

**Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde**

**Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren**

51e jaargang

1975/1976

no 9

mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 28,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 16,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 250,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 135,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 75,—.

Het huidige leerplan wiskunde

P. G. J. VREDENDUIN

Tot voor kort was de officiële richtlijn voor ons onderwijs het Voorstel Leerplan Rijksscholen dat kort voor het in werking treden van de mammoetwet gepubliceerd is.

Onlangs, in november 1975, is verschenen het Leerplan Rijksscholen. Er is slechts weinig in het oorspronkelijke Voorstel gewijzigd. Maar juist daardoor loopt men het gevaar dat de verschilpunten zich aan de waarneming onttrekken. Daarom hieronder een opsomming van de aangebrachte wijzigingen.

De terminologie is aangepast aan de aanbevelingen van de nomenclatuurcommissie.

Voor de mavo en de havo is het huidige Leerplan gelijk aan het Voorstel. Alleen is bij de havo het beperkte programma voor het derde leerjaar weggelaten. Dit programma was bestemd voor derde klassen die een eenvoudig eindonderwijs boden aan leerlingen die wiskunde niet in hun keuzepakket wensten op te nemen.

In het vwo-programma zijn enkele wijzigingen aangebracht. In het programma voor het tweede, derde en vierde leerjaar zijn geschrapt: injectie, surjectie en bijjectie;

functies van twee veranderlijken; niveaulijnen;

de groep van de congruente transformaties; de groep van de gelijkvormige transformaties (d.w.z.: niet deze twee soorten afbeeldingen zijn van het programma afgevoerd, maar wel het begrip 'groep afbeeldingen' en dus het bewijs dat congruente en gelijkvormige afbeeldingen een groep vormen).

Toegevoegd zijn:

permutaties en combinaties (deze zijn gerangschikt onder het hoofd: afbeeldingen);

inleiding tot de differentiaalrekening;

inleiding tot de beschrijvende statistiek.

Het bovenbouwprogramma is gelijkgetrokken met het examenprogramma. Geschrapt zijn daarom convergentie van rijen en reeksen; berekening van lengten (met behulp van integraalrekening) en (in wiskunde II) eigenwaarden. Weggelaten is het verplichte programma voor leerlingen van het vierde leerjaar die de B-afdeling gekozen hebben.

Toelichting. Toen het Voorstel ontworpen werd, leefden we nog in het tijdperk

van de 34-urige schoolweek. Bij het invoeren van de mammoetwet was deze 34 reeds tot 32 gereduceerd. Het gevolg daarvan was dat op verschillende scholen de inleiding tot wiskunde II, die voor alle aanstaande B-leerlingen verplicht gedacht was, in het gedrang kwam. Sindsdien zijn we teruggegaan van 32 naar 30 en heeft bovendien het ongedeeld vwo zijn intrede gedaan. De meeste scholen die voor ongedeeld vwo kozen, bieden in klas 4 geen wiskunde II meer. Het werd daardoor noodzakelijk het programma voor wiskunde II los te koppelen van bepaalde leerjaren. De simpelste oplossing is daarbij gekozen: het programma is gelijk gemaakt met het examenprogramma. Hiermee is de verplichte inleiding in de stereometrie die vooraf zou gaan aan de vectoriële behandeling, weggefallen. In het Voorstel stond namelijk: In de ruimte: ligging van punten, lijnen en vlakken; hoeken en afstanden; puntverzamelingen en eenvoudige verzamelingen van lijnen; vergelijkingen van vlak en bol.

Eerst daarna kwam: vectoren in de ruimte.

Op verzoek van de inspectie teken ik hierbij aan, dat het zeker niet de bedoeling is, dat het stereometrisch inzicht, dat vroeger door middel van een intuïtieve inleiding aangebracht werd, nu niet meer nodig is. Integendeel, uit de eind-examenopgaven blijkt telkens weer, dat voor het beantwoorden ervan stereometrisch inzicht wel degelijk vereist is. Of ook wel, dat een gebrek aan stereometrisch inzicht leidt tot methoden die onnodig veel rekenwerk vereisen. Het is dan ook de bedoeling dat de vectoriële methode gebruikt wordt om stereometrisch inzicht bij te brengen. Wie volstaat met het uitvoeren van rekenwerk doet zijn leerlingen tekort.

Een ongewenst gevolg van het gelijktrekken van leer- en examenprogramma is, dat de termen ellips en hyperbool thans nergens meer in het leerplan te vinden zijn. Hopelijk trekken de leraren daaruit niet de conclusie, dat hun leerlingen nu helemaal niet meer behoeven te weten wat een ellips en wat een hyperbool is. Als persoonlijke mening zou ik eraan willen toevoegen, dat mij het meest geschikt lijkt ellips en hyperbool te behandelen als grafieken van relaties in wiskunde I.

Nu de kansrekening officieel in het verplichte leerprogramma is opgenomen, werd het noodzakelijk permutaties en combinaties een plaats te geven. Het beste kon dit gebeuren door ze in de onderbouw te plaatsen onder de afbeeldingen.

Verder is een belangrijke vooruitgang het verplicht stellen van een inleiding in de differentiaalrekening in de onderbouw. Men bereikt hiermee dat in het begin van de vijfde klas ieder enig inzicht heeft in de betekenis van het differentiëren. Dit is van groot voordeel voor de natuurkundeleraar. Een ander voordeel is, dat degenen die economie I in hun vakkenpakket opnemen, in de onderbouw voldoende wiskunde krijgen om het onderwijs in dit vak te kunnen volgen.

'Didactiek van de Wiskunde'

door Drs. J. van Dormolen

A. VAN STREUN

In de zomer van 1974 kwam een voor Nederland geheel nieuw type boek op het terrein van de wiskunde uit, namelijk 'Didactiek van de wiskunde'¹ door J. van Dormolen (Uitgeverij Oosthoek). Het nieuwe van dit boek is, dat het specifiek geschreven is als werkboek, als hulpmiddel bij colleges en werkgroepen voor de didactiek van de wiskunde. Het draagt discussiestof en oefenstof aan voor het groepsgewijs leren voorbereiden en beoordelen van lessen. In deze werkwijze komt het overeen met het bekende boek van Johnson en Rising: 'Guidelines for Teaching Mathematics'² en met het standaardwerk 'The psychology of Learning and Instruction'³ door De Cecco. Na de algemene informatie (21 blz.) komt een kernhoofdstuk 'Doelstellingen (25 blz.), de 'Begintoestand' wordt even aangeduid (4 blz.), waarna in hoofdstuk 4 het centrale thema van de A-cursussen, namelijk de ordening van het leerproces, wordt behandeld. In hoofdstuk 5 (20 blz.) komen de activiteiten van de leerlingen, zoals lezen, luisteren, spreken, zelfontdekkend leren, in het vizier, waarbij gebruik wordt gemaakt van de ideeën van Skemp en Ausubel. Na een korte afweging van mogelijke werkvormen in hoofdstuk 6 (6 blz.) komt de verwerking van de eerste helft van het boek in de hoofdstukken over 'Vragen en opdrachten', 'Voorbeelden van leerstofkeuze', 'Voorbeeld van een lesplan' en 'Werkstukken'. Juist deze toepassing van de behandelde principes in talloze concrete onderwijssituaties maakt het de wiskundeleraar mogelijk zijn eigen handelen in de klas te herwaarderen.

Sinds het verschijnen van 'Didactiek van de wiskunde' wordt het merendeel van de studenten van de lerarenopleidingen en van het wetenschappelijk onderwijs in de groepen didactiek van de wiskunde aan het werk gezet met deze publicatie. Ook de tientallen deelnemers aan de didactiekcursussen houden zich intensief bezig met leerstofordening en doelstellingen van het wiskunde-onderwijs, zodat we rustig kunnen stellen dat de invloed van de ontwikkelde ideeën op het wiskundeonderwijs in toenemende mate van belang zal zijn. Een discussie in bredere kring over de aangedragen principes en werkwijzen b.v. in Euclides lijkt noodzakelijk. Dit artikel wil daar een bijdrage aan leveren.

Waarom wiskunde op het a.v.o. en v.w.o.?

In §2.3 wordt aangegeven hoe algemene doelen van het wiskundeonderwijs

kunnen worden gehanteerd voor het toetsen van het leerplan. De conclusie, die na het bespreken van de beschrijvende inleiding uit 'Guidelines for Teaching Mathematics' van Johnson and Rising wordt getrokken, namelijk dat vanuit de algemene doelgebieden concrete doelstellingen moeten worden geformuleerd, die zonedig tot aanpassing van het leerplan, de werkvormen en de leeractiviteiten moeten leiden, wordt door de schrijver niet nader uitgewerkt aan de hand van de leerplanontwikkeling in het verleden en het heden.

Het is spijtig, dat de (a.s.) wiskundeleraar in dit werkboek helemaal niet wordt geïnformeerd over de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Het leren meedenken in de discussies, die niet beperkt blijven tot een kleine kring van vakmensen, is m.i. voor de (a.s.) wiskundeleraar van groot belang. Is het niet één van de zwakste kanten van de recente leerplanwijziging in Nederland dat een grote groep van leraren bij het m.a.v.o.-h.a.v.o.-v.w.o. de 'moderne' wiskunde in de school als dwangmatig opgelegd ervoer, zonder dat de motieven voor de vernieuwing van de leerstof hen helder voor ogen stonden, laat staan als zinvol waren aanvaard.

J. Dieudonné signaleert terecht het gevaar, dat leraren bij het voortgezet onderwijs die de motieven, die aan de invoering van nieuwe wiskundige begrippen ten grondslag liggen niet hebben begrepen, zich aan de letter van een nieuw curriculum vastklampen. Discussies, zoals die tussen R. Thom en J. Dieudonné – opgenomen in de publicatie 'Mathematiker über die Mathematik'⁴ – over de zin van de 'moderne' wiskunde op school en de bijdrage van de Rus A. N. Kolmogorov zullen de (a.s.) wiskundeleraar over de inhoud van het wiskundeonderwijs aan het denken moeten zetten. Een citaat van A. N. Kolmogorov: 'Das Problem besteht darin, schon in der Schule in überzeugender Weise zu zeigen, dass es mit Hilfe der 'modernen Mathematik' möglich ist, *mathematische Modelle* von Situationen und realen Prozessen zu schaffen, und zwar nicht nur nicht schlechter, sondern auf logisch folgerichtigere und einfachere Weise als in der traditionellen Mathematik. Nur unter dieser Voraussetzung werden die Methodologen der Mathematik in der Lage sein, der sich schon in gewissen Ländern abzeichnenden Revolte der Praktiker gegen die Umwandlungen der Mathematiklehrpläne an den Schulen, die wir realisieren, vorzukommen.' Het zal de (a.s.) wiskundeleraar duidelijk moeten worden dat niet alleen de inhoud van de leerstof nauw samenhangt met het denken over algemene doelen van het wiskundeonderwijs, maar ook de manier waarop leerlingen en leraar met de wiskunde bezig zijn. Voor H. Freudenthal is de verandering van methoden en werkvorm de centrale opgave van het onderwijs in de wiskunde. (Zie o.a. 'Mathematics as an Educational Task'⁵) Daarnaast zal de (eerstegraads) leraar oog moeten krijgen voor de eenheid van het wiskundeonderwijs van kleuterschool tot universiteit. Het basisonderwijs en het lager beroepsonderwijs liggen voor veel wiskundeleraars (te) ver buiten hun gezichtsveld. De bijzonder summiere informatieverschaffing over binnen- en buitenlandse projecten is daar mede schuldig aan. Het artikel van F. Goffree in *Euclides* (50e jaargang, no. 6/7), met o.a. de belofte van regelmatige inhoudelijke informatieverschaffing in de toekomst, kan wat betreft het werk in Nederland een nieuwe periode inluiden. Met de 'Wiskrant' is daar mee begonnen.

