielen paraboolbanen beschrijven. Op deze ontdekking werd een artillerie-theorie opgebouwd, de zogenaamde parabolische theorie, die meer dan anderhalve eeuw op artillerie scholen onderwezen is en die even lang door de artilleristen zelf zeer terecht werd gewantrouwd. Projectielen bewegen zich namelijk niet in vacuo maar in de lucht, en zij ondervinden daar weerstand. De theorie van beweging in een medium met weerstand is moeilijk – daar komen differentiaalvergelijkingen bij kijken. Die theorie is geleidelijk ontwikkeld na Galileo. De naamgever van Uw gezelschap Christiaan Huygens heeft er aan gewerkt; evenals Newton, Bernoulli en Euler.

Tot in de 19e eeuw bleef deze ballistische theorie een zuiver teoretische aangelegenheid. Men leerde voor simpele weerstandsfuncties de bijbehorende differentiaalvergelijkingen opstellen en numeriek, of met andere benaderingsmethoden oplossen, waardoor men tabellen kon berekenen. Maar die tabellen waren niet erg effectief omdat men de werkelijke weerstandsfuncties niet kende en omdat bij het toenmalige geschut nog veel teveel andere komplikaties optraden.

Zo lag het probleem in de 19e eeuw: men moest proberen de werkelijke weerstandsfuncties te bepalen en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen numeriek of anders op te lossen om tabellen te berekenen. Zo'n probleemstelling is alleen zinvol als men geschut heeft dat een beetje regelmatig schiet, de kogels moeten steeds de loop met dezelfde snelheid verlaten en dezelfde luchtweerstand ondervinden.

In de 19e eeuw ontstond zulk geschut – geschut dus waarop een mathematische theorie toepasbaar was – door de invoering van lopen met spiraalgroeven, en door de invoering van cilindervormige projectielen. Daarvóór schoot men met echte kogels, d.w.z. bolvormige projectielen. De projectielen en de geschutstypen werden gestandaardiseerd en men bepaalde experimenteel, met meer of minder succes, de weerstandsfuncties. In de 20e eeuw wijzigde zich de probleemstelling voor de ballistiek, met name door de opkomst van lucht- en lange afstandsgeschut. Men kon daardoor bepaalde, tot nu toe gebruikelijke benaderingsmethoden bij het oplossen van de differentiaalvergelijkingen niet meer toepassen. Ook had men veel meer, en onderling verschillende geschutstabellen nodig. Dit leidde ertoe dat men op grote schaal met behulp van numerieke integratie tabellen ging berekenen. Enorme groepen ballistische rekenaars werkten daaraan, met eerst niet veel meer mechanische hulpmiddelen dan tafelrekenmachines. Tussen de wereldoorlogen, en vooral in de tweede wereldoorlog deed zich steeds meer de noodzaak voelen voor mechanisering en automatisering van dit werk, en deze noodzaak vormde de belangrijkste reden voor de ontwikkeling van de *computer*. Van de 13 bekendste computers die in de jaren 1937 tot 1948 werden ontwikkeld dienden er minstens negen primair voor ballistische berekeningen.

Verdere automatisering van de artillerie ontstond doordat men de computers niet meer eerst schiettabellen liet berekenen maar ze rechtstreeks met het geschut verbond en zo programmeerde dat ze direkt het geschut de gewenste stand gaven.

Zo vinden we een der belangrijkste zaken in de huidige wiskunde, de computer, aan het einde staan van een ontwikkeling die bij Tartaglia begon. Een ontwikkeling die de artillerie tot een hoog wetenschappelijk-technologisch, vergeautomatiseerd en zeer effectief bedrijf maakte – een success-story dus van wetenschap en in het bijzonder van de wiskunde.

Ook bij het verhaal over Plancius kan ik aansluiten met een success-story van de wetenschap, namelijk de oplossing van het probleem van de positie-bepaling ter zee, in het bijzonder van het lengte probleem. Plancius' idee om de miswijzing van het kompas te gebruiken bleek niet bruikbaar. Er werd dus naar een andere oplossing gezocht. In principe kende men die oplossing ook wel in Plancius' tijd. Het grondidee ervan is simpel. Als je op ieder moment precies weet hoe laat het is in Delft, en dus hoe daar op dat tijdstip de sterren staan, dan kun je uit de stand van de sterren zoals jij ze ziet bepalen hoe groot je hoekafstand van de meridiaan van Delft is, d.w.z. dan kun je je geografische lengte bepalen. Dus zou je een goede klok mee moeten nemen die op lange zeereizen precies bij blijft. Huygens (dezelfde) heeft gepoogd dit probleem op te lossen, zijn uitvinding van de slingerklok en zijn pogingen goede zeeklokken te konstrueren staan in verband met het lengteprobleem. Met hem hebben vele andere geprobeerd het lengte probleem op deze manier op te lossen, maar pas in de tweede helft van de 18e eeuw lukte het Harrison een bruikbare zee-chronometer te konstrueren. Het ding was echter erg duur.

Men zocht overigens niet alleen in de richting van konstruktie van zeeklokken. Aan de hemel bevindt zich namelijk ook een klok waarop men kijken kan, namelijk de maan. Als men precies tabellen heeft van de stand van de maan t.o.v. de sterren, dan kan men de precieze tijd te Delft van de hemel aflezen. Daartoe waren dus nodig: goede maantabellen en goede observatieinstrumenten. De laatste kwamen er in de 18e eeuw met het quadrant en het sextant. De eerste vormden een moeilijker probleem. De maanbeweging is namelijk zeer ingewikkeld en het is daarom zeer moeilijk een adequate theorie uit te werken waarmee men maanstanden voorspellen kan en zo de gevraagde tabellen kan opstellen. De maan beweegt onder de invloed van zowel de aarde als de zon. Samen zijn dat drie lichamen, en het drielichamenprobleem, het probleem hoe zich drie lichamen ten opzichte van elkaar bewegen, is wel het moeilijkste probleem der klassieke mechanica. Daar komt ook heel wat wiskunde bij kijken. Men kan zelfs zeggen dat, zodra men Newton's bewegingswetten in wiskundige taal vertaald heeft, het drielichamenprobleem een zuiver wiskundig probleem is geworden. De benodigde wiskunde is de differentiaal- en integraalrekening en de daarop voortbouwende Analyse; tot in de twintigste eeuw heeft het drielichamenprobleem wiskundigen geïnspireerd tot het uitwerken van nieuwe theorieën in de Analyse.

Newton zelf, samen met Leibniz de ontdekker der differentiaal- en integraalrekening, was zeer geïnteresseerd in de maanteorie. Hij werkte een theorie uit voor de maanbeweging, uitgaande van zijn gravitatietheorie. Deze maanteorie werd verder uitgewerkt door Euler, en vervolgens toegepast door Tobias Mayer, die er de eerste voor de zeevaart bruikbare maantabellen mee berekende. Deze werden in de 60er jaren der 18e eeuw ingevoerd in de engelse zeevaart,

en tot het einde der 19e eeuw bleef de lengtebepaling met maantabellen, naast het gebruik van chronometers in zwang.

Beide methoden hebben het bezwaar dat ze afhankelijk zijn van hemelwaarnemingen, die lang niet altijd mogelijk zijn. In de 20e eeuw is er in de methoden van plaatsbepaling op zee een grote verandering gekomen die dit bezwaar ondervangt. Men heeft namelijk radiopeilingssystemen gecreëerd. Er is een netwerk van radiozenders langs de kust en op lichtschepen opgesteld. Met radiopeiltoestellen is het nu mogelijk, in elk geval op de druk bevaren routes, automatisch voortdurend de scheepspositie te laten 'plotten' op een kaart. Men ziet ook hier: een automatisering van het proces van plaatsbepaling als einde van een success-story van toepassing der wetenschap op een in de maatschappij ondervonden probleem.

Het zijn, vind ik, hoe kort ik ze ook moet vertellen twee heel indrukwekkende verhalen, over het succes en de kracht van de wetenschappelijke methode, die werkelijk problemen kan oplossen, en zo de wereld kan veranderen. Verhalen ook die het begrijpelijk maken dat simpele tegenstand tegen de voortgang van deze toepassingen der wetenschap, zoals bij Tartaglia en bij de tegenstanders van Plancius, tegenwoordig nauwelijks effectief kan zijn.

Voor ik daarop verder ga moet ik hier duidelijk maken wat die verhalen nu eigenlijk met wiskunde te maken hebben.

Voor de mensen uit de 16e, 17e en 18e eeuw was dat geen vraag, voor hen waren de zeevaart en de kunst van het kannonnenen mathematische kunsten. Mathematische kunsten besloegen in die eeuwen het gehele gebied van elementair rekenen via architectuur en ingenieurskunst tot geografie. Tartaglia en Plancius waren wiskundigen. Maar sindsdien is het begrip wiskunde verschaald, wiskunde is niet meer wat het geweest is. Toch hebben de verhalen ook met wiskunde in de moderne zin van het woord te maken.

Bij de ballistiek is dat wel duidelijk. Het voornaamste probleem daarbij was het vinden van bruikbare en snelle oplosmethoden voor differentiaalvergelijkingen, deze pogingen leidden tot de ontwikkeling van de computer. De bijdrage van de theoretische mechanica aan de ballistiek is lang beperkt gebleven tot de wetten van Newton. Het feitelijk theoretisch afleiden van de krachten die op een projectiel werken als functie van de projectieelvorm, de snelheid en de luchtdichtheid is zo moeilijk, dat hiervoor toch, tot ver in de 20e eeuw, voornamelijk op experimentele uitkomsten werd gesteund.

Ook het verhaal over het lengteprobleem heeft met wiskunde te maken, omdat de maantabellen van Mayer de eerste maatschappelijke relevante toepassing vormden van de hogere wiskunde, de differentiaal- en integraalrekening. Die toepassing kwam dus ongeveer honderd jaar na de ontdekking der differentiaal- en integraalrekening, en bleef lang de enige toepassing; pas in het einde der 19e eeuw werd de differentiaal- en integraalrekening ook elders toegepast, namelijk via elektriciteitsleer en elektrische technologie in de elektrische apparaten zoals telegraaf en telefoon.

Maar hoe dan ook, er kan verschil van mening over bestaan of deze verhalen nu tot de geschiedenis van de wiskunde gerekend moeten worden of tot de geschiedenis van andere natuurwetenschappen, zeker is dat het verhalen zijn

over het succes van de wetenschappelijke benadering, en dat dat succes in hoge mate bepaald is door de *mathematisering* van de problemen en van de theorieën ter oplossing ervan.

Mathematisering en Maatschappij, daaronder mag ik de twee verhalen toch wel rekenen. Succesverhalen zijn het ook. Ballistiek heeft ons de computer geleverd en hoe machtig en succesvol dat apparaat is weten we allemaal. Navigatie over de oceanen is van een hachelijk avontuur tot een vanzelfsprekende zaak geworden.

Als we dus het succes willen begrijpen moeten we ons wat verder verdiepen in de mathematisering. Daartoe leveren de voorbeelden enige aanknopingspunten. Er zijn namelijk drie aspecten van mathematisering op te merken aan de voorbeelden.

Ten *eerste* schept mathematisering macht. Macht om problemen op te lossen, macht om daardoor meer effectief te kunnen ingrijpen in zijn omgeving, anderszins ook macht doordat men informatie goed en hanteerbaar ordenen kan, en kennis is macht. Ik hoef in dit verband alleen maar te wijzen op de opkomst der informatika.

Ten *tweede* blijft mathematisering niet staan bij simplificerende beschrijving van het object van studie, maar slaat als het ware terug op dat object en vereenvoudigt het zelf. De kanonnen der artillerie moesten gestandaardiseerd worden, vóór er een theorie effectief op toepasbaar was, ze werden eenvormig gemaakt zodat hun effect herhaalbaar werd. De beweging van planeten en sterren, misschien wel de meest *regelmatige* natuurverschijnselen die we kennen, de eerste waarop gemathematiseerde natuurwetenschap effectief bleek, deze bleken voor de zeevaart nog te gekompliceerd, en door de weersomstandigheden te weinig waarneembaar. Dus moest er een ander systeem over de oceanen gelegd worden, een systeem van radiobakens en daardoor uitgezonden signalen, waardoor navigatie mogelijk werd. De wetenschap schiep eerst een systeem, en bewees daarin vervolgens zijn goede diensten. Dit effect van mathematisering, dat de objecten zelf gemathematiseerd worden, dat de wetenschappelijke modellen een eigen leven gaan leiden (denk aan de klub van Rome!) treedt zeer veel op. Als bijvoorbeeld een organisatiespecialist of systeemanalyst een organisatie doorlicht dan zal hij voorstellen de organisatie aan te passen aan de modellen die hij erover ontwikkeld heeft. Administraties worden aan de komputer aangepast. Selectieprocedures en selectiekriteria worden aangepast aan de automatisering van de procedure. Bij geprogrammeerd onderwijs wordt de leerstof aan de mathematisch strak uitgewerkte onderwijsmethode aangepast.

Mathematisering, en wetenschap in het algemeen, moet zich vaak eerst zelf een gesimplificeerde wereld scheppen vóór zij in die wereld zelf effectief bezig kan zijn.

Het *derde* aspect van mathematisering dat we zien in de verhalen is dat bij toe-

passing van gemathematiseerde wetenschap, de techniek een aantal zelfstandige taken van de mens overneemt, en dus een aantal mensen hun zelfstandige rol ontnemt. De artillerist wordt uitgeschakeld, de computer wordt direct met het geschut verbonden. De man met het sextant wordt vervangen door de automatische plotter. 'Scientific management' reduceert het aantal zelfstandige taken in het arbeidsproces.

