

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

52e jaargang

1976/1977

no 2

oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Travlatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 35,— per verenigingsjaar; studentleden f 21,—; contributie zonder Euclides f 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gronummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 30,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 17,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 275,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 150,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 85,—.

Magische vierkanten als voorbeeld voor lineaire ruimten

F. M. VRIESENDORP

De Bilt

In het V.W.O. komen *vektoren* (pijlen met een bepaalde lengte en richting, al dan niet gekoppeld aan een oorsprong) aan de orde om de ruimte om ons heen wiskundig te kunnen beschrijven.

Aan de hand van een 'plaatje' wordt getoond hoe we vektoren kunnen optellen en met een getal ($\in \mathbb{R}$) kunnen vermenigvuldigen.

De theorie die hieruit volgt, wordt volledig gegrondvest op de, laten we het maar noemen, 'fysische voorstelling' die de leerlingen van de ruimte hebben.

De algemenere theorie die hier achter zit, is die van de *lineaire ruimten*. Ondanks het feit, dat deze in de wiskunde zo'n fundamentele rol speelt, wordt ze in het V.W.O. niet behandeld.

De reden hiervoor lijkt me duidelijk. Want, om vanuit de 'vektoren' te komen tot deze generalisatie moet het 'plaatje' vervangen worden door het beeld van 'een verzameling met een optel- én scalair vermenigvuldigings-struktuur'. Deze stap is te groot, omdat het 'plaatje' te essentieel is voor de leerlingen. En bij gebrek aan goede voorbeelden die aantonen, dat er ook andere dan alleen de fysische ruimte bestaan, die de optel- en vermenigvuldigingsstruktuur van vektoren bezitten, blijft de theorie der lineaire ruimten in het V.W.O. on-aangeroerd.

In dit artikel zal een type lineaire ruimte worden besproken, waarvan géén voorstelling is te maken, anders dan die van een verzameling waarin we twee elementen kunnen optellen, en een element kunnen vermenigvuldigen met een getal (en in dit geval $\in \mathbb{Q}!$).

De voorbeelden waar het over gaat, zijn de verzamelingen van *Magische Vier-kanten*.

Dit onderwerp zou mijns inziens reeds in een vroeg stadium van het V.W.O. kunnen worden behandeld. In ieder geval nog voordat er sprake is van vektoren.

In dit artikel zal een zo kort mogelijk overzicht worden gegeven van een methode waarop we dit kunnen doen.

Enige jaren geleden is hiervan een uitwerking (voorzien van vele oefenopgaven)

op stencil gezet. Voor degene die er belangstelling voor hebben, zijn nog een beperkt aantal exemplaren verkrijgbaar.

In dit artikel zijn de onderdelen, die voor de leerlingen eventueel kunnen worden weggelaten voorzien van een sterretje (*), terwijl de onderdelen die uitsluitend bestemd zijn voor de leraar voorzien zijn van twee sterretjes (**).

§1 Magische Vierkanten.

We verdelen een vierkant door $n-1$ horizontale en $n-1$ verticale lijnen in n^2 kleinere vierkanten, die we de *velden* van het vierkant zullen noemen. In deze n^2 velden schrijven we *rationale getallen*. We doen dit zodanig, dat de sommen van de getallen in alle rijen en kolommen, en bovendien in de beide diagonalen aan elkaar gelijk zijn.

0	$-2\frac{1}{6}$	2	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{3}$	-2
$-1\frac{1}{6}$	$1\frac{5}{6}$	$-1\frac{1}{2}$	1

Fig. 1.

Een dergelijk vierkant zullen we een $n \times n$ *magisch vierkant* noemen. De getallen in de velden heten *veldgetallen*. De bijbehorende konstante som noemen we de *magische konstante*.

In figuur 1. is een voorbeeld gegeven van een 4×4 M.V. (= Magisch Vierkant) met $\frac{1}{6}$ als magische konstante.

Het 'konstrueren' van M.V.-en heeft al eeuwenlang mensen geboeid, waarbij men een vierkant pas dan 'magisch' noemde, als in de n^2 velden de getallen $1, 2, 3, 4, \dots, n^2$ stonden. Zulke vierkanten zullen we *klassieke M.V.-en* noemen.

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Fig. 2.

In figuur 2 is een voorbeeld gegeven van een klassiek 4×4 M.V., die nog als bijzondere eigenschap heeft, dat de som van de veldgetallen in een 2×2 deel-

vierkant (zoals bijvoorbeeld

15	10
4	5

,

10	3
5	16

,

5	16
11	2

, enz. ...) ook gelijk is aan de magische konstante.

De meeste konstruktie methoden die men tot nu toe heeft gevonden, bestaan uit een aantal te verrichten handelingen, waaruit als een soort 'duiveltje uit een doosje' een magisch vierkant te voorschijn komt. Hier zal echter getracht worden om aan te tonen, hoe de wiskunde helderheid kan brengen in dit mistige onderwerp. Zodat misschien na afloop eerder de wiskunde dan zo'n vierkant het adjektief 'magisch' verdient.

(**) De wiskundige achtergrond hierbij is, dat de $n \times n$ M.V.-en kunnen worden opgevat als elementen van $\mathbb{Q}^{n^2+1}$, die oplossingen zijn van een stelsel van $2n+2$ vergelijkingen (n rijen, n kolommen en 2 diagonalen) met n^2+1 onbekenden (n^2 veldgetallen en de magische konstante).

Deze oplossingsverzameling van $n \times n$ M.V.-en is een lineaire deelruimte van $\mathbb{Q}^{n^2+1}$, omdat het stelsel homogeen is.

Het is te bewijzen, dat er maar één afhankelijkheidsrelatie tussen de vergelijkingen bestaat, namelijk:

De som van de 'rijvergelijkingen' en de som van de 'kolomvergelijkingen' zijn beide gelijk aan de vergelijking die stelt: 'de som van alle veldgetallen is gelijk aan n -keer de magische konstante'.

Op deze manier vinden we dan, dat de dimensie van de ruimte der $n \times n$ M.V.-en gelijk is aan:

$$\underbrace{(n^2+1)}_{\text{aantal onbekenden}} - \underbrace{\{(2n+2)-1\}}_{\text{aantal onafhankelijke v.g.l.'n}} = n^2 - 2n$$

Het spreekt vanzelf, dat dit niet de methode is waarop we dit onderwerp willen behandelen.

We zullen hier een andere weg bewandelen.

§2 De konstruktie van 'eenvoudige' M.V.-en.

Eenvoudige M.V.-en kunnen worden gekonstrueerd door één getal zodanig in het vierkant te plaatsen, dat het in iedere rij én kolom (en in beide diagonalen) slechts éénmaal voorkomt. In de overige velden schrijven we nul. Of liever, we schrijven in die velden niets, en nemen aan dat er nul staat.

(**) Op zichzelf is dit al een zinvolle bezigheid als het gaat om voor te bereiden op permutaties en determinanten.

In fig. 3a zijn hiervan drie voorbeelden gegeven.

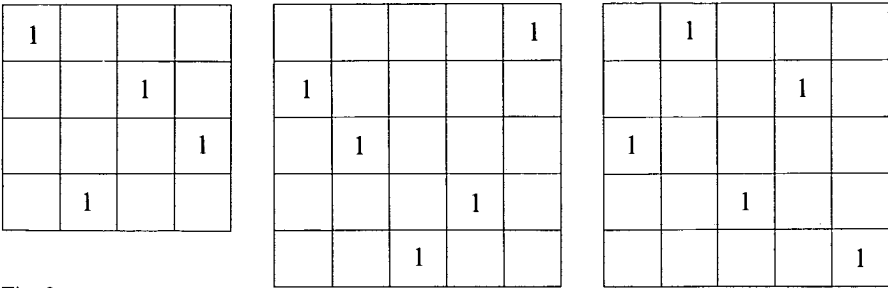


Fig. 3a.

In fig. 3b staan drie voorbeelden, die op dezelfde manier zijn gevonden, maar dan met meerdere getallen.

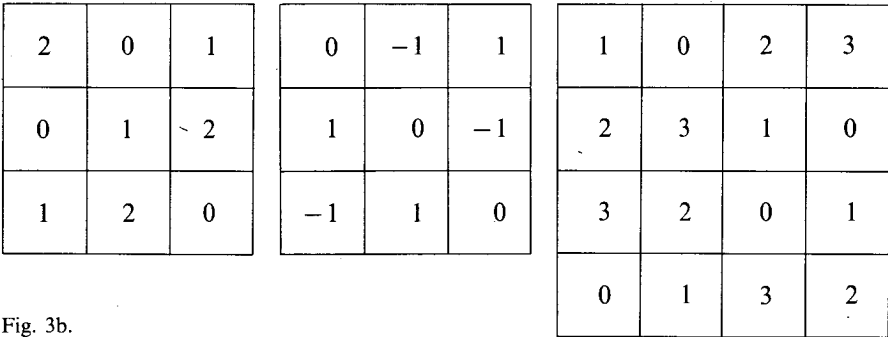


Fig. 3b.

Tenslotte is er nog een eenvoudig type M.V., waarvan in fig. 3c twee voorbeelden zijn gegeven.

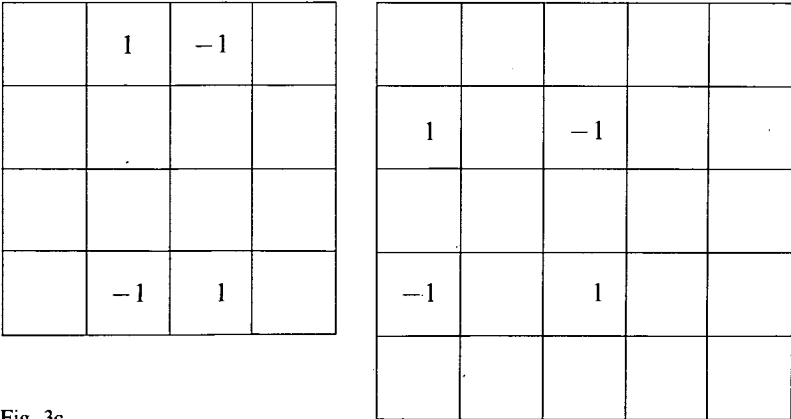


Fig. 3c.

§3 Het structureren van de verzameling der $n \times n$ M.V.-en.

Twee M.V.-en worden bij elkaar opgeteld door de overeenkomstige veldgetallen bij elkaar op te tellen.

Een M.V. wordt vermenigvuldigd met een scalair (d.i. een rationaal getal) door alle veldgetallen met dat scalair te vermenigvuldigen. In figuur 4 staan van beide bewerkingen een voorbeeld.

Natuurlijk moet er nog worden nagegaan of de som van twee M.V.-en, en het scalair veelvoud van een M.V. weer een M.V. is.

Dit betekent dat we moeten nagaan of de verzameling der $n \times n$ M.V.-en gesloten is t.a.v. deze twee bewerkingen.

2	0	1
0	1	2
1	2	0

+

0	-1	1
1	0	-1
-1	1	0

=

2	-1	2
1	1	1
0	3	0

$\frac{3}{4} \times$

1			
		1	
			1
	1		

=

$\frac{3}{4}$			
		$\frac{3}{4}$	
			$\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{4}$		

Fig. 4.

Dit is in te zien, omdat al gauw duidelijk wordt, dat de magische konstante van een som gelijk is aan de som van de magische konstanten, en dat de magische konstante van een veelvoud, gelijk is aan dat veelvoud van de magische konstante.

(**) Dit betekent, dat de afbeelding die aan ieder $n \times n$ M.V. zijn magische konstante toevoegt een *lineaire afbeelding* is van de ruimte der $n \times n$ M.V.-en in het scalairenlichaam $\mathbb{Q}$.

We kunnen natuurlijk ook twee M.V.-en van elkaar aftrekken, maar het is eenvoudig in te zien, dat we daarmee niets nieuws introduceren. Immers als $\boxed{A}$ en $\boxed{B}$ twee M.V.-en voorstellen, dan geldt $\boxed{A} - \boxed{B} = \boxed{A} + (-1) \times \boxed{B}$ (Eerst vermenigvuldigen, dan optellen).

Een voorbeeld van een *niet gesloten* bewerking is het vermenigvuldigen van twee M.V.-en door de overeenkomstige veldgetallen te vermenigvuldigen.

(**) Zelfs als we M.V.-en op dezelfde manier vermenigvuldigen als ‘matrices’, gaat het mis. Weliswaar klopt het dan voor de rijen en kolommen, maar bij de diagonalen gaat het fout.

§4 De eigenschappen van deze structuur.

We zullen nu enkele belangrijke ‘rekenregels’ laten zien aan de hand van voorbeelden uit de verzameling der 3×3 M.V.-en. We bewijzen dus niets, maar de geldigheid zal na enkele voorbeelden al gauw intuïtief duidelijk zijn. Ook voor grotere M.V.-en.

Als we de M.V.-en voorstellen door $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, enz. ..., en de scalairen door a , b , c , ..., dan krijgen we de volgende eigenschappen:

- 1 De *kommutatieve eigenschap* $\boxed{A} + \boxed{B} = \boxed{B} + \boxed{A}$
- 2 De *associatieve eigenschap* $(\boxed{A} + \boxed{B}) + \boxed{C} = \boxed{A} + (\boxed{B} + \boxed{C})$
- 3 Er is een M.V. $\boxed{O}$ (het *nulelement*) waarvoor geldt dat $\boxed{A} + \boxed{O} = \boxed{A}$ ongeacht welk M.V. door $\boxed{A}$ wordt voorgesteld.
- 4 Bij ieder M.V. $\boxed{A}$ is er een M.V. $-\boxed{A}$ (de *tegengestelde van $\boxed{A}$*) waarvoor geldt, dat $\boxed{A} + (-\boxed{A}) = \boxed{O}$
- 5 $a \times (\boxed{A} + \boxed{B}) = a \times \boxed{A} + a \times \boxed{B}$
- 6 $(a+b) \times \boxed{A} = a \times \boxed{A} + b \times \boxed{A}$
- 7 $a \times (b \times \boxed{A}) = (a \times b) \times \boxed{A}$
- 8 $1 \times \boxed{A} = \boxed{A}$

(*) Een verzameling waarin een optelling en een scalairvermenigvuldiging is gedefinieerd, die beide voldoen aan bovenstaande 8 ‘rekenregels’ noemen we een *lineaire ruimte* (of *vektorruimte*)

(**) Ons voorbeeld samen met de notatie $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, ... voor de M.V.-en geeft een duidelijke scheiding tussen element en scalair, wat bij de R^n met de notatie $\vec{a}$ of $\mathbf{a}$ nog wel eens aanleiding tot moeilijkheden geeft.

Een uitdrukking zoals $a \times \boxed{A} + b \times \boxed{B} + c \times \boxed{C} + d \times \boxed{D}$ is vanwege de eigenschappen 1 en 2 ondubbelzinnig bepaald, en noemen we een *lineaire combinatie* van $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ en $\boxed{D}$.

In figuur 5 is een voorbeeld gegeven van een lineaire combinatie van drie eenvoudige 3×3 M.V.-en.

$$1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Fig. 5.