Doelstellingen van het wiskundeonderwijs

Na de algemene doelen van het wiskundeonderwijs komen de lange-termijndoelen, die met telkens andere leerstof worden nagestreefd. Van Dormolen onderscheidt een vijftal aspecten aan het bedrijven van wiskunde namelijk: Theorie (T), Algoritmen (A), Problemen oplossen (P), Logische samenhang (L) en Communicatie (C). In elke van deze categorieën worden korte – en lange – termijndoelen geformuleerd, zodat de genoemde categorieën nader worden geconcretiseerd. Aan het kennen van definities en stellingen met hun onderlinge samenhang (categorie T) is in het wiskundeonderwijs altijd veel aandacht besteed, terwijl het feilloos kunnen uitvoeren van standaardalgoritmen (categorie A) in de discussies tussen wiskundeleraren een centraal thema is. Zoals in de publicatie ‘Vaardigheden’ een analyse wordt gegeven van het onderwijsproces, dat gericht is op het bereiken van doelstellingen in de categorie Algoritmen, vraagt ook de categorie ‘Problemen oplossen’ nog om een nadere uitwerking.

Aan het expliciteren van de werkwijze bij het oplossen van problemen is niet alleen door wiskundigen (b.v. Polya) aandacht besteed, het is eveneens een belangrijk studieobject van leerpsychologen en onderwijsleertheoretici. Een vertaling van de resultaten van de studies op het terrein van ‘Creative problem-solving’, ‘leren denken’ en dergelijke items, naar de situatie in het wiskunde-lokaal kan een systematisch nastreven van doelstellingen in de categorie P bevorderen.

De ‘National Assessment of Educational Progress’ (NAEP) in de Verenigde Staten hanteert in het gedurende 1972–1973 uitgevoerde onderzoek naar de mate waarin wiskundige begrippen en vaardigheden door 9-jarigen, 13-jarigen, 17-jarigen en volwassenen tussen 26 en 35 jaar worden beheerst, eveneens een tweedimensionale indeling van wiskundige leerdoelen. (Zie b.v. ‘The Mathematics Teacher’ van oktober 1975.)

De eerste dimensie heeft betrekking op de wiskundige inhoud (in zestien leerstofgebieden onderverdeeld), de tweede dimensie specificeert wiskundige ‘abilities’:

- I Recall and/or recognition of definitions, facts and symbols.
- II Performing mathematical manipulations.
- III Understanding mathematical concepts and processes.
- IV Solving mathematical problems – social, technical, and academic.
- V Using mathematics and mathematical reasoning to analyze problem situations, define problems, formulate hypotheses, make decisions, and verify results.

Eén van de eindconclusies die in de analyse van de 283 vraagstukken – elk gemaakt door een deel van de meer dan 90.000(!) deelnemers aan het project – naar voren komt, is de noodzaak meer vaardigheden op het terrein van het probleem-oplossen te ontwikkelen (IV, V). Zelfs zulke fundamentele gewoonten als het controleren van de juistheid of de aannemelijkheid van een resultaat, of het maken van een schatting, schijnen te ontbreken. De rekenvaardigheid (II) van de 13-jarigen, die voor een deel in de nieuwe wiskunde zijn onderwezen, blijkt gelijk te zijn aan die van de volwassenen, terwijl 17-jarigen in het onderzoek hoger scoorden. ‘Johnny can add’, tenminste niet slechter dan de volwassenen die een ‘oud’ reken- of wiskundeprogramma volgden.

Ordering van het leerproces

Hoofdstuk 4 gaat in op het leren op basis van schema's, wat uitloopt op de introductie van een strategiemodel voor de ordening van onderwijsleersituaties. Doordat iemand leert, wordt in zijn geheugen informatie verzameld. Die informatie bestaat niet uit losstaande gegevens. Tussen gegevens bestaan relaties, die weer onderling tot structuren verbonden kunnen zijn. Het netwerk van kennis en vaardigheden in het geheugen wordt een *schema* genoemd. De leraar moet zijn onderwijs zodanig inrichten, dat in bestaande schema's nieuwe leerstof *geassimileerd* kan worden. Als dat niet mogelijk is, zal een schema eerst moeten *accomoderen*. Met tal van voorbeelden uit het wiskundeonderwijs wordt het leren op basis van schema's toegelicht.

Aansluitend komt het O.S.A.E.V.-model ter sprake, een schematische voorstelling van de verschillende fasen in het leerproces van de leerlingen. De eerste drie fasen (*Orienteren, Sorteren, Abstractie*) zijn door het principe van Skemp te verklaren, dat stelt dat nieuwe begrippen van een hogere orde niet kunnen worden geleerd door middel van een definitie, maar alleen door (bewust of onbewust) een aantal toepasselijke voorbeelden te laten classificeren (in de sorteerfase). Onder 'Abstractie' wordt de toestand verstaan, waarin de leerling het nieuwe begrip kent, wat blijkt uit het zelfstandig kunnen classificeren van nieuwe gegevens. De volgende stap is dat de leerlingen nauwkeurig gaan formuleren (*Expliciteren*), waarna in de fase 'Verwerken' het oefenen om het nieuwe te consolideren en het toepassen op problemen aan de orde komt. Terecht heeft de didaktiekcommissie de ordening van het leren uitgekozen als centraal onderwerp voor de A-cursussen, omdat de sturing en begeleiding van de processen die in de klas tot leren van wiskunde moeten leiden het dagelijks werk is van de wiskundeleraar, die in zijn opleiding meestal op geen enkele manier studie heeft gemaakt van die leerprocessen. De gemiddelde leraar zal waarschijnlijk weinig lust hebben een diepgaande studie van de gangbare onderwijsleertheorieën te maken, terwijl hij toch het eigen handelen – veelal opgebouwd via 'trial and error' – wel wil toetsen aan inzichten van wetenschappelijke onderzoekers op dit terrein. Hij wenst een op het wiskundeonderwijs toegespitste bespreking van enkele inzichten over het leren gecombineerd met een hanteerbaar model voor de analyse van eigen onderwijzen en de analyse van de ordening van de leerstof, zoals in het boek van J. van Dormolen is te vinden.

Is het O.S.A.E.V.-model wetenschappelijk voldoende gefundeerd? Deze vraag komt zowel op de A-cursussen, de regionale werkgroepen als op de colleges regelmatig naar voren. Zonder nu diep in de leerpsychologie te duiken, is het wel interessant een tweetal andere modellen, die onafhankelijk van het O.S.A.E.V.-model zijn ontwikkeld, kort aan te duiden. De bekende wiskundendidacticus Dr. P. M. van Hiele heeft het leerproces beschreven, dat z.i. plaats vindt bij de overgang van het grondniveau naar een hoger denkniveau. De fasen van de leerpsycholoog Galperin zijn ook de moeite van het bestuderen waard.

Dr. P. M. van Hiele spreekt o.a. in 'Begrip en inzicht'⁶ over de fasen in een leerproces, dat gericht is op het bereiken van een denkniveau. De *eerste fase* van het leerproces op het grondniveau verloopt *informatoerisch*: de leraar voert met de kinderen een gesprek, waarin duidelijk moet worden, in welke kontekst

hij bepaalde zorgvuldig gekozen, aan het kind bekende, taalsymbolen wil gebruiken. De *tweede fase* noemt van Hiele *gebonden oriëntatie of exploratie*, waarbij het er om gaat vooral die relaties op te sporen, die bij de kontekst behoren. Het aanbieden van geschikt materiaal of het doen uitvoeren van geschikte opdrachten geven de leerlingen gelegenheid tot het uitvoeren van *handelingen*, die de *eigenlijke basis* vormen van het denken op een hoger niveau. De *derde fase* is gericht op de *explicitering*, die tot stand komt in een klasgesprek waarin de leerlingen onder leiding van de leraar hun mening over de gevonden regelmatigheden onder woorden proberen te brengen. De *vierde fase* (door van Hiele de *vrije oriëntatie* genoemd) kenmerkt zich door een verdere verkenning van het terrein aan de hand van een aantal opdrachten. Op den duur zal de leerling met het ontstane relatienet voldoende vertrouwd zijn geraakt om de gevonden relaties op nieuwe, concrete situaties te kunnen toepassen. Het *hogere denkniveau* is bereikt. In de *vijfde fase*, de integratie, gaat de leerling zich een overzicht verschaffen van de verschillende denkwegen. De leraar nodigt de leerlingen uit over eigen handelen na te denken, algemene regels op te stellen, hij laat memoriseren enz. Van Hiele signaleert dat veel docenten te snel op deze *laatste* fase (die gericht is op een samenvatting van het geleerde) overschakelen. Een dergelijk verkort leerproces kan z.i. niet tot een werkelijke beheersing leiden, de leerlingen krijgen de beschikking over een verbaal relatienet, dat niet steunt op een handelingservaring en spoedig dreigt te worden opgelost.

De Sovjetpsycholoog Galperin⁷ onderscheidt vijf fasen, die noodzakelijk zijn als *nieuwe, volwaardige mentale handelingen* moeten worden geleerd. Volwaardig betekent o.a. handelen met inzicht, het kunnen toepassen in uiteenlopende situaties, het bewust handelen zodat de persoon er zich rekenschap van kan geven, het zo snel mogelijk kunnen voltrekken. In de *oriënteringsfase* wordt de leerling voorbereid op de uitvoering van de *materiële handeling* in de tweede fase. Mentale handelingen, die met een onvoldoende mate van inzicht worden uitgevoerd, zijn altijd ontstaan doordat een materieel stadium in het leerproces heeft ontbroken, of doordat in het materiële stadium de handeling niet in alle uitvoerigheid is aangeleerd. De kenmerken van begrippen worden geleerd tijdens het werken met het begrip zelf.

Tijdens de *verbale handeling* moet de leerling leren zijn handelingen verbaal te formuleren, zodanig dat dit ook voor anderen duidelijk is. De leerling kan bij de ander toetsen of de verbale handeling correct wordt uitgevoerd. In deze fase wordt het algemene losgemaakt van het concrete, het algemene wordt geabstraheerd. In de vierde fase wordt het kind geleerd nog uitvoerig voor zichzelf te spreken (*innerlijk spreken*) tenslotte krijgt dit spreken een steeds fragmentarischer karakter en ontwikkelt zich het *mentale handelen*.

Literatuur

1 J. van Dormolen.

Didactiek van de wiskunde. Oosthoek, Utrecht.

2 D. Johnson. G. Rising.

Guidelines for Teaching Mathematics. Wadsworth, Belmont. California.

3 J. de Cecco, W. Crawford.

The Psychology of Learning and Instruction. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

4 M. Otte.

Mathematiker über die Mathematik. Springer, Berlin.

5 H. Freudenthal.

Mathematics as an Educational Task. Reidel, Dordrecht.

6 P. M. van Hiele.

Begrip en inzicht. Muusses, Purmerend.

7 C. F. van Parreren. J. A. M. Carpay.

Sovjetpsychologen aan het woord. Tjeenk Willink, Groningen.

Groningen

Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit

Inspectie algemeen voortgezet onderwijs (v.w.o. - h.a.v.o. - m.a.v.o.)

Bijlage bij AVO 76-02
van 10 februari 1976.