Deze drie aspecten van mathematisering, de macht die het geeft, de simplificatie van de omgeving die het meebrengt en het verdringen van mensen uit zelfstandige arbeidsposities, speelden al in de tijd van Tartaglia en Plancius. Het zijn ook precies de punten van kritiek die tegenwoordig tegen de technokratische maatschappij naar voren worden gebracht, de maatschappij waarin het zo moeilijk lijkt om je persoonlijk tegen de voortgang van wetenschap en technologie (van technocratie dus) te verzetten of er iets aan om te buigen. Het is goed om op een rij te zetten van welke zijde die kritiek tegen de technokratische maatschappij komt en wat die inhoudt. Men kan zeggen dat het allemaal begonnen is met de atoombom, waarvan Oppenheimer zei dat hij de fysika de zonde heeft leren kennen. Eigenlijk tot de huidige dag staat de atoombom als prototype van een onderwerp op het gebied van 'wetenschap en maatschappij'. Zodoende heeft het voorbeeld ook een beetje het bijeffect dat iedereen die kan aantonen dat hij niets met de atoombom te maken heeft safe is. Of, zoals ik wel van wiskundigen verneem: 'de fysici hebben de atoombom, de chemici hebben de milieuverontreiniging maar wat hebben wij?'.

Welnu, er is meer kritiek gekomen, Er werden bezwaren geuit tegen dure, grootschalige prestigeobjecten zoals de maanrace, en tegen de betrokkenheid van wetenschap bij het militair industrieel kompleks. Deze kritiek was in feite nog optimistisch: de wetenschap, zei men, wordt verkeerd toegepast, dient verkeerde machthebbers, maar is in zichzelf niet verkeerd en zou alleen ergens anders toegepast moeten worden in de wereld werkelijk beter te maken. Een andere toon klinkt door in Rachel Carson's *Silent Spring* en de daarop volgende milieukritiek: de wetenschap is fundamenteel verkeerd gericht, namelijk op beheersing en naar zijn hand zetten van de omgeving, van de natuur; niet gericht op het wijze behoud ervan.

Nog verder gaan de verschillende stromingen in wat genoemd wordt de 'Counter Culture', die zich tegen objectiviteit en rationaliteit verzetten en die de wetenschap verwijten de wereld te versimpelen, het leven en de geest eruit te halen, zich op materiële, dode zaken te concentreren en dus ontmenselijkend te werken in plaats van zich open te stellen voor een wijdsere en essentiëlere wereld van subjectief bewustzijn.

In een meer academisch filosofische stijl geformuleerd is het zelfde bezwaar te beluisteren in de wetenschapskritiek van mensen als Marcuse en Habermas. Ook deze zeggen: er is iets fundamenteels verkeerd in het wetenschappelijk denken zelf, rationaliteit leidt tot manipulatie, die zij vooral vrezen in de toepassing der gemathematiseerde sociale wetenschappen.

Fundamentele kritiek dus op de wetenschap, en een kritiek die het hart ervan raakt, namelijk de mathematisering. Die zelfde mathematisering die we hebben

onderkend als de belangrijkste faktor in de success-story van de wetenschappen na de periode van Tartaglia en Plancius. Een kritiek dus die de wiskunde direkt raakt. Wat doen we ermee?

Er zijn een aantal schijn-argumenten die we kunnen gebruiken om de kritiek naast ons neer te leggen. We kunnen bijvoorbeeld zeggen dat we als wiskundigen wiskunde bedrijven en niets te maken hebben met mathematisering in andere wetenschappen. We kunnen ons ook vrolijk maken over de vele onzin die door critici der wetenschap over de wiskunde wordt gedebiteerd. Ik geloof dat deze reacties niet zinvol zijn. Wij hebben met mathematisering te maken, we leven ervan in feite, en we hebben ook met kritiek daarop te maken, ook al gaat die soms uit van een onbegrip over wat wiskunde is. We horen die fundamentele kritiek op de wetenschappelijke denkwijze, we horen dat het effect van die wetenschappelijke denkwijze op de maatschappij niet goed is.

Anderzijds hebben we gezien dat mathematisering een van de pijlers is voor het succes van de wetenschap. Ik meen dat in deze situatie ook in de kring van wiskundigen over die success-story de vraag gesteld moet worden:

Gaat een success-story eeuwig door?

en zo niet

Hoe loopt een success-story af?

Want wat de kritiek ons in elk geval leert is dat het niet vanzelfsprekend is dat we, als we op de oude vertrouwde voet doorgaan met het mathematiseren van alle problemen die zich daartoe aanbieden, de maatschappij werkelijk een dienst zullen bewijzen. De garantie dat het een success-story blijft is er niet meer. Ik kan natuurlijk geen antwoord geven op de vraag of, en zo ja hoe die success-story afloopt, maar ik wil wel een pleidooi houden voor het belang van de vragen die sommigen onder de slogan 'Wetenschap en Maatschappij' of 'Wiskunde en Maatschappij' aan de orde willen stellen. Ik geloof dat het belangrijke vragen zijn. Ik geloof ook dat over die vragen aan universiteiten en T.H.'s zinvol onderwijs te geven valt.

Tenslotte geloof ik dat, hoe paradoxaal dat ook mag klinken, bij dat onderwijs dat toch essentieel over de toekomst zou gaan, de geschiedenis van de wiskunde, en de geschiedenis van natuurwetenschappen en technologie in het algemeen, een erg waardevolle en verhelderende rol kan spelen.

Diagnostisch(?) Toetsen

H. BROEKMAN

Utrecht

De Cito-RITP Conferentie over diagnostisch toetsen op 19 en 20 november 1975 was voor mij aanleiding tot het schrijven van dit artikel. Het is geen verslag van die Conferentie, want het lezen van een verslag van de bijeenkomst lijkt me voor u – als lezer – niet zo'n zinvolle bezigheid. Wat heeft u er aan om te weten dat er een zeer heterogene groep van 30 deelnemers was – leraren van L.B.O., M.B.O., Mavo, Havo en V.W.O. – dat alle deelnemers gebruikers waren van de door Cito-RITP uitgegeven toetsenbundels en dat er naast enkele informatieve voordrachten vooral door de deelnemers *gewerkt* werd aan het analyseren van stukken leerstof, het maken van toetsvragen etc.? In plaats van een verslag te schrijven wil ik daarom een aantal gedachten naar aanleiding van de conferentie aan u voorleggen, die hopelijk bij zullen dragen aan het denken over toetsen, en een discussie met uzelf en uw collega's zullen (her)openen.

Achtereenvolgens zal ik daarbij aandacht besteden aan wat we onder diagnostisch toetsen verstaan, waarbij aan bod zal komen 'waarom toetsen' en 'hoe toetsen', en het cijferprobleem in verband met diagnostisch toetsen.

Tot slot zal ik nog een enkele algemene opmerking maken over de belangrijkheid van dit soort werk-, praatconferenties.

Diagnostisch toetsen, wat verstaan we daar onder ?

Als we praten over toetsen, d.w.z. het meten van de graad van beheersing van bepaalde vaardigheden, het meten van vorderingen, etc., kunnen we twee typen vragen onderscheiden; vragen van het type 'hóe toets je' en vragen van het type 'waarom toets je'.

Het *waarom* klinkt sterk door in het bijvoeglijk naamwoord 'diagnostisch' van diagnostisch toetsen. Het gaat daarbij om het nagaan van hetgeen een leerling nu precies wel en wat precies niet beheerst.

Met het stellen van een diagnose – hoe moeilijk dat op zich vaak ook is – zijn we er echter niet. Net als een arts het niet laat bij een diagnose, maar deze laat volgen door een aan de patiënt aangepaste therapie, zo zal ook na het stellen van een diagnose van het kunnen van een leerling een beslissing genomen moeten worden over hetgeen nu verder moet gebeuren.

Het stellen van een diagnose en het zoeken van een remedie, dat wil zeggen een aan de leerling aangepaste therapie, behoort – voor mij althans – tot de primaire taken van een leraar die zichzelf ziet als begeleider van leerprocessen. In dit kader zou ik dan ook de volgende opmerkingen van enkele conferentie-deelnemers willen zien.

Opm. 1. Door het diagnostisch toetsen kun je de houding van de leerlingen tegenover fouten verbeteren ('ook fouten kunnen je helpen verder te komen, als je het er maar niet bij laat zitten'). Tevens kun je de leerlingen iets bijbrengen van het verantwoordelijk zijn voor eigen werk.

Opm. 2. Behalve voor de leerlingen is het diagnostisch toetsen ook voor de leraar erg nuttig. Door het stellen van een diagnose en het zoeken van de juiste therapie wordt je steeds weer gedwongen om te beseffen hoe complex het denken eigenlijk is. Je krijgt er als leraar o.a. een beter zicht op of er iets fout gegaan is (of aan het gaan is), tijdens het verwerven of verwerken – door de leerlingen – van een nieuw begrip, een nieuwe vaardigheid, etc.

Het voorgaande brengt mij tot de volgende omschrijving van diagnostisch toetsen:

Men spreekt van diagnostisch toetsen als het gaat om het meten van onderwijsresultaten *én* op grond van de metingen conclusies getrokken worden over de oorzaak van het gedeeltelijk of geheel falen of slagen van de leerling *én* als op basis van die conclusies bijsturen van leeractiviteiten plaatsvindt.

In deze omschrijving wordt iets gezegd over het 'waarom meten', nl. conclusies trekken en op basis van die conclusies bijsturen, en ook iets over het 'wat meten', nl. onderwijsresultaten. Jammer genoeg wordt er helemaal niets gezegd over het 'hoe meten'. Dit is extra jammer omdat juist dit *hoe* een belangrijk punt is voor veel leraren, zoals kan blijken uit opmerkingen die o.a. door deelnemers aan de conferentie gemaakt zijn.

Opm. a. Het is allemaal prachtig, maar wat heb ik eraan om nog eens extra geconfronteerd te worden met hetgeen mijn leerlingen allemaal nog niet beheersen, als ik toch niet na kan gaan of dit veroorzaakt wordt door gebrek aan motivatie, of door een tekort aan capaciteiten, of door . . .

Opm. b. Hoe moet ik, met 30 leerlingen in de klas en met een overladen wiskundeprogramma, de tijd vinden om van ieder van de leerlingen persoonlijk na te gaan wat hij wel of niet kan? Bovendien, hoe moet ik de tijd vinden voor de persoonlijke hulp aan mijn leerlingen?

Bij goed lezen van deze opmerkingen, en wat hiervoor verder geschreven staat, blijkt dat de vraag 'hoe toetsen' in feite opgesplitst kan worden in drie – weliswaar niet onafhankelijke – vragen, nl.

1. Hoe toets ik, hoe meet ik leerresultaten?
2. Hoe analyseer ik de toetsresultaten?
3. Hoe stel ik op grond van de toetsanalyse een eventuele therapie vast?

Over ieder van deze punten zouden vele bladzijden vol te schrijven zijn; ik zal me echter beperken tot een aantal kanttekeningen, voornamelijk bij 1 en 2.* Deze kanttekeningen zijn niet bedoeld als antwoord op de opmerkingen a en b, maar meer als een aanzet tot ordening van, tot denken over en praten over deze materie.

Ad. 1e. Het stellen van korte mondelinge vragen aan de leerlingen is één van de mogelijkheden (huiswerk overhoren is ook bij wiskunde zo gek nog niet). Het voordeel van het stellen van mondelinge vragen is, dat de leraar zich tijdig en volledig kan aanpassen aan de individuele leerling.

Het stellen van korte schriftelijke vragen aan de leerlingen is een andere mogelijkheid (wie herinnert zich niet de leraar die zeker 1 à 2 keer per week een kort schriftelijk werkje gaf?). Het voordeel van schriftelijk werk is, dat er tegelijkertijd meerdere leerlingen geholpen kunnen worden. Een eis die aan de vragen en opgaven gesteld moet worden is wel, dat de antwoorden erop analyseerbaar zijn (zie t.a.v. dit punt onder *Ad. 2e.*) Dit maakt het schrijven van goede vragen en opdrachten vaak tot een tijdrovende zaak.

In de praktijk zal er vaak gezocht worden – o.a. om tijdszake – naar een compromis tussen het volledig afstemmen op de individuele leerling en het tegelijkertijd helpen van meerdere leerlingen. Een aanvaardbaar compromis kan onder meer worden bereikt door gebruik te maken van goed, centraal ontwikkeld toetsmateriaal, b.v. de diagnostische toetsen van het Cito-RITP. Zonodig kan men deze aanpassen aan de eigen situatie; d.w.z. het niveau van de leerlingen, hun voorgeschiedenis, de volgorde waarin bepaalde hoofdstukken of delen van hoofdstukken doorgewerkt zijn, etc.

Immers, hoe goed de toetsontwikkelaars ook zijn en hoeveel auteurs van een leerboek er ook meewerken aan het schrijven van toetsen, alleen de leraar zelf kent zijn leerlingen het best.

Tussenopmerking.

Het is jammer dat we te weinig geneigd zijn kant en klaar materiaal aan te passen aan onze eigen schoolsituatie. We zitten daardoor m.i. te vaak in een situatie van alles of niets, en vergeten dat alles dat we gebruiken kunnen om ons onderwijs te verbeteren meegenomen is.

Ad. 2e. Om toetsresultaten te kunnen analyseren moet men vóór een toets samengesteld wordt (het doet er daarbij niet toe of het om mondelinge

* Bovendien is er voldoende, uitgebreidere literatuur beschikbaar. Degene die meer hierover zou willen lezen kan ik o.a. het volgende aanbevelen.

Dr. Joh. Wansink, *Didactische Oriëntatie voor Wiskunde Leraren* deel 1 hfdst. 6.

A. D. de Groot, R. F. van Naerssen e.a. *Studietoetsen, construeren, afnemen, analyseren.*

J. van Dormolen, *Didactiek van de Wiskunde* hfdst. 8 (vragen en opdrachten)

Cito-RITP informatie katernen bij de bundels wiskunde toetsen.

vragen gaat of schriftelijke vragen) nagaan wat er precies getoetst moet worden. Ten behoeve daarvan is het belangrijk om een systematische analyse te maken van de vereiste vaardigheden en deelvaardigheden.** Anders gezegd: ga na welke denkstappen de leerlingen moeten kunnen zetten en verwerk deze in meerdere – liefst eenduidige – opgaven.

In dit verband onderschrijf ik de opvatting van J. Timmer (neergeschreven in hoofdstuk 10 van het boek van De Groot en Van Naerssen) dat het van groot belang is om niet te veel tegelijk te toetsen. Veel van de gangbare typen opgaven zijn te splitsen in een reeks 'enkelvoudige' opgaven, die eenvoudig te analyseren zijn.