§5 Het opspannen van de lineaire ruimte der $n \times n$ M.V.-en.

Het voorbeeld van figuur 5 laat zien hoe we door optellen en vermenigvuldigen van eenvoudige M.V.-en nieuwe (en zelfs mooie) M.V.-en kunnen konstrueren. De vraag is natuurlijk of we op deze manier *alle* M.V.-en kunnen konstrueren. We zullen nu laten zien hoe we drie 3×3 M.V.-en kunnen vinden, waarmee we inderdaad alle 3×3 M.V.-en kunnen konstrueren door lineaire combinaties te maken.

(**) De dimensie van de lineaire ruimte der 3×3 M.V.-en is volgens de formule $n^2 - 2n$ gelijk aan 3. Waaruit volgt dat er drie (en niet minder dan drie) opspanners zijn te vinden. Voor de ruimte der 4×4 M.V.-en is dit aantal 8 (of meer).

Stel, dat we een of ander 3×3 M.V. hebben. Bepaal in dat geval drie getallen x , y en z zodanig, dat x gelijk is aan het getal in veld $[2, 2]$ (veld $[i, j]$ is het veld in de i -de rij en de j -de kolom), zodat $x+y$ gelijk is aan het getal in veld $[1, 1]$, en zodat $x+z$ gelijk is aan het getal in veld $[1, 3]$. (zie figuur 6a). Het getal in veld $[3, 2]$ kunnen we dan vinden door te kijken naar de 1e rij en de 2e kolom.

We krijgen $(x+y) + (x+z) - x = x+y+z$ (zie fig. 6b). Het getal in veld $[3, 3]$ vinden we door te kijken naar de diagonaal (die loopt van rechtsboven naar linksonder) en de 3e rij. We krijgen $(x+z) + x - (x+y+z) = x-y$ (zie fig. 6c). De andere diagonaal is nu bepaald, en daarmee ook de magische konstante $(x+y) + x + (x-y) = 3x$. De overige veldgetallen zijn nu eenvoudig te vinden (zie fig. 6d.) Op deze manier hebben we gevonden, dat het willekeurige 3×3 M.V. waarmee we begonnen, een lineaire combinatie is van drie eenvoudige M.V.-en (zie fig. 6e).

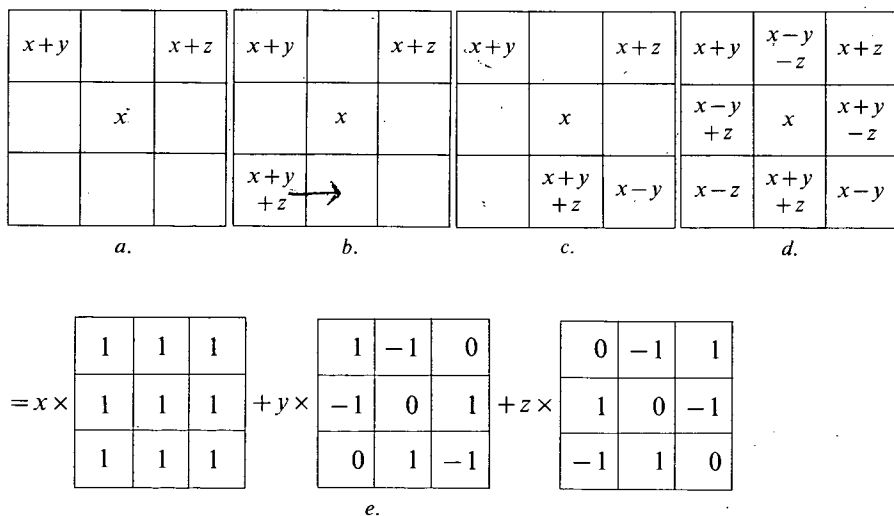


Fig. 6.

Voor de ruimte van 4×4 M.V.-en is een dergelijke aanpak al niet meer geschikt. We volstaan dan ook met de vermelden, dat de 4×4 M.V.-en van fig. 7 deze ruimte 'voortbrengen'. Als geheugensteuntje voor het plaatsen van de énen, is er in **A** t/m **H** een 'strijdbijl' bijgetekend.

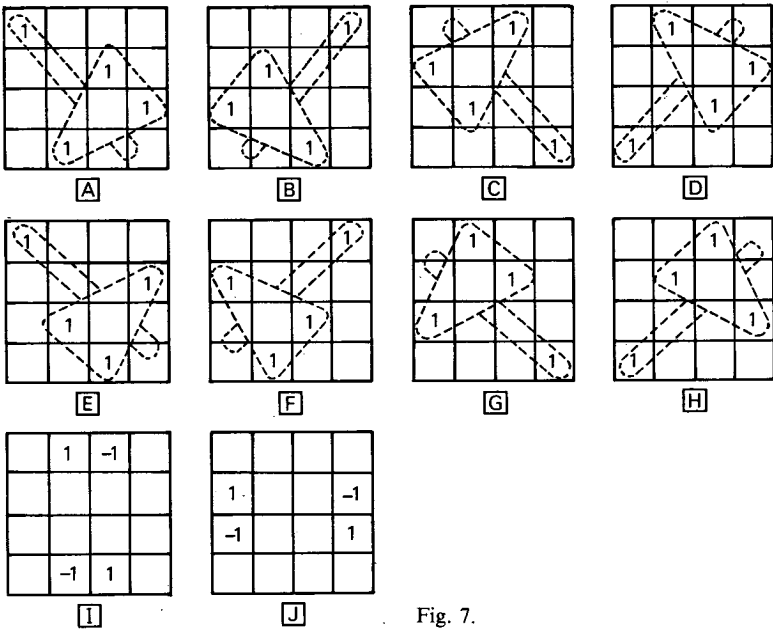


Fig. 7.

Een stel $n \times n$ M.V.-en noemen we *opspanners* (of *voortbrengers*) van de ruimte der $n \times n$ M.V.-en, als ieder M.V. te schrijven is als een lineaire combinatie van deze M.V.-en.

(*) De opspanners die we vonden voor de 3×3 en 4×4 M.V.-en zijn beslist niet de enige die deze ruimten opspannen. Als we bijvoorbeeld in het willekeurige 3×3 M.V. van fig. 6 het getal x , niet gelijk aan het getal in veld $[2, 2]$, maar aan het getal in veld $[3, 2]$ hadden gekozen, dan waren de drie M.V.-en van fig. 8 eruit gerold als opspanners van de ruimte der 3×3 M.V.-en.

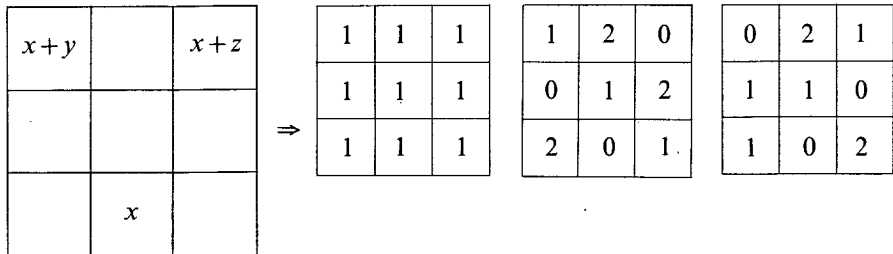


Fig. 8.

§ 6 De basis en dimensie van de ruimte der $n \times n$ M.V.-en.

Naar aanleiding van de vorige paragraaf is het logisch, dat we ons afvragen, of we niet met minder M.V.-en toe kunnen om de ruimte op te spannen.

Kijken we naar de drie opspanners van fig. 6, dan zien we dat als we het eerste M.V. weglaten ($x = 0$ stellen), bij iedere lineaire combinatie van de overige twee M.V.-en, het getal in veld $[2, 2]$ steeds gelijk aan nul is (bovendien is de magische konstante steeds nul). Hieraan voldoet beslist niet ieder 3×3 M.V. Als we het tweede M.V. schrappen, dan zijn bijvoorbeeld de getallen in de velden $[2, 1]$ en $[3, 2]$ steeds gelijk aan elkaar, en ook dat geldt niet voor alle M.V.-en. Op dezelfde manier zien we dat ook het derde M.V. niet gemist kan worden.

Konklusie: Van de opspanners uit fig. 6 kan er géén geschrapt worden.

Beschouwen we de opspanners van de ruimte der 4×4 M.V.-en die beschreven zijn in fig. 7, dan is er eenvoudig na te gaan, dat er 'afhankelijkheidsrelaties' bestaan tussen deze 4×4 M.V.-en. En wel:

$$1 \quad \boxed{A} + \boxed{C} + \boxed{I} = \boxed{E} + \boxed{G} + \boxed{J}$$

$$2 \quad \boxed{B} + \boxed{D} + \boxed{J} = \boxed{F} + \boxed{H} + \boxed{I}$$

$$3 \quad \boxed{A} + \boxed{B} + \boxed{C} + \boxed{D} = \boxed{E} + \boxed{F} + \boxed{G} + \boxed{H}$$

Hieruit volgt, dat bijvoorbeeld $\boxed{A}$ gelijk is aan $\boxed{E} + \boxed{G} + \boxed{J} - \boxed{C} - \boxed{I}$ en dat $\boxed{B}$ gelijk is aan $\boxed{F} + \boxed{H} + \boxed{I} - \boxed{D} - \boxed{J}$ (relatie 1 en 2). Dit betekent, dat iedere lineaire combinatie van de M.V.-en $\boxed{A}$ t/m $\boxed{J}$ (door $\boxed{A}$ en $\boxed{B}$ te vervangen) overgaat in een lineaire combinatie van de M.V.-en $\boxed{C}$ t/m $\boxed{J}$.

$\boxed{A}$ en $\boxed{B}$ kunnen dus worden weggelaten, zodat de resterende 8 M.V.-en nog de hele ruimte opspannen. (I.p.v. $\boxed{A}$ en $\boxed{B}$ hadden ook $\boxed{C}$ en $\boxed{J}$ óf $\boxed{G}$ en $\boxed{J}$ geschrapt kunnen worden, maar bijvoorbeeld niet $\boxed{I}$ en $\boxed{J}$). Er is na te gaan (al is dat niet zo eenvoudig) dat de 8 overgebleven M.V.-en minimaal zijn. D.w.z. er kan geen van geschrapt worden. Of wat hetzelfde is, er is geen afhankelijkheidsrelatie meer te vinden.

(*) In het algemeen noemen we een *minimaal aantal opspanners* van een lineaire ruimte een *basis* van die lineaire ruimte. Dat zijn dus een stel elementen, die de ruimte opspannen, en waarvan er geen geschrapt kan worden.

Uit het laatste voorbeeld is gebleken, dat er tussen de elementen van een basis geen 'afhankelijkheidsrelatie' mag bestaan.

Een stel elementen waartussen géén 'afhankelijkheidsrelatie' bestaat noemen we *lineair onafhankelijk*. In het algemeen geldt dat een lineair onafhankelijk stel opspanners een basis is van de lineaire ruimte.

Een lineaire ruimte heeft vele verzamelingen die als basis kunnen dienen, maar het is te bewijzen, dat ze één ding gemeen hebben, en dat is het 'aantal' elementen van een basis.

In het algemeen noemen we het getal dat het *aantal basiselementen* van een lineaire ruimte aangeeft, de *dimensie* van die lineaire ruimte.

Dus de ruimte der 3×3 M.V.-en is 3 dimensionaal, en de ruimte der 4×4 M.V.-en is 8-dimensionaal.

(**) Bij deze algemene definities en stellingen bewijzen we niets, en bovendien verzwijgen we ook dat er lineaire ruimten zijn met *oneindig* veel basiselementen. Gezien het beperkte aantal voorbeelden is het raadzaam om deze algemene zaken maar even aan te stippen, of misschien wel in hun geheel weg te laten. In ieder geval heeft de leraar met dit onderwerp het doel bereikt, om bij de leerling een aanzet te geven tot het verkrijgen van inzicht in een belangrijk stukje (moderne) wiskunde. Bovendien kan de leraar bij de behandeling van 'vektoren' op dit onderwerp terugvallen, wat erg nuttig kan zijn.

De leerlingen zijn echter nog niet tevreden. Zij willen klassieke M.V.-en leren konstrueren. Vandaar deze laatste paragraaf, die toch ook voor de leraar interessante aspecten bevat.

§7 De konstruktie van klassieke $n \times n$ M.V.-en.

In deze paragraaf zullen we i.p.v. $n \times n$ M.V.-en met als veldgetallen $1, 2, 3, \dots, n^2$, de $n \times n$ M.V.-en met als veldgetallen $0, 1, 2, \dots, n^2 - 1$ konstrueren. Immers, als we het 'enen M.V.' (alle veldgetallen gelijk aan 1) bij de een optellen of bij de ander aftrekken, dan gaan deze M.V.-en in elkaar over. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 9 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 3 \\ \hline 6 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 7 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Om konstruktie-methoden te leren kennen, gaan we als volgt te werk:

We nemen een voorbeeld van zo'n M.V., en schrijven de veldgetallen $0, 1, 2, \dots, n^2 - 1$ in het *n-tallig stelsel*. We vinden op die manier dat het M.V. een lineaire combinatie is van twee vierkanten waarin de getallen $0, 1, 2, \dots, n-1$ ieder *n*-keer voorkomen, en die op dusdanige wijze combineren, dat iedere paring van twee getallen uit $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ precies éénmaal in een veld voorkomt. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 3 \\ \hline 6 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 01 & 22 & 10 \\ \hline 20 & 11 & 02 \\ \hline 12 & 00 & 21 \\ \hline \end{array} = 3 \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(3-tallig)

De twee vierkanten zijn in dit geval magisch, en als we in een van de twee of beide de nullen en tweeën verwisselen, dan blijven de vierkanten magisch én op de juiste wijze combineren. Ook kunnen we het vermenigvuldigen met 1 en 3 verwisselen. Op deze manier vinden we $2 \times 2 \times 2 = 8$ M.V.-en. En dat zijn precies alle mogelijkheden als $n = 3$.

Bijvoorbeeld:

 $1 \times$

2	0	1
0	1	2
1	2	0

$+ 3 \times$

1	2	0
0	1	2
2	0	1

$=$

5	6	1
0	4	8
7	2	3

Opm.: Deze konstruktie methode is – zoals we straks zullen zien – een speciaal geval van de ‘diagonaal methode voor oneven vierkanten’.

Voor $n = 3$ zijn we klaar, en we gaan ons nu bezig houden met het geval $n = 4$. We nemen weer een voorbeeld, dat we m.b.v. het 4-tallig stelsel herschrijven.