Onderwerp:

wiskunde I en II bij eind- en staatsexamens v.w.o.

In de circulaire, kenmerk AVO 74-26 met bijlage, gedateerd 8 mei 1974, worden aan de scholen voor v.w.o. nadere mededelingen verstrekt inzake de geleidelijke invoering van het onderdeel 'inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek' bij het examen wiskunde I v.w.o.

Naast de ervaringen verkregen aan de elf scholen voor v.w.o. die deelgenomen hebben aan een experiment met deze leerstof is het van groot belang dat ook de ervaring van vele docenten, die kandidaten hebben opgeleid voor het examen wiskunde I in 1976, bekend is.

Derhalve is in overleg met de C.M.L. Wiskunde en het Bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren besloten de definitieve omschrijving van het examenprogramma voor dit onderdeel één jaar later vast te stellen. In de loop van de cursus 1976/1977 zullen U daarover nadere gegevens verstrekt worden.

Alle belangrijke gegevens uit de bijlage van circulaire AVO 74-26 zijn opnieuw in deze bijlage opgenomen, aangevuld met de wijzigingen die nodig bleken te zijn op grond van bovengenoemde beslissing. Met het verschijnen van deze bijlage vervalt de bijlage van AVO 74-26.

a. Aan het einde van de schooljaren 1975/1976, 1976/1977 en 1977/1978 zullen bij het centraal schriftelijk examen geen vragen gesteld worden over cyclometrische functies, partiële integratie en oneigenlijke integralen.

In de daaropvolgende jaren zullen deze onderwerpen uit het examenprogramma weer binnen de te examineren leerstof vallen.

b. Bij het examen van het schooljaar 1975/1976 zullen vraagstukken over waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek binnen de grenzen van de volgende lijst van onderwerpen vallen:

kansexperiment, uitkomstenverzameling, simuleren, toevalsgetallen, gebeurtenis, frequentie, relatieve frequentie, empirische wet van de grote aantallen, even waarschijnlijke uitkomsten, kansmodel, grondeigenschappen van kansen, de regels: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ en $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

voorwaardelijke kans, $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$, onafhankelijke gebeurtenis $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,

stochasten, kansverdeling van discrete stochasten, onafhankelijke discrete stochasten, de binomiale verdeling, de hypergeometrische verdeling (trekken zonder teruglegging), tabellen van binomiale verdelingen.

- c. Aan deze lijst van onderwerpen wordt voor het examen van de schooljaren 1976/1977 en 1977/1978 bovendien toegevoegd:
populatie, steekproef, aselect, hypothese, nulhypothese, alternatieve hypothese, één- en tweezijdige toetsen d.m.v. een binomiale toetsingsgrootheid, onbetrouwbaarheid, kritiek gebied.
- d. De definitieve omschrijving van de inhoud van het examenonderdeel 'inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek' zal vastgesteld worden in de loop van het schooljaar 1976/1977. De onder punten b. en c. genoemde onderwerpen zullen in ieder geval daarvan deel uitmaken.
- e. Bij het centraal schriftelijk examen dienen de kandidaten voor waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek de beschikking te hebben over de volgende tabellen:
 1. Tabel met toevalsgetallen.
 2. Tabel met binomiaalcoëfficiënten

$$\binom{n}{k} \text{ voor } n = 1, 2, \dots, 20 \text{ en } k = 1, 2, \dots, G[\frac{1}{2}n + 1].$$

3. Tabel met cumulatieve binomiale, verdelingen
 $P(X \leq x)$ met $p = 0,05; 0,10; 0,15; \dots; 0,50$ en $1/6$ en $1/3$ en $n = 2, 3, \dots, 20, 50, 100$.
Bij $n = 50$ bovendien nog $p = 0,01$.
4. Nomogrammen met $\alpha = 0,01; 0,05; 0,10$ en $n = 8, 10, 12, 16, 20, 24, 30, 40, 60, 100, 200, 400, 1000$.

Bij de examens aan het einde van de schooljaren 1975/1976, 1976/1977 en 1977/1978 zijn uiteraard alleen die tabellen nodig, die betrekking hebben op de voor die examens aangegeven leerstof.

Wat betreft het vak wiskunde II heeft de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde voorgesteld met ingang van het schooljaar 1974/1975 voor het keuze-onderwerp ten minste 40 lessen ter beschikking te stellen.

Het examenprogramma wiskunde II biedt daartoe voldoende ruimte.

Het is echter niet meer mogelijk dat kandidaten het tijdelijk ingevoerde keuze-onderwerp 'waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek' kunnen kiezen.

Het bovenstaande geldt ook voor de staatsexamens.

Namens de inspectie,
drs. W. E. de Jong
drs. B. J. Westerhof
N. J. Zimmerman

‘Leren denken’, anno 1975

Dit is de titel van het oktobernummer 1975 van *Pedagogische Studiën*, het Nederlandse tijdschrift voor onderwijskunde en opvoedkunde.

Ik heb de indruk dat sinds de ondertitel ‘*Maandblad voor Onderwijs en Opvoeding*’ werd prijsgegeven de inhoud van het tijdschrift de werkers in het veld minder heeft aangesproken dan weleer het geval kon zijn. De inhoud appelleerde de laatste jaren meer de aanstaande onderwijskundige dan de man in de klas. De inhoud van dit aan het ‘leren denken’ gewijde nummer bewijst echter dat de Redactie van het tijdschrift ook thans in staat blijft aan beide categorieën waardevolle documentatie te verschaffen. We trachten de belangstelling van de lezers van *Euclides* voor de aangesneden problematiek te wekken dan wel te versterken door hier in te gaan op wat Van Parreren ons mededeelt in de inleiding tot het themanummer.

‘*Leren denken*’ als onderwijsdoelstelling en als onderzoeksobject heeft in de dertiger jaren van deze eeuw grote bekendheid weten te verwerven. De ontwikkeling uit die jaren is verbonden aan de namen Selz en Kohnstamm. Hun fundamentele publicaties ‘*Versuche zur Hebung des Intelligenzniveaus*’ (1935) en ‘*Over de vormende waarde der leervakken*’ (1929) hebben hun betekenis voor het heden nog geenszins verloren. Van Parreren constateert in zijn inleidende beschouwingen dat we hier blijkbaar te maken hebben met een ‘enduring problem’, waarvoor op dit moment nog geen definitieve oplossing ter beschikking staat.

Dit themanummer ‘*Leren denken*’ bevat artikelen van Utrechtse en Amsterdamse psychologen en de vertaling van een Russisch artikel van Venger over de kwalitatieve benadering in de diagnostiek van de cognitieve ontwikkeling. Elshout schrijft over ‘Instructie in probleemoplossen en de moeilijkheden in het denken’, De Leeuw over ‘Computer gestuurd denken; training in het hanteren van algoritmische en heuristische probleemoplossingsmethoden’ en Van Parreren over ‘Algoritmen en heuristieken in het onderwijs’.

Van Parreren geeft in zijn inleiding een overzicht van actuele theoretische vraagpunten. De eerste vraag daarbij is in hoeverre de cognitieve ontwikkeling van het kind door onderwijs te beïnvloeden is. Ten aanzien van dit probleem bestaat er een grote diversiteit van meningen, waarbij de opvattingen van onderzoekers als Piaget en Jensen in tal van opzichten tegenover de opvattingen van Bruner, Gagné en Gal’perin komen te staan. Het lijkt Van Parreren weinig aanbevelingswaardig zich zonder nader onderzoek thans reeds tot de restrictieve opvattingen van Piaget en Jensen te bepalen.

Principiële vragen zijn voorts die welke betrekking hebben op het probleem hoe ‘denken’ onderwezen zou moeten worden en wat er dan precies onderwezen dient te worden.

‘Het is een veelverbreide opvatting, zowel onder psychologen als onder onderwijsvernieuwers, dat men een creatieve activiteit zoals denken niet

door rechtstreekse instructie ofwel door *sturend* onderwijs tot ontwikkeling kan brengen. Denken houdt immers, zo redeneert men, het kunnen ontdekken van nieuwe dingen in, en dus moet men het van meet af aan door ontdekken tot stand laten komen. Men besluit met andere woorden tot de z.g. 'discovery learning' procedure, het zelf-ontdekken door de leerlingen, d.w.z. tot *banend* (in tegenstelling tot *sturend*) onderwijs. Deze redenering, die wij bijv. bij Bruner vinden (. . .), sluit echter niet. Als men bij iemand activiteit *A* tot ontwikkeling wil brengen, is het in het geheel niet noodzakelijk, en vaak ook niet efficiënt, om rechtstreeks op activiteit *A* aan te sturen. Het kan in veel gevallen nuttig of zelfs noodzakelijk zijn eerst activiteiten *P*, *Q*, *R* aan te leren, die bouwstenen vormen voor de vervolgens aan de orde komende activiteit *A*. In het geval van het leren denken leert een oppervlakkige analyse van het gewenste leerresultaat bovendien, dat de karakterisering van denken als ontdekken onvolledig is, want het denken leidt tot ontdekken op basis van een systematisch geordend arsenaal van mogelijkheden. Zeker dit systematisch geordende geheel is via een banende onderwijsprocedure niet eenvoudig op te bouwen' (p. 364).

Van Parreren wijst voorts op het belang van de *intrinsieke motivatie* in de praktijk van ons onderwijs, i.h.b. bij banend onderwijs en wijst in verband hiermee op de mogelijkheid cognitieve conflicten op te roepen, zoals de intens beleefde vraag: hoe kan dat nou?

'Uit het feit, dat op deze wijze een goede motivationele conditie voor een leerproces te creëren valt, mag men echter niet besluiten dat het procédé dat hiertoe dienstig was (nl. leerlingen met een probleem te confronteren zonder de oplossing direct mee te delen) nu ook gedurende het verdere onderwijsproces het aangewezen middel vormt' (p. 364).

De strijdvraag '*banend onderwijs of sturend onderwijs*' zal eerst na voortgezet theoretisch onderzoek tot een bevredigende theoretische oplossing met waarde voor de onderwijspraktijk kunnen leiden.

Wat het persoonlijk standpunt van Van Parreren betreft blijkt er een grote overeenstemming te bestaan met de inzichten van Lompscher, een Oostberlijns onderwijspsycholoog die een spiraalbeweging propageert. Dat wil zeggen, dat onderwijs dat de cognitieve ontwikkeling van de kinderen met inbegrip van het 'denken' wil bevorderen, dient te beginnen met een aanzienlijke mate van sturing, waarbij die sturing echter gericht moet zijn op het gaandeweg zelfstandig laten worden van de leerling ten aanzien van de onderwezen activiteit. Het gaat niet om de keuze tussen *sturend* onderwijs en *banend* onderwijs, maar om een wisselende functie van sturing en zelfstandigheid. Van fundamentele betekenis is voorts de vraag welke inhoud het onderwijs zal dienen te hebben dat tot 'leren denken' zal leiden. Volgens oude opvattingen gaat het hier alleen maar om de leerstofkeuze: kiest men de juiste leerstof, dan komt de ontwikkeling van het denken als het ware automatisch tot stand. De leervorm is daarbij niet in het geding. Een verantwoorde leerstofkeuze garandeerde de zogenaamde 'vormende waarde'. Deze opvattingen waren van

belang bij het vaststellen van de plaats die vakken als klassieke talen en wiskunde in ons onderwijs dienden in te nemen. Kohnstamm wees er echter in 1929 reeds op, dat de beoogde vorming alleen tot stand kan komen, als met de leerstof ook de vereiste oplossingsmethoden door de leerlingen worden verworven. De aan de leerstof ten grondslag liggende handelingsstructuren zijn voor de ontwikkeling van het denken van beslissende betekenis.