(Om misverstanden te voorkomen wil ik hier graag opmerken dat ik beslist geen pleidooi wil houden voor alleen maar enkelvoudige opgaven. Ook opgaven, voor de oplossing waarvan meerdere denkstappen gezet moeten worden, zijn nodig. Het is voor de analyse achteraf echter wel nodig dat we – zo snel als verantwoord mogelijk is – aan kunnen geven waar en waardoor een leerling een verkeerde stap gezet heeft, of geen stap heeft kunnen zetten.)

Bij het analyseren van de toetsresultaten moeten we ons goed realiseren met welk doel we toetsen. In dit artikel heb ik het over het toetsen met als doel het stellen van een diagnose, etc.; het gaat daarbij om het al dan niet beheersen van bepaalde vaardigheden, het kennen van begrippen e.d. door de individuele leerlingen. In dat verband heeft het geen zin tijd te besteden aan het berekenen van de percentages goed beantwoorde vragen per leerling, of aan het nagaan welk percentage van de leerlingen een bepaalde vraag foutief heeft beantwoord. Het heeft in dat verband ook geen zin om na te gaan of een bepaalde vraag of opgave alleen door de betere leerlingen goed is beantwoord. We willen immers geen prestaties meten, vergelijken etc., maar eventuele lacunes in de kennis van de leerlingen opsporen.

Het heeft wel zin om opgaven te vergelijken waarin een zekere vaardigheid of een zeker begrip op verschillende wijzen naar voren komt. Anders gezegd: doet een leerling in één opgave iets fout dat hij in een andere opgave juist goed doet, en kan ik aangeven wat de vermoedelijke oorzaak daarvan is.

- Ad. 3e.* Het op grond van de toetsanalyse vaststellen van een therapie voor een individuele leerling kan zeer algemeen gebeuren (zo in de geest van: 'bekijk de zaak nog eens') maar ook uitmonden in een zeer persoonlijke benadering (in de geest van: 'dit beheers je nog niet, dus zullen we je nog eens leerproces(je) laten doormaken, zodat je het wel gaat beheersen').

De moeilijkheid van de persoonlijke benadering is, dat je van de indi-

** Zie voor nadere uitwerking hiervan b.v. het hoofdstuk 6 (toetsanalyse) en het hoofdstuk 10 (toetsanalyse i.v.m. wiskundeonderwijs) van het boek van De Groot, Van Naerssen, e.a.

viduele leerling heel precies zult moeten weten waar je op aan kunt grijpen, wat hij al beheerst, zodat je daarop verder kunt bouwen. Het daar achter komen is geen eenvoudige zaak en in een klas met tegen de dertig leerlingen is daarvoor nauwelijks gelegenheid.

In de praktijk blijkt een aanvaardbaar compromis te kunnen worden gevonden tussen de zeer algemene en de zeer persoonlijke benadering. Dit compromis bestaat uit het bij voorbaat bij elke opgave aangeven op welk deel van een hoofdstuk of paragraaf, die bepaalde opgave slaat. De leerlingen kunnen nu gestimuleerd worden om bij de opgaven die ze fout maakten het betreffende stuk uit het boek nog eens te bekijken, die bijbehorende opgaven nog eens te maken, etc.

Naast de hier genoemde mogelijkheid (die toegepast wordt in de Cito-toetsen) zijn er – merendeels tijdrovender – mogelijkheden, zoals stencils met extra opgaven, stencils met een nieuwe uitleg van bepaalde zaken, mondelinge hulp, hulp door medeleerlingen en in noodgevallen bijles (al dan niet in schoolverband).

Het cijferprobleem in verband met diagnostisch toetsen.

In de groep waarin ik tijdens de conferentie mocht meewerken werd de vraag gesteld: 'Mogen we voor een diagnostische toets cijfers geven?' Na alles wat ik hierover gelezen heb, heb ik de neiging om te zeggen dat het in feite overbodig is en in een bepaald opzicht ook ongewenst.

Iedere leraar weet dat cijfers (beoordelingen) zowel demotiverend kunnen werken als stimulerend, dat we verslag uit moeten brengen aan ouders (verzorgers) over de vorderingen van de leerlingen, dat de maatschappij recht heeft op verslaggeving over de besteding van gemeenschapsgelden, maar vooral – dat iedere leerling er bij gebaat is een juist beeld te hebben van zijn prestaties en zijn vorderingen. Soms om te weten hoe zijn prestaties zijn in vergelijking met die van anderen of ten opzichte van een algemene norm. Maar vooral ook om te weten waar het goed gaat en waar niet, om zodoende een poging te kunnen ondernemen om – zonodig met hulp – zijn prestaties te verbeteren.

In deze laatste situatie – en daarin bevinden we ons als we bezig zijn met diagnostisch toetsen – is een beoordeling (cijfer) geheel overbodig.

Dat het niet alleen overbodig is om voor diagnostische toetsen cijfers te geven, maar ongewenst, kan ondersteund worden door een aantal argumenten, waarvan mij persoonlijk vooral de volgende twee aanspreken:

- (A) Resultaten van toetsingen tijdens een leerproces zijn bedoeld om te helpen bij het eventueel bijsturen van dit proces. Ik zou niet weten hoe ik die resultaten zinvol kan combineren met resultaten van toetsingen na afloop van een leerproces, d.w.z. de resultaten van de zogeheten repetities en proefwerken.
Dit werkt des te sterker omdat
- (B) ik wil dat mijn leerlingen mij zoveel mogelijk zien als hulp bij het leren en zo min mogelijk als een beoordelaar waarvoor ze zwakheden moeten verbergen.

Nogmaals zou ik willen stellen dat het belangrijk is om de leerlingen te begeleiden bij hun leerprocessen, en dat mede door hen te helpen verkeerd verlopende leerprocessen bij te sturen. Hiervoor hebben we de diagnostische toetsen. Afgeronde leerprocessen worden beoordeeld m.b.v. repetities en/of proefwerken, die tot doel hebben aan het licht te brengen of een leerling al dan niet voldoet aan een standaardnorm, of om de prestaties van een leerling te vergelijken met die van andere leerlingen.

Ik moet hierbij steeds denken aan mijn oude wiskundeleraar. Deze gaf vaak kleine schriftelijke werkjes aan het eind van een lesuur, die we het volgende lesuur terugkregen voorzien van aanwijzingen voor alsnog te bestuderen leerstof. Achteraf besef ik dat hij – net als wij (?) – erg hard werkte en beslist niet om ons te pesten.

Waarom werk-, praatconferenties?

Hiervoor heb ik al opgemerkt dat over verschillende aspecten van het toetsen in het algemeen en over diagnostisch toetsen in het bijzonder veel te zeggen en te lezen valt. Veel van al datgene dat er te zeggen valt weten we eigenlijk al, deels bewust deels onbewust. Toch is het m.i. belangrijk er samen aan te werken en over te praten, want juist door het op een rijtje te zetten van eigen praktijkervaringen – dat valt trouwens niet eens mee – de pogingen om je opvattingen te motiveren tegenover collega's en het gaan gebruiken van het tijdens de informatieve voordrachten aangereikte theoretische kader ontstaat een grotere duidelijkheid. Duidelijkheid zowel t.a.v. hetgeen we wél kunnen/kennen/willen, als t.a.v. hetgeen we nog niet kennen/kunnen/willen. Het is bovendien mijn stellige overtuiging dat het centrale probleem bij het samenstellen van toetsen de leerstofanalyse is. En juist leerstofanalyse is iets dat het best geleerd kan worden door samen met anderen een stuk leerstof aan te pakken. Dit samen analyseren van een stuk leerstof is echter niet alleen nodig voor het samenstellen van goede diagnostische toetsen maar voor alle onderwijsactiviteiten, die dienen ter ondersteuning van leeractiviteiten van de leerlingen.

Willen we werken aan een kwaliteitsverbetering van ons onderwijs, dan zullen we o.a. opnieuw naar ons eigen onderwijs moeten kijken. En dan niet alleen op het gevoel maar ook beredeneerd, zodat achteraf nagegaan kan worden of de eventuele veranderingen in ons onderwijs ook inderdaad verbeteringen zijn. In dit verband juich ik de beslissing van de leiders van de conferentie toe om na verloop van zo'n drie maanden een follow-up bijeenkomst te organiseren, waarin ervaringen kunnen worden uitgewisseld.

Afbeeldingen zonder dekelement

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

1 In *Euclides* 51 (1975–76), no. 3, p. 104–106 bepaalt W. A. M. Burgers het aantal afbeeldingen van een verzameling van n elementen op zich zelf met de eigenschap dat geen enkel beeld samenvalt met zijn origineel. Uit belangstelling voor het artikel maken wij enige aanvullende opmerkingen.

2 Voor het genoemde aantal, door A_n aangeduid, vindt Burgers de eenvoudige recurrenthe betrekking

$$A_n = nA_{n-1} + (-1)^n, \quad (1)$$

die hij met volledige inductie bewijst. Men kan (1) als volgt herleiden:

$$A_n = (n-1)A_{n-1} + A_{n-1} + (-1)^n = (n-1)A_{n-1} + (n-1)A_{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n, \text{ zodat er komt}$$

$$A_{n+1} = n(A_n + A_{n-1}), \quad (2)$$

waardoor, met behulp van $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ de A_n voor elke n bepaald is. Het is formule (2) die men in beschouwingen over het vraagstuk – dat bekend staat als het *problème des rencontres*¹ – in de regel tegenkomt. – De redactie luidt dan veelal: bij hoeveel van de $n!$ permutaties van n elementen blijft geen één op zijn plaats.

3 Een bewijs voor (2), vrijwel zonder rekenwerk, gaat als volgt. Laat de elementen aanvankelijk staan in de natuurlijke volgorde $1, 2, \dots, n$ en zij P_k de oorspronkelijke plaats van het element k . Nu komt $n+1$ er nog bij; bij permutatie mag het niet op P_{n+1} komen, maar op één der plaatsen P_k ($k = 1, \dots, n$). Zeg het komt op P_m . Er zijn twee mogelijkheden: het element m komt niet op P_{n+1} of wél op P_{n+1} . In het eerste geval is het aantal toegestane permutaties van $1, 2, \dots, n$, met voor elk element (ook m) één verboden plaats, gelijk aan A_n ; in het tweede geval liggen m en $n+1$ vast en krijgen wij nog A_{n-1} geoorloofde permutaties. Daar er n mogelijkheden voor m zijn krijgt men (2).

¹ Het vraagstuk is reeds behandeld door Montmort (1678–1719) in zijn *Essai d'analyse sur les jeux de hazards*, waarvan de eerste uitgave in 1708 verscheen. Zie voor de geschiedenis van het probleem Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability* (1865; herdruk New York, 1949; p. 91 e.v.). Een eenvoudige afleiding, met generalisaties, geeft b.v. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I (New York–London, 1957; p. 90, 97, 102).

4 De kans dat bij een permutatie van n elementen geen één op zijn plaats blijft is $k_n = A_n/n!$. Een bekende inkleding van een vraagstuk uit de waarschijnlijkheidsrekening is het verhaal van de gemakzuchtige kantoorbediende die n verschillende brieven elk in een daarvoor bestemde enveloppe moet steken en die het maar doet op goed geluk. De kans dat geen enkele brief goed terecht komt is k_n .

5 Interessant is het gedrag van k_n voor grote waarden van n . Zoals ook Burgers heeft aangetoond geldt expliciet

$$A_n = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right];$$

daaruit volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = e^{-1} \sim 0.368, \quad (4)$$

een limiet die snel bereikt wordt: $k_4 = \frac{3}{8} = 0.375$, $k_5 = \frac{11}{30} \sim 0.367$.

Men heeft (4) wel geverifieerd met statistische gegevens. Bij het vroegere systeem van loting voor de militaire dienst trok elke betrokkene individueel zijn nummer. Door gedurende een aantal jaren na te gaan of het al dan niet voor kwam dat één of meer lotelingen hun eigen rangnummer (b.v. van een alfabetische lijst) trokken, kon het getal e experimenteel worden benaderd. Ieder kan de proef nadoen door een redelijk aantal malen achtereenvolgend door het toeval bepaalde permutatie van n elementen voort te brengen en van elk na te gaan of zij wel of niet zonder dekelementen is; n mag daarbij een klein getal zijn. De procedure is een pendant van de uit het probleem van Buffon voortvloeiende bepaling van π door het werpen van naalden op een van equidistante rechte lijnen voorziene tafel.

Ontvangen boeken

Dr. P. M. van Hiele e.a. *Van A tot Z*, wiskundewerkboek voor mavo, M1a, 145 blz. M1b, 186 blz. Muusses, Purmerend, 1976, 5e geheel herziene druk. M1a f 14,50, M1b f 14,50.

Van A tot Z, wiskundewerkboek voor havo/vwo, HV1a, 190 blz., HV1b, 244 blz., Muusses, Purmerend, 1976, 5e geheel herziene druk. HV1a f 15,90, HV1b f 15,90.

Van A tot Z, wiskundewerkboek voor havo, H-5, 204 blz., Muusses, Purmerend, 1976, f 19,50.

Toelichting bij *Van A tot Z*, deel 1a en 1b gratis.

Van A tot Z, wiskundewerkschrift voor de brugklas, 48 blz. f 4,90.

Annals of systems research, H. E. Stenfort Kroese B.V., Leiden, Volume 4, 157 blz. Publicatie van de systeemgroep Nederland onder redactie van Prof. B. van Rootselaar.

De C.M.L.-wiskunde

een interview met prof. dr. H. Freudenthal

met toestemming van de redactie en van Prof. Freudenthal overgenomen uit het tijdschrift *RESONANS*, 8e jaargang no. 1, september 1975 (uitgave Wolters-Noordhoff).

Binnen de Commissies Modernisering Leerplan bezit die van de Wiskunde, niet alleen het eerstgeboorterecht, maar bovendien ook een eigen Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs, waaraan zij haar gangbare naam ontleent: het IOWO. Zonder aan het werk van de andere Commissies iets af te doen kan men constateren dat in de activiteiten van het IOWO exemplarisch blijkt op welke manier een samenhangende, longitudinale leerplanontwikkeling tot stand kan komen.