0	14	11	5
9	7	2	12
6	8	13	3
15	1	4	10

$=$

(4-tallig)

00	32	23	11
21	13	02	30
12	20	31	03
33	01	10	22

$= 4 \times$

0	3	2	1
2	1	0	3
1	2	3	0
3	0	1	2

$+ 1 \times$

0	2	3	1
1	3	2	0
2	0	1	3
3	1	0	2

Kijken we naar de wijze waarop 0, 1, 2 en 3 in deze twee vierkanten staan, dan herkennen we de ‘strijdbijl’ van de M.V.-en **A** t/m **H** uit figuur 7. Wat betekent, dat we een lineaire combinatie van deze M.V.-en hebben gekregen, n.l.:

$4 \times (0 \times \mathbf{A} + 1 \times \mathbf{B} + 2 \times \mathbf{C} + 3 \times \mathbf{D}) + 1 \times (0 \times \mathbf{E} + 1 \times \mathbf{F} + 2 \times \mathbf{G} + 3 \times \mathbf{H})$.

Indien we 0, 1, 2 en 3 onderling permuteren en (of) het vermenigvuldigen met 1 en 4 verwisselen, dan blijven de twee konstruerende M.V.-en op de juiste manier combineren.

Hieruit volgt dan ook een methode om $2 \times 4! \times 4! = 1152$ soortgelijke M.V.-en te konstrueren. Bijvoorbeeld:

$1 \times (3 \times \mathbf{A} + 1 \times \mathbf{B} + 2 \times \mathbf{C} + 0 \times \mathbf{D}) + 4 \times (3 \times \mathbf{E} + 0 \times \mathbf{F} + 1 \times \mathbf{G} + 3 \times \mathbf{H}) =$

$= 1 +$

3	0	2	1
2	1	3	0
1	2	0	3
0	3	1	2

$+ 4 \times$

3	1	2	0
0	2	1	3
1	3	0	2
2	0	3	1

$=$

15	4	10	1
2	9	7	12
5	14	0	11
8	3	13	6

Het volgende voorbeeld toont aan, dat hiermee beslist niet alle klassieke 4×4 M.V.-en zijn gevonden.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 13 & 10 \\ \hline 8 & 7 & 0 & 15 \\ \hline 6 & 9 & 14 & 1 \\ \hline 11 & 12 & 13 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{(4-tallig)} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & 02 & 31 & 22 \\ \hline 20 & 13 & 00 & 33 \\ \hline 12 & 21 & 32 & 01 \\ \hline 23 & 30 & 03 & 10 \\ \hline \end{array} \end{array} = 4 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Er zijn dus blijkbaar nog meer paren van 4×4 M.V.-en waarin de getallen 0, 1, 2 en 3 ieder 4 keer voorkomen, en die op de juiste manier combineren. Maar zelfs al zouden we al die paren van M.V.-en kunnen vinden, dan zijn we nog niet klaar zoals het volgende voorbeeld laat zien:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & 0 & 15 & 4 \\ \hline 5 & 10 & 1 & 14 \\ \hline 2 & 13 & 6 & 9 \\ \hline 12 & 7 & 8 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{(4-tallig)} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 23 & 00 & 33 & 10 \\ \hline 11 & 22 & 01 & 32 \\ \hline 02 & 31 & 12 & 21 \\ \hline 30 & 13 & 20 & 03 \\ \hline \end{array} \end{array} = 4 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} = \text{niet magisch}$
 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{niet magisch}$

In dit geval zijn de twee samenstellende vierkanten niet eens magisch meer!

Vanwege de grote hoeveelheid 4×4 M.V.-en zullen we ons beperken tot een bijzonder soort magisch vierkant, en wel de 4×4 Z.M.V.-en (*Zuiver* Magische Vierkanten). Deze 4×4 Z.M.V.-en zijn 4×4 M.V.-en die voldoen aan de extra eigenschap, dat de som van de getallen in ieder 2×2 deel vierkant gelijk is aan de magische konstante.

We nemen als voorbeeld het 4×4 Z.M.V. van figuur 2 (zie § 1), natuurlijk verminderd met het 'enen-M.V.'. Alleen nu gaan we de veldgetallen niet herschrijven in het 4-tallig stelsel, maar in het 2-tallig stelsel.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 14 & 9 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 15 & 8 \\ \hline 13 & 10 & 1 & 9 \\ \hline 0 & 7 & 12 & 11 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{(2-tallig)} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1110 & 1001 & 0010 & 0101 \\ \hline 0011 & 0100 & 1111 & 1000 \\ \hline 1101 & 1010 & 0001 & 0110 \\ \hline 0000 & 0111 & 1100 & 1011 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$= 8 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} + 4 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \\ \hline 1 & & & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} + 2 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & 1 & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & & 1 \\ \hline & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & & 1 \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

We hebben op deze manier weer een lineaire combinatie gekregen van de 4×4 M.V.-en $\boxed{A}$ t/m $\boxed{H}$ van figuur 7 namelijk:

$$8 \times (\boxed{E} + \boxed{G}) + 4 \times (\boxed{A} + \boxed{B}) + 2 \times (\boxed{A} + \boxed{C}) + 1 \times (\boxed{F} + \boxed{G}).$$

Op dezelfde manier kunnen we nu andere 4×4 Z.M.V.-en konstrueren. Door namelijk de scalaires 8, 4, 2 en 1 te permuteren, en in één of meer samenstellende vierkanten de nullen en enen van plaats te verwisselen. (Dit laatste komt erop neer, dat we $\boxed{E} + \boxed{G}$ vervangen door $\boxed{F} + \boxed{H}$; $\boxed{A} + \boxed{C}$ door $\boxed{B} + \boxed{D}$ enz.). Op deze manier krijgen we $4! \times 2^4 = 384$ Z.M.V.-en, en we kunnen bewijzen dat het ze precies allemaal zijn!

Tenslotte geven we een konstruktiemethode waartoe de meeste, in zwang zijnde methoden zijn terug te voeren. We maken dit weer duidelijk aan de hand van een voorbeeld.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 9 & 21 & 0 & 13 \\ \hline 8 & 22 & 4 & 11 & 15 \\ \hline 20 & 3 & 12 & 19 & 6 \\ \hline 1 & 10 & 18 & 7 & 24 \\ \hline 14 & 16 & 5 & 23 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 32 & 14 & 41 & 00 & 23 \\ \hline 13 & 42 & 04 & 21 & 30 \\ \hline 40 & 03 & 22 & 34 & 11 \\ \hline 01 & 20 & 33 & 12 & 44 \\ \hline 24 & 31 & 10 & 43 & 02 \\ \hline \end{array} \stackrel{(5\text{-tallig})}{=} 5 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} + 1 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

De konstruktiemethode die hieruit blijkt, is de zogenaamde *diagonaalmethode voor oneven M.V.-en*.

Hierbij wordt een $(2n+1) \times (2n+1)$ M.V. gekonstrueerd door twee M.V.-en samen te stellen, waarin de getallen 0, 1, 2, ..., $2n$ ieder op een 'diagonaal' komen te staan. (Wat er onder 'diagonaal' wordt verstaan blijkt wel uit het voorbeeld. De gewone diagonalen noemen we *hoofddiagonalen*, en de anderen *gebroken diagonalen*).

De enige restrictie bij het plaatsen van de getallen 0, 1, 2, ..., $2n$ in de diagonalen is, dat het getal n (in het gegeven voorbeeld is n gelijk aan 2) in de hoofddiagonaal moet komen, anders is het vierkant niet magisch meer.

(**) §8 Een speciaal geval van de diagonaalmethode.

G. E. Kiers behandelt in een artikel (Euclides 70/71 no. 5, blz. 181–189) de konstruktie van $(2n+1) \times (2n+1)$ M.V.-en, waarbij hij in de diagonalen van

het vierkant *rekenkundige rijen* plaatst.
 De vierkanten die op deze manier ontstaan zijn te schrijven in de vorm van de hierna volgende lineaire combinatie (schematisch voorgesteld).

$a \times$

1

„enen-
M.V.“

$+ p \times$

$\begin{matrix} n & & 2 & & 1 & & 0 \\ 0 & n & & & & & \\ & 0 & n & & & & \\ 1 & & & n & & & \\ & 1(n+1) & & & n & & \\ & & (n+1) & & & n & \\ 2n-1 & & & & & & \\ & (2n-1) & & 1 & 0 & n & \\ 2n & (2n-1) & & & & & \end{matrix}$

$+ q \times$

$\begin{matrix} 0 & & 1 & & 2 & & n \\ 1 & & & 2 & & & 0 \\ & 2 & & & n & & 1 \\ 2 & & & & & (n+1) & \\ & 2 & & n & & & \\ & & (n+1) & & & (2n-1) & \\ n & 0 & 1 & & & & 2n \\ & & & (2n-1) & & & \end{matrix}$

$=$

P

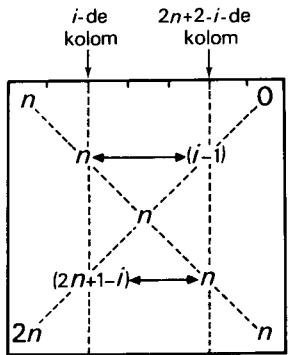
$=$

Q

Dat de vierkanten die G. E. Kiers vindt magisch zijn, is nu duidelijk een gevolg van het feit dat $\boxed{1}$, $\boxed{P}$ en $\boxed{Q}$ magisch zijn ($0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2n = (2n + 1) \cdot n$).
 De magische konstante is nu ook eenvoudig te bepalen. Immers, de magische konstante van $\boxed{1}$ is $2n + 1$, en de magische konstanten van $\boxed{P}$ en $\boxed{Q}$ zijn gelijk aan $n \cdot (2n + 1)$. Hieruit volgt dan dat de magische konstante van de lineaire combinatie $a \times \boxed{1} + p \times \boxed{P} + q \times \boxed{Q}$ gelijk is aan

$$a \cdot (2n + 1) + p \cdot n(2n + 1) + q \cdot n(2n + 1) = (2n + 1) \cdot (a + p \cdot n + q \cdot n).$$

Tenslotte laat G. E. Kiers in zijn artikel zien, dat door het verwisselen van twee kolommen (of twee rijen) die symmetrisch liggen t.o.v. het middelpunt, deze M.V.-en overgaan in nieuwe M.V.-en.
 Ook dit is eenvoudig in te zien, als we bedenken, dat het verwisselen van kolommen (of rijen) een *lineaire transformatie* is. Immers als we twee vierkanten optellen en daarna de kolommen verwisselen, dan krijgen we hetzelfde resultaat als dat we eerst verwisselen, en dan pas optellen. Hetzelfde geldt voor het vermenigvuldigen met een getal. Dit betekent, dat we alleen maar moeten nagaan wat er bij verwisseling gebeurt met de M.V.-en $\boxed{1}$, $\boxed{P}$ en $\boxed{Q}$. Voor $\boxed{1}$ is het duidelijk, die gaat in zichzelf over.



Voor $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$ moeten we alleen bekijken wat er veranderd in de hoofd-diagonalen.

In de nevenstaande figuur is schematisch aangegeven, wat er met $\mathbb{P}$ gebeurt bij het verwisselen van de i -de en de $(2n+2-i)$ -de kolom. Daaruit blijkt dat $\mathbb{P}$ inderdaad overgaat in een M.V. (zo ook $\mathbb{Q}$).

(*) §9 Magische kubussen en sterren.

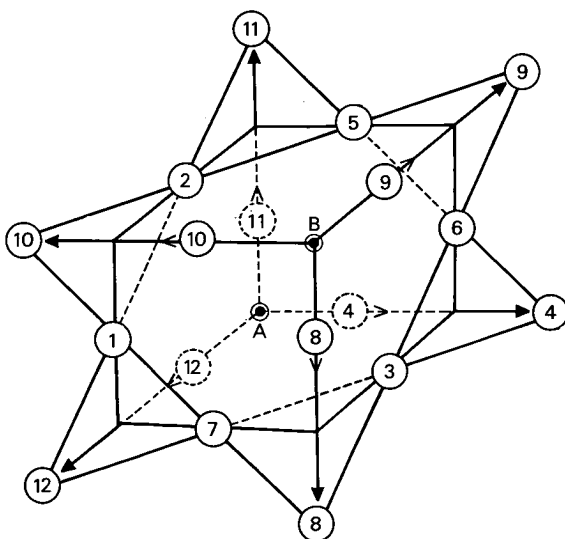
Tenslotte laten we nog een mooi voorbeeld zien van twee isomorfe lineaire ruimten.

De ene ruimte is de verzameling *magische kubussen*. Dat zijn kubussen met op iedere ribbe een getal, zodanig, dat de sommen der getallen op de zijvlakken aan elkaar gelijk zijn.

De andere ruimte is de verzameling *magische sterren*. Dat zijn sterren (gemaakt van twee gelijkzijdige driehoeken) met op ieder hoekpunt en snijpunt een getal, zodanig dat de sommen der getallen op de driehoekszijden aan elkaar gelijk zijn.

In deze ruimten zijn de optelling en scalair vermenigvuldiging weer gedefinieerd door overeenkomstige getallen op te tellen, of te vermenigvuldigen met een scalair.

In onderstaande figuur is een voorbeeld gegeven van een transformatie van een magische kubus in een magische ster door projectie vanuit twee overstaande hoekpunten A en B op het middelloodvlak van de diagonaal AB. Het is eenvoudig in te zien dat deze transformatie lineair en bijektief is. Dus een isomorfisme. Het probleem om magische kubussen te konstrueren, is daarom equivalent met het konstruktieprobleem voor magische sterren.



Afbeeldingen

P. G. J. VREDENDUIN

Doorwerth

Bij het definiëren van het begrip afbeelding doen zich enkele onverwachte moeilijkheden voor.

Om misverstanden uit te sluiten eerst een voorlopige begripsafbakening. Onder een afbeelding van V in W versta ik een toevoeging waarbij aan elk element van V precies één element van W is toegevoegd.

Deze afbeelding heet een injectie als aan verschillende elementen van V verschillende elementen van W zijn toegevoegd.

De afbeelding heet een surjectie als elk element van W aan ten minste één element van V is toegevoegd.

Het woord 'toevoeging' is voor de beroepswiskundige ietwat vaag. Vandaar dat we onze toevlucht nemen tot het begrip 'relatie' en dan afbeeldingen als een speciaal soort relaties definiëren.

Een relatie van V naar W is een verzameling geordende paren waarvan het eerste element tot V en het tweede tot W behoort.

Anders gezegd: een deelverzameling van $V \times W$.

Zo komen we tot de definitie:

Een afbeelding van V in W is een relatie van V naar W waarbij elk element van V in precies één geordend paar van deze relatie als eerste element voorkomt. Een afbeelding is dan een speciaal soort relatie en dus een speciaal soort verzameling.

We brengen tot slot nog in herinnering dat twee verzamelingen gelijk zijn wil zeggen dat ze dezelfde elementen hebben.

Tot zover is alles overbekend. Nu komt de narisigheid.

We beschouwen twee afbeeldingen die veel op elkaar lijken.

1e de afbeelding

$$f_1 : x \rightarrow \sqrt{x} \quad \text{van } \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

2e de afbeelding

$$f_2 : x \rightarrow \sqrt{x} \quad \text{van } \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

Tussen deze twee afbeeldingen is een essentieel verschil: f_1 is een surjectie en f_2 is geen surjectie.

Er zijn wel meer verschillen. De afbeelding f_1 is een bijectie en f_2 niet. De afbeelding f_1 heeft een inverse en f_2 niet. Maar één verschil is voor ons doel al voldoende.