Voor onze onderwijspraktijk blijft de vraag, wat de inhoud van ons onderwijs moet zijn, van betekenis, de vraag aan de hand van welke leerstof de handelingen geleerd zullen moeten worden die later als fundamentele denkhandelingsstructuren zullen gaan functioneren. Betekent dit nieuwe leerstof of reeds gangbare leerstof? Kiest men voor het laatste, dan blijft voorlopig het gevaar bestaan dat de aangeleerde handelingsstructuren onvoldoende 'wendbaarheid' zullen blijken te bezitten. Kiest men daarentegen nieuwe leerstof speciaal met het oog op de gewenste denktraining, dan blijft het gevaar bestaan dat indien straks de wendbaarheid te wensen over laat, het geleerde zonder enige praktische waarde blijkt. In concreto:

'indien men bijv. het denken wil ontwikkelen aan materiaal van de moedertaal, dan leidt dit, ook als de wijdere wendbaarheid te wensen laat, waarschijnlijk wel tot leerresultaten die direct of indirect voor de taalbeheersing van de leerlingen nuttig zijn. Oefent men daarentegen bijv. met logiblokken en zou het hieraan geleerde geen wendbaarheid vertonen naar het omgaan met andersoortig materiaal, dan bereikt men geen enkel nuttig effect' (p. 366).

Om uitspraken te kunnen doen over de structuur van voor het denken in psychologisch opzicht fundamentele handelingsstructuren is een psychologische analyse nodig van de beoogde leerresultaten. Deze analyse is ook onmisbaar, indien de theorieën van de psychologen voor ons onderwijs van praktische waarde zullen worden. In verband hiermee pleit Van Parreren voor de opbouw van een stelsel van leerhiërarchieën in de geest van Gagné (*The conditions of learning*, 1970). ontdaan van diens behavioristische vooroordelen. Het is duidelijk, dat er zowel op het terrein van empirisch onderzoek als ten aanzien van theoretisch voorwerk nog veel werk te verzetten blijft, eer er een over de hele lijn bruikbare leerpsychologie voor ons onderwijs ter beschikking komt.

Voor de onderzoeken van Elshout, De Leeuw en Venger alsmede voor literatuuropgaven die op de jongste tijd betrekking hebben, samengesteld door Van Parreren, verwijzen we naar het onderhavige themanummer van Pedagogische Studiën.

Doel van dit artikel in Euclides was allereerst om aan de hand van de beschouwingen van Van Parreren te doen uitkomen dat de inhoud van Pedagogische Studiën ook voor de huidige wiskundeleraar van betekenis kan zijn. Men kan op eenvoudige wijze lezer worden door deelname aan onze leesportefeuille, waarvan Dr. Smeur in Dorst (N.B.). beheerder is. Tot dusver was het aantal lezers op dit Nederlandse tijdschrift gering. In de literatuuroverzicht-

ten over didactische literatuur die sinds 1953 in Euclides werden opgenomen hebben we ons stelselmatig tot 'buitenlandse' tijdschriften beperkt. Het leek ons echter verantwoord ook eens reliefs te geven aan wat er in het Nederlandse tijdschrift *Pedagogische Studiën* aan de orde wordt gesteld over problemen uit de leerpsychologie die voor alle leraren maar toch voor de wiskunde-docenten in het bijzonder van betekenis mogen worden geacht.

Arnhem, 12 november 1975.

Joh. H. Wansink.

Variabelen

opmerking bij het stuk van T. S. de Groot, *Euclides* 51, p. 154–155.

Variabelen betekenen heel iets anders in de algebra – meer algemeen in de wiskunde – dan bij de computer; zij hebben heel verschillende functies. In de computertaal stellen variabelen adressen voor – laden zoals de auteur het uitdrukt. De computeropdrachten hebben bijv. de vorm

tel de inhoud van b bij de inhoud van a op,

zoals de auteur terecht in zijn stuk vermeldt. Dit betekent dat door de opdracht de inhoud van a *veranderd* wordt. Spreekt men algebra-taal, dan blijft gedurende een heel verhaal de 'inhoud' van een variabele *onveranderd*.

Het zou mooi zijn als men van de computer-taal gebruik kon maken, om de algebra-taal aan te leren, maar op 't ogenblik is men didactisch nog niet eens zover om te beletten, dat ze elkaar hinderen.

Er is nog een tweede bezwaar tegen de voorgestelde aanpak: Volgens de auteur zijn de elementen van $\mathbb{Z}$ in de laden $a, b, c, \dots$ 'opgeborgen'. Dit betekent, dat geen element in meer dan één kan zitten, dus dat nooit $a = b$, $a = c$ enz. kan zijn. Hiermede worden moeilijkheden, die sommige leerlingen inderdaad met de algebra hebben, in plaats van uit de weg geruimd, aan *alle* leerlingen verplicht in de weg gelegd. De auteur beweert dat een formulering als $a \in \mathbb{Z}$ nu 'doorzichtiger' wordt door haar te lezen als a (de lade a) is deelverzameling van $\mathbb{Z}$. Dit zou voor de leerlingen 'veel duidelijker' zijn. Als het duidelijk is, dan is het een duidelijke fout. $a \in \mathbb{Z}$ betekent, dat a *geheel* $\mathbb{Z}$ mag doorlopen, niet maar een 'la' van $\mathbb{Z}$. $b \in \mathbb{Z}$ betekent, dat b heel $\mathbb{Z}$ mag doorlopen, niet maar een 'la' van $\mathbb{Z}$. En $c = a + b$ betekent de som van a en b , wat die dan ook mogen zijn, en niet een of andere lade van $\mathbb{Z}$. Dit moet de leerlingen duidelijk worden gemaakt.

Hans Freudenthal

Logische perikelen

P. G. J. VREDENDUIN

Doorwerth

1. Het complement van een verzameling.

Gegeven is de verzameling

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} > 0 \right\}$$

Kennelijk geldt $V = \mathbb{R}^+$.

We vormen het complement van V . De gangbare definitie van het complement van V is

$$V^c = \{ x \in \mathbb{R} \mid \neg x \in V \}$$

Dit levert

$$V^c = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \neg \frac{1}{x} > 0 \right\}.$$

en dus $V^c = \mathbb{R}^-$.

Zodat we tot onze verbazing niet kunnen besluiten dat

$$V \cup V^c = \mathbb{R}$$

2. Een aanvechtbare ekwivalentie.

Bij het oplossen van vergelijkingen wordt vaak gebruik gemaakt van de volgende ekwivalentie

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0 \quad (1)$$

Terecht merkte Lourens van den Brom eens op, dat dit niet juist is. Immers $A \Leftrightarrow B$ wil zeggen, dat in alle gevallen waarin A (B) waar is, ook B (A) waar is, en bovendien in alle gevallen waarin A (B) onwaar is, ook B (A) onwaar is. Kies nu $b = 0$. Dan is het rechter lid van (1) onwaar. Het linker lid heeft echter geen betekenis en is dus noch waar noch onwaar. En dus is (1) geen aanvaardbare ekwivalentie.

Dat is 1-0 voor Lourens.

Nu begin ik te redeneren. Ik vraag me af of de implicatie

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b \neq 0 \quad (2)$$

juist is.

$A \Rightarrow B$ wil zeggen, dat in alle gevallen waarin A juist is, ook B juist is. Met een gerust geweten durf ik vol te houden, dat (2) een juiste implicatie is.

Verder vraag ik me af of de implicatie

$$a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0 \quad (3)$$

juist is.

Niemand zal willen bestrijden, dat in alle gevallen waarin het linker lid juist is, ook het rechter lid juist is. Ook (3) is dus een juiste implicatie.

De gangbare definitie van $A \Leftrightarrow B$ is

$$A \Leftrightarrow B \stackrel{\text{def}}{=} A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$$

Zodat uit (2) en (3) geconcludeerd mag worden, dat ook (1) juist is.

En nu staat het 1 – 1.

Het gekke is, dat normale leraren en normale leerlingen nooit last van het voorgaande hebben. Zij zullen beslist zeggen, dat het complement van de verzameling V die in sub 1 vermeld is, bestaat uit alle reële getallen die ≤ 0 zijn. En ze zullen het volste vertrouwen hebben in de sub 2 genoemde ekwivalentie (1). Hoe komt dat? Heel eenvouding: de oorzaak is, dat ze geen logica toepassen, maar redeneren als gezonde mensen.

Maar al zijn we gezonde mensen, dan is nu toch onze nieuwsgierigheid wel geprikkeld. Ik moet eerlijk bekennen, dat Lourens me wakker geschud heeft. En ook dat ik koppig blijf ‘geloven’ in de juistheid van de implicatie (1) en het volste vertrouwen heb in mijn eigen redenering. Maar een dergelijke emotionele uiting kan niet erg dienstig zijn om de oorsprong van de controverse op te sporen. Waar ligt deze?

De oorzaak moet liggen in een discrepantie tussen de logica die aanvaard wordt, en het taalsysteem waarop deze logica toegepast wordt. De logica waarvan we uitgegaan zijn, is de tweewaardige. Elke uitspraak is hetzij waar, hetzij onwaar. In deze logica komen geen taalvormsels voor die de structuur van een uitspraak hebben, maar bij nader inzien betekenisloos zijn en dus noch waar, noch onwaar. Anders gezegd: in de gebruikelijke logica komen geen taalvormsels voor met vrije variabelen met de eigenschap dat bij sommige substituties voor deze variabelen uitspraken ontstaan, echter bij andere niet.

Een dergelijk taalvormsel is $\frac{a}{b} = 0$.

In ons taalsysteem komen dergelijke taalvormsels wel voor. En dus kunnen we niet straffeloos de regels toepassen van een logica die uitgaat van hun afwezigheid.

Hoe redden we ons uit de moeilijkheid?

1. We kiezen een andere logica; een logica die aangepast is aan de situatie.

Een soort driewaardige logica waarin elke 'uitspraak' hetzij waar, hetzij onwaar, hetzij betekenisloos is. Ik heb wel eens een voorzichtige poging in deze richting gedaan, maar zie geen enkele mogelijkheid in deze richting iets te bereiken.

2. Een oplossing die ik wel eens bij een ander gelezen heb, is de volgende. Verklaar elke betekenisloze 'uitspraak' voor onwaar.¹ Nu even voorzichtig.

$\frac{6}{0} = 7$ is een betekenisloze uitspraak, maar ook de negatie ervan, dus $\neg \frac{6}{0} = 7$,

is een betekenisloze uitspraak. En als we deze beide uitspraken voor onwaar verklaren, komen we in strijd met de grondslagen van onze tweewaardige logica. Volgens deze logica is van twee uitspraken die elkaars negatie zijn, er precies één waar. De correctie is dan ook als volgt:

elke betekenisloze elementairuitspraak (uitspraak waarin geen logische symbolen voorkomen) is onwaar;

de negatie van een dergelijke onware uitspraak is waar.

Zo voortredenerend komt men tot een sluitend geheel. Bijv. is $A \vee B$ met A betekenisloos en B waar een onware uitspraak, maar $\neg A \vee B$ een ware uitspraak.

Elegant is de oplossing niet. Wartaal voor onwaar en genegeerde wartaal voor waar te verklaren, vind ik een soort noodsprong. Eleganter lijkt me geen wartaal te spreken.