In het tweede gedeelte van het hier afgedrukte interview gaat professor Freudenthal wat dieper in op het verschil tussen differentiatie volgens de leerstof, en differentiatie volgens het leerproces; de uitbouw van de door hem voorgestane differentiatie volgens het leerproces zou wel eens een belangrijke factor kunnen worden in de vormgeving van de Middenschool.

Alhoewel uw naam en ook de naam van het IOWO in het buitenland bekend zijn, zoals Resonans onlangs nog kon vaststellen, hebben niet alle Resonans-lezers iets met het wiskundeonderwijs te maken en het is daarom nuttig als u eerst iets zou willen vertellen over de geschiedenis van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) en het Instituut voor Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO).

Zoals u weet, is de CMLW de eerste geweest onder de moderniseringscommissies, opgericht en geïnstalleerd in 1961. Voor die tijd uniek, omdat de samenstelling van de commissie bijzonder breed was, met nogal wat mensen uit het universitair onderwijs, en ook de taak bijzonder breed was: ontwikkeling van een nieuw leerplan, experimenten en heroriëntering van de leerkrachten. Die taakstelling schijnt gefunctioneerd te hebben, want ongeveer dezelfde formule is aangehouden voor de volgende CML-en die opgericht zijn in de loop van de jaren. Het duurde trouwens nogal even voor de tweede kwam en het is merkwaardig dat zo'n belangrijke commissie als die voor het Nederlands (moedertaalonderwijs) een van de laatste is geweest.

Internationale invloeden speelden hier mee, uitgaande van Amerika en overgenomen door de in Parijs zetelende organisatie voor Europese (later economische) samenwerking. De nadruk op een totaal nieuwe wiskunde was enig-

zins begrijpelijk, want de krachten die in eerste instantie aangetrokken werden door de OESO waren Fransen, en het Franse wiskundeonderwijs was hopeloos verouderd in die tijd. Daar moest alles totaal veranderd worden en men realiseerde zich niet, dat je dan ook iets met de leraren en onderwijzers moest doen en dat die zo'n stap misschien niet zonder meer aan zouden kunnen. In die zin kan men zeggen dat zowel in Frankrijk als in Duitsland de invloed van de OESO funest is geweest; gelukkig hebben wij hier in Nederland de boot enigszins af kunnen houden. De CMLW is met vrij gematigde vernieuwingen gekomen, zonder te sterke nadruk te leggen op abstractie en een te sterk loslaten van de toepassingen, en die programma's zijn dan door leerboekschrijvers over het algemeen op redelijke wijze geïnterpreteerd. Dat hadden we natuurlijk niet in de hand, leerboeken schrijven was niet onze taak. Wij hadden een leerplan te ontwikkelen, we hadden de onderwijzers, de leraren opnieuw voor te bereiden op hun taak, en we hebben ook geëxperimenteerd, maar in het algemeen kan je zeggen dat wij, zo hard als we holden, toch altijd achter de hele ontwikkeling aanrenden. U weet natuurlijk dat in de jaren sinds 1960 het Nederlandse onderwijs ontzaglijk veel is veranderd. We hebben toen eigenlijk programma's gemaakt voor, en experimenten gedaan in, schooltypen die niet meer bestaan, en al wat je deed, was door de feiten achterhaald.

Oorspronkelijk dacht je alleen maar aan gymnasium en hbs, heel oorspronkelijk zelfs alleen aan de bovenbouw. Maar gelukkig zijn we toch gauw ook tot het mavo overgegaan en dat was een heel belangrijke stap. Want als je nu het voortgezet onderwijs bekijkt op wat er veranderd is, dan is de hoofdzaak dat het zwaartepunt van het onderwijs naar het mavo verschoven is, zeker wat de wiskunde aangaat. Er doen op het ogenblik, ik weet het niet precies, misschien vijf keer zoveel kinderen boven de 14 jaar wiskunde als daarvoor en dat is voor 't grootste deel aan het mavo toe te schrijven. Zo iets bepaalt natuurlijk het hele wiskundeonderwijs.

Het is duidelijk dat uitgevers wanneer ze wiskunde uitgeven voor voortgezet onderwijs, in eerste instantie aan mavo denken en dat er dan misschien, om zo te zeggen als aanvulling, nog wat boekjes bijkomen voor havo en vwo, tenminste wat de onderbouw aangaat.

Het mavo bepaalt nu de hele situatie. De grote groei van belangstelling voor het wiskundeonderwijs, die in Nederland nog aanhoudt, terwijl in alle andere landen de belangstelling terugloopt, is een heel merkwaardig verschijnsel dat wel samenhangt met de niet te abstracte programma's die wij voor het voortgezet onderwijs ontwikkeld hebben en ook door enigszins concrete interpretaties die daarvan in de leerboeken gegeven zijn.

U bent in de basisschool begonnen, terwijl vernieuwingen vroeger vaak van bovenaf werden opgedrongen.

Neen, historisch kwam dit later. Wiskobas kwam pas in 1968. Daar was ik in mijn verhaal nog niet aan toe, want dat was de jongste ontwikkeling en de ontwikkeling in het voortgezet onderwijs sluit niet aan op die in het basisonderwijs.

In het basisonderwijs zijn er nog praktisch geen vernieuwingen. Alle vernieu-

wingen liggen in het voortgezet onderwijs en daarbij speelt het mavo een grote rol. Het lbo staat nu voor de deur om ook aan de beurt te komen. De structuur van het lbo is ontzaglijk veranderd, maar goed, de wiskunde begint nu pas het lbo echt binnen te dringen en ook dat levert natuurlijk weer een groot aantal leerlingen op, die wiskunde doen in het voortgezet onderwijs.

Reacties zijn trouwens niet uitgebleven. De wiskunde die nu in het voortgezet onderwijs gegeven wordt, lijkt niet meer op wat er vroeger geweest is en er zijn er natuurlijk een aantal die dat moeilijk kunnen verwerken, zowel de sterke uitbreiding van de wiskunde waardoor het niveau schijnt te zakken, als ook de verandering van programma's. Dat heeft tot repercussies geleid. Toch moet ik zeggen dat de klachten over de moderne wiskunde op school, die al jaren aan de universiteiten gehoord werden, terwijl er nog geen leerling met moderne wiskunde eindexamen had gedaan, nu dat het menens is, verstomd zijn. De wiskunde in het voortgezet onderwijs is nu veel beter aangepast aan wat op universiteiten en hogescholen wordt geëist.

We zijn dus ook in de loop van de tijd ertoe gekomen ons met het basisonderwijs bezig te houden en daar is het ook onze eerste taak geweest die buitenlandse invloeden, die vooral in Duitsland heel veel verwoestingen aangericht hebben, tegen te houden. Inmiddels, in 1971, heeft de CMLW een instituut gekregen, het IOWO, waardoor de activiteiten in het basisonderwijs eigenlijk pas goed konden beginnen. Daarvoor was alles wat we deden te weinig professioneel, het werd in principe gedaan door mensen in hun vrije tijd. Sinds 1971 zijn onze bemoeiingen met het voortgezet onderwijs en met het basisonderwijs geprofessionaliseerd en terwijl in het voortgezet onderwijs alles uiteraard nog vrij onsystematisch is, is dat in het basisonderwijs al veel gemakkelijker gegaan. Ik moet er meteen het kleuteronderwijs ook bij betrekken, hoewel we daaraan nog weinig gedaan hebben. In het basisonderwijs hebben we meer systematisch van de grond af aan kunnen beginnen en als dat nu eens afgerond wordt, kun je in het voortgezet onderwijs daarop voortbouwen.

Van het begin af aan hebben we op het standpunt gestaan:

nauwe samenwerking met het veld, geen leerplanontwikkeling van achter een bureau. Die nauwe samenwerking met het veld komt in de Wisbobaswerkgroepen tot uitdrukking, komt tot uitdrukking in heroriënteringscursussen voor onderwijzers, waaraan duizenden onderwijzers hebben deelgenomen en waar we ervaringen hebben opgedaan van wat je met onderwijzers kunt doen, wat onderwijzers in de klas kunnen doen.

Daarnaast is dan systematisch aan leerplanontwikkeling gedaan aan een basisschool in Arnhem, de Dr. W. Dreesschool.

Daar hebben we dus een hele school onder handen genomen, een wiskunde-leerplan en schoolwerkplan ontwikkeld voor de hele school, uiteraard samen met de onderwijzers, die daarbij een grote rol speelden. Je kunt van achter het bureau iets verzinnen, je kunt de onderwijzer zeggen 'dat moet je doen', maar de onderwijzer zal je laten zien of het kan; de leerlingen doen het door hun reacties natuurlijk ook. Zij zullen je laten zien, of iets functioneert, en langzamerhand leer je het klappen van de zweep kennen. We zijn nu zo ver, dat wij aan het eind van dit jaar een ontwerpleerplan kunnen voorleggen, een leerplan en een uitgewerkt voorbeeld-schoolwerkplan voor het basisonderwijs,

het hele basisonderwijs.

Ons schoolwerkplan en onderwijsleerplan verschillen in opzet sterk van wat je in de meeste andere landen aantreft. In die landen heeft men het heil in grotere abstractie gezocht en aan de andere kant deze abstractie, die natuurlijk voor kinderen toegankelijk is, verzacht door concreet materiaal. Wij hebben integendeel het standpunt ingenomen dat we zo concreet mogelijk willen beginnen en alles in willen passen in concrete levenssituaties van het kind. Er zijn heel weinig plaatsen op de wereld waar men op hetzelfde standpunt staat. We hopen dat dat functioneert; we zien aan de proefschool in Arnhem in elk geval dat het *kan* functioneren. Je kunt zeggen: deze school is, hoewel het een gewone school was, nu natuurlijk geen gewone school meer, nadat ze door ons zo nauw begeleid is. We moeten dus een strategie ontwikkelen waarmee we wat in Arnhem gedaan is, overdraagbaar kunnen maken, zodat het op andere plaatsen door kan werken, en dat is ons plan voor de eerstvolgende tijd. We beginnen met een groter aantal volgscholen met minder begeleiding, om te zien hoe dat functioneert.

Vindt u niet dat zoiets een bezwaar kan zijn, dat u in één school bezig bent geweest met mensen die door het samenwerken met de medewerkers van CMLW toch op een ander niveau kwamen. Zou het zo kunnen zijn dat u, nu u toch materiaal heeft, ideeën heeft die niet direct toepasbaar zijn, u iets mist in de evaluatie?

Ja, dat is tendele natuurlijk het geval, dat moeten we zien op te vangen. Daarvoor is vereist een hele strategie van onderwijsvernieuwing waarbij het voorbereiden van de onderwijzers en onderwijzeressen een grote rol speelt.

We hebben een directe greep op de *toekomstige* onderwijzer doordat wij nauw samenwerken met vrijwel alle pedagogische academies. Praktisch alle pedagogische academies gebruiken materiaal dat door ons gemaakt is. Dit materiaal verandert ook weer van aard. Oorspronkelijk stond het nog los van het bedoelde basisonderwijs; op het ogenblik echter wordt materiaal voor de pedagogische academies gemaakt dat om stukken uit het Arnhemse schoolwerkplan heen gebouwd is. Dat is een principe dat wij ook elders, bij het lbo bijvoorbeeld, geaccepteerd hebben, waar we soortgelijk didactisch materiaal voor de heren bijscholing maken. Het zal een hele hijs zijn om iets van die vernieuwing het grote veld in te brengen en we zijn nog niet klaar met het ontwikkelen van een strategie daarvoor. Allereerst moet het veld zijn oordeel over ons leerplan afgeven. In de eerstvolgende jaren zal ons leerplan aan het veld ter discussie worden voorgelegd en we zullen uit deze discussies positieve of negatieve consequenties moeten trekken.

Daarna en gelijktijdig daarmee begint de implementatie, begint het overbrengen op het veld in brede zin van wat wij gemaakt hebben. Hoe dat moet gebeuren, met medewerking van pedagogische academies, met medewerking vooral van de landelijke en regionale pedagogische centra, valt op het ogenblik nog niet te zeggen, maar we moeten alle middelen die daarvoor denkbaar zijn, gebruiken en vooral de televisie niet vergeten. Want dat is niet alleen een van de belangrijkste middelen voor direct onderwijs aan leerlingen maar ook voor de voorbereiding van onderwijzers.

Alweer het hele materiaal, dat wij ontwikkeld hebben, is zo voor het basis-onderwijs gemaakt dat het van de onderwijzer geen speciale mathematische kennis vereist. Het is wiskunde in de beste zin van het woord, het is zonder vakwetenschappelijke voorbereiding voor ieder mens met gezond verstand begrijpelijk. Wat wel nieuw is en waarin de onderwijzer geschoold moet worden, is een geheel nieuwe didactische aanpak. Het is materiaal dat je niet zomaar in sommetjes uitdrukt die je de leerling laat doen, maar materiaal dat gebracht moet worden door de onderwijzer of waarmee de leerling zelfstandig moet werken. Het is bepaald niet zo dat het materiaal dat door ons ontwikkeld is, nu nagebootst moet worden. Het materiaal dat wij in Arnhem ontwikkeld hebben en dat wij gaan voorleggen, moet voor de onderwijzer en misschien ook voor leerboekauteurs vooral een bron van inspiratie zijn. Wat ze moeten overbrengen, is niet zozeer de leerstof, maar de geest van het geheel, want daar komt het op aan. Wij rekenen er niet op dat wat we op die school in Arnhem gemaakt hebben zomaar als leerboek verschijnt en door veel scholen zo overgenomen kan worden. Het is gedeeltelijk nauw gebonden aan de speciale toestand in Arnhem. Er komen dingen voor die je helemaal niet kunt nabootsen, omdat het een wiskunde is die sterk op de werkelijkheid georiënteerd is. Er zitten bijvoorbeeld hele stukken in waarin de leerlingen de omgeving van de school verkennen en wat ze daar aan aardrijkskunde, verkeerskunde en bouwkunde vinden, wiskundig bewerken en er wiskunde van maken. Zo iets is plaatselijk bepaald, maar evenzeer kan iets door de belangstelling van de onderwijzer bepaald zijn.

Dus wat wij willen, is vooral de geest van het programma overbrengen. Die geest moet er zo duidelijk uit spreken, dat als we het programma aan de openbaarheid overleggen, iedereen kan begrijpen dat wat we daar brengen, noodzakelijk en nuttig is.