We herinneren ons dat f_1 en f_2 relaties en dus verzamelingen zijn. Welke elementen heeft de verzameling f_1 ? Alle geordende paren $(a, \sqrt{a})$ waarin a een niet-negatief reëel getal is. En f_2 ? Precies dezelfde elementen.

Dan zijn f_1 en f_2 gelijke verzamelingen.

We moeten nog iets dieper graven. Wat betekent $a = b$? De betekenis van het gelijkteken wordt vastgelegd in de logica. Als a en b termen zijn die voorkomen in een deductief systeem S dan betekent in dit systeem $a = b$: als in een uitspraak A behorend tot S de term a (of b) voorkomt en B uit A ontstaat door een in A voorkomende a door b te vervangen (of omgekeerd), dan is $A \Leftrightarrow B$.

Hierboven is gevonden:

f_1 is een surjectie

f_2 is geen surjectie

$f_1 = f_2$

Hetgeen contradictoer is. Er is dus iets mis met onze begripsvorming. We komen blijkbaar in moeilijkheden als we een afbeelding definiëren als een bijzonder soort relatie.

Wat dan wel? Kennelijk spelen er bij het vaststellen van hetgeen onder een afbeelding f verstaan wordt drie dingen een rol:

de verzameling V die afgebeeld wordt

de verzameling W waarin afgebeeld wordt

het afbeeldingsvoorschrift.

Dit afbeeldingsvoorschrift resulteert in de vorming van een verzameling geordende paren waarvan het eerste element tot V en het tweede tot W behoort, dus tot een deelverzameling van $V \times W$. En nu zijn we er.

Een afbeelding is een geordend tripel (V, W, X) waarin

V, W en X verzamelingen zijn

$X \subset V \times W$

elk element van V in precies één element van X als eerste voorkomt.

Vergelijken we nu nogmaals f_1 en f_2 , dan zien we:

$$f_1 = (V_1, W_1, X_1) \quad \text{en} \quad f_2 = (V_2, W_2, X_2)$$

en hierin is

$$V_1 = V_2, \quad X_1 = X_2, \quad \text{maar} \quad W_1 \neq W_2$$

En daardoor is $f_1 \neq f_2$.

Er is een andere oplossing en deze is gekozen door Freudenthal. Hij wil afbeelding niet invoeren als een speciaal soort relatie en niet als een geordend tripel van drie verzamelingen. Volgens hem is een afbeelding een toevoeging

en is het ieder duidelijk wat onder toevoeging verstaan wordt. Ik geloof dat dit didactisch een uitermate gezond standpunt is.

Blijft over de vraag of het standpunt ook wetenschappelijk houdbaar is. D.w.z. of op deze basis een fundering van het begrip afbeelding mogelijk is. Wat is het wetenschappelijk ekwivalent van 'iets is zonder meer duidelijk' of van 'het is zo fundamenteel dat we het niet definiëren kunnen'? In de deductieve opbouw van een wiskundig systeem wil dat zeggen: we kiezen het als groundbegrip. En gezien het feit dat 'afbeelding' geen specifiek wiskundig begrip is, maar meer algemeen thuis hoort in de logica, zou 'afbeelding' dus als groundbegrip aanvaard moeten worden bij de opbouw van de mathematische logica. 'Afbeelding' zou dan niet gedefinieerd worden, maar in een aantal axioma's zou impliciet de betekenis ervan vastgelegd moeten worden. Inderdaad is dit mogelijk. We behoeven alleen maar het boek: *Exacte Logica* geschreven door Prof. Dr. Hans Freudenthal (De erven F. Bohn N.V., Haarlem, 1961; V.U.B. tweede reeks no. 67) in te zien om te constateren hoe dit kan geschieden. Op blz. 69–73 kan men nalezen hoe de auteur hierin geslaagd is.

Er is nog een derde oplossing: toch een afbeelding definiëren als een bijzonder soort relatie, maar dan zijn terminologie daaraan aanpassen.

Een afbeelding uit V in W is een relatie van V naar W waarin elk element van V in hoogstens één geordend paar van deze relatie als eerste voorkomt.

Domein en bereik van een afbeelding worden op de gebruikelijke manier gedefinieerd.

Een afbeelding uit V in W heet een afbeelding van V als zijn domein V is en een afbeelding op W als zijn bereik W is.

De term surjectie wordt niet ingevoerd (en is trouwens ook overbodig).

De term injectie kan op de normale manier gebruikt worden.

Een afbeelding uit V in W heeft een inverse als hij een injectie is. Deze inverse is een afbeelding uit W in V .

Dit laatste is in feite de enige wijziging die in de terminologie aangebracht moet worden.

Een afbeelding van V op W is een bijectie van V op W als hij een inverse heeft (als vanouds). Tot slot wil ik een waarderingschaal uitspreken tussen de drie oplossingen. Ik voel het meest voor de oplossing Freudenthal, daarna komt voor mij de laatste methode en het minst voel ik voor de geordende tripels. Als axiomaticus kan men natuurlijk bezwaar aantekenen tegen de methode Freudenthal, omdat een groundbegrip is ingevoerd dat geëlimineerd kan worden.

Ik ben nieuwsgierig naar eventueel commentaar.

Opmerking. De lezer zal opgevallen zijn dat de laatste oplossing veel overeenkomst vertoont met het standpunt van de nomenclatuurcommissie. Duidelijkheidshalve wil ik er wel aan toevoegen, dat deze overeenkomst grotendeels een toevallige is. De argumenten gebezigd door de nomenclatuurcommissie zijn van geheel andere aard dan de argumenten die hierboven naar voren gebracht zijn.

Korrel

Logisch correct taalgebruik

Een van de essentiële resultaten van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs is, althans volgens mij, dat we thans in ons onderwijs beschikken over een taal waarmee we onze gedachten scherp en correct kunnen uitdrukken. We zijn nu in staat precies te zeggen wat we bedoelen. In tegenstelling tot vroeger, toen we vaak op versluierde manier juist iets anders zeiden dan we eigenlijk bedoelden. Deze nieuwe taal is in wezen zo eenvoudig, dat hij voor de leerling geen beletsel zal vormen gesproken of geschreven tekst goed te volgen. (Ik geef toe dat men soms door overdrijving iets makkelijk kan maken, maar dat moet men natuurlijk niet doen.)

Onlangs kwam mij een ouderwetse tekst in handen waaraan ik dit goed kan adstrueren. Deze tekst luidt (cursiveringen van mij):

Gegeven in $\mathbb{R}_2$ de lijnen l en m , waarvan de vergelijkingen zijn

$$l: (1-a)x_1 + (1+a)x_2 = 4$$

$$m: (1+a)x_1 + x_2 = 1+a$$

Bepaal a zó dat (1) de lijnen l en m elkaar snijden.

Oplossing: Het stelsel vergelijkingen

$$(1-a)x_1 + (1+a)x_2 = 4$$

$$(1+a)x_1 + x_2 = 1+a$$

moet dan (2) precies één oplossing hebben.

$$\text{Dus (3) } \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ zodat (4) } a^2 + 3a \neq 0, \\ \text{d.i. (5) } a \neq 0 \text{ en } a \neq -3.$$

Tot zover de tekst. Nu het commentaar.

Ad (1). Scherper is de huidige vraagstelling:

gevraagd de verzameling van de $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de lijnen l en m elkaar snijden. Conventie is deze ietwat dikke uitdrukkingswijze te vervangen door: voor welke $a \in \mathbb{R}$ snijden l en m elkaar? (Waarmee dan volgens afspraak hetzelfde bedoeld is.)

Ad (2). Nu wordt het belangrijker. Waarom *moet* dit stelsel vergelijkingen *dan* precies één oplossing hebben? Ik wil niet vitten en volstaan met de opmerking dat de auteur zegt:

als de lijnen elkaar snijden heeft dit stelsel vergelijkingen precies één oplossing. Dus:

l snijdt $m \Rightarrow$ het stelsel vergelijkingen heeft precies één oplossing.

Er wordt gevraagd naar de verzameling van *alle* a 's. We moeten daarom met gelijkwaardigheden werken. Dus met dubbele pijlen. De enkele pijl garandeert niet dat alle gevonden waarden voor a aan de vraag voldoen.

Ad (3). Het woord '*dus*' duidt weer expliciet op een enkele pijl. Als het stelsel ver-

gelijkingen precies één oplossing heeft, dan is de genoemde determinant ongelijk aan 0.

Ad (4). 'Zodar'. Ik dacht, dat dit woord een enkele pijl inhield. Van belang is het ondertussen niet, want één enkele pijl in de redenering is voldoende om de stringentie te torpederen.

Ad (5). 'dat is'. Hier dacht ik dat toch wel een dubbele pijl bedoeld is.

Hoe het ook zij: de gekozen terminologie versluiert de gedachtengang.

Kritiek is gemakkelijk. Wat dan wel? Ik zou voorstellen:

l en m snijden elkaar $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (1-a)x_1 + (1+a)x_2 = 4 \\ (1+a)x_1 + x_2 = 1+a \end{cases} \text{ heeft precies één oplossing } \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq -3$$

Voor leraar en voor leerling is dit helder en doorzichtig. Bovendien zegt men precies wat men bedoelt.

P. G. J. Vredenduin

Didactische literatuur

The Mathematics Teacher 69, nr. 1, jan. 1976

Susan J. Grant en Ward R. Stewart hebben een methode ontworpen voor het invoeren van de complexe getallen. Adjunctie van een getal aan de verzameling van de reële getallen om te bewerkstelligen, dat de vergelijking $x^2 = -1$ een wortel krijgt, is voor de leerlingen een onnatuurlijke bezigheid. Zij stellen daarom voor eerst het lichaam van de natuurlijke getallen modulo 7 te beschouwen. In dit lichaam is de oplossingsverzameling van de vergelijking $x^2 = 6$ (of $x^2 = -1$) leeg. Zij adjungeren nu een getal k met de eigenschap $k^2 = 6$ en komen zo langs natuurlijke weg tot een lichaam met 49 elementen waarin de worteltrekking steeds uitvoerbaar is. Op natuurlijke wijze wordt zo de adjunctie van i aan $\mathbb{R}$ voorbereid.

Wie in wiskunde II complexe getallen behandelt, zou aan deze hint iets kunnen hebben. Ook is het wel leuk het bovengeschetste proces zelf eens uit te voeren.

P. G. J. Vredenduin

Zo doe ik het

De puzzel als didactisch hulpmiddel.

In mijn lokaal heb ik op het prikbord het volgende rijmpje hangen{

*Once upon a time,
We had a row of Siematics,
But, o boy, what a crime,
Not washing so clean as mathematics.*

Al jaren beleef ik veel plezier aan één van Freudenthal afkomstige puzzel. Verknip een stomphoekige driehoek in een minimum aantal scherphoekige. Door alleen proberen, blijkt het een naald in een hooiberg te zijn. Door het op het juiste moment geven van een klein aantal aanwijzingen is stap voor stap, met een ijzeren logica, de oplossing te vinden. Wat een schone illustratie is van de enorme kracht van het wiskundig redeneren.

Wat ik zou willen, is een zestal problemen, voor elke klas één, waar de hele stof van het jaar aan is op te hangen.

Voor de tweede klas heb ik er één gevonden. Ik zal een kleine greep uit de mogelijkheden doen.

Eerst het probleem. Het is een verhaaltje:

Een man krijgt een pakje toegezonden uit een tropisch land. Er blijken 10 plankjes in te zitten van de duurste, hardste en mooiste houtsoort die er bestaat. Ze zijn 2 dm lang, 1 dm breed, en 1 cm dik. Hij besluit er een bijzet-tafeltje van de laten maken. Vierkant, want dat vindt hij het mooiste. Hij gaat naar een timmerman, en zegt: 'Zaag een vierkant stuk spaanplaat, lijm de 10 plankjes erop, maak er een rand omheen, b.v. van koper, en maak er vier pootjes onder.' De timmerman probeert even, en antwoordt: 'Het spijt me, meneer, maar dat ken niet'. Waarop de man zegt: 'Je mag een zo klein mogelijk aantal plankjes hoogstens éénmaal recht doorzagen'. De timmerman gaat aan het werk, en levert een week later het tafeltje volledig naar wens af.

Ik legde het probleem voor aan de brugklas op de laatste les voor de zomer-vacantie. De meesten gingen op ruitjespapier aan het tekenen. Een leerling, die als traag te boek staat, stak na ongeveer een minuut de vinger op:

'Meneer, wat is wortel 20?'

'Wat is $5/7$?'

'Het getal dat met 7 vermenigvuldigd 5 oplevert!'

'Wortel 20 is het positieve getal, dat in het kwadraat 20 oplevert.'

'O.'

Na ongeveer een minuut weer de vinger omhoog.

'Meneer, maar waar is wortel 20 gelijk aan.'

'Waar is $5/7$ b.v. gelijk aan?'

‘Aan $3/7$ plus $2/7$.’

‘Probeer zoiets ook eens bij wortel 20.’

Even later een andere leerling:

‘Meneer, ik kan wel van 8 plankjes een vierkant maken.’

‘Wat hou je dan over?’

‘Twee plankjes.’

‘Kan je daar ook een vierkant van maken?’

Na ongeveer een minuut weer de vinger in de lucht.

‘Meneer, kun je van twee vierkanten één vierkant maken?’

‘Probeer dat eerst eens met twee evengrote vierkanten.’

Weer later een andere leerling:

‘Meneer, mag het geen rechthoekige tafel worden?’

‘Heb je er dan één.’

‘Ja.’

‘Wat voor vorm heeft die?’

‘3 dm bij 6 dm. O, het zijn er maar 9, sorry.’

‘Teken die 10-de er eens naast.’

Na even tekenen:

‘Zie je overeenkomst tussen die twee rechthoeken?’

‘Ze hebben dezelfde vorm.’

Dit zijn een paar opmerkingen die binnen korte tijd vielen. Ze verwijzen naar het rekenen met wortels, Pythagoras, en gelijkvormigheid. Ik ben ervan overtuigd, dat ook het oplossen van een stelsel vergelijkingen met twee variabelen, het samenstellen van afbeeldingen en nog zoveel meer op dezelfde natuurlijke manier tevoorschijn komen.

Het integraal oplossen van het probleem, dus ook voor 20 plankjes, 15 plankjes en 11 plankjes zal vermoedelijk de hele tweedeklasstof omvatten.

Men hoeft het maar te proberen.

C. van Schagen.

Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen.

Najaarsvergadering van het Genootschap voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek.

Deze zal gehouden worden op zaterdag 30 oktober 1976 te Woerden. Belangstellenden kunnen zich voor nadere informatie en toezending van het programma wenden tot de secretaris Mevr. Drs. M. Fournier, Helmhof 36, Alphen a. d. Rijn (tel. 01720-22454).

Nederlandse wiskunde-olympiade

Tweede ronde 1975, 22 december 1975, UTRECHT.

Schrijf de oplossingen van onderstaande opgaven op *afzonderlijke* vellen papier. Schrijf je naam en nummer op *elk* vel.