3. Ik probeer het daarom nog eens op een andere manier. Ik ga uit van de definitie van de deling.

$\frac{a}{b} \stackrel{\text{def}}{=} \text{het getal } c \text{ waarvoor } bc = a$

Om elk misverstand te voorkomen merk ik op dat

c is *het* getal waarvoor $bc = a$

wil zeggen:

er is precies één getal x waarvoor $bx = a$ en dit getal is c .

Volgende stap: gevraagd $\frac{7}{0}$. Is misschien $\frac{7}{0} = 5$? Neen, want $0 \cdot 5 \neq 7$. En zo

blijkt het dat er geen getal bestaat, dat gelijk is aan $\frac{7}{0}$.

Gevraagd $\frac{0}{0}$. Is $\frac{0}{0} = 3$? Neen, want wel is $0 \cdot 3 = 0$, maar 3 is niet het enige

getal waarvoor $0 \cdot x = 0$.

¹ Ik kan mij voorstellen dat iemand nadere informatie wenst over betekenisloze uitspraken. Dit lijkt een contradictio in terminis. In elk taalsysteem stelt men zuiver syntactisch eerst vast, wat verstaan wordt onder een uitspraak. Bijv. $a = b$, $a > b$, $ab = c$, $\frac{a}{b} = c$ zijn uitspraken.

Nu is uitspraak gedefinieerd langs zuiver structurele weg. Van elke uitspraak kan men nagaan of the een ware uitspraak, een onware uitspraak of een betekenisloze uitspraak is. (Onnodig te vermelden dat de structurele definitie van uitspraak niet zo eenvoudig is als hierboven gesteld, maar ik hoop dat de strekking duidelijk is.)

Ik merk met schrik, dat ik al maar onzinnige dingen opgeschreven heb en geconstateerd heb, dat ze onwaar waren. Ik heb geconstateerd dat het niet waar was, dat $\frac{7}{0} = 5$ en dat het niet waar was, dat $\frac{0}{0} = 3$. Ik heb niet gezegd: $\frac{7}{0}$ is onzin en dus kan ik er niet over praten. Integendeel, ik heb precies gedaan

of het geen onzin was en geconstateerd, dat $\frac{7}{0}$ niet gelijk was aan 5 en evenmin aan enig ander getal. Dat geeft te denken.

Ik doe het daarom nog eens over (en geef toe dat de hier door mij gekozen oplossing niet de enig mogelijke is). Ik definieer:

$$\frac{a}{b} = c \text{ wil zeggen: } bc = a \wedge \forall x : x \neq c \Rightarrow bc \neq a$$

Nu vraag ik: is $\frac{7}{0} = 5$? Het antwoord luidt: neen, want $0 \cdot 5 \neq 7$. En verder:

is $\frac{0}{0} = 3$? Weer luidt het antwoord: neen. Immers

$$\neg \forall x : x \neq 3 \Rightarrow 0 \cdot x \neq 0$$

Door niet $\frac{a}{b}$ te definiëren, maar $\frac{a}{b} = c$, hebben we bereikt dat de zinloze tekencombinaties veranderd zijn in onware uitspraken. Hoe werkt deze methode verder in de praktijk? We stellen bijv. de vraag: is $\frac{1}{0} > 0$? Om hier betekenis in te blazen, gaan we als volgt te werk. We vervangen de vraag door de per definitie ermee geïdentificeerde:

$$\text{geldt } \exists x : \frac{1}{0} = x \wedge x > 0?$$

Zo komen we tot de conclusie, dat $\frac{1}{0} > 0$ een onware uitspraak is. Daarmee is de moeilijkheid die we sub 1 tegenkwamen, opgelost. We stelden daar

$$V^c = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \neg \frac{1}{x} > 0 \right\}$$

Tot deze verzameling blijft het getal 0 nu wel te behoren. Zodat

$$V^c = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

en heel behoorlijk $V \cup V^c = \mathbb{R}$.

Men zal al wel gemerkt hebben, dat ook de moeilijkheid sub 2 is opgelost. De ekwivalentie (1) is een correcte ekwivalentie geworden, omdat voor $b = 0$ beide leden onware uitspraken worden.

We kunnen op de ingeslagen weg voortgaan en ervoor zorg dragen, dat we ook in de verdere ontwikkeling van de wiskunde geen last krijgen van zinloze tekencombinaties. Zo definiëren we bijv.

$$\sqrt{a} = b \text{ wil zeggen: } b^2 = a \wedge b \geq 0$$

en

$${}^a\log a = b \text{ wil zeggen: } g^b = a \wedge g > 0 \wedge g \neq 1$$

Nu zijn uitspraken als $\sqrt{-9} = 3$ en ${}^{-3}\log -27 = 3$ heel gewoon onware beweringen.

Analoog aan de manier waarop we $\frac{1}{0} > 0$ geïnterpreteerd hebben, stellen we vast dat (per definitie) bijv.

$${}^2\log x = {}^4\log 2x \text{ betekent: } \exists y: {}^2\log x = y \wedge {}^4\log 2x = y$$

en

$${}^2\log x > \sqrt{x} \text{ betekent: } \exists y, z: {}^2\log x = y \wedge \sqrt{x} = z \wedge y > z.$$

Van zinloze tekencombinaties hebben we geen last meer en daarom kunnen we zonder bezwaar de tweewaardige logica toepassen.

Blijft nog over op te merken, dat het verschil tussen de door mij gekozen oplossing en de voorgaande, waarin zinloze tekencombinaties onware uitspraken genoemd werden, subjectief is. Ik vind de tweede methode eleganter dan de eerste. Naar de formele resultaten gemeten die men met de twee methoden bereikt, zijn ze gelijkwaardig.

Statistische dag 1976

Op dinsdag 20 april 1976 houdt de Vereniging voor Statistiek haar jaarlijkse lezingendag, waaraan een tentoonstelling van boeken, rekenapparatuur en andere statistische hulpmiddelen verbonden is, in de aula van de Technische Hogeschool te Delft.

De Statistische Dag zal worden geopend door de Rector Magnificus van de TH Delft Prof. Dr. Ir. H. van Bakkum. In de ochtendzitting spreekt Prof. Dr. D. R. Cox Londen over 'Analysis of survival data'.

In de middagzitting zijn er vier series, elk van drie lezingen en een Symposium 'Quo Vadis' met als thema: het spanningsveld tussen beleid en onderzoek op het gebied van verkeer en vervoer.

In de series worden onder meer de volgende onderwerpen behandeld: statistische methoden in de sport; de rechter en de statisticus; planning van produktie, voorraden en distributieactiviteiten; betrouwbaarheid in de ruimtevaart.

Nadere informatie verleent de Vereniging voor Statistiek op de Statistische Dag of op het secretariaat van de VVS, Weena 700 te Rotterdam, eventueel telefonisch via 010-116181 (tst. 2126).

Over differentiaalvergelijkingen

H. J. K. MOET

Delft

Dit stukje bevat enige opmerkingen met betrekking tot de theorie der differentiaalvergelijkingen zoals de e aangetroffen worden in leerboeken voor het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs.

De inleiding bevat de in dit stukje gebruikte terminologie. In de daaropvolgende paragraaf worden voorbeelden behandeld die het naar onze mening nodig maken dat de begrippen 'kromme' en 'integraalkromme' nog eens nader worden bekeken. Dit laatste gebeurt in de paragraaf 'Krommen en integraalkrommen'. Vervolgens geven wij onze visie op de meetkundige betekenis van differentiaalvergelijkingen. Daarna gaan wij in op het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Inleiding

De theorie die in leerboeken voor het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs onder de naam 'differentiaalvergelijkingen' wordt behandeld, wijkt in een aantal opzichten af van de theorie die in het algemeen wordt aangetroffen in standaardteksten over differentiaalvergelijkingen ([1], [2]). We sommen de opvallendste verschillen even op:

- 1 het verschil in schrijfwijze (definitie) van een differentiaalvergelijking (met als gevolg dat wat in de ene theorie 'differentiaalvergelijking' heet in de andere theorie strikt genomen geen betekenis heeft);
- 2 het verschil in het begrip 'oplossing'.

Laten we nu eerst onze terminologie bepalen.

Onder een gebied D verstaan we een open samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Laat f een reële continue functie zijn met domein D . Een differentiaalvergelijking is een vergelijking

$$y' = f(x, y).$$

Onder het oplossen van een differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$ verstaan we het bepalen van een differentieerbare functie y gedefinieerd op een interval $I \subseteq \mathbb{R}$ zodanig dat:

- a $(x, y(x)) \in D$ voor elke $x \in I$;
- b $y'(x) = f(x, y(x))$ voor elke $x \in I$.

Als zo'n interval I en zo'n functie y bestaan, dan noemen we y een oplossing van de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$ op I . Een oplossing y op I is dus een functie waarvan de grafiek in elk van zijn punten (x, y) een raaklijn heeft met richtingscoëfficiënt $f(x, y)$.

Veronderstel dat (x_0, y_0) een punt is in D . We kunnen nu vragen of er een oplossing van $y' = f(x, y)$ bestaat die door (x_0, y_0) gaat. Een dergelijk probleem noemen we een beginwaardeprobleem.

Interessante vragen zijn nu:

- 1 bestaat er bij een gegeven differentiaalvergelijking een oplossing?
- 2 bestaat er bij een gegeven beginwaardeprobleem een unieke oplossing?

Het belang van deze vragen is op grond van fysische argumenten eenvoudig te verklaren. Veronderstel dat we met behulp van een differentiaalvergelijking (binnen bepaalde grenzen) de beweging van een slinger willen beschrijven, dan ligt het voor de hand dat we van de differentiaalvergelijking (ons model) eisen dat deze een oplossing heeft, anders is ons model waardeloos. Dat deze oplossing een functie moet zijn, volgt uit de veronderstelling dat er nog nooit een slinger is geweest die op twee verschillende plaatsen tegelijk was. Tevens leert de ervaring ons dat de slinger dezelfde beweging uitvoert indien hij op verschillende tijdstippen vanuit dezelfde begintoestand op gelijke wijze als voorheen in beweging wordt gezet (uniciteit van oplossing van een beginwaardeprobleem).

We geven nu de terminologie met betrekking tot differentiaalvergelijkingen van het v.w.o.

De algemene gedaante van een differentiaalvergelijking is $F(x, y)dy + G(x, y)dx = 0$, hierin zijn F en G continue functies met een gebied D als gemeenschappelijk domein. Punten $(x, y) \in D$ waarvoor geldt $F(x, y) = 0$ en $G(x, y) = 0$ heten singuliere punten. Punten van D die niet singulier zijn heten regulier.

Een lijnelement van een differentiaalvergelijking is een drietal $(x, y, F(x, y) : -G(x, y))$ waarin $(x, y) \in D$ een regulier punt is. Het punt (x, y) heet drager van het lijnelement en $(F(x, y) : -G(x, y))$ heet de richting van het lijnelement.

Een integraalkromme is een kromme die:

- a uitsluitend uit reguliere punten bestaat;
 - b in elk van zijn punten raakt aan het lijnelement waarvan dat punt drager is.
- Hierbij merken we op dat het domein van de parameterfuncties van een kromme niet samenhangend hoeft te zijn (in de v.w.o.-wiskunde althans). Door deze definitie van integraalkromme is het mogelijk dat relaties die geen functie van x of y zijn als integraalkromme optreden.