Ik begrijp, professor, dat u veel belangstelling heeft voor het implementeren, zoals 't dan wel duur heet, en dat zou dan vermoedelijk in de nieuwe structuur toch via de pedagogische centra moeten.

Pedagogische centra, dat wil zeggen landelijke en vooral ook de plaatselijke en regionale centra. Die staan direct met het veld in verbinding.

U heeft tijdens de Gesamtschule-conferentie te Beekbergen gezegd, dat de structuur van de wiskunde als onderwijskundig object als het ware berekend is op differentiatie zonder separatie. In de wiskunde nodigt de structuur van het leerproces uit de differentiatie der lerenden te vertalen in een differentiatie van het leerproces. 'In het algemeen bevinden leerlingen zich naast elkaar op verschillende niveaus van het leerproces en ze kunnen met elkaar, in heterogene groepen, op verschillende niveaus werkzaam zijn.' En u heeft voorbeelden gegeven van niveaus in het leerproces:

'Mijn eerste voorbeeld is in het geheel niet wiskundig van aard. Ik ben met mijn kleinzoon van $3\frac{1}{2}$ jaar aan het wandelen. Een invalidenwagentje, door een verpleegster geduwd, haalt ons in. De inzittende dame zegt iets tegen de zuster.

Mijn kleinzootje vraagt: 'Wat zei die mevrouw tegen die mevrouw die het wagentje duwt? Na het tweede 'mevrouw' aarzelde hij, om dan ineens de bijzin als een waterval uit te storten. Klaarblijkelijk had hij opgemerkt, dat met het dubbele 'mevrouw' iets niet klopte; de bijzin was een bewuste (namelijk als noodzakelijk erkende) toegift.

De constructie van mijn kleinzootje is halfslachtig: 'die mevrouw' is de eerste keer demonstratief, de tweede keer, met de toegift, relatief. Zuiver demonstratief zou zijn 'Wat zei die mevrouw tegen die mevrouw?' Compleet relatief ware 'Wat zei die mevrouw in de wagen tegen die mevrouw die het wagentje duwt?'.

Mijn tweede voorbeeld:

U kent nog – naar ik hoop – de stelling van de drie middelloodlijnen van een driehoek, die door één punt gaan, het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Op deze wijze geformuleerd is deze stelling voor zelfstandige bewijspogingen (zeg van 12-jarigen) nauwelijks toegankelijk. Stelt men echter voor 'trek de middelloodlijnen van AB en BC en noem hun snijpunt M , laat zien dat ook de middelloodlijn van CA door M gaat', dan zullen niet weinigen het bewijs vinden.

Ik heb de stelling met conventionele variabelen geformuleerd; demonstratieve aanbieding is volstrekt mogelijk. Essentieel is alleen dat de leerlingen de eigenschappen der middelloodlijn, eventueel puur demonstratief, beheersen.

U weet misschien hoe het bewijs loopt: aangezien M op de middelloodlijn van AB ligt, is

$$MA = MB;$$

aangezien M op de middelloodlijn van BC ligt, is

$$MB = MC;$$

Dus

$$MC = MA.$$

en dus ligt M ook op de middelloodlijn van CA .

Zo'n bewijs is geheel demonstratief te voeren. Maar in wat we hier toonden, zit meer dan alleen verhoging van het taalkundig niveau. Hier is – geheel naïef – twee keer de eigenschap der middelloodlijnen in de ene richting en één keer in de omgekeerde richting toegepast, even naïef is de transitiviteit van de gelijkheidsrelatie erin gekomen (als $a = b$ en $b = c$, dan $a = c$) en tenslotte is de – al in de formulering besloten – asymmetrisering van de oorspronkelijke stelling naïef aanvaard.

Op al die punten kan de leerling naïef blijven. Maar evenzeer kan hij het verloop van het bewijs structureren, de afzonderlijke stappen onder de loep nemen, de logische structuur van het 'noodzakelijk voldoende' van een karakteriserende beschrijving herkennen, zich de transitiviteit van de gelijkheidsrelatie met haar ver strekkende gevolgen bewust maken, de asymmetrisering van symmetrische uitspraken als fundamenteel principe herkennen, en wat anders in dit bewijs zou kunnen schuilen – allemaal mathematische activiteiten van een hoger niveau dan dat voor allen – of althans voor velen – toegankelijke. Men zou grondig moeten onderzoeken, hoe leerstof geprogrammeerd dient te worden, opdat in groepsworkshops enkelen deze niveaus beklimmen en misschien anderen met zich mee trekken, in de positieve zin van het woord.'

Nu is er een mavo-project gestart en daarin wordt ook onderscheid gemaakt tussen differentiële en minimumdoelstellingen. Het project moet starten over een jaar, dat wil zeggen dat nu vanaf augustus groepen van drie mavo-docenten en een vwo-docent zich gaan bezinnen op wat dan wel die differentiële en minimumdoelstellingen zijn. En in de opzet van het project wordt eigenlijk ervan uitgegaan – dat kun je opmaken uit de gebruikte terminologie – dat de differentiatie toch een zaak is van verschillende leerstof. Is dat een ontwikkeling die u toejuicht?

Nee, bepaald niet. Ik dacht, wat de wiskunde aangaat, dat dat gewoon funest is, differentiaties volgens leerstof. Maar je moet dan natuurlijk wel andere wegen laten zien, en ik geef toe dat andere wegen moeilijker zijn.

Differentiatie volgens leerstof is de weg van de minste weerstand, dat is makkelijk te organiseren en ik geloof niet dat het de juiste weg is, omdat het gewoon de leerlingen uit elkaar trekt. Je krijgt hetzelfde verschijnsel als je vroeger had: één leerling gaat de ene, de ander gaat de andere kant op; de Middenschool is alleen nog een dak boven het hoofd van verschillende soorten leerlingen en een werkelijke integratie vindt niet plaats. Misschien kan het niet, dat weet ik niet, maar ik vind als je die integratie niet tot stand kunt brengen, laat dan die hele Middenschool maar: laat de terminologie weg, laat het bij het oude – dat is tenminste eerlijk – en breng de leerlingen niet gewoon maar formeel onder één dak. Maar ik moet zeggen, in Parijs waar ze ook soortgelijk werk als wij doen, heb ik een experiment gezien in een derde klas basisschool waar kinderen op zeer verschillende niveaus aan één zelfde vraagstuk werken – het was gewoon verbazingwekkend.

Je moet daar het materiaal voor vinden en ik ben ervan overtuigd, als je goed uitkijkt, dan kun je dat ook doen. Maar goed, dat systeem van de leerstof-differentiatie is wel makkelijk, je maakt je er in feite met een Jantje van Leiden vanaf.

U heeft aan het einde van uw redevoering in Beekbergen gezegd, dat men grondig zou moeten onderzoeken, hoe leerstof geprogrammeerd dient te worden, opdat in groepswork enkelen deze niveaus beklimmen en misschien anderen met zich meetrekken. Wij zijn erg geïnteresseerd of dat binnen het IOWO gebeurt . . .

Wij zijn bezig met een aantal experimenten met heterogene leergroepen in de brugklas. Vier leerlingen, bijv. een vwo-leerling, een mavo-leerling, een lto-leerling en een lhno-leerling. We geven ze een probleem om te behandelen en het meest opvallende is dat, als je achteraf de video-opnamen aan buitenstaanders laat zien, en ze laat raden wie die vwo-leerling is, ze er niets van terecht brengen. Ik wil niet zeggen dat die leerlingen in zo'n heterogene groep gelijkwaardig werken, als ze dezelfde activiteit ontplooiën, maar het is ook niet zo hopeloos als je misschien denkt. Aan de andere kant hebben we ook experimenten opgezet, homogene groepen van vwo- en van lhno-leerlingen met dezelfde onderwerpen, waarbij natuurlijk dan die vwo-groep ver boven de lhno-groep uitsteekt, en waarbij je heel goed kunt zien waar de verschillen in zitten. Jammer, het zijn maar kleine experimenten waar we mee bezig zijn; wij kunnen helaas niet genoeg aan al deze zaken doen, omdat we gewoon de

mankracht er niet voor hebben.

Wij besteden in het voortgezet onderwijs op het ogenblik al onze aandacht, omdat dat bijzonder dringend is, aan het lbo dat nieuwe programma's moet hebben . . .

Maar daar speelt het probleem ook.

Daar speelt het probleem ook en daar proberen we het dan ook een beetje. Maar wat wij op het ogenblik voor het lbo moeten doen, is hoofdzakelijk de heroriëntering van de leraren in het lbo die onbevoegd zijn geworden doordat de wiskunde in het lbo gekomen is. Dat zijn er een duizendtal.

We bereiden iets voor om die te herscholen; dat neemt zeer veel tijd in beslag. Daarnaast zijn we met alle mogelijke experimenten bezig, maar toch niet op zo grote en zo diepgaande schaal als we zouden willen.

In Resonans heeft de voorzitter van de Commissie Moedertaalonderwijs, de volgende uitspraak gedaan: 'Leerlingen leren zich te oriënteren in deze wereld door gebruik te maken van hun moedertaal, een andere methode hebben ze nauwelijks.

Een leerling leert zich zelf een plaats te bepalen in deze wereld door gebruikmaking van de taal en of dat nu toevallig een plaatsbepaling is die meer valt binnen het kader van het vak aardrijkskunde of het vak geschiedenis is niet interessant. Hij doet dat door middel van taal.'

Alleen al 'een plaats te bepalen' maakt duidelijk dat de wiskunde die oriëntering bevordert. Bovendien, kinderen bedrijven al heel jong wiskunde.

Wij doen veel aan moedertaal. We hadden graag een medewerker moedertaal in ons IOWO willen hebben. Dat is niet gelukt, maar wij besteden heel veel aandacht aan de taal, niet aan de taal als creatief element maar als middel om te formuleren, gedachten uit te drukken; we beschouwen dat als bijzonder belangrijk, maar je moet in die richting natuurlijk ook weer niet overdrijven. Ik ben van mening dat de kinderen op lagere-schoolleeftijd, tot de leeftijd van 10-11 jaar, sterk meetkundig ingesteld zijn, alle begrippen zitten aan de optiek vast. Het meetkundeonderwijs zoals we dat vanouds kennen, is, zoals het begint in het voortgezet onderwijs, eigenlijk een onderwijs in het taaltje van de meetkunde – een bijzonder moeilijke taal als je ze de kinderen kunstmatig oplegt. Je moet van alle uitingsmiddelen van de kinderen gebruik maken, de kinderen kunnen zich in de wiskunde meetkundig, door te tekenen bijvoorbeeld, heel goed uiten en dan moet je niet eisen dat ze dat ook nog in woorden kunnen zeggen. Waar de taalkundige middelen toereikend zijn, maak daar van die taalkundige middelen gebruik, maar leg de kinderen niet onmiddellijk taalkundige middelen op die hen vreemd zijn, zoals dat feitelijk in het meetkundeonderwijs van het voortgezet onderwijs traditioneel gebeurde.

Buigpunt ja, buigpunt nee?

DRS. A. H. NIEUWENHUIJS

Dit verhaal handelt over problemen die kunnen optreden bij het zoeken naar buigpunten van krommen, gegeven in een parametervoorstelling.

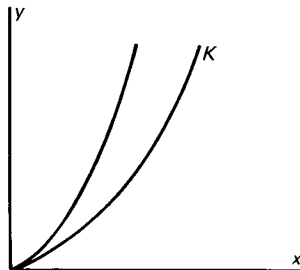
Op onze scholen zijn twee methoden in omloop om buigpunten in grafieken van functies te bepalen.

- 1 Via de tekenwisselingen van $f''(x)$.
- 2 Via de extremen van $f'(x)$.

Bij methode 2 worden dan de punten op de grafiek, waarin de raaklijn vertikaal is apart onderzocht. Als we op zoek gaan naar buigpunten van krommen ligt het voor de hand te proberen een van beide methoden te generaliseren. Doen we dit met 1, dan vinden we:

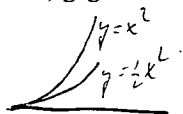
1' Splits de kromme K in grafieken van functies en spoor de buigpunten in die grafieken op. Onderzoek daarna de punten, waarin de grafieken samenkomen. Deze methode is lomp, maar degelijk. Hij is vaak nogal tijdrovend en soms is het vrij lastig om functies te vinden, die het gevraagde presteren. Bovendien: Wat is de grap van krommen, als je toch voor het vinden van bijzonderheden weer terug gaat naar functies? Het lijkt dan ook niet raadzaam deze methode op het V.W.O. te gebruiken. De weg die dan overblijft is het generaliseren van methode 2. Dat gebeurt, denk ik, op de meeste scholen, waar buigpunten van krommen worden behandeld. Gebruikelijk is de volgende generalisatie:

2' Als $(x(t), y(t))$ een parameter voorstelling van de kromme K is, dan is dy/dx een functie van t . Spoor de extremen van die functie op. Dit geeft de buigpunten van K .



(Uiteraard worden de punten met een vertikale raaklijn apart onderzocht, evenals in 2). We wagen ons nu wel op glad ijs! In tegenstelling tot f' in 2 is dy/dx nu geen functie van x , maar van t . Dat nu gooit roet in het eten. Bekijken we als voorbeeld de kromme K , gegeven door:

$$x = |t| \text{ en } y = \begin{cases} t^2, & \text{als } t \geq 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & \text{als } t \leq 0 \end{cases}$$



$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 2t, & \text{als } t \geq 0 \\ -t, & \text{als } t \leq 0 \end{cases}$$



Vrij snel is na te gaan dat

dy/dx is nu minimaal voor $t = 0$, maar de oorsprong is toch geen buigpunt van K .