1 Zijn de volgende uitspraken juist voor elk reëel getal x ? (Geef een bewijs of tegenvoorbeeld.)

a Als x^7 en x^{12} rationaal zijn, is x ook rationaal.

b Als x^9 en x^{12} rationaal zijn, is x ook rationaal.

2 T is de verzameling van de natuurlijke getallen van 2 cijfers. P is de verzameling van de produkten van 8 opeenvolgende getallen uit T . Bepaal de grootste gemene deler van alle elementen van P .

3 $x_1, \dots, x_n$ en $t_1, \dots, t_n$ zijn twee rijen van n reële getallen, en $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Bewijs $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (t_i - t_j)^2 x_i x_j) \leq 0$. ($\sum_{i=1}^n a_i$ is een korte notatie voor $a_1 + a_2 + \dots + a_n$).

4 Gegeven is een rechthoekig vlak coördinatenstelsel.

a Bewijs dat het onmogelijk is een gelijkzijdige driehoek te vinden waarvan de hoekpunten gehele coördinaten hebben.

b In het vlak liggen de punten A, B, C met gehele coördinaten op zo'n manier dat $AB = AC$. Bewijs dat $\frac{d(A, BC)}{BC}$ rationaal is ($d(A, BC)$ is de afstand van het punt A tot de rechte door B en C ; $B \neq C$).

5 Beschrijf een methode om een willekeurige driehoek in eindig veel deeldriehoeken te verdelen die zo samengevoegd kunnen worden dat een rechthoek ontstaat met één van de zijden gelijk aan 1 (en oppervlakte gelijk aan die van de oorspronkelijke driehoek).

Prijswinnaars Olympiade 1975

- 1 Ralph Tschopp, Revis Lyceum, Doorn, 28,8 p. (1ste ronde: 24 p) (leraar: A. Dokter)
- 2 Hans Riewerts, Chr. S. G. Westland Zuid Vlaardingen, 27,8 p. (33) (F. A. Voskamp)
- 3 Pierre America, Gymn. Rolduc, Kerkrade, 27,8 p. (29) (H. Tammink)
- 4 Bart Westra, Het Drachtster Lyceum, Drachten, 27,0 p. (30) (J. van Heuveln)
- 5 Peter Boots, Van der Puttlyceum, Eindhoven, 27,0 p. (25) (P. H. A. T. Vermeulen)

- 6 Herko v. d. Meulen, Gem. Lyceum, Eindhoven, 21,8 p. (24)
(J. Wengelaar)
- 7 Mark Overmars, K. S. G. De Breul, Zeist, 21,2 p. (26)
(A. G. M. Dorrestein)
- 8 Rob van Ommering, S. G. Augustinianum, Eindhoven, 20,4 p. (24)
(J. C. van Uden)
- 9 Alex Fekken, Van der Puttlyceum, Eindhoven, 20,0 p. (32)
(P. H. A. T. Vermeulen)
- 10 Mark Kramer, Prot. Lyceum, Eindhoven, 19,2 p. (25)
(G. Meyer)

Maximaal aantal punten tweede ronde: 39.

Maximaal aantal punten eerste ronde: 36.

De vierde wiskunde olympiade in de U.S.A.

Hieronder volgen de opgaven.

FOURTH U.S.A. MATHEMATICAL OLYMPIAD

6 May 1975

1. (a) Prove that $[5x] + [5y] \geq [3x + y] + [3y + x]$, where $x, y \geq 0$ and $[u]$ denotes the greatest integer $\leq u$ (e.g., $[\sqrt{2}] = 1$).
(b) Using (a) or otherwise, prove that

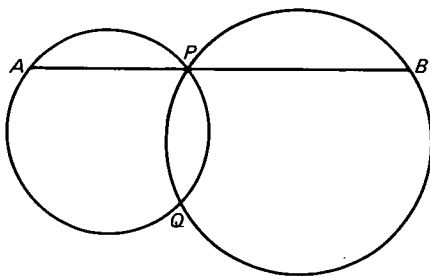
$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

is integral for all positive integral m and n .

2. If A, B, C, D denote four points in space and AB denotes the distance between A and B , and so on, show that

$$AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2 \geq AB^2 + CD^2.$$

3. If $P(x)$ denotes a polynomial of degree n such that $P(k) = k/(k+1)$ for $k = 0, 1, 2, \dots, n$, determine $P(n+1)$.
4. Two given circles intersect in two points P and Q . Show how to construct a segment AB passing through P and terminating on the two circles such that $AP \cdot PB$ is a maximum.
5. A deck of N playing cards, which contains three aces, is shuffled at random (it is assumed that all possible card distributions are equally likely). The



cards are then turned up one by one from the top until the second ace appears. Prove that the expected (average) number of cards to be turned up is $(N+1)/2$.

Deelgenomen is door 103 op schoolprestaties geselecteerde leerlingen. Per vraagstuk werden maximaal 25 punten toegekend. 35 deelnemers behaalden niet meer dan 10 punten, 7 meer dan 50 en geen meer dan 90.

Blijkens de scores werd opgave 3 het moeilijkst gevonden en daarna in successie 1, 4, 2, 5.

Overgenomen uit *The Mathematics Teacher* 69, nr. 1, jan. 1976. In dit nummer vindt men ook de oplossingen.

P. G. J. Vredenduin

Uit de tijdschriften

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. Jahrgang 29 – Heft 1 – Jan. 1976. Ferd. Dümmlers Verlag – Bonn. Hirschgraben-Verlag – FFM.

Dit nummer van 'MNU' bevat enkele artikelen die ook voor de Nederlandse leraar interessant zijn.

1 Van Friedrich W. Koswig is een artikel over elementaire toetstheorie. Hoofdmoot van het artikel is de paragraaf 'Ein Modell zum Testen einer statistischen Hypothese'.

2 Wolfgang Skötsch schrijft over 'Alte und neue Lösungen des 'Traveling Salesman Problem' für den Schulunterricht'. Aardig om eens een keer een les aan te besteden.

3 Van Reinhardt Huth is het artikel 'Physik im Mathematikunterricht'. Het geeft een overzicht van een aantal gebieden van de fysica die in de wiskundeles gebruikt kunnen worden als toepassings- en illustratiemateriaal. De titels van de paragrafen van dit artikel zijn:

1 Vereinigungs- und Schnittmenge

- 2 Proportionalität und Antiproportionalität
- 3 Die quadratische Funktion
- 4 Kongruenzabbildungen
- 5 Zentrische Streckung
- 6 Die Sinus- und Kosinusfunktion
- 7 Zur Differential- und Integralrechnung
- 8 Schlussbemerkingen.

4 In de afdeling 'Mitteilungen' wordt het Duitse normblad 'Normung der Zeichen der Mengenlehre' besproken.

G. Krooshof

Dierenriemstraat 12, Groningen 8002

Rectificatie

Het register van de 51-ste jaargang is verkeerd afgedrukt. De beide binnenpagina's dienen verwisseld te worden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 1 november 1975 in het gebouw van de SOL te Utrecht.

Om 10.20 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, de heer en mevrouw dr. G. Bosteels, de heer F. Laforce, de heer en mevrouw Prof. dr. R. Holvoet, mej. L. Simons, de inspecteurs drs. W. E. de Jong, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman, de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff D. W. Soeteman, de vertegenwoordiger van Euclides G. Krooshof, de vertegenwoordiger van het h.b.o. P. M. de Graaf en de ereleden Prof. dr. H. Freudenthal, dr. Joh. H. Wansink en drs. A. J. S. van Dam.

De voorzitter deelt de vergadering mee dat het bestuur gemeend heeft Prof. Freudenthal bij gelegenheid van zijn zeventigste verjaardag het erelidmaatschap van de vereniging te verlenen. Vooruitlopend op een beslissing van de algemene vergadering is Prof. Freudenthal dit erelidmaatschap reeds tijdens zijn verjaardagsreceptie aangeboden. Met een spontaan applaus verleende de vergadering haar goedkeuring aan deze beslissing.

Vervolgens spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit; deze is gepubliceerd in Euclides.

De notulen van de algemene vergadering van 2 november 1974 en de jaar-

verslagen worden goedgekeurd. De penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd de heren J. C. M. Tolenaar uit Leiden en A. J. Th. van den Berg uit Leidschendam.

De heren L. van Beek en drs. J. W. Maassen worden als bestuurslid herkozen. De contributie voor het verenigingsjaar 1976/1977 wordt vastgesteld op f 35,—. De heer G. Wentholt vraagt om reductie van contributie voor studenten. De heer dr. Joh. H. Wansink vraagt om in dat geval het begrip student nauwkeurig te definiëren. De heer B. Knip ondersteunt het voorstel tot reductie voor studenten omdat ook voor andere leden via didactiek cursussen financiële middelen ter beschikking worden gesteld. Het bestuur zal zich over deze reductie beraden. Vervolgens wordt door de heer drs. J. van Dormolen een inleiding over 'Vaardigheden' gehouden. Deze wordt gevolgd door een discussie in werkgroepen. Na de middagpauze wordt de vergadering hervat met een tweede inleiding over het thema 'Vaardigheden' door de heer G. Schoemaker, eveneens gevolgd door een discussie in werkgroepen.

Na een korte theepauze wordt de vergadering hervat met de rondvraag. Mevr. J. L. Righarts vraagt naar een mening over het gebruik van rekenmachines. Hierover is een brief van de inspectie aan de scholen gezonden. De heer drs. W. E. de Jong voegt hier aan toe dat het gebruik van rekenmachines op het examen uit sociale overwegingen nog niet verantwoord is. Een wijziging zal tijdig worden bekend gemaakt. Rekenmachines zullen of niet toegestaan of verplicht zijn.

De heer F. F. J. Gaillard merkt op dat hij de publicatie 'Vaardigheden' een goed stuk vindt. Hij vindt dit een reactie op hoog niveau op externe publicaties. Hij ziet deze ook gaarne beschikbaar gesteld voor l.b.o.-leraren. De voorzitter deelt mee dat de publicatie bij het IOWO verkrijgbaar is. Hij vindt ook dat de vereniging meer voor l.b.o.-leraren moet gaan doen. De heer Van Dormolen deelt nog mee dat zijn publicatie geen reactie op externe publicaties is.

De heer F. Laforce dankt namens de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars voor de gastvrijheid; hij hoopt dat de gemeenschappelijke dag op 13 maart 1976 een succes zal worden en dat door kennis te nemen van elkaars visie op wiskunde de samenwerking tussen de Nederlandse en Vlaamse vereniging nog zal groeien.

De heer B. Knip vraagt of het bestuur het een probleem of een gelukkige omstandigheid vindt dat het wiskunde-niveau m.a.v.o te hoog is voor het technisch onderwijs; of de invoering van wiskunde A en B niet te snel gaat; wat het bestuur met de contourennota gaat doen en hoever de activiteiten van de vereniging gaan in het belang van het totale wiskunde-onderwijs in Nederland. De voorzitter zegt niet bedoeld te hebben dat de invoering van wiskunde A en B reeds in kannen en kruiken is doch dat we er over moeten denken. De heer Van Beek vindt niet dat uit de jaarrede van de voorzitter te concluderen is dat het m.a.v.o.-4 niveau voor wiskunde te hoog is, maar dat het wel een probleem is dat een m.a.v.o.-3 leerling niet zonder meer tot het middelbaar beroepsonderwijs toegelaten kan worden.

Ook de heer Gaillard pleit voor een openstelling van de vereniging voor docenten bij het beroepsonderwijs. De heer Vredenduin zegt dat de vereniging

eerst alleen voor v.w.o.-docenten was, waar ook h.a.v.o.-docenten bijkwamen. De vereniging is later uitgebreid voor m.a.v.o.-docenten. Nu dit een homogeen geheel is geworden kunnen de grenzen weer verruimd worden.

De heer Gaillard vraagt zich af of de toelaatbaarheid van m.a.v.o.-3 tot middelbaar beroepsonderwijs niet te veel op wiskunde wordt toegespitst. M.a.v.o.-3 en l.b.o.-t hebben toch hetzelfde eindexamen wiskunde.

De heer van Beek meent dat er een mentaliteitsverschil is tussen m.a.v.o.-3 en l.b.o.-t leerlingen. De heer Gaillard is het hier niet mee eens.

De heer L. A. G. M. Muskens ziet hier een groot probleem. Het is prettig dat het l.b.o. vertegenwoordigd is. De vereniging heeft l.b.o.-mensen nodig om voor het l.b.o. iets te kunnen bieden.

Om 16.20 uur sluit de voorzitter de vergadering.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1975-31 juli 1976

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. van Beek, L. Bozua, M. Kindt, F. J. Mahieu en dr. P. G. J. Vredenduin. Bij gelegenheid van zijn zeventigste verjaardag is Prof. dr. H. Freudenthal tot erelid van de vereniging benoemd.

De contacten met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars zijn versterkt. Op 18 oktober hebben de besturen van de Vlaamse en de Nederlandse Vereniging gezamenlijk vergaderd te Antwerpen en op 13 maart is er een gemeenschappelijke bijeenkomst voor Vlaamse en Nederlandse leden gehouden in Eindhoven, met als thema 'Het aanvangsonderwijs in de planimetrie'. Om de doelstelling van de vereniging ook voor het lager beroepsonderwijs te verwezenlijken heeft het bestuur op 21 januari een vergadering met vertegenwoordigers van het beroepsonderwijs gehad. Sinds die datum zijn de bestuursvergaderingen bijgewoond door de heer F. F. J. Gaillard. Ook zijn de examenbesprekingen tot het l.b.o.-c/m.a.v.o.-3 examen wiskunde uitgebreid.

Op 6 september zijn in Utrecht forumbijeenkomsten over de wiskunde-eindexamens 1975 gehouden voor m.a.v.o. (meerkeuzewerk), h.a.v.o. en v.w.o.. De jaarvergadering is gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht op 1 november. Het centrale thema was 'Wiskundige vaardigheden'.

Op 25 mei werden in Amsterdam, Breda, Groningen, Roermond, Rotterdam en Zwolle bijeenkomsten gehouden ter bespreking van het examen wiskunde 1976 m.a.v.o.-3 en l.b.o.-c.

Op 31 mei werden in Alkmaar, Amersfoort, Amsterdam, Apeldoorn, Bergen op Zoom, Breda, Eindhoven, Emmen, Gouda, 's-Gravenhage, Groningen, Haarlem, Heerenveen, Heerlen, Hengelo, 's-Hertogenbosch, Hoogeveen, Leerdam, Leeuwarden, Lochem, Middelburg, Naarden, Nijmegen, Roermond, Rotterdam, Tilburg, Utrecht en Zwolle soortgelijke bijeenkomsten gehouden voor het examen wiskunde m.a.v.o.-4.

De didactiekcommissie heeft weer verscheidene meerdaagse cursussen voor docenten georganiseerd.

Dit jaar verscheen de publikatie 'Vaardigheden' van drs. J. van Dormolen in samenwerking met de didactiekcommissie.

Het bestuur vergaderde dit jaar elf maal, waaronder twee maal met de inspecteurs drs. W. E. de Jong, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman.