Voor de volledigheid laten we het begrip 'differentiaal' de revue passeren. Laat f een reële functie zijn gedefinieerd op een open verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ en veronderstel dat f differentieerbaar is in $x \in S$, dan is de differentiaal van f in x de afbeelding $df(x; \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$df(x; \cdot) : t \rightarrow f'(x) \cdot t \quad (df(x; t) = f'(x) \cdot t).$$

Laat $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de identieke afbeelding zijn, dan is

$$did(x; \cdot): t \rightarrow t \text{ en dus } did(x; t) = t.$$

Voor de uitdrukking $did(x; t)$ voeren we de volgende schrijfwijze in

$$did(x; t) = dx.$$

Derhalve krijgen we

$$df(x; dx) = f'(x)dx$$

of korter

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Soms zien we de schrijfwijze $dy = f'(x)dx$: hier moeten we wel extra op onze hoede zijn niet de betekenis der symbolen uit het oog te verliezen.

We passen het voorgaande toe op de differentiaalvergelijking $F(x, y)dy + G(x, y)dx = 0$.

Veronderstel dat K een integraalkromme is van deze differentiaalvergelijking en laat f en g de parameterfuncties zijn van K , dan is $dx = dx(t) = f'(t)dt$ en $dy = dy(t) = g'(t)dt$, ingevuld in de differentiaalvergelijking levert dit

$$F(f(t), g(t))g'(t)dt + G(f(t), g(t))f'(t)dt = 0,$$

voor alle $dt \in \mathbb{R}$ en alle t uit het domein van de parameterfuncties f en g .

Derhalve vinden we

$$F(f(t), g(t))g'(t) + G(f(t), g(t))f'(t) = 0,$$

voor alle t uit het domein van de parameterfuncties f en g .

Ten slotte het volgende. Het woord 'differentiaalvergelijking' gebruikt in de betekenis die er in standaardteksten aan wordt gegeven korten we soms af tot ED en het woord 'differentiaalvergelijking' zoals gebruikt in het v.w.o. korten we soms af tot DV. Passen we geen afkorting toe dan blijkt ondubbelzinnig uit de tekst in welke betekenis 'differentiaalvergelijking' wordt gebruikt.

Twee eenvoudige differentiaalvergelijkingen

In deze paragraaf laten we aan de hand van twee eenvoudige voorbeelden zien waar zwakheden zitten in de theorie der DV-en.

We zullen een integraalkromme van de volgende DV bepalen:

$$dy = dx.$$

Laat de kromme K gegeven zijn door $x = f(t)$ en $y = g(t)$, waarin

$$f: t \rightarrow \tan t, \text{ als } t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \cup \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle$$

en

$$g: \begin{cases} t \rightarrow \tan t, & \text{als } t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle \\ t \rightarrow 1 + \tan t, & \text{als } t \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle. \end{cases}$$

De kromme K wordt gevormd door de twee evenwijdige lijnen $y = x$ en $y = x + 1$.

Deze kromme is een integraalkromme van de gegeven DV, immers elk punt van K is regulier en in elk punt van K raakt het lijnelement waarvan dat punt drager is aan de kromme K .

We kunnen met hetzelfde gemak een integraalkromme bepalen die dicht ligt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bekijk namelijk bij gegeven aftelling $q_0, q_1, q_2, \dots$ van de verzameling rationale getallen de functies f en g gedefinieerd door:

$$f: t \rightarrow \tan t, \text{ als } t \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle (2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2 \rangle$$

$$g: t \rightarrow q_n + \tan t, \text{ als } t \in \langle (2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2 \rangle, n = 0, 1, 2, \dots$$

Laat de kromme M gegeven zijn door $x = f(t)$ en $y = g(t)$, waarin

$$f: t \rightarrow t, \text{ als } t \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle n, n+1 \rangle$$

$$g: t \rightarrow n, \text{ als } t \in \langle n, n+1 \rangle, n = 0, 1, 2, \dots$$

Deze kromme is een integraalkromme van de DV $dy = 0$.

We merken hierbij op dat deze methoden voor het bepalen van integraalkrommen op vrijwel elke DV kan worden toegepast.

Krommen en integraalkrommen

Uit deze voorbeelden blijkt dat de eenduidigheid van oplossing van een beginwaardeprobleem in de theorie der DV-en in zijn huidige vorm niet bestaat. Dit houdt in dat deze theorie niet geschikt is als bron van wiskundige modellen voor fysische verschijnselen.

De meest aannemelijke wijze waarop dit defect gerepareerd kan worden, lijkt ons de definitie van kromme geschikter kiezen en de definitie van integraalkromme verscherpen. We kiezen voor het volgende.

- 1 Laat f en g continue functies zijn met een interval I als gemeenschappelijk domein, de verzameling punten $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat er een $t \in I$ is zodanig dat $x = f(t)$ en $y = g(t)$ heet dan een kromme. Een onmiddellijk gevolg van deze definitie is dat een kromme samenhangend is. (Zie bijv. [3].)

2 Een integraalkromme is een kromme die:

- (i) uitsluitend uit reguliere punten bestaat;
- (ii) in elk van zijn punten raakt aan het lijnelement waarvan dat punt drager is;
- (iii) zo ver mogelijk in beide richtingen langs de x -as en de y -as voortgezet wordt gedacht, waarbij de samenhang bewaard moet blijven.

Accepteren we deze definities, dan is bijvoorbeeld $xy = 1$ geen integraalkromme van $x dy + y dx = 0$, immers beide takken van deze hyperbool vormen samen een onsamenvangende verzameling in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. We moeten hier twee verschillende integraalkrommen onderscheiden:

$$xy = 1 \ \& \ x > 0$$

en

$$xy = 1 \ \& \ x < 0.$$

De meetkundige betekenis van differentiaalvergelijkingen (DV)

Wanneer we een integraalkromme van een DV $F(x, y)dy + G(x, y)dx = 0$ willen bepalen, moeten we een kromme K opsporen die aan (i), (ii) en (iii) voldoet. Dit houdt in dat we een kromme K zoeken met differentieerbare parameterfuncties f en g die voldoen aan $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 \neq 0$ en $F(f(t), g(t))g'(t) + G(f(t), g(t))f'(t) = 0$ voor elke $t \in I$. We kunnen dit opvatten als het zoeken naar een ruimtekromme $K^*: I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die in elk punt een raaklijn heeft met richtingsgetallen $(1, f(t), g'(t))$, die voldoen aan $F(f(t), g(t))g'(t) + G(f(t), g(t))f'(t) = 0$. Hebben we K^* gevonden, dan levert projectie van K^* op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ juist de integraalkromme K op.

De krommen die in het v.w.o. 'integraalkrommen' heten, lijken sterk op de krommen die in de theorie der differentiaalvergelijkingen (ED) 'baankrommen' worden genoemd. Ten einde een en ander te verduidelijken illustreren we de bovenstaande uitspraak als volgt. Bij een gegeven stelsel differentiaalvergelijkingen (ED)

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y),$$

zoeken we twee differentieerbare functies x en y die op een zeker interval I aan dit stelsel voldoen. Hebben we zo'n paar x en y gevonden, dan heet de verzameling $\{(t, x(t), y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \in I\}$ 'integraalkromme' van het gegeven stelsel. De verzameling $\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \in I\}$ heet 'baankromme'.

Elke DV $F(x, y)dy + G(x, y)dx = 0$ brengt oneindig veel stelsels differentiaalvergelijkingen (ED); één stelsel is

$$1 \quad \frac{dx}{dt} = F(x, y)$$

$$2 \quad \frac{dy}{dt} = -G(x, y).$$

Als $x = f(t)$ en $y = g(t)$ voldoen aan 1 en 2, dan is $F(x, y)dy + G(x, y)dx = 0$. We illustreren dit aan de hand van de volgende DV $xdx + ydy = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = y \text{ en } \frac{dy}{dt} = -x,$$

hieraan wordt voldaan door $x = a \sin t$ en $y = a \cos t$ met $t \in \mathbb{R}$. Een baan-kromme van dit stelsel is juist integraalkromme van de gegeven DV.

De voorgaande uiteenzetting maakt het tevens mogelijk fysisch pathologische integraalkrommen (DV), zoals lijnen loodrecht op de x -as, te verklaren. Beschouwen we de DV $xdy + ydx = 0$, dan zien we dat door deze DV het volgende stelsel wordt voortgebracht:

$$\frac{dx}{dt} = x \text{ en } \frac{dy}{dt} = -y,$$

hieraan wordt voldaan door $x = 0$ en $y = e^{-t}$, zodat de baankromme $\{(0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = e^{-t} \text{ \& } t \in \mathbb{R}\}$ integraalkromme is van deze DV.

We zien uit het bovenstaande dat de meetkundige betekenis van DV-en eerder overeenstemt met de meetkundige betekenis van een tweede orde stelsel ED-en dan met de meetkundige betekenis van een (eerste orde gewone) ED.

Het bepalen van integraalkrommen van een differentiaalvergelijking (DV)

In sommige gevallen, zo blijkt achteraf, kunnen we een integraalkromme parametrizeren met behulp van x en y , dat wil zeggen x als functie van y of y als functie van x . We illustreren dit aan de hand van de volgende DV $xdy + ydx = 0$:

- 1 $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 1 \text{ \& } x > 0\}$ is een integraalkromme, we kunnen K als volgt parametrizeren $x = x$ en $y = 1/x$ met $x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$;
- 2 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 0 \text{ \& } y > 0\}$ is eveneens een integraalkromme, deze kunnen we parametrizeren door $x = 0$ en $y = y$ met $y \in \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Het zoeken naar een integraalkromme van een DV kan in de praktijk dan ook vaak beperkt worden tot het zoeken naar y als differentieerbare functie van x of x als differentieerbare functie van y zodanig dat het raaklijnelement in elk punt van de grafiek van een dergelijke functie juist lijnelement is van de DV met dat punt van de grafiek als drager. Het is eenvoudig in te zien dat deze functies krommen zijn.

Deze methode faalt in die gevallen waarin het niet mogelijk is een integraal-kromme als functie van x of y te parametrizeren, zoals bijvoorbeeld bij inte-graalkrommen van de DV $xdx + ydy = 0$. Uit het onderstaande zal duidelijk worden dat we in dergelijke gevallen de t -coördinaat van de parametrizing niet onder tafel mogen stoppen.

Als we een integraalkromme willen bepalen van de DV $xdx + ydy = 0$, kunnen we als volgt te werk gaan.

$$\begin{aligned}
 xdx + ydy &= 0 \\
 2xdx + 2ydy &= 0 \\
 d(x^2) + d(y^2) &= 0 \\
 d(x^2 + y^2) &= 0 \\
 x^2 + y^2 &= c \quad (c > 0).
 \end{aligned}$$

De laatste regel zegt ons dat als een kromme K integraalkromme is van de gegeven DV de parameterfuncties f en g van K voldoen aan $(f(t))^2 + (g(t))^2 = c$ voor t behorend tot een geschikt interval. Deze regel zegt ons niet dat de cirkel $x^2 + y^2 = c$ een integraalkromme is van de gegeven DV, dat weten we pas als we een parametrizing van de gehele cirkel hebben gevonden (zie het volgende voorbeeld). Het vinden van een dergelijke parametrizing is in dit geval eenvoudig: het ligt voor de hand $x = \sqrt{c} \cos t$ en $y = \sqrt{c} \sin t$ te nemen op een geschikt interval I , bijvoorbeeld $I = (0, 3\pi)$. Deze parametrizing heeft dubbelpunten. Deze dubbelpunten zijn onvermijdelijk, want de parameterfuncties moeten differentieerbaar zijn op I .