Op precies dezelfde manier lopen we vast bij de kromme, gegeven door $x = |t|$ en $y = t^2$. In dit geval is de kromme zelfs nog de grafiek van een functie. Vinden we in deze gevallen buigpunten, die geen buigpunten blijken te zijn, het hek is helemaal van de dam, als we de (stilzwijgende) eis laten vallen dat de functies $x(t)$ en $y(t)$ continu zijn. De als functie van t gedefinieerde dy/dx geeft nu niet altijd meer de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punten van K , zodat er op onvermoede plaatsen buigpunten op kunnen duiken. Waarschijnlijk zal deze situatie zich op V.W.O. niveau niet voordoen. Maar ook bij continue functies zijn calamiteiten niet altijd tegen te gaan, zoals ik heb pogen aan te tonen. Natuurlijk zal in bepaalde gevallen de bestudering van de grafiek vermoedens omtrent het al of niet buigpunt zijn van een punt versterken, maar of zo'n vermoeden dan wiskundig bewezen is betwijfel ik. Het lijkt me dat we ook 'methode' 2' voor het bepalen van buigpunten beter niet kunnen gebruiken. Maar wat dan? Ik wil er voor pleiten het onderwerp 'Buigpunten van een kromme, gegeven door een parametervoorstelling' uit het examenprogramma van het V.W.O. te schrappen. Zeker voorlopig, totdat de boeken een goede (en voor onze leerlingen geschikte) behandeling van dit onderwerp geven.

Het Vlaamse tijdschrift Wiskunde en Onderwijs

Evenals vorige jaren kunnen leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zich via de penningmeester van Euclides abonneren op het Vlaamse tijdschrift Wiskunde en Onderwijs. Dit tijdschrift is het orgaan van onze Vlaamse zustervereniging, de VVWL. Het verschijnt viermaal per jaar en is stellig de moeite van het lezen waard.

De abonnementsprijs bedraagt f 20.—. Deze heeft betrekking op een abonnement gedurende een kalenderjaar.

Wie zich als abonnee wil opgeven, kan dit doen door het bedrag voor 1 december over te maken op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth. Verzoeken te vermelden: nieuw abonnee.

Wie abonnee is, blijft als zodanig ingeschreven, tenzij hij mij dit voor 1 december meedeelt.

Ook de huidige abonnees wordt vriendelijk verzocht het abonnementsgeld voor 1 december te willen overmaken.

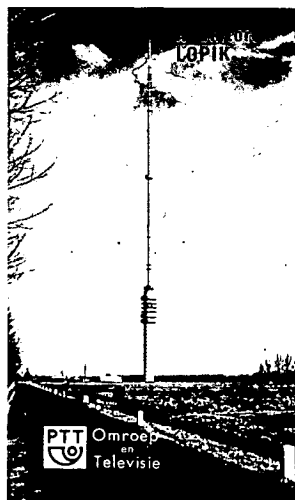
P. G. J. Vredenduin
penningmeester Euclides

Dillenburg 148
Doorwerth

Een maximum-probleem bij zien en fotograferen

IR. H. M. MULDER

Breda



We staan aan de voet van de radiomast Lopik.

De toren bestaat uit een stenen onderbouw en een metalen constructie daar boven op.

Onze bedoeling nu is om, vanaf de grond, een foto te maken van het boven-deel alleen.

De vraag die daarbij opkomt is deze: waar moet men zich opstellen om een zo groot mogelijk beeld op de film te krijgen. Of anders gesteld: waar moet men ergens gaan staan om het bovendeel van de toren zo groot mogelijk te zien.

Wij zien de toren zo groot mogelijk als de hoek waaronder we hem zien zo groot mogelijk is.

In fig. 1 is de situatie getekend van een toren met een onderbouw van 100 m en een bovenbouw van 283 m. Een aantal hoeken is opgemeten.

Op 500 m van de voet van de toren wordt de hoek 26° , op 300 m afstand 33° en op 100 m weer kleiner en wel 30° .

We zien dus: hoe verder we van de toren afgaan, des te kleiner wordt de gezichtshoek; maar anderzijds: als we een zeker punt gepasseerd zijn en we naderen de toren steeds meer, dan daalt ook de gezichtshoek.

Er is dus een punt waar de gezichtshoek het grootst is.

Waar ligt dat punt?

Onderzoek

Stel de hoogte van de onderbouw a en de hoogte van de hele toren h ; verder de afstand van het meetpunt tot de voet van de toren x en de daarbij behorende gezichtshoek α . (fig. 2).

Nu geldt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - \gamma \quad \text{en} \quad \text{tg} \beta = \frac{h}{x} \quad \text{en} \quad \text{tg} \gamma = \frac{a}{x} \\ \text{dus} \quad \alpha &= \text{bg} \text{tg} \frac{h}{x} - \text{bg} \text{tg} \frac{a}{x} \end{aligned}$$

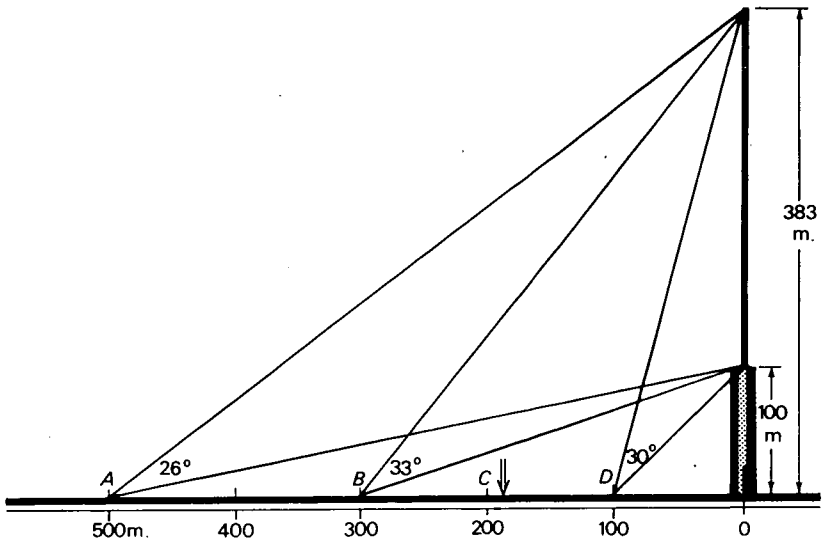


Fig. 1. De hoek waaronder we de bovenbouw van de toren zien is afhankelijk van de afstand.

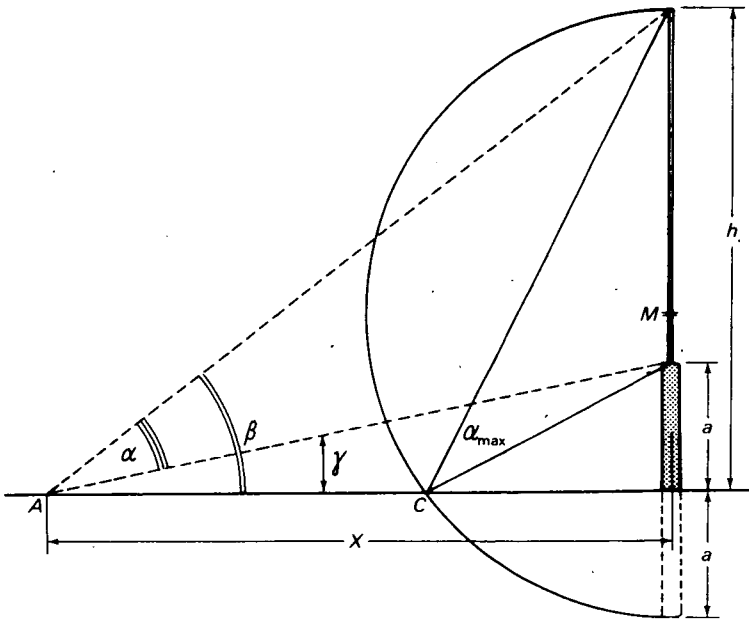


Fig. 2. Constructie van het punt met maximale gezichtshoek

De voorwaarde voor een maximale gezichtshoek is: $\frac{d\alpha}{dx} = 0$.

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{x}\right)^2} \cdot \frac{-h}{x^2} - \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} \cdot \frac{-a}{x^2} = 0$$

$$\frac{-h}{x^2+h^2} = \frac{-a}{x^2+a^2}$$

$$hx^2 + ha^2 = ax^2 + ah^2$$

$$x^2(h-a) = ah(h-a)$$

$$x = \sqrt{ah}$$

In fig. 2 is dit punt nader geconstrueerd.

Spiegel daartoe het stuk a ten opzichte van de grondlijn.

Construeer vervolgens een cirkel met $(a+h)$ als middellijn. Het punt waar deze cirkel de grondlijn snijdt, is het observatiepunt met maximale gezichtshoek.

Bij $a = 100$ m, $h = 383$ m behoort zodoende $x = \sqrt{ah} = 196$ m.

De maximale hoek in dit geval wordt dan 36° (punt C in fig. 1).

Bij $x \rightarrow 0$ en $x \rightarrow \infty$ wordt de gezichtshoek 0.

Als men het bovenstuk van de toren zo goed mogelijk wil zien, gaat men intuïtief ongeveer op het berekende punt staan.

Een variant van dit probleem

Een vergelijkbare ervaring kan men op de weg hebben bij het naderen van een stad. Rijdend op autowegen, zien we de torens van dorpen en steden boven de horizon uitsteken. Aanvankelijk ($x = \infty$) zijn die torenspitsen zeer klein, maar naarmate we dichterbij komen worden ze al groter en groter, om tenslotte als we de stad zeer dicht naderen weer uit het zicht te verdwijnen achter bomen of flatgebouwen. (fig. 3).

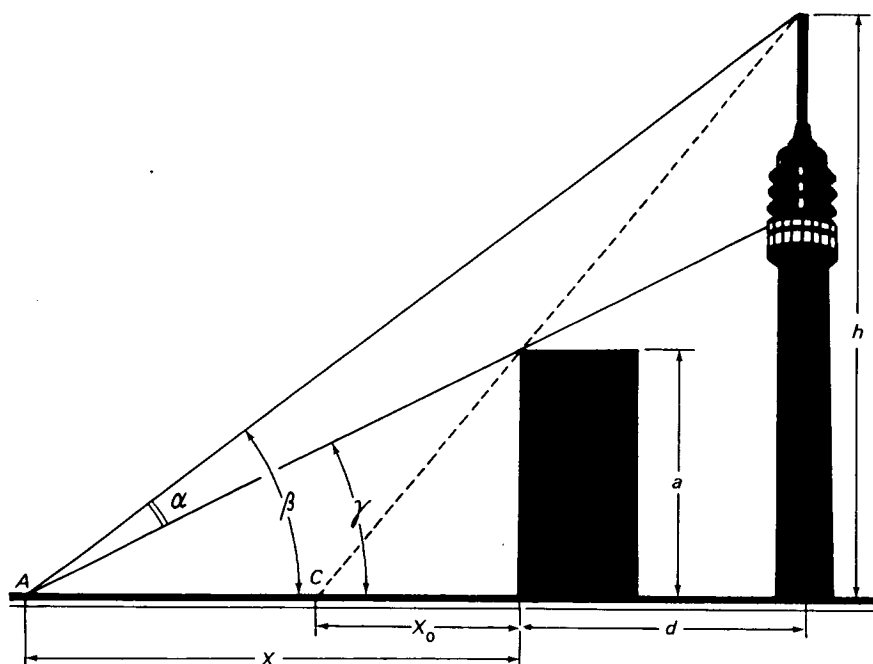


Fig. 3. Waar zien we de torenspits maximaal boven de flats uitsteken?

Ook hier kan de vraag gesteld worden: wanneer zien we de toren zo groot mogelijk?

Berekening

Stel weer de torenhoogte h , de hoogte van het obstakel a en de afstand ervan tot de toren d . Verder weer de afstand van het observatiepunt tot het obstakel x . Wanneer is de gezichtshoek maximaal?

De berekening verloopt ongeveer soortgelijk (zie fig. 3).

Het stellen van $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ wordt hier:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{h}{x+d}\right)^2} \cdot \frac{-h}{(x+d)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} \cdot \frac{-a}{x^2}$$

$$\frac{h}{(x+d)^2 + h^2} = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

$$h \cdot x^2 + a^2 \cdot h = a \cdot x^2 + 2adx + a \cdot d^2 + a \cdot h^2$$

$$(h-a) \cdot x^2 - (2ad) \cdot x - (ah^2 + ad^2 - a^2h) = 0$$

$$x = \frac{ad}{h-a} + \sqrt{ah \left[1 + \left(\frac{d}{h-a} \right)^2 \right]}$$

We merken nu op (zie fig. 3) dat indien we in C zijn aangekomen, de gezichtshoek 0 is geworden. Stel deze afstand x_0 .

Hierbij geldt:

$$\frac{x_0}{a} = \frac{d}{h-a}$$

Dit ingevuld geeft voor

$$x_{\max} = x_0 + \sqrt{ah \left[1 + \left(\frac{x_0}{a} \right)^2 \right]}$$

Als we hierin $d = 0$ dus ook $x_0 = 0$ stellen, gaat deze uitkomst weer over in de vorige: $x_{\max} = \sqrt{ah}$.

Boekbespreking

SMP Further Mathematical Series. V Statistics and Probability (Draft Edition), Cambridge University Press 1971, X + 133 blz., £ 1.70.

Zoals bekend kan men in Engeland aan het einde van zijn opleiding examen doen op twee niveaus: O-level en A-level. Desgewenst kan men op A-level een dubbel examen afleggen, namelijk het normale examen wiskunde en ook nog het examen 'Further Mathematics'. De SMP heeft voor hen die zich op dit examen voorbereiden een vijftal boeken ontworpen, getiteld:

Linear Algebra and Geometry; Vectors and Mechanics; Differential Equations and Circuits; Extensions of Calculus; Statistics and Probability.

Het hier besproken boek is het vijfde uit deze serie.

Een vijftal belangrijke onderwerpen wordt in het boek aan de orde gesteld. Allereerst in het eerste hoofdstuk de Markov-ketens. Probleem is hier bijv.: bekend zijn de waarschijnlijkheid van het optreden van drie weertypen A, B en C, als men weet wat de dag te voren het weertype is. Welke voorspellingen op langere termijn zijn hieruit afleidbaar? Het gaat hier dus om problemen waarbij 'het toeval een geheugen heeft'. Het hoofdstuk is helder en boeiend geschreven en is m.i. het beste hoofdstuk van het boek.

Het tweede hoofdstuk gaat over de poisson-verdeling en is naar mijn smaak wel wat erg precies en zwaarwichtig.