Agenda

Op zaterdag 30 oktober 1976 houdt de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren haar jaarvergadering in het Dr. F. H. de Bruijne Lyceum, Koningsbergerstraat 2 te Utrecht.**)

De agenda van de vergadering, die om 10.00 uur aanvangt, is als volgt:

- 1 Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
- 2 Notulen van de algemene vergadering 1975.
- 3 Jaarverslagen.*)
- 4 Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
- 5 Bestuurverkiezing in verband met periodiek aftreden van L. Bozua, drs. J. van Dormolen en M. Kindt.
Het bestuur stelt de aftredenden kandidaat.
Het bestuur stelt ter uitbreiding van het bestuur F.F.J. Gaillard, uit de l.b.o.-sector, kandidaat.
- 6 Vaststelling van de contributie 1977/1978.
- 7 Inleiding en discussiegroepen over: 'Het laatste schooljaar'.
- 8 Examenprogramma wiskunde I.*)
- 9 Rondvraag.
- 10 Sluiting.

Bestuursvoorstel aangaande het definitieve eindexamenprogramma statistiek

De inspectie heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren verzocht advies uit te brengen over het definitieve eindexamenprogramma statistiek. Om misverstand te voorkomen: het gaat dus over het programma dat zal geëxamineerd worden met ingang van het eindexamen in 1979.

Om goed gefundeerd advies uit te kunnen brengen heeft het bestuur op 10 april j.l. een vergadering belegd met tien wiskundeleraren die aan het eindexamen statistiek 1976 zouden deelnemen. Acht van hen hadden tevens deelgenomen aan het experiment statistiek.

Men was het erover eens dat de onderwerpen die in 1976 gevraagd zijn, in het definitieve programma opgenomen dienden te worden. Bleef over de vraag welke van de volgende onderwerpen daar eventueel aan toegevoegd moesten worden:

toetsingstheorie	spreiding
betrouwbaarheidsintervallen	poisson-verdeling
verwachting	continue verdeling, normale verdeling.

*) De jaarverslagen en een artikel over het examenprogramma wiskunde I zijn elders in dit nummer opgenomen.

**) Een eenvoudige lunch kan gereserveerd worden. Degene die hiervan gebruik willen maken, wordt verzocht uiterlijk 20 oktober a.s. f 5,- over te maken op giro 143917 t.n.v. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam, met vermelding: lunch 30 oktober.

De meerderheid van de tien leraren vond dat van deze onderwerpen alleen de eerste twee in het definitieve programma een plaats dienden te vinden. Het bestuur neemt dit advies gaarne over en stelt dus voor de inspectie te adviseren het definitieve programma te doen bestaan uit:
de in 1976 geëxamineerde stof vermeerderd met toetsingstheorie en betrouwbaarheidsintervallen.

Desgewenst kan men de stof ook zo omschrijven: uit het door het I.O.W.O. uitgegeven boek Statistiek en Kansrekening voor het v.w.o. de eerste vier hoofdstukken met uitzondering van de paragrafen 3.4 en 3.5.

Men was niet vrij van zorg over de omvang van het totale examenprogramma wiskunde I. Wijzigingen in dit programma aanbrengen is niet mogelijk. Wel kunnen we echter de inspectie vragen ook na 1978 voorlopig op het schriftelijk deel van het examen geen vragen te stellen over de volgende onderwerpen: cyclometrische functies

partiële integratie.

Het bestuur stelt voor dit verzoek aan de inspectie te doen.

Ten slotte heeft het bestuur nagegaan of er mogelijk onderwerpen zijn die in sommige leerboeken behandeld worden en waarvan het onzeker is of er op het examen al dan niet vragen over gesteld worden. Veel heeft het niet gevonden. Toch is het misschien de moeite waard de volgende onderwerpen te signaleren:

het uitrekenen van integralen door middel van het splitsen van een breuk in partiële breuken

integralen die aan beide grenzen oneigenlijk zijn

het oplossen van een differentiaalvergelijking door gebruik te maken van een reeds bekende particuliere oplossing.

Het bestuur stelt voor de inspectie te adviseren per circulaire mee te delen, dat het examenprogramma zo geïnterpreteerd wordt, dat over deze onderwerpen geen vragen te verwachten zijn.

Op de aanstaande jaarvergadering zal het bestuur graag de mening van de leden horen ten einde gemeenschappelijk tot een definitieve redactie van het advies te komen.

Het bestuur van de N.V.v.W.

Redactieverslag

over de 51ste Jaargang van Euclides.

Over de 51-ste jaargang zijn weinig bijzonderheden te vermelden. De redactie was in staat uit de binnengekomen kopij een zodanige keuze te doen, dat het tijdschrift 'elck wat wils' kon bieden. Ook dit jaar gingen we verder op de ingeslagen weg meer didaktiek der wiskunde dan zuivere wiskunde te geven. De stijging van het aantal abonnee's lijkt dit beleid te rechtvaardigen. De samenwerking met de uitgever was wederom voortreffelijk.

G. Krooshof, voorzitter

W. Kleijne, secretaris

Boekbespreking

J. M. Rushforth and J. L. I. Morris, *Computers and Computing*, John Wiley & Sons Ltd – Chisister £5.00.

Dit boek geeft een bevattelijke beschrijving van de 'high-level' computertaal, Algol. 'High-level'-talen zijn die, welke eerst door het computersysteem vertaald moeten worden in voor de computer verstaanbare instructies. Andere soorten 'high-level'-talen zijn Cobol en Fortran. Algol is een taal die in het bijzonder geschikt is voor het schrijven van wetenschappelijke programma's. Deze taal is door een internationale commissie ontworpen, in een rapport wordt de taal en zijn syntaxis vastgesteld. Zoals bij alle computer-talen is de grammatica eenvoudig, wel dienen de regels nauwkeurig te worden nageleefd.

Het voornaamste deel van dit boek is gewijd aan een volledige beschrijving van Algol, zijn kernpunten, toepassingen en beperkingen.

De eerste drie hoofdstukken behandelen het ontwerpen van computertalen in het algemeen. Hoewel deze hoofdstukken kort zijn, verschaffen ze een eerstejaars-student, waarvoor dit boek geschreven is, de basiskennis om de werking te begrijpen van elk modern computersysteem.

In feite zijn, door de eenvoudige wijze waarop deze hoofdstukken geschreven zijn, deze drie hoofdstukken voor ieder die belangstelling heeft in een inleiding over de werking van computersystemen bijzonder geschikt, zonder de verplichting ook de resterende hoofdstukken te bestuderen die speciaal Algol behandelen.

A. F. Alkemade

Prof. Dr. Franz Pichler, *Mathematische Systemtheorie*, Walter de Gruyter. Berlijn & New York 1975, 287 blz.

De auteur tracht aan de algemene systeemtheorie een wiskundig georiënteerde onderbouw te verschaffen. Het resultaat is een boek met een veelheid aan (vaak gekunstelde) begrippen en definities. In de tweede helft van het werk worden de ontwikkelde begrippen aangewend om er constructies van eindige automaten, schakelingen, lineaire automaten en lineaire differentiaal-systemen mee te beschrijven. Het voordeel van de aldus verworven invalshoek wordt niet duidelijk gemaakt.

H. J. M. Goeman

Friedrich W. Buckel, *Rechnen mit Stab und Taschenrechner*, 200 blz. DM. 16,—.
In Nederland uitgegeven door BV Import Handelsvereniging 'IMHA'.

Het boek bestaat uit twaalf hoofdstukken. In de eerste tien daarvan wordt uitvoerig het rekenen met de rekenliniaal besproken. In de hoofdstukken 11 en 12 wordt het rekenen met een electrisch (zak-)rekenapparaat behandeld.

In elk hoofdstuk vindt men een groot aantal voorbeelden en opgaven met hun oplossingen. Er wordt veel aandacht besteed aan het plaatsen van de komma. Naast de op elke rekenliniaal voorkomende schalen worden de schalen CF, DF, CI, CIF, P, LL₁, LL₂ en LL₃ behandeld.

G. Krooshof

De eerste zin van het voorwoord luidt: Wie een boek toevoegt aan de bestaande overvloed van al of niet wetenschappelijke literatuur in Nederland moet wel een afdoende reden hebben voor zijn daad. Naar mijn mening is die reden ruimschoots aanwezig. Het boek is een aanmerkelijke verrijking van de vaderlandse literatuur op het gebied van de grondslagen van het wiskundig denken. Ik zou geen tweede werk weten waarin op zo grondige en veelomvattende manier de verzamelingenleer besproken wordt.

Het eerste deel draagt de titel naïeve verzamelingenleer. Men vindt in dit deel de gebruikelijke begrippen verzameling, relatie, functie, ordening, gelijkmachtingheid, eindig en oneindig op 'naïeve' manier toegelicht. Ik had dit deel liever luciede verzamelingenleer genoemd, al ben ik me bewust dat de auteurs deze betiteling moeilijk konden kiezen. De naïviteit is ontdaan van elke vaagheid en ook van elke semi-wetenschappelijkheid. Wel wordt de lezer er ten slotte van door-drongen, dat het noodzakelijk is de puntjes op de i te zetten, ten einde te ontkomen aan tegenstrijdigheden. En zo mondt dit eerste deel al uit in het geven van een axiomatiek van de verzamelingenleer, het axiomastelsel van Zermelo-Fraenkel.

Van fundamenteel belang blijkt hierbij het regulariteitsaxioma: Iedere niet lege verzameling a heeft een element b dat geen element met a gemeen heeft. Dit axioma verhindert onder meer, dat een verzameling zichzelf als element kan bevatten.

Men ziet dat hierdoor de paradox van Russell wordt voorkomen. Toch is dit niet de essentie van het regulariteitsaxioma, want al zou men het weglaten, dan nog zou de paradox van Russell door de overige axioma's al ontkracht zijn. Het eigenlijke belang ervan ligt dieper en komt eerst aan het licht in het tweede deel: de axiomatische verzamelingenleer.

In dit deel blijkt, juist door het regulariteitsaxioma, de structuur van het verzamelingen-universum eenduidig vastgelegd te zijn. Men zou het ruwweg zo kunnen zeggen. Als uitgangspunt bestaat de lege verzameling. Daarvan uitgaande vinden we de natuurlijke ordinaalgetallen en verder meer algemeen de ordinaalgetallen. En dan nog de verzamelingen die door de operatie 'machtsverzameling vormen' (vormen van de verzameling van alle deelverzamelingen) uit de ordinaalgetallen afgeleid kunnen worden. Aan de ene kant verrassend eenvoudig, maar het wordt duizelingwekkend als men zich er een voorstelling van tracht te vormen.

Existentieel ligt nu de structuur van het universum vast. De eigenschappen van verzamelingen zijn echter nog niet eenduidig vastgelegd. Zo kan men op grond van de (overige) axioma's van Zermelo-Fraenkel niet uitmaken of het 'keuzeaxioma' geldig is. De auteurs voegen het als nieuw axioma toe en verklaren dat ze de inhoud van dit axioma evident achten. Dit is het enige punt waarin ik het niet met hen eens kan zijn. Maar dat doet niets ter zake. Van belang is alleen dat men telkens als men dit keuzeaxioma gebruikt, dit ook vermeldt. En daarin zijn de auteurs zeer strikt. Op grond van het keuzeaxioma is, zoals bekend, de welordering van elke verzameling mogelijk.

Nu het verzamelingenuniversum eenmaal vastgelegd is, wordt diep ingegaan op de structuur ervan. Daarbij komen uiteraard ook de kardinaalgetallen ter sprake. De meesten van ons kennen deze als ekwivalentieklassen teweeggebracht door de ekwivalentierelatie 'gelijkmachting'. Helaas zijn de zo verkregen kardinaalgetallen klassen en geen verzamelingen en kunnen daardoor geen element van een verzameling zijn. We zouden dus geen verzamelingen kunnen vormen van kardinaalgetallen die een bepaalde eigenschap hebben. Door nauwkeurig de structuur van het universum te analyseren is men er echter in geslaagd een operatie op klassen (de operatie 'Bodem') te definiëren waardoor de kardinaalgetallen verzamelingen worden. Voor details moet ik naar het werk zelf verwijzen. Een hinderlijk probleem is hiermee tot oplossing gebracht.

In het derde deel wordt ingegaan op verschillende mogelijkheden de theorie van de verzamelingen op vruchtbare wijze in de wiskunde toe te passen. Ieder zal in dit deel onderwerpen van zijn gading vinden. Mij zijn opgevallen de aardige behandeling van filters, boole-algebra, inductieve definities (waarbij ook het probleem van de niet-predikatieve definities aan de orde komt), bomen en ten slotte het 'speelse' axioma van de gedetermineerdheid.

De lectuur van dit boek kan ik ieder aanbevelen. Grote delen ervan zijn gemakkelijk leesbaar. Andere delen, met name die waarin de structuur van het universum onderzocht wordt, vereisen beslist inspanning.

P. G. J. Vredenduin

Er zijn verschillende redenen om te overwegen om een aantal computersystemen te koppelen tot een netwerk van computersystemen. De meest voor de handliggende reden is, dat in een netwerk pieken in de hoeveelheid aangeboden werk beter opgevangen kunnen worden (vergelijk het koppelnet van de elektriciteitscentrales). Een andere belangrijke reden kan zijn, dat in een netwerk elk van de aangesloten systemen een beroep kan doen op speciale voorzieningen die slechts in enkele deelsystemen aanwezig behoeven te zijn. Aangezien koppeling van computersystemen in principe betrekkelijk eenvoudig kan met gebruikmaking van het telefoon- of telexnet, is het erg verleidelijk – gezien de mogelijke voordelen – om een poging tot koppeling te doen. Het blijkt dan echter, dat de moeilijkheden bij het besturen van de communicatie tussen de verschillende computersystemen, zeer groot zijn. Bij sterk gecentraliseerde besturing is het geheel zeer kwetsbaar, terwijl bij gedecentraliseerde besturing het bieden van garanties dat geen informatie verloren zal gaan en geen grote opstoppen ontstaan, heel moeilijk is. Ondanks het feit dat in ambitieuze koppelingen al veel geld geïnvesteerd is, is nog niet duidelijk wat voor de toekomst de aangegeven weg is op dit gebied. Het boekje van Holler en Drobnik geeft een duidelijk (vrij technisch) overzicht van de moeilijkheden die zich voordoen bij koppeling van computersystemen en het geeft ook een duidelijk overzicht van de manieren waarop, in de laatste jaren, gepoogd is deze moeilijkheden te overwinnen.

J. Wessels.

Dr. A. van Dope e.a., *Sigma*, deel 3h, 232 blz.; deel 3m, 284 blz.; docentenhandleiding en antwoorden bij deel 3m, 206 blz.; Wolters-Noordhoff, Groningen; prijs resp. f 19,50; f 27,20; f 22,50.