Laten we nu de DV $(y/x)dy + dx = 0$ bekijken. We hebben hier $F(x, y) = y/x$ en $G(x, y) = 1$, derhalve moeten we twee gebieden onderscheiden waarin integraalkrommen kunnen liggen, en wel $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > 0 \text{ \& } y \in \mathbb{R}\}$ en het gebied $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < 0 \text{ \& } y \in \mathbb{R}\}$. Verder zien we dat deze DV geen singuliere punten heeft. Nu we hebben vastgesteld dat $x \neq 0$ moet zijn, kunnen we schrijven $ydy + xdx = 0$, waaruit volgt $x^2 + y^2 = c$. Een integraalkromme die ligt in het rechter halfvlak (D_1) wordt gegeven door $x = \sqrt{c} \cos t$ en $y = \sqrt{c} \sin t$ met $t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

Ten slotte bepalen we van de onderstaande DV een integraalkromme die gaat door $(3/2, 3/2)$:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy &= 0 \\
 x^2dx + y^2dy - (xdy + ydx) &= 0 \\
 d(x^3) + d(y^3) - 3d(xy) &= 0 \\
 d(x^3 + y^3 - 3xy) &= 0 \\
 x^3 + y^3 - 3xy &= c,
 \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ zou moeten zijn voor een integraalkromme waarop het punt $(3/2, 3/2)$ ligt. De punten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die voldoen aan $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ vormen samen het folium van Descartes en zoals bekend is, heeft dit folium in $(0, 0)$ een dubbelpunt waarin raaklijnen met richting $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectievelijk $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ getrokken kunnen worden. De gezochte integraalkromme zou derhalve de lus van het folium moeten zijn die in het eerste kwadrant ligt, zonder het punt $(0, 0)$. Het is in dit geval geenszins eenvoudig een geschikte parametrizing te vinden, hoewel er wel een bestaat ([4]).

De theorie der DV-en opgebouwd op de hier gegeven definities van kromme en integraalkromme kan aanmerkelijk worden vereenvoudigd door uitsluitend differentieerbare functies van x als oplossing te aanvaarden. De meetkundige betekenis van een DV komt dan dicht bij die van een gewone eerste orde differentiaalvergelijking te liggen dan nu het geval is. Fysisch pathologische integraalkrommen, zoals lijnen loodrecht op de x -as, kunnen dan niet voorkomen. Een voordeel hiervan is dat de aannemelijkheid van de wiskunde als natuurlijke bron van modellen voor fysische verschijnselen toeneemt, juist nu de band tussen wiskunde en dagelijks leven nauwer wordt aangehaald in het v.w.o.

Het is niet zo verwonderlijk dat wij zo'n nadruk leggen op een geschikte toepasbaarheid van de theorie der DV-en in de fysica. De pogingen fysische verschijnselen in termen van differentiaalvergelijkingen te beschrijven hebben een enorme invloed gehad op de ontwikkeling van de wiskunde in het bijzonder de analyse (zie [5] en [6]).

Literatuur

1. E. Kamke, *Differentialgleichungen I*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969.
2. E. A. Coddington & N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
3. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1964.
4. J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
5. J. H. Manheim, *The Genesis of Point Set Topology*, Pergamon, New York, 1964.
6. I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Cambridge (Mass.), 1970.
7. G. Krooshof (eindredacteur), *Moderne Wiskunde*, dl. 9 v.w.o., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
8. A. van Dop, e.a., *Analyse met goniometrie*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

Ontvangen boeken

Sigma, Wiskunde voor mavo, havo, vwo. Deel 3h., 78 blz., f 9,25. Docentenhandleiding en antwoorden.

H. J. Jacobs e.a., *Moderne wiskunde*, 3e herziene druk, deel 6hm, 289 blz., f 21, —. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1975.

Dr. P. van Hiele e.a., *Van A tot Z*, werkboek der wiskunde voor havo. Algebra, goniometrie, analyse, deel H-4a, 179 blz., f 17,50
Meetkunde, deel H-4b, 113 blz., f 13,90.
Werkboek der wiskunde voor vwo, deel V-4, 204 blz., f 18,90.

Verscheidenheden

PROF. DR. O. BOTTEMA

Delft

XCVII. *Driedeling van een staaf*

Het berekenen van kansen en mathematische verwachtingen is ook in schijnbaar eenvoudige toestanden dikwijls een verraderlijke onderneming. Wie dat nog niet wist zou het kunnen opmaken uit de antwoorden die *Praxis der Mathematik* – tijdschrift voor Duitse wiskundeleraren – onlangs ontving op een aan de lezers voorgelegd probleem¹.

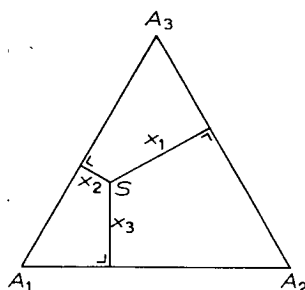
Een aloude opgave, die men in verscheidene leerboeken der waarschijnlijkheidsrekening tegen komt, is de volgende. Een staaf wordt op een willekeurige, van het toeval afhankelijke wijze in drie delen verdeeld; hoe groot is de kans dat men met de stukken een driehoek kan vormen? In deze redactie is niet exact geformuleerd welk procédé bij de 'willekeurige' verdeling wordt toegepast. Stilzweigend aangenomen of uitdrukkelijk gezegd blijkt de bedoeling de volgende. Op de nog ongebroken staaf worden onafhankelijk van elkaar twee breekpunten S_1 en S_2 aangenomen en wel zó dat de kans voor S_i om in een bepaald interval te liggen evenredig is met de lengte van dat interval. Het probleem is dan eenvoudig en het antwoord luidt: $\frac{1}{4}$.

Nu had *M. Gardner*, bekend publicist op het gebied der recreatieve wiskunde, in een van zijn boeken² de volgende variant behandeld. Men kiest S_1 op de bovengenoemde wijze, breekt de staaf in tweeën, neemt één der beide stukken – en wel met voor elk de kans $\frac{1}{2}$ – en breekt dat opnieuw. Het is duidelijk dat dit procédé een andere uitkomst zal geven dan het eerste. Bij *Gardner* vindt men een (onjuiste) redenering waaruit zou blijken dat de kans nu $\frac{1}{6}$ is. Het tijdschrift vroeg om de goede uitkomst en kreeg van zijn lezers zes verschillende antwoorden gepresenteerd waaronder het correcte $\ln 2 - \frac{1}{2}$, (dat is ongeveer 0.193). Terecht kwalificeerde de redactie het probleem als 'schwierige Wahrscheinlichkeit'.

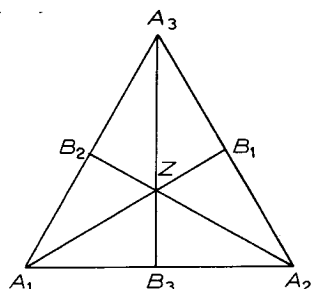
Wij behandelen hier de volgende vraag. *Wat is – bij de nieuwe manier van breken – de gemiddelde lengte van het grootste, resp. het kleinste der drie stukken?*

Volledigheidshalve geven wij eerst de – bekende – antwoorden op deze vragen bij de eerste methode van breken.

2 Daarbij blijkt het van voordeel van een *afbeelding* gebruik te maken. De drie stukken van de staaf (met lengte 1) zijn x_1, x_2, x_3 , met $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Een verdeling kan dus worden vertegenwoordigd door een punt S binnen een gelijkzijdige driehoek $A_1 A_2 A_3$ met hoogte 1; de afstanden van S tot de zijden zijn x_1, x_2, x_3 (fig. 1). Het eerste procédé komt dan hierop neer dat een punt



S binnen $A_1A_2A_3$ willekeurig wordt geworpen en wel zo dat de kans om binnen een bepaald gebied terecht te komen evenredig is met de oppervlakte van dat gebied. Zijn B_i de middens der zijden en is Z het zwaartepunt (fig. 2) dan ziet men dadelijk dat alleen dan met x_1, x_2, x_3 tot zijden een driehoek bestaat als S binnen $B_1B_2B_3$ ligt, waaruit de genoemde kans $\frac{1}{4}$ onmiddellijk volgt.

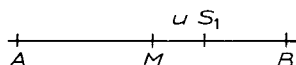


Daar x_3 de afstand is van S tot A_1A_2 blijkt dat x_3 het grootste stuk is als S ligt binnen de vierhoek $A_3B_1ZB_2$, het middelste als S binnen A_1ZB_2 of A_2ZB_1 en het kleinste als S binnen A_1A_2Z ligt. Daaruit volgt wegens de symmetrie (terwijl men uiteraard x_3 wel door x_1 of x_2 mag vervangen) dat het gemiddelde g' van het grootste stuk gelijk is aan de gemiddelde afstand tot A_1A_2 van de punten binnen de driehoek A_3B_1Z ; dat is de afstand tot A_1A_2 van het zwaartepunt van zijn oppervlakte. Daar dit samenvalt met het zwaartepunt van zijn hoekpunten krijgen wij $g' = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$; de gemiddelden m' en k' van het middelste en het kleinste stuk zijn $m' = \frac{1}{3}(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ en $k' = \frac{1}{3}(0 + 0 + \frac{1}{3})$. De resultaten zijn derhalve

$$g' = \frac{11}{18}, \quad m' = \frac{5}{18}, \quad k' = \frac{2}{18}.$$

Bij het eerste procédé blijkt de afbeelding dus een vruchtbaar hulpmiddel. Gardner – en vermoedelijk een aantal inzenders – trachten haar ook bij de tweede methode toe te passen, maar komen op dwaalwegen terecht³.

3 Zij bij het tweede procédé S_1 het eerste breekpunt van de staat AB . Wij leggen deze, om de gedachten te bepalen, zo neer dat S_1 rechts van het midden M ligt en stellen $MS_1 = u$. (fig. 3). Dan is $0 < u < \frac{1}{2}$ en de kans dat S_1 op een



interval met lengte du valt is gelijk aan $2du$. S_2 is het tweede breekpunt. Wij onderscheiden drie gevallen.

a Als S_2 op S_1B ligt (waarop de kans $\frac{1}{2}$ bestaat), dan is AS_1 het grootste der drie stukken. Bij gegeven u is zijn lengte $\frac{1}{2} + u$ en de gemiddelde lengte wordt in deze situatie

$$g_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + u) \cdot 2du = \frac{1}{2}(u + u^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}.$$

De andere mogelijkheid, eveneens met de kans $\frac{1}{2}$, is dat S_2 op AS_1 ligt. Daarbij onderscheiden wij de gevallen b) en c).

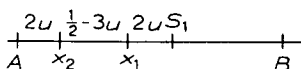
b) Zij $\frac{1}{6} < u < \frac{1}{2}$. Dan is $S_1B < \frac{1}{3}$ en $AS_1 > \frac{2}{3}$, dus $AS_1 > 2S_1B$. Daaruit volgt dat zeker één der beide stukken waarin AS_1 door S_2 wordt verdeeld groter is dan S_1B . Het grootste stuk van AS_1 is dus tevens het grootste van de drie.