Dan volgt de χ^2 -verdeling. Men zou kunnen zeggen dat deze de generalisatie is van de normale verdeling over meer dimensies. Een belangrijk onderwerp dat goed behandeld wordt. Eerst voelt men zich wat onzeker, doordat de uitwerking louter praktisch gegeven wordt, maar daarna volgt een theoretische fundering die het geheel een vaste bodem geeft.

Na de χ^2 -verdeling een andere methode om statistisch materiaal te onderzoeken: Student's t-test. Deze test is betrokken op gemiddelden van waarnemingsreeksen.

Dan volgt een behandeling van de correlatiecoëfficiënt en de daarmee samenhangende problemen. Weer een hoofdstuk dat uitmunt door helderheid.

Het belangrijkste hebben we nu wel achter de rug. Er volgen nog twee korte hoofdstukken over Expectation-algebra en over Characteristic functions, maar naar mijn mening zijn deze van minder fundamenteel belang.

Uit het voorgaande krijgt men wel de indruk dat degenen die het examen Further Mathematics aflegt, zich bekwaamd heeft in een serie zeer specialistische onderwerpen en reeds op academisch niveau gestudeerd heeft.

P. G. J. Vredenduin

Dr. J. van Tiel, *Wiskundige methoden met toepassingen*, dl 1 en dl 2 samen 567 blz., samen f 75,—, Oosthoek, Scheltema en Holkema, Utrecht 1975.

Dit leerboek, bedoeld voor 'hen die bij hun studie de wiskunde zullen gebruiken op een niveau dat, hoewel bescheiden zijnde, uitgaat boven dat van het vwo', behandelt de volgende facetten: differentiaal- en integraalrekening, vectorrekening, differentiaalvergelijkingen, lineaire algebra, Laplace transformaties, Fourier-transformaties, vectoranalyse. Een literatuuropgave en een register sluiten het werk af. Als beginniveau wordt gedacht aan het eindniveau van het vwo pakket wiskunde-I.

Het werk als geheel maakt een zeer verzorgde indruk; de uitvoering verdient alle lof: ruim van opzet, formules en tekeningen zijn zeer duidelijk.

De schrijver heeft zich duidelijk gericht op een speciale groep: degenen die wiskunde zullen gaan gebruiken. Uitvoerige theoretische overwegingen, ingewikkelde wiskundige bewijzen treft men niet aan. 'Pathologische gevallen' worden vermeden, continuïteit en differentieerbaarheid worden meestal voorondersteld. Voorbeeld: 'Men kan bewijzen dat voor de meeste in de praktijk voorkomende functies f de differentiaaloperatoren $\partial/\partial x$ en $\partial/\partial y$ commuteren'.

Enige punten van kritiek:

- persoonlijk zou ik de paragraaf limieten (2 – 16) liever voor de differentiaalrekening plaatsen.
- soms wordt teveel bewijskracht ontleend aan
 - a. tekening bijv. blz. 41: 'Uit de grafiek van e^x volgt dat voor alle t geldt $t < e^t$
 - b. fysische overwegingen.
- de opzet van de integraalrekening lijkt mij wiskundig te zwak gefundeerd, ook voor diegenen voor wie het boek bedoeld is. Nadere precisering van 'ongeveer gelijk zijn' (blz. 44 ev.) lijkt mij erg belangrijk. Dan pas kan meer en beter inhoud gegeven worden aan het begrip mathematisch model. Waarom is $\int_a^b F(x)dx$ een *goed* mathematisch model van arbeid?
- het waarom van de opmerking op blz. 56 ontgaat de lezer van dit niveau als geen toelichting gegeven wordt met graden.
- bij de opzet van oneigenlijke integralen wordt *oneindig* geïntroduceerd als *zeer lang*. Bovendien lijkt mij een notatie als $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{\infty}$ niet aan te bevelen.
- is het niet beter te zeggen dat we een vector kunnen voorstellen d.m.v. een pijl in plaats van te zeggen dat een vector een pijl is (cf. blz. 80).
- uit symmetrie overwegingen lijkt de notatie

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

gemakkelijker te onthouden dan de gegeven op blz. 95.

- het is aan te bevelen $\mathbb{C}$ als notatie voor de verzameling complexe getallen te vervangen door $\mathbb{C}$.
- $\frac{1}{12}\pi = 0.26(?)$ (blz. 141).
- het is misschien nuttig § 10.3 te laten voorafgaan door een algemene beschouwing over rijen en reeksen, daar voor de meeste gebruikers van dit boek deze begrippen nauwelijks enige inhoud zullen hebben.
- is de introductie van differentiaal (blz. 175 ev.) niet te summier gehouden?
- het verdient m.i. aanbeveling iets te vertellen over een Jacobiaan, temeer daar de determinanten dan reeds behandeld zijn. De gebruiker kan dan met meer substituties uit de voeten als de gegeven.
- blz. 312: Langs meetkundige weg ziet men direct dat de transformatie $\vec{OP} \rightarrow \vec{OP}'$ linear is. De student ook?
- blz. 339: S_1 moet zijn S_2 (4de regel vb).

Na deze kritische opmerkingen een woord van lof voor de wijze waarop de schrijver de diverse probleemgebieden instapt. Fysische problemen krijgen alle aandacht, hetgeen voor de bedoelde gebruikers in hoge mate motiverend werkt.

De verwerking van het bestudeerde kan m.b.v. de vele, op hoog niveau staande, opgaven grondig geschieden. De antwoorden zijn tevens opgenomen.

Het uitvoerige register (7 pagina's klein gedrukt) verhoogt de bruikbaarheid van het boek.

W. Kleijne

Jahrbuch Ueberblicke Mathematik 1975 (herausgegeben von B. Fuchssteiner, U. Kulisch, D. Laugwitz, R. Liedl), B.I. – Wissenschaftsverlag Mannheim, 1975, 181 bl., DM 28. –.

Dit is het eerste exemplaar van een in jaarboekvorm gegoten publikatie van voor een ruime kring van wiskundigen bestemde artikelen over onderwerpen die van belang zijn bij de voortgaande ontwikkeling van de wiskunde. Wij noemen een artikel over stemprocedures (in het parlement bijv.) en de kans daarbij op met zichzelf in strijd zijnde uitkomsten, twee artikelen over niet-standaardanalyse (waarin 'oneindig kleine grootheden' optreden); verder artikelen over kategorieën, over de stelling van Stone-Weierstrass en een lang artikel over 'computerrekenkunde'. Het jaarboek bevat voorts enige in 1974 verschenen documentatie (pro en contra) over de 'moderne wiskunde' in de scholen. Tenslotte is er een verslag van het in 1974 gehouden Intern. Math. Congres in Vancouver.

A. C. Zaanen

Het werken met differentiaalvormen staat in dit boekje centraal. In het eerste deel wordt aangetoond hoe een aantal bekende stellingen uit de driedimensionale vectoranalyse en de differentiaalmeetkunde door gebruik te maken van differentiaalvormen een elegante gedaante krijgt. Verder worden in dit deel systemen van partiële differentiaalvergelijkingen, in het bijzonder Pfaff-vergelijkingen, met behulp van differentiaalvormen bestudeerd.

In het tweede deel wordt de theorie van de differentiaalvormen ontwikkeld en wel n -dimensionaal; na de Grassmann-algebra over een vectorruimte worden differentiaalvormen over differentiëerbare variëteiten gedefiniëerd en bestudeerd. Het boekje besluit met een korte beschouwing van differentiaalvormen in de algebraïsche topologie.

De aan de orde gestelde onderwerpen zijn duidelijk behandeld; een groot aantal voorbeelden en opgaven (die voor een deel zijn uitgewerkt) maakt het boekje aantrekkelijk voor hen die zich in de theorie en toepassingen van de differentiaalvormen willen inwerken. Een literatuurlijst aan het einde verwijst naar een aantal standaardwerken uit de vectoranalyse, tensoranalyse, differentiaalmeetkunde, theorie van de differentiaalvergelijkingen en andere gebieden waar de theorie der differentiaalvormen van nut kan zijn.

Van harte aanbevolen.

W. J. Claas sr.

Moderne Wiskunde, een samenvattend overzicht. Deel I. De taal der verzamelingen. Auteurs de Munter, Holvoet, Oris en Warrinnier. Uitgave Universitaire pers, Leuven. ISBN 9061860164.

Blijkens het 'Woord vooraf' streven de auteurs er in dit boek naar, de beginnende universiteitsstudenten een gemeenschappelijke basiskennis in één terminologie voor te houden. Dit prachtige streven is op een bewonderenswaardige wijze tot werkelijkheid gemaakt.

Ik heb gesmuld van de helderheid, de eenvoud der voorbeelden en van de kwaliteit der oefeningen, die niet gericht zijn op routine, maar die vrijwel uitsluitend *begripsverhelderend* zijn.

Dit boek is een aanwinst voor wiskundekennis en wiskundendidactiek! Toch heb ik vrij veel wensen en bezwaren, die zich echter niet in de eerste plaats richten op de auteurs, maar op de stof zelf. Niet alleen het Nederlands, maar vooral ook de gebezigde wiskundetaal is voor verbetering vatbaar. Volgens het prospectus zijn de rechterpagina's blanco en bestemd voor nota's (notities!). Dat is zeer praktisch voor de meerderheid, dat zijn de rechtshandige schrijvers. In tegenstelling met die aankondiging staan de blanco pagina's links. Weinig enthousiast ben ik over getallen, die dingen, en over punten, die stippen genoemd worden (blz. 8). Minder elegant is, vanaf(uit) twee getallen een derde af te leiden (blz. 13). Jammer, dat er onder de auteurs niet een uit het Noorden is, dan zou niemand, die het boek door goede leerlingen wil laten gebruiken, behoeven te vrezen voor taalbederf. *Culturele samenwerking tussen Noord en Zuid lijkt mij zo belangrijk!* Voor degenen, die vrezen dat een figuur *nooit* bewijskracht zou hebben is het vast een bevrijdende gedachte, dat Venndiagrammen hierop een uitzondering vormen (9) en (15). Een relatie is een verzameling. De begrippen groter en kleiner treden daarbij niet op. Toch lees ik op (54, 57 en 63) grootste en kleinste relatie. Is *ruimer* en *enger* een verbetering? Dan zou ik $RICH\ A$ (22, 68) willen vervangen door $STAND\ a$. Een stand heeft toch twee richtingen. En een vlakstand oneindig veel lijnstanden. Richtingscoëfficiënt worde standgetal. En waarom A vervangen door a ? In een Bantoetaal heeft *unyasi* (grasspriet) twee meervoudsvormen: *nyasi* betekent grasspriet, maar *manyasi* betekent gras, als collectivum. Zo is een rechte ook te onderscheiden van de verzameling van zijn punten! De verzamelingziekte begon, toen men 'meetkundige plaats' (locus) ging vervangen door verzameling. Dat was de *onjuiste* vervanging van *manyasi* (waarin de elementen geen rol spelen) door *nyasi*. De auteurs vliegen prompt in de consequentie van deze *historische fout*, als ze op (20) een cirkelbundel (*nyasi*) identificeren met zijn drager, het platte vlak (*manyasi*). Trouwens, ook de dualiteit verzet zich tegen de mode, een rechte met een hoofdletter (73) aan te duiden; men zou dan even goed een punt kunnen identificeren met de lijnenbundel die er bij hoort.

Een ander voorbeeld, waaruit blijkt, hoezeer de moderne wiskunde, en zeker de *terminologie* ervan, *nog in de kinderschoenen staat*, vindt men op (38): Een transformatie van A is een afbeelding

van A in A . Dit zou betekenen, dat $x \rightarrow ix$ ($x \in \mathbb{R}$) geen transformatie is maar $x \rightarrow ix$ ($x \in \mathbb{C}$) wel. Hiermee stelt men de naam van de afbeelding afhankelijk van het domein. Dat is ongeveer dezelfde onjuistheid, die *beginners*, naar mijn ervaring, in het volgende geval maken: Gegeven een cirkel met een snijlijn en het spiegelbeeld van deze cirkel in de rechte. Hoeveel dekpunten heeft de spiegeling? De genoemden beperken zich tot wat ze zien, en antwoorden, dat er twee dekpunten zijn in plaats van oneindig veel.

Waarom niet geschreven wat we vroeger beter deden: Afbeeldingen van algebraïsche elementen op algebraïsche heten functies. Dito van meetkundige op meetkundige heten transformaties. De macht van een punt t.o.v. een bol is een afbeelding die geen dezer beide namen draagt. De identificatie van functie en afbeelding is daarmee van de baan. Ik schreef reeds elders dat de afbeelding $f(x) \rightarrow f'(x)$ geen functie genoemd mag worden (derivatie op 41), ook dat 0 niet tot de natuurlijke getallen gerekend kan worden, maar hier moet toch opgemerkt, dat de auteurs er prompt in vliegen, als ze - zij het indirect - 0 als *deler* van 0 zien (25, 32 en 49). Stond er nu maar *factor*, dan was het minder dwaas.

Voor zover ik kan nagaan, komen veel modern geachte termen uit de Franse hoek. En in die taal zijn *getal* en *aantal* beide *nombre*, dus armer dan in het Nederlands. Jammer, dat deze *Vlaamse* auteurs, die anders zo graag zich *los van het Frans* uitdrukken, hier niet zelfstandiger zijn opgetreden. Echter: Al deze fouten zijn verklaarbaar uit algemeen menselijk gedrag, dat vaak doet toegeven aan fouten, die door mensen *met gezag* worden gemaakt. We hebben dit helaas niet alleen in de wereldgeschiedenis gezien, maar ook aanwijsbaar in ons kleine wiskundewereldje. Voorbeelden? Een standaardwerk noemde ieder orthocentrisch viervlak orthogonaal (zoals de gewone man een rechthoekige tafel vierkant noemt). Het werd nagevolgd, tot de schrijver mij zijn fout toegaf. Een schoolboek dat baarlijke nonsens bevatte, werd aanvaard op grond van het 'gezag' van een der auteurs.

Een onnauwkeurigheid staat op (54) onder h. Als de auteurs behalve de pijldiagrammen (wat is graffen een somber woord) ook de relatiëvoorstelling door een tabel met dubbele ingang hanteerden, zou dat terstond blijken.

Ik hoop alleen nog, dat de lezer van deze recensie tijdens de lectuur niet vergeten zal zijn, dat ik het werk van het Vlaamse viertal bijzonder waardeer, maar menselijk werk is nu eenmaal niet foutloos. Dat zal deze recensie ook wel niet zijn.