Deel 3h van de Sigma-serie is bestemd voor de derde klas havo. In dit deel is de grootste plaats ingeruimd voor de behandeling van het functiebegrip. In de eerste helft van het boek komen na de algemene invoering van de functies de eerste- en de tweedegraads functies aan de orde met de daaruit voortvloeiende vergelijkingen en ongelijkheden. Hierna komt een hoofdstuk meekunde met vermenigvuldigen van figuren en gelijkvormigheid. Na een hoofdstuk rekenliniaal worden de goniometrische functies uitgebreid behandeld. Aan de cirkel wordt een apart hoofdstukje gewijd; dit wordt vooral gebruikt om op het begrip radiaal over te gaan. Het boek wordt afgesloten met een hoofdstuk statistiek. In dit deel zitten tussen de duidelijke theoretische gedeelten weer grote aantallen goede vraagstukken. Als bron voor oefenmateriaal is deze serie tot nu toe een van de beste. Toch deze keer enige aanmerkingen. In het hoofdstuk goniometrie worden cosinus en sinus gedefinieerd als resp. x en y -coördinaat van een punt op de eenheidscirkel. Hierna worden ze zonder meer goniometrische verhoudingen genoemd, terwijl het begrip verhouding pas vele bladzijden later aannemelijk wordt gemaakt. De illustraties, die in dit deel worden gebruikt, zijn veel minder zinvol dan die in de voorafgaande delen. Twee prachtige foto's van berglandschappen verduidelijken m.i. de begrippen dal- en bergparabool beslist niet. Bij een aantal andere foto's is de samenhang met de tekst me nog steeds niet duidelijk. Het lijkt me dat dit soort verlichtingen de uitgave onnodig duurder maken.

Deel 3m voor de derde klas mavo behandelt de zelfde stof als deel 3h, alleen minder diepgaand en in veel meer stappen. Ik kan van het bovenstaande dan ook de zelfde goede eigenschappen aanhalen (de opzet en het oefenmateriaal) als de minder geslaagde (in deel 3 m zitten de zelfde foto's als in deel 3h). De bij dit deel behorende docentenhandleiding met antwoorden stelt me voor enige problemen. Het is een uitstekend boekwerk met naast een groot aantal aanwijzingen voor behandeling de volledige uitwerkingen van de meeste vraagstukken. Maar had hier niet volstaan kunnen worden met een gewoon beknopt uitkomstenboekje in plaats van deze uitgebreide uitgave? Of hebben de samenstellers zo'n lage dunk van de huidige (of toekomstige?) leraren?

J. Th. J. Mahieu

H. Meschkowski, *Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie*, 2. verbesserte und erweiterte Auflage, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1975, 203 pp. DM 38. —.

Het verwondert niet dat van dit aantrekkelijke boek (de eerste editie is van 1960) een herdruk

verschijnt. Het is zeer duidelijk geschreven en behandelt onder meer een aantal problemen uit de meetkunde waarvan de vraagstelling voor een ieder begrijpelijk is maar de oplossing nog geheel of gedeeltelijk onbekend. Dat zijn dan de onopgeloste problemen uit de titel; de jacht erop is open en zinnig. Om een voorbeeld te geven: hoe moeten n punten op een bol worden geplaatst opdat de minimum afstand der paren zo groot mogelijk is? Voor $n = 4, 6, 12$ geven de hoekpunten van regelmatige veelvlakken het antwoord, voor $n = 5$ en $n = 7$ en voor enkele andere waarden van n is de oplossing bekend (onder meer door werk van Van der Waerden), maar voor willekeurige n weet men het nog (lang) niet.

De vraag of men een vierkant in onderling verschillende vierkanten verdelen kan werd nog niet zo lang geleden als onoplosbaar beschouwd (en men trachtte – tevergeefs – deze negatieve stelling te bewijzen); het record staat nu op 26 vierkantjes. Verwant is de verdeling van een rechthoek, met meetbare verhouding van lengte en breedte, in verschillende vierkanten. Dit probleem, uitvoerig behandeld door Bouwkamp, heeft zelfs (electro-)technische betekenis. – Van Lebesgue is de vraag afkomstig welke vlakke schijf elke vlakke figuur met diameter l (dat is het maximum van de afstand van twee van haar punten) bedekken kan; het laatste woord is in deze zaak nog niet gesproken. – Wij noemen nog diverse vragen over pakkingen („Lagerungen“) van cirkels en bollen – (het werk van Fejes Tóth), de door Hilbert en Dehn opgeworpen verdelingsproblemen van veelvlakken met gelijke inhoud en het uitvoerige en duidelijke hoofdstuk over het vierkleuren vraagstuk. Daarnaast worden een aantal „onoplosbare“ problemen behandeld zoals de onmogelijkheid van de driedeling en de vijfdeling van een hoek met passer en lineaal. De rubricering is trouwens niet strikt. Zo heeft de fascinerende stelling van Besicowitsch (een in een vlak gelegen staaf kan een volledige wenteling maken binnen een gebied van willekeurig kleine oppervlakte) haar plaats gekregen bij de „onoplosbare“ problemen, omdat zij de vraag naar de minimale oppervlakte zinloos heeft gemaakt.

De keuze van de onderwerpen in dit boek is uitstekend en de presentatie voorbeeldig. De behandeling is helder en vraagt weinig concrete kennis. Als de schrijver de ongelijkheid van Jensen voor convexe functies nodig heeft of de cirkel van Lexell uit de meetkunde op de bol dan gaat hij eerst deze hulpmiddelen geduldig en elegant door een bewijs rechtvaardigen.

De auteur raadt zijn lezers aan geen tijd te verspillen aan pogingen „unlösbar“ problemen op te lossen maar wel aandacht te geven aan de „ungelöste“. Het eerste advies is voor lezers van dit tijdschrift uiteraard overbodig; wat het tweede betreft: wie weet?

O. Bottema

G. Polya, *Heuristiek en wiskunde*, Een andere kijk op de werkwijze van de wiskunde, wiskunde-papierback, Malmberg/Van In, 207 blz., f 16,50.

Dit boekje is de vertaling, door drs. K. Morcus, van het welbekende 'How to solve it' van G. Polya. Het boek is verdeeld in de volgende delen: 1. In de klas, 2. Probleemaanpak, 3. Klein woordenboek van de heuristiek, 4. Problemen, aanwijzingen en oplossingen. Het geheel staat in het teken van de vraag: hoe leren we de leerling systematisch zoeken naar de oplossing van een probleem. Welke vragen dient hij zichzelf te stellen, hoe kan hij een bruikbaar idee op het spoor komen, hoe wordt een plan ontworpen en uitgevoerd? De leraar wordt getoond hoe hij zijn leerlingen in aanraking moet brengen met het probleem. Aan het eind van het boek brengt de schrijver zijn ideeën in praktijk d.m.v. de aanwijzingen die hij geeft ter oplossing van een aantal gegeven problemen. Een uniek, bijzonder belangrijk werk dat geen wiskundeleraar ongelezen mag laten. Het goed verzorgde boekje is zijn prijs zeker waard.

W. Kleijne

J. H. Meijer, *Rekenen en moderne wiskunde* voor de pedagogische academie, W. J. Thieme te Zutphen, ISBN 9003 38660 9.

Een boek als vele andere, en toch weer anders. Bij het twee keer doornemen van de ruim 180 bladzijden heb ik bijzonder veel wensen genoteerd, en wel in die mate, dat ik niet goed weet wat ik van deze recensie moet maken. Gunstig is hij in ieder geval wel, ondanks de bezwaren.

De auteur ontkomt niet aan modekwesties: De op zich zelf wel grappige plaatjes geven mij de

indruk, dat de auteur de studenten van de P.A. als kinderen beschouwt. Deze horen dan niet op de P.A. thuis. Vergis ik mij in de bedoeling van de auteur, wil hij slechts zeggen dat plaatjes de stof voor kinderen aantrekkelijk maken, dan horen deze in een boek over paedagogiek of didactiek te staan, maar . . . het woord *didactiek* ontbreekt in de titel.

Ook de volgorde van de titelonderdelen klopt niet met de inhoud van het boek. Uit ervaring weet ik, hoe slecht studenten van de P.A. rekenen, en ik zou dan ook graag het rekenen behandeld zien, voordat de moderne wiskunde in volle omvang start. Tegen het midden van het boek vliegt de auteur in de nulnatuurlijkgetalvalstrik door te verklaren, dat een gemengd getal de som van een natuurlijk getal en een breuk is. Wat is $0 + \frac{1}{2}$ dan? En in de tweede helft van het boek vindt men de alom verbreide warboel breuk-quotiënt-verhouding. Maar dit mag men geen auteur ten kwade duiden.

Ik heb slechts één echte aanmerking te maken, en wel op de plaats waar de auteur – en nog wel uitvoerig – ingaat op wat hij de 'slappe' implicatie noemt. Omdat iedere leraar dit stuk domweg kan laten doorstrepen, kan dit de bruikbaarheid van het boek niet schaden. En het feit, dat er *slechts één* echte aanmerking te maken is, kan heus als een compliment worden opgevat.

Ik meen, aan het boek te kunnen zien, dat de schrijver de kopy niet heeft getoetst aan de mening van anderen. Mijn overvloed van wensen slaat in hoofdzaak op de tientallen kleine slippartijtjes. Ik wil er slechts één als voorbeeld noemen: 9 en 11 zijn twee opeenvolgende priemgetallen: Een doodgewone verstrooidheid. Het aantal leuke, originele opgaven, aardige vondsten is groot. Slijtageprocent van de piramide van Cheops door de eeuwen heen. Rake opmerking dat men een getal wel, maar een cijfer niet door 8 kan delen. En meer.

Ook na deze spaarzame voorbeelden begrijpt men wel, dat ik auteur en uitgever graag veel succes wens met dit boek, dat in een herdruk nog beter te voorschijn moge komen.

J. K. Timmer

B. Hoffmann, *Albert Einstein*, Kosmos, Amsterdam, 1975. 279 blz., f 24,50.

In deze met veel foto's verluchte uitgave ontmoet men Einstein als mens, te midden van zijn werk, zijn maatschappelijke problemen, zijn vrienden en zijn relaties met andere beroemde tijdgenoten. Zeer geschikt voor schoolbibliotheek.

W. Burgers

A. Mizrahi, M. Sullivan, *Finite Mathematics with applications for business and social sciences*. John Wiley & Sons Inc., Londen, 1976, 2de druk, 586 blz. f 7,50.

De eerste druk verscheen in 1973 en werd besproken in jaargang 49, no. 2, blz. 78.

Dat zo snel een herdruk nodig was bewijst wel dat dit boek, bijzonder fraai uitgegeven, aan de behoefte voldoet. In de hoofdstukken over verzamelingen en matrix algebra zijn wijzigingen aangebracht. Het hoofdstuk 'de simplex methode' is geheel herschreven.

W. Burgers

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgaven

352. Kain begon het te vervelen dat hij zo vaak verloor (zie nr. 350). Hij stelde verandering van de spelregels voor. Laten we 100 keer gooien. Dan tellen we hoeveel opeenvolgingen 111 en hoeveel 101 er voorkomen. Is het aantal 111 groter dan het aantal 101 dan win ik, is het aantal 101 groter dan win jij en zijn de aantallen gelijk dan doen we het spel over totdat er een winnaar is.

Nu begon Abel tegen te sputteren. Als er een suite 111 optreedt, dan is de kans dat je bij de eerstvolgende worp alweer succes hebt $\frac{1}{2}$. Komt er een suite 101 voor, dan kan ik pas na twee worpen opnieuw succes hebben (namelijk door 01 te gooien) en de kans hierop is maar $\frac{1}{4}$. Jij hebt dus betere kansen dan ik.

En zo begon dan de ruzie. Gevraagd aan de lezer te beslissen wie er gelijk had.

353. $\circ$ is een operatie die aan elk geordend paar niet-negatieve gehele getallen een niet-negatief geheel getal toevoegt.

Voor de operatie geldt:

1. $a \circ b = b \circ a$

2. $a \circ b = c \Rightarrow b \circ c = a$

3. $a \circ b > c \Rightarrow b \circ c < a \vee a \circ c < b$

a. Stel de tabel op met de uitkomsten van $a \circ b$ voor $a \leq 7$ en $b \leq 7$.

b. Hoe vermoedt u dat de tabel verder gaat?

c. Bewijs dat dit vermoeden juist is.

(naar Kwant 1975, nr. 1, p. 41; meegedeeld door R. Tröelstra)

Oplossingen

350. Gegooid wordt met een munt waarvan de twee kanten gemerkt zijn met 0 en 1. Kain wint als eerder de suite 111 optreedt dan 101. In het tegenovergestelde geval wint Abel. Wie heeft de grootste winstkans (niet uitrekenen) en hoe groot zijn de beide winstkansen?

Het begint pas interessant te worden zodra er een 1 geworpen wordt. Volgt daarna een 0, dan is Kain zijn kans kwijt en kan opnieuw beginnen. Volgt er een 1, dan is Abel zijn kans kwijt, maar hoeft niet volledig opnieuw te beginnen. Deze 1 kan immers het begin van een winnende suite zijn. Abel heeft dus de beste kansen.

Onderstel de kans dat Kain wint is p . We gooien totdat er een 1 verschijnt. De kans dat Kain nu direkt wint doordat er nog twee keer een 1 verschijnt, is $\frac{1}{4}$. Gebeurt dit niet, dan zijn er nog andere winstkansen. Het kan zijn, dat er 00 verschijnt. De kans hierop is $\frac{1}{4}$. Dan beginnen we van voren af aan en is de winstkans van Kain dus weer p . Ten slotte kan er ook 10 verschijnen. De enige mogelijkheid voor Kain te winnen, is dat na deze 10 weer een 0 verschijnt. De kans hierop is in totaal

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Ook dan beginnen we van voren af aan en is de winstkans van Kain weer p . In totaal is de winstkans van Kain dus

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{8}p.$$

Maar de winstkans is ook p , dus

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{8}p = p.$$

Hetgeen voor Kain dus een winstkans geeft van 0,4 en voor Abel 0,6.

351. In 100 achtereenvolgende jaren wordt een waarneming verricht. De waarnemingsuitkomsten zijn alle verschillend. Wat is de verwachtingswaarde voor het aantal records in de tweede vijftig jaar? Wat is de kans dat het 51e jaar een record bereikt wordt? Deze kans is gelijk aan de kans dat bij een willekeurige permutatie van de getallen 1 tot en met 51 het grootste getal achteraan komt. Dus aan $\frac{1}{51}$.

De verwachtingswaarde voor het aantal records is dus

$$\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}.$$

Een goede benadering hiervoor is $\int_{50}^{100} \frac{1}{x} dx$. Dit is gelijk aan $\ln 100 - \ln 50$, dus aan $\ln 2$, d.i. 0,69. Records zijn niet zo zeldzaam als men misschien zou vermoeden.

Computerkunde: onderwijsprobleem met een oplossing?