J. K. Timmer

Arithmetic, basic skills for college students, R. M. Pickrell, ISBN 0471689238.

Een Amerikaanse uitgave van 360 bladzijden groot formaat, gezien de prijs (£ 4.85) en de gelijktijdige verspreiding in Canada waarschijnlijk in zeer grote oplaag.

Het bevat de in alle (ook overbodige) uitvoerigheid uitgesponnen lagere (pardon, basis-) school rekenstof, aangevuld met wat op sommige goede lagere scholen vroeger wel eens aan wiskunde werd gegeven.

Het uiterlijk is modern, de inhoud hopeloos ouderwets. De uitwerkingen van de opdrachten moeten in het boek zelf geschreven worden, waartoe zo een overvloed van blanco papier is bestemd, dat hier echt papierverspilling wordt gepleegd. De deling met rest wordt onjuist behandeld. Immers als $7/3 = 2$ rest 1, dan geldt ook $9/4 = 2$ rest 1, dus $7/3 = 9/4$. Men laat vrolijk $1/4$ door 0 delen, de 'studenten' (?) moeten dan zelf maar zien, wat er van terecht komt. De uitspraak van de getallen is een onpractisch heilig huisje; blijkbaar heeft de auteur er nooit over gedacht, hoe groot de misère is, als men de volgende vier getallen tracht uit te spreken: 0,0606 0,616 600,0006 en 600,016.

Het enige aardige idee is, dat de antwoorden van de even nummers wel, die van de oneven nummers niet opgenomen zijn. Zo spaart de auteur de kool en de geit! Dat het boek, na één keer gebruikt te zijn, van onwaarde is voor een volgende gebruiker is natuurlijk wel gunstig voor de beurzen van auteur en uitgever.

In ons land wil men juist graag bezuinigen.

J. K. Timmer

Recreatie

In The Mathematics Teacher van december 1975 vond ik twee artikelen: Checkerboard Mathematics door R. Billstein en Map Coloring door N. K. Roth, waaraan ik de volgende twee opgaven ontleen.

354. Iemand zet een muntstuk op de bovenste rij van een schaakbord. Om beurten mag men het muntstuk een veld in horizontale richting verschuiven of een veld naar beneden. De munt mag niet terugkeren op een veld waar hij reeds geweest is. Wie de munt naar de onderste rij verplaatst, is winnaar. Hoe zal men de uitgangspositie van de munt kiezen?

355. Men kleurt een kaart zo, dat twee landen die een grens (niet slechts een of meer grenspunten) gemeen hebben, verschillend gekleurd worden. Men kan daarbij met twee kleuren volstaan. Noodzakelijke voorwaarde is hiervoor dat in elk inwendig hoekpunt een even aantal landen samenkomen. Maar is deze voorwaarde ook voldoende?

Oplossingen

352. Er wordt 100 keer met een munt gegooid, telkens 0 of 1. Geteld wordt het aantal suites 111 en 101. Is het eerste aantal groter, dan wint Kain, is het tweede aantal groter dan Abel en bij gelijke aantallen wordt overgespeeld. Enerzijds schijnt het dat beide gelijke kansen hebben, want in elk drielal is de kans op 111 even groot als de kans op 101. Anderzijds lijkt het dat Kain de beste kansen heeft, want na 111 is de kans op weer 111 bij de volgende worp al $\frac{1}{2}$, terwijl na 101 opnieuw 101 eerst na twee worpen verwezenlijkt kan worden en de kans daarop is slechts $\frac{1}{4}$. Werd gevraagd hoe de vork aan de steel zit.

Om ons te oriënteren beginnen we met een suite van vijf worpen en rekenen de verwachtingswaarde uit van het aantal deelsuites 111 resp. 101. Allereerst de suites waarin precies één 111 voorkomt. Deze zijn (een stip stelt voor: naar believe 0 of 1):

1110.

01110 dus 5 suites met 1 keer 111

.0111

Verder

11110

01111 dus 2 suites met 2 keer 111

en

11111 dus 1 suite met 3 keer 111

Totaal aantal mogelijke suites 32. Dus verwachtingswaarde $\frac{12}{32}$.

Nu 101:

10100

1011.

.101. dus 10 suites met 1 keer 101

00101

.1101

en

10101 dus 1 suite met 2 keer 101

Verwachtingswaarde $\frac{12}{32}$.

En wie de eenvoudiger gevallen nagaat, vindt bij een suite van 3 voor 111 en voor 101 verwachtingswaarde $\frac{1}{8}$ en bij een suite van 4 voor allebei een verwachtingswaarde $\frac{4}{16}$.

Het vermoeden ligt voor de hand, dat Kain gelijk had. Volledige inductie bevestigt dat. Gemakshalve nemen we de stap van 5 op 6. Bij de 32 suites van 5 zijn er 8 die op 11 eindigen. Deze leveren 8 nieuwe mogelijkheden voor een deelsuite 111 in een suite van 6 die in de suites van 5 nog niet voorhanden waren. Bovendien komen alle 12 in de suites van 5 voorhanden deelsuites 111 twee keer voor in de suites van 6 namelijk zowel in de suite van 6 die ontstaat door achtervoeging van een 0 als in die welke ontstaat door achtervoeging van een 1. De verwachtingswaarde wordt dus $(2 \cdot 12 + 8)/64 = \frac{32}{64}$. De redenering bij de verwachtingswaarde voor 101 is analoog en levert dus dezelfde verwachtingswaarde. Kain had gelijk, zoals eigenlijk ook wel te voorzien was en Abel trachtte zijn broer bij de neus te nemen.

353. Voor de operatie $\circ$ van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ geldt:

1. $a \circ b = b \circ a$
2. $a \circ b = c \Rightarrow b \circ c = a$
3. $a \circ b > c \Rightarrow b \circ c < a \vee a \circ c < b$
- a. Stel de operatietabel op voor $a \leq 7$ en $b \leq 7$.

De tabel luidt (de afleiding volgt):

$\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Algemene opmerkingen:

4. wegens (1) is de tabel symmetrisch t.o.v. de hoofddiagonaal;
5. wegens (2) komen in geen enkele rij twee gelijke uitkomsten voor.

Verder:

$0 \circ 0 > 0$ kan niet (wegens 3) $\Rightarrow 0 \circ 0 = 0$

$0 \circ 1 < 1$ kan niet (5)

$$\Rightarrow 0 \circ 1 = 1 \Rightarrow 1 \circ 1 = 0$$

$0 \circ 1 > 1$ kan niet (3 en 5)

Algemeen met volledige inductie:

$0 \circ a = a$ en $a \circ a = 0$

$1 \circ 2 < 3$ kan niet (5)

$$\Rightarrow 1 \circ 2 = 3 \Rightarrow 1 \circ 3 = 2 \wedge 2 \circ 3 = 1$$

$1 \circ 2 > 3$ kan niet (3 en 5)

$1 \circ 4 < 5$ kan niet (5)

$$\Rightarrow 1 \circ 4 = 5 \Rightarrow 1 \circ 5 = 4 \wedge 4 \circ 5 = 1$$

$1 \circ 4 > 5$ kan niet (3 en 5)

Op dezelfde manier vindt men resp.

$2 \circ 4 = 6$ en $2 \circ 6 = 4$ en $4 \circ 6 = 2$

$3 \circ 4 = 7$ en $3 \circ 7 = 4$ en $4 \circ 7 = 3$

$2 \circ 5 = 7$ en $2 \circ 7 = 5$ en $5 \circ 7 = 2$

$3 \circ 5 = 6$ en $3 \circ 6 = 5$ en $5 \circ 6 = 3$

$1 \circ 6 = 7$ en $1 \circ 7 = 6$ en $6 \circ 7 = 1$

b. Hoe gaat het vermoedelijk verder?

Voor $a, b < 2^k$:

$$a(b+2^k) = (b+2^k)a = ab + 2^k$$

$$(a+2^k)(b+2^k) = ab$$

c. Rechtvaardiging. We laten eerst zien (schematisch) dat de zo gedefinieerde operatie de eigenschappen 1, 2 en 3 heeft.

1. Triviaal.

Bewijs nu eerst dat de associatieve eigenschap voor de operatie geldt. Dit gelukt met behulp van volledige inductie naar k .

¹⁾ Gemakshalve is $a \circ b$ afgekort tot ab .

Verder eveneens met volledige inductie $a < 2^k \wedge b < 2^k \Rightarrow ab < 2^k$

2. We moeten bewijzen $a(ab+2^k) = b+2^k$.

Wegens $ab < 2^k$ is

$$a(ab+2^k) = a(ab)+2^k = (aa)b+2^k = 0b+2^k = b+2^k$$

Analoog zien we dat $(b+2^k)(ab+2^k) = a$ en $(a+2^k)(ab) = b+2^k$

3. Lukt zonder moeite.

Nu moeten we nog bewijzen dat er geen andere realisatie van $\circ$ is. Onderstel er zijn twee verschillende realisaties van $\circ$. Noem deze I en II. Onderstel i en daarna j zijn de laagste getallen waarvoor $a \circ_I b \neq a \circ_{II} b$. Onderstel

$$i \circ_I j = k \quad \text{en} \quad i \circ_{II} j = k'$$

Dan is $i < j < k$ en $i < j < k'$.

Onderstel verder dat $k < k'$. Nu is

$$i \circ_{II} j > k \quad \text{en} \quad \text{dus} \quad i \circ_{II} k < j \vee j \circ_{II} k < i$$

$$i \circ_{II} k < j \quad \Rightarrow \quad \exists p : i \circ_{II} k = p \wedge p < j$$

$$\Rightarrow \quad \exists p : i \circ_{II} p = k \wedge p < j$$

$$\Rightarrow \quad \exists p : i \circ_I p = k \wedge p < j$$

hetgeen in strijd is met $i \circ_I j = k$.

Evenzo leidt $j \circ_{II} k < i$ tot een contradictie.

Waarmee aangetoond is dat het vermoeden de enige mogelijkheid is.

Ontvangen boeken

H. Breuer, Taschenwörterbuch der Programmier Sprachen Algol, Fortran, PL/I Bibliografisch Institut, Mannheim, prijs onbekend.

H. Meschkowski, Mathematisches Begriffs-wörterbuch 4e verbeterde en vermeerderde druk. Hochschultaschenbücher, Band 99, Mannheim. 315 blz. DM 10.80.

P. Sanders, J. de Bruyne, *opgaven wiskunde, onderbouw I*.

P. Sanders, J. de Bruyne, *Antwoordenboekje*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1976, 68 blz., f 8,50.

Doevendans c.s., *Passen en meten*, deel 6, 6 plaatjes en praatjes. Wolters-Noordhoff, Groningen 1977, 80 blz., f 7,80.

J. A. Hartman, dr. P. M. van Hiele, *Van A tot Z voor het LTO*, met toelichting, f 15,90. Muusses, Purmerend, 1967, deel I, brugklas, 2e druk, 246 blz.

P. M. van Hiele e.a. *Van A tot Z*, werkschrift rekenvaardigheid. Handleiding voor het gebruik van eenvoudige rekenmachientjes, met toelichting. Muusses, Purmerend 1976, 31 blz., f 2,90.

B. Brosowski, R. Kresz, *Einführung in die Numerische Mathematik II*. Hochschultaschenbücher B. I. Mannheim, Band 211. Dit deeltje vervolgt deel I met de hoofdstukken 4 en 5, waarin verschillende interpolatie-polynomen worden bestudeerd respectievelijk optimaliseringsopgaven werden behandeld. (117 blz.)

B. Brosowski, E. Martensen, *Methoden und Verfahren der mathematischer Physik*. BI. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Band 15 en 16. 159 resp. 174 blz.



Bon voor de prijsbewuste Ambtenaar.

Maar die niettemin prijs stelt op een stuk zekerheid en kwaliteit inzake ziektekostenverzekering.

Dat kan, want de Ambtenaren Centrale handhaaft haar thans bekende voordelige premie voor het gehele jaar 1977.

Reeds voor f 616,20 per persoon per jaar (kinderen en studerende kinderen voor de helft) heeft u een verzekering op basis van uw ambtelijk recht: De zogenaamde 5% Regeling.

Vraag onze uitvoerige prospektus aan. Dat kan met deze bon (invullen, uitknippen en opsturen naar de Ambtenaren Centrale, Antwoordnummer 2831, Amsterdam)
of door even te bellen 020 - 62231

Ik wens vrijblijvend uw prospektus te ontvangen.

A 778

Mijn naam is: _____

Adres: _____

Plaats: _____

Tel. nr.: _____

Functie: _____

Onderlingen Waarborg Maatschappij tegen de gevolgen van
Ziekte en Ongeval

AC **De Ambtenaren Centrale**

Tussenpersoon: N.V. Verzekering-Maatschappij VZVZ,
Keizersgracht 369, Amsterdam. Tel. 020 - 62231.

DE VRIJE LEERGANGEN

Opleiding voor
Middelbare Akten

Het nieuwe studiejaar

WISKUNDE M.O.-B

begint 14 januari 1977 om
18.15 uur in het Hoofdgebouw van
de Vrije Universiteit,
De Boelelaan 1105, Amsterdam.

Aanmelding gaarne voor
1 januari 1977.

Aanmeldingsformulieren bij de
administratie **Vrije Leergangen**,
Postbus 90048, Amsterdam.

Inlichtingen bij: Drs. P. Noordzij,
Sandbergstraat 12,
Abcoude. Tel. 02946 - 1950

INHOUD

G. Krooshof - Bert Zwaneveld	81
H. J. M. Bos: Mathematisering en Maatschappij of Hoe loopt een succes - story af?	82
H. Broekman: Diagnostisch(?) Toetsen	92
Prof. Dr. O. Bottema: Afbeeldingen zonder dekelement	98
Ontvangen boeken	99
De C.M.L.-wiskunde	100
Drs. A. H. Nieuwenhuis: Buigpunt ja, buigpunt nee?	108
Het Vlaamse tijdschrift Wiskunde en Onderwijs	109
Ir. H. M. Mulder: Een maximum-probleem bij zien en fotograferen	110
Boekbespreking	114
Recreatie	118
Ontvangen boeken	120