Toelichting van en over de sectie Edukatie van het Nederlands Rekenmachine Genootschap

De laatste jaren hoort men nogal eens spreken over informatica-onderwijs. Voor menig een zal daarbij het woord informatica een onbekende klank hebben. Voor personen die onderwijs verzorgen of daarvoor, bijvoorbeeld uit hoofde van hun functie, belangstelling hebben zal dit woord zelf geen probleem zijn, al kunnen er dan de nodige stoeierijtjes plaatsvinden over het wel of niet identiek zijn van informatica en computerkunde. Problemen treden echter veelvuldig op als men op enigszins bevredigende wijze onderwijs in dit vak wil verzorgen. Wat de inhoud en vorm van dit onderwijs dient te zijn, is (zoals overigens bij elk vak) mede afhankelijk van de sektor en/of groep van personen die men op het oog heeft. Zo maakt het bijv. echt wel een verschil of men te maken heeft met informatica-onderwijs voor VWO-leerlingen of voor aankomende bedrijfskunde ingenieurs. Eveneens zal een oriëntatie-kursus voor managers van een heel ander karakter zijn dan een cursus voor personen, die 'het computergebeuren waar moeten maken'.

Waar nu kan men aanknopingspunten vinden voor het signaleren en oplossen van de problemen in het informatica-onderwijs? De een zoekt het misschien bij verenigingen als NRMG (Nederlands Rekenmachine Genootschap) of GVA (Genootschap voor Automatisering) – te verwachten is dat beide verenigingen in begin 1977 zullen fuseren tot het NGI (Nederlands Genootschap voor Informatica) –, een ander bij een kommissie als de WIHBO voor het hoger beroepsonderwijs of een stichting als Studiecentrum NOVI voor het

kursorisch onderwijs. Het is zelfs niet denkbeeldig dat ervaringen van familieleden of kennissen iemand op het spoor kunnen zetten. Dikwijls zullen ook incidentele gesprekken met collega's in docentenkamer of elders enig soulaas kunnen bieden of op zijn minst duidelijk kunnen maken dat 'iedereen met de nodige problemen zit'. Hoe het overigens ook werd aangepakt, bij menigeen ontstond zo langzamerhand wel enige behoefte aan gestuctureerde communicatiemogelijkheden.

Deze problematiek werd o.a. ook onderkend door een groep leden van het NRMG. Binnen deze groep kwam de gedachte naar voren om een ontmoetingspunt te vormen voor allen die informatica-onderwijs verzorgen of daarvoor belangstelling hebben. Binnen het NRMG (c.q. het toekomstige NGI) kon dat het beste geschieden via een sectie. Vraag was natuurlijk wel of de groep de zaak wel goed had ingeschat met te denken dat er behoefte zou zijn aan zo'n sectie. Om hierin enige mate van duidelijkheid te krijgen werden vanaf begin 1974 tot nu toe een zestal proefbijeenkomsten belegd betreffende diverse, nogal verschillende onderwerpen. Aan deze bijeenkomsten werd, soms met grote en een enkele keer met minder grote aantallen, deelgenomen door zowel leden als niet-leden van het NRMG. Daarbij bleek het vermoeden juist te zijn, dat velen kampen met diverse facetten van het probleem informatica-onderwijs en het ten zeerste zouden toejuichen als zo'n ontmoetingspunt in de vorm van een sectie Edukatie zou worden gecreëerd.

Opvallend daarbij was dat ook vele niet-leden van het NRMG hiervoor belangstelling hadden. Dat overigens een sectie in eerste instantie 'mede van buitenaf' tot stand komt is bij het NRMG al geen onbekende zaak meer. Men heeft daar immers de medisch-biologische sectie, waarvan de noodzaak met name werd gevoeld door personen uit de medische wereld die in eerste instantie misschien niet eens de naam NRMG kenden maar wel dagelijks geconfronteerd werden met informatica-problemen in de medische wereld.

Via eerdergenoemde proefbijeenkomsten en verdere contacten in de proefperiode zijn de ideeën over doelstellingen en wijze van verwezenlijken van deze doelstellingen voor een sectie Edukatie langzamerhand gegroeid. Op de jaarsvergadering van 9 april 1976 van het NRMG is de sectie Edukatie officieel ingesteld. De artikelen 1 en 2 van het daarbij goedgekeurde sectie-reglement luiden als volgt:

Doelstelling

Artikel 1. Het doel van de sectie is:

- het bevorderen van contacten tussen diegenen die belast zijn met, of geïnteresseerd zijn in, het geven van informatica-onderwijs;
- het bevorderen van de kwaliteit van het informatica-onderwijs;
- het bevorderen dat het informatica-onderwijs gegeven gaat worden waar het dienstig is.

Bij dit onderwijs wordt gedacht aan alle niveaus (wetenschappelijk onderwijs, beroepsonderwijs, voorbereidend wetenschappelijk en algemeen voortgezet onderwijs) zowel in regulier als in niet-regulier verband.

Daarnaast houdt de sectie kontakt met de Nederlandse vertegenwoordiging in TC 3 (Education van IFIP) en met de werkgroepen die hieronder ressorteren.

Artikel 2. De sectie kan haar doel nastreven door:

- a Het organiseren van voordrachten, colloquia en excursies.
- b Het instellen van werk- en studiegroepen.
- c Het onderhouden van kontakten met andere in binnen- en buitenland op dit terrein werkzame groepen en organisaties.

Het voorgaande dient niet te worden opgevat als een dwingend, statisch werk-kader. Integendeel, er is hier sprake van een beginkader, een eerste aanzet. Misschien zal blijken dat andere en zelfs betere kommunikatie-vormen mogelijk zijn om in de gesignaleerde behoeften te voorzien. Dit kan echter alleen maar duidelijk worden door deelname van alle geïnteresseerden naar ieders inzicht en mogelijkheden. Daarbij wordt dan gedacht aan bijwonen van bijeenkomsten en (vooral) aan deelname aan werkgroepen. Bij dit laatste willen we onderscheid maken tussen passieve en actieve deelname aan een werkgroep. De actieve deelname van enkele, d.w.z. het eigenlijke werk, heeft namelijk pas zin als de doelstelling van zo'n werkgroep door een voldoende aantal leden van de sectie wordt onderschreven, waarbij het merendeel van deze leden zich zal beperken tot dit onderschrijven (passieve deelname).

Om aan een en ander vanaf het begin in goed gezamenlijk overleg gestalte te kunnen geven, zal een Oprichtingsbijeenkomst worden georganiseerd op 29 oktober 1976. Deze bijeenkomst is bedoeld voor alle geïnteresseerden. Er zal dan ruime mogelijkheid geschapen worden tot discussie over de te ondernemen activiteiten. Indien gewenst zullen de bestaande plannen gezamenlijk gewijzigd worden.

Voor werkgroepen worden de volgende drie voorstellen gedaan:

- 1 Werkgroep Curricula. Deze werkgroep zou binnen- en buitenlandse curricula, zowel in leerplan- als uitvoeringsfase, aan een vergelijkend onderzoek kunnen onderwerpen.
- 2 Werkgroep Gebruikersopleidingen met als doelstelling het inventariseren en evalueren van bestaande gebruikersopleidingen.
- 3 Werkgroep informatica in het voortgezet onderwijs. Deze werkgroep zou de vorderingen van en de moeilijkheden bij het invoeren van lessen in automatiseringsaspecten bij het nederlands voortgezet onderwijs kunnen bestuderen. Dit tevens tegen de achtergrond van werkgroep 3.1 van IFIP.

Voor het houden van bijeenkomsten wordt gedacht aan bijvoorbeeld:

- 1 Toelichting van het IFIP-curriculum voor systeembouw.
- 2 De rol van de wiskunde in het informatica-onderwijs.
- 3 Het gebruik van de computer in het HTS-onderwijs.

De oprichtingsbijeenkomst vindt plaats in het Jaarbeurskongrescentrum in Utrecht. Dit kongrescentrum is binnendoor vanaf het station bereikbaar en

er is bovendien voldoende parkeerruimte. De toegang tot de Oprichtings-bijeenkomst is gratis, konsumptie echter niet. De bijeenkomst begint om 13.45 en zal tot uiterlijk 17.30 duren. Het is de bedoeling na een korte inleiding van de voorzitter van de sectie in afzonderlijke groepen te diskussiëren over eerdergenoemde onderwerpen. Aan het eind van de bijeenkomst zal een gezamenlijke evaluatie en besluitvorming plaatsvinden.

Om de organisatoren een indruk te verschaffen van het te verwachten aantal deelnemers wordt U verzocht Uw voornemen om deel te nemen telefonisch kenbaar te maken aan de telefoniste van Studiecentrum NOVI alwaar het sekretariaat van de sekte Edukatie is gevestigd.

Het telefoonnummer van Studiecentrum NOVI luidt: 020-165666.

Wiskobas

Het wiskobas-bulletin, een bulletin ter begeleiding van het wiskundeonderwijs op de basisschool, is met ingang van september 1976 zijn zesde jaargang ingegaan.

In deze jaargang zullen zes afleveringen verschijnen. Totaalomvang jaargang ca. 500 pagina's.

Een drietal nummers zal werkmateriaal (onderwijzersteksten, aktiviteitskaarten, e.d.) bevatten. Onder meer over de onderwerpen: oefenen, abakus, kamping, spelletjes, spijkerbord, Gulliver, oppervlakte. . . .

De andere nummers zullen "vaste" rubrieken bevatten: wiskunst, dagboek internationaal, berichten, kleuters en wiskunde, wiskunde in de brugperiode, enz.

Tevens zullen in de laatstgenoemde rubriekdelen katerns opgenomen worden waarin de werkplanontwikkeling wiskundeonderwijs centraal staat: methodeninventarisaties, leergangvergelijkingen, inpassingsproblematieken e.d.

Abonnementstarief f 35,- per jaargang. Aanmelding vòòr 8 oktober a.s. bij de Stichting IVIO, Postbus 37, Lelystad.

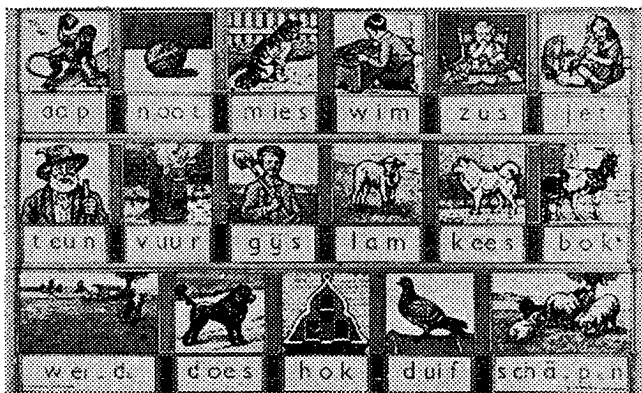
Wiskrant

De Wiskrant, een uitgave van het IOWO, bestemd voor wiskundeleraars in het voortgezet onderwijs, zal dit schooljaar viermaal verschijnen: Wiskrant 4- (sept. '76) t/m 7.

Er wordt ruime aandacht besteed aan de ontwikkeling van een wiskunde schoolwerkplan voor leerlingen van 12-16 jaar, alsmede aan de wiskunde A en B problematiek voor bovenbouw V.W.O. Eveneens zullen er veel lessuggesties voor direkt gebruik in de klas in de krant worden opgenomen. Abonnementstarief f 10,- per jaargang.

Aanmelding bij IOWO-abonnementenadministratie van de Wiskrant, antwoordnummer 1566, Utrecht.

Wie kent 't goede, oude leesplankje nou niet!



Maar kent u ook 't ABC voor uw ziektekostenverzekering?

't Oude vertrouwde leesplankje kent bijna iedereen. Geen wonder. Voor velen van u was het de eerste stap naar het lezen. 't Ging min of meer spelenderwijs. Een ABC-tje.

De Ambtenaren Centrale heeft nu 't ABC voor uw ziektekostenverzekering. Wat is de Ambtenaren Centrale? Voor wie dat nog niet weet: de Ambtenaren Centrale is 50 jaar geleden opgericht. Onder het motto: door en voor Ambtenaren, met als doelstelling een zeer uitgebreide ziektekostenverzekering tegen hoogst aantrekkelijke premieën.

Bij de *AC* kiest u uw verzekering afhankelijk van uw persoonlijke omstandigheden. Maar speciaal is gezocht naar een verzekeringsvorm,

waarbij door gebruikmaking van uw ambtelijk recht – de 5%-regeling – de premie tot een minimum beperkt kan worden. Voor f.616,20 per persoon per jaar is er al een verzekering op 3e klasse basis en voor de kinderen de helft. Maar ook biedt de Ambtenaren Centrale de mogelijkheid tot volledige verzekering, met of zonder een vrijwillig eigen risico. Waardoor een aanzienlijke premiebesparing.

U merkt wel dat de Ambtenaren Centrale een polis presenteert die werkelijk uniek is. Nog meer informatie? Dat kan. Vraag door nevenstaande coupon in te sturen onze duidelijke brochure aan.

't Helpt u het leven beduidend goedkoper te houden.

Bon.

A 777

AC

HELP mij vrijblijvend het leven minder duur te maken!

Mijn naam: _____

Adres: _____

Plaats: _____

Telnr.: _____

Functie: _____

Stuur deze coupon in ongefrankeerde envelop aan: de Ambtenaren Centrale, Antwoordnr. 2831, Amsterdam. Of vraag telefonisch aan: 020-62231.

Onderlinge Waarborg Maatschappij tegen de gevolgen van Ziekte en Ongeval

De Ambtenaren Centrale

Tussenspersoon: N.V. Verzekering-Maatschappij VZVZ, Keizersgracht 369, Amsterdam, tel. 020-62231.

De thans bekende premie geldt ook voor 1977.

In opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en sterrenkunde
is uitgegeven de

STERRENGIDS 1976

Samengesteld door Lic. Jean Meeus

70 pag., ing. geill. f 13,50. ISBN 90 01 81278 3

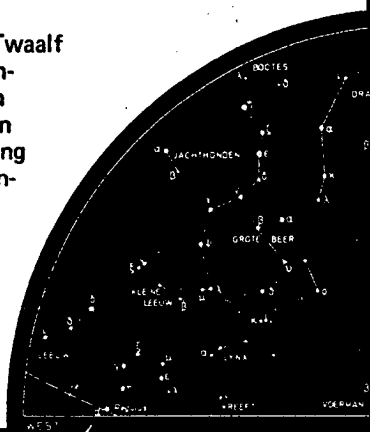
Inhoud:

Tijdaanwijzing; beknopt jaaroverzicht; Twaalf sterrenkaarten-zes paren; Hemelverschijnselen in 1976; De wegen van planeten en planetoiden; De zon in 1976; De maan in 1976; De planeten in 1976; Sterbedekking 1976; Minima van Algol; Mira; Verklaren de woordenlijst van enkele astronomische termen; Griekse letters; Enkele hemelverschijnselen in 1977.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel.



H.D. Tjeenk Willink Groningen



INHOUD

F. M. Vriesendorp: Magische vierkanten als voorbeeld voor lineaire ruimten	41
P. G. J. Vredenduin: Afbeeldingen	56
P. G. J. Vredenduin: Korrel	59
Didactische literatuur	60
Zo doe ik het	61
Mededeling	62
Nederlandse Wiskunde-Olympiade	63
De vierde wiskunde olympiade in de U.S.A.	64
Uit de tijdschriften	65
Rectificatie	66
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	66
Redactieverslag	70
Boekbespreking	71
Recreatie	76
Computerkunde: onderwijsprobleem met een oplossing?	77
Mededelingen	80