Nu ziet men gemakkelijk in dat als een staaf in tweeën wordt gedeeld het grootste der twee stukken gemiddeld gelijk is aan $\frac{3}{4}$ en het kleinste aan $\frac{1}{4}$ van de staaf. In ons geval is dus bij gegeven u het grootste stuk gemiddeld $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (\frac{1}{2} + u)$ en wij krijgen

$$g_2 = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}(\frac{1}{2} + u) \cdot 2du = \frac{3}{8}(u + u^2) \Big|_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{24}.$$

c) Voor u geldt $0 < u < \frac{1}{6}$. Nu is $AS_1 < 2S_1B$. Wij passen op AS_1 het stuk $AX_1 = S_1B = \frac{1}{2} - u$ af en van S_1 naar links een even lang stuk S_1X_2 . (fig. 4); X_1 ligt dan rechts van X_2 en men heeft

$$AX_2 = 2u, X_2X_1 = \frac{1}{2} - 3u, X_1S_1 = 2u.$$



Van belang is nu op welk der drie intervallen S_2 komt te liggen. Ligt S_2 op AX_2 dan is S_2S_1 het langste der drie stukken; ligt S_2 op X_1S_1 dan is AS_2 het langste; ligt S_2 echter op X_2X_1 dan is elk der beide stukken waarin AS_1 wordt verdeeld kleiner dan S_1B , dus S_1B is het grootste stuk. De kans dat S_2 op AX_2 valt is $\frac{1}{2} \cdot 2u/(u + \frac{1}{2})$ en daar de gemiddelde afstand van een punt op AX_2 tot S_1 gelijk is aan de afstand van het midden van AX_2 tot S_1 (dat is $\frac{1}{2}$) volgt hieruit bij gegeven u de bijdrage $\frac{1}{2}u/(u + \frac{1}{2})$ en dezelfde als S_2 op X_1S_1 terecht komt. Ligt echter S_2 op X_2X_1 , waarop de kans gelijk is aan $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 3u)/(u + \frac{1}{2})$ dan is het grootste stuk $\frac{1}{2} - u$. Alles tezamen genomen is in ons geval c) bij gegeven u het gemiddelde grootste stuk

$$\{u + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 3u)(\frac{1}{2} - u)\}/(u + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(12u^2 + 1)/(2u + 1),$$

zodat

$$g_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(6u - 3 + \frac{4}{2u+1} \right) du = \left[\frac{3}{2}u^2 - \frac{3}{2}u + \ln(2u+1) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{24} + \ln \frac{4}{3}.$$

Wij krijgen dus: *de gemiddelde waarde van het grootste der drie stukken is*

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = \frac{3}{8} + \ln \frac{4}{3}.$$

Op analoge wijze bepalen wij het gemiddelde van het kleinste stuk. Ook hier worden drie gevallen onderscheiden.

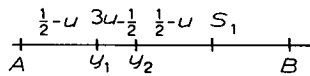
a) Valt S_2 op $S_1 B$ dan is het kleinste stuk van $S_1 B$ tevens het kleinste van alle drie. Daaruit volgt

$$k_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - u \right) \cdot 2 du = \frac{1}{32}.$$

b) S_2 op AS_1 en $0 < u < \frac{1}{6}$. Nu is $S_1 B > \frac{1}{3}$, $AS_1 < \frac{2}{3}$, dus het kleinste stuk van AS_1 is het kleinste van de drie. Wij krijgen

$$k_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + u \right) \cdot 2 du = \frac{1}{8} (u + u^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{288}.$$

c) S_2 op AS_1 en $\frac{1}{6} < u < \frac{1}{2}$. Nu is $AS_1 > 2S_1 B$. Is $AY_1 = Y_2 S_1 = S_1 B = \frac{1}{2} - u$, dan komt Y_2 rechts van Y_1 en $Y_1 Y_2 = 3u - \frac{1}{2}$. (fig. 5). Ligt S_2 op AY_1 , en de



kans daarop is $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - u)/(\frac{1}{2} + u)$, dan is AS_2 het kleinste der drie stukken en gemiddeld gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - u)^2/(\frac{1}{2} + u)$ en hetzelfde geldt als S_2 op $Y_2 S_1$ terecht komt. Ligt daarentegen S_2 op $Y_1 Y_2$ dan is $S_1 B$ het kleinste stuk. Bij gegeven u is dus het gemiddelde kleinste stuk in ons geval c) gelijk aan

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - u \right)^2 + \frac{1}{2} \left(3u - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - u \right) \right\} / \left(\frac{1}{2} + u \right) = u \left(\frac{1}{2} - u \right) / \left(\frac{1}{2} + u \right),$$

zodat

$$\begin{aligned} k_3 &= 2 \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \frac{u(1-2u)}{1+2u} du = 2 \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(-u + 1 - \frac{1}{2u+1} \right) du = \\ &= \left[-\frac{1}{2}u^2 + 2u - \ln(2u+1) \right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} + \ln \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wij krijgen voor de gemiddelde lengte van het kleinste stuk

$$k = k_1 + k_2 + k_3 = \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3}.$$

4 Samenvattend zijn bij het tweede procédé de gemiddelden van het grootste, het middelste en het kleinste stuk

$$g = \frac{3}{8} + \ln \frac{4}{3} \sim 0.662, \quad m = \frac{1}{8} - \ln \frac{8}{9} \sim 0.244, \quad k = \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} \sim 0.094.$$

Ter vergelijking herhalen wij de antwoorden bij de oorspronkelijke methode

$$g' = \frac{11}{18} \sim 0.611, \quad m' = \frac{5}{18} \sim 0.278, \quad k' = \frac{1}{9} \sim 0.111.$$

Het gemiddelde van het grootste stuk is toegenomen en dat van het kleinste stuk verminderd. Wie zich bezint op de gang van zaken bij de twee methodes zal dat ook verwachten.

Noten

¹ Het vraagstuk werd onder no. P 533 gesteld in *Praxis der Mathematik*, 15, 11, S. 301; de oplossing staat in 16, 3, S. 75–77.

² *Martin Gardner, Mathematical Puzzles and Diversions*, New York, 1961, p. 222; of de Duitse vertaling *Mathematische Rätsel und Probleme*, Braunschweig, 1971, S. 142–144.

³ *Martin Gardner*, l.c. p. 222, 'The same diagram will provide the answer'; p. 223, 'Geometrical diagrams of this sort must be used with caution because they can be fraught with ambiguity'.

Didaktische literatuur uit buitenlandse tijdschriften

Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Neue Folge; Band XXI, 1974 en Band XXII, 1975; Vanderhoeck en Ruprecht, Göttingen.

Reeds de toevoeging ‘zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität’ die we in de titel aantreffen, karakteriseert de aparte plaats die dit tijdschrift – waarvoor in het bijzonder Heinrich Behnke zich reeds meer dan twintig jaar heeft ingezet – in de rij van de ‘didaktische’ tijdschriften die onze belangstelling hebben, inneemt. Deze bijzondere plaats werd in 1953 door de Redactie zelf als volgt omschreven.

‘Diese Blätter dienen der mathematischen und physikalischen Weiterbildung auf den Hochschulen ausgebildeten Fachleute. Die Beiträge werden lediglich danach ausgewählt, wie weit sie diesem Gesichtspunkt gerecht werden. So grenzt sich die Zeitschrift gegenüber den Organen für die Forschung wie auch denen für mathematisch-physikalische Didaktik ab. Ihre Aufsätze werden vornehmlich von Professoren und Vertretern der höheren Schulen verfasst, die sich dieser kulturellen Aufgabe unterziehen wollen’.

De Redactie is de jaren door aan deze beginselverklaring trouw gebleven, al is dan ook het eigenlijke didactische accent enigszins versterkt door de toename van het aantal artikelen dat rechtstreeks met de lerarenopleiding verband houdt. Men zoek in deze Semesterberichte dan ook geen uitvoerige informatie over moderne werkvormen in het wiskunde-onderwijs, over de problematiek die wij met het begrip ‘middenschool’ in verband zouden willen brengen, maar wel over beschouwingen die t.z.t. voor de docenten van de ‘bovenschool’ hier te lande van belang zullen kunnen zijn.

Elke jaargang bestaat uit twee nummers en telt ongeveer twintig gedegen artikelen, waarvan we er hieronder slechts enkele zullen kunnen noemen. Behnke schrijft over ‘*Gymnasium und Universität*’, en maakt zich zorgen over het peil van de tegenwoordige studentengeneratie.

‘Die heutige Freiheit der Schüler in den Oberklassen bei der Auswahl der Pflicht- und Leistungskurse kann nicht mehr sinnvoll ein Beliebiges Studium aufgrund des Reifezeugnisses gestalten’.

Behnke gaat uitvoerig in op de problemen die veroorzaakt worden door studenten die op latere leeftijd dan normaal en via een omweg de universiteit bereiken. Hij wijst op verschillen in aanleg en constateert aansluitingsmoeilijkheden doordat vele laatkomers een jaar of vijf ouder zijn dan de studenten die rechtstreeks van het gymnasium komen.

‘Man verdirbt uns auf der Universität das Klima, wenn man uns die Slalomfahrer die sich gerne zu einer Notgemeinschaft gegen den Leistungsdruck organisieren, zuschiebt’. En:

‘Wir wehren uns ganz entschieden dagegen das Niveau unserer Anfangsvorlesungen zu senken, um einen grösseren Kreis von Anfängern die Teilnahme (. . .) sinnvoll erscheinen zu lassen’.

D. W. Müller pleit in *'Der Ort der Mengenlehre in der mathematischen Grundausbildung der Mittelschullehrer'* ervoor de verzamelingenleer en de propositielogica bij de leraarsopleiding niet te behandelen als wiskundige disciplines maar als taalproblemen bij de uitbreiding van een voor de huidige situatie ontoereikend geworden omgangstaal. In een volgend nummer komt Walter Felscher tegen Müllers opvattingen in verzet.

In *'Eine Axiomatik zum 7. Buch der Elemente von Euklid'* geeft N. Malmendier een uit een twintigtal axioma's bestaande fundering van 37 rekenkundige stellingen die we bij Euclides vinden.

Uit de twee en twintigste jaargang noemen we verder nog:

W. Rautenberg *'Eine Synthese der axiomatischen und der kardinalen Definition der natürlichen Zahlen'*.

Hans-Georg Steiner, *'Nicht-meszbare Abstimmungsgremien'*.

Hugo Hadwiger, *'Zerlegungsgleichheit euklidischer Polyeder'*.

Th. Ottmann, *'Mengenlehre oder Funktionenlehre?'*.

In de 21e jaargang treffen we een uitvoerig artikel aan waarin prof. Behnke wordt gehuldigd bij gelegenheid van zijn vijftigjarig doctorsjubileum. Hierbij krijgen in het bijzonder zijn bemoeiingen accent ten aanzien van het zozeer geslaagde instituut der *'Tagungen zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Höherer Schule'*.

In het artikel van Karl Hecht over *'Naturwissenschaften und Bildungsreform'* wordt teruggegrepen op de betekenis die in de negentiende eeuw door de voormannen van school en wetenschap aan de natuurwetenschappen werd toegekend voor alle hogere vorming. De betekenis wordt geschetst die de Meraner Leerplannen van 1905 voor de schoolhervorming hebben gehad, de Saarbrücker Rahmenvereinbarung zur Neuordnung der gymnasialen Oberstufe wordt besproken, de leerplanontwikkeling in binnen- en buitenland in de jaren na de tweede wereldoorlog nagegaan.

Ook vragen we nog belangstelling voor een artikel van Siegbert Schmidt, getiteld:

'Mathematikunterricht – nur Unterricht in und durch Mathematik? Ein Diskussionsbeitrag zur Bedeutung pädagogisch-psychologischer Reflexionen und Massnahmen in der Mathematikdidaktik und im Mathematikunterricht'.

Dat een artikel als dit opgenomen kon worden wijst er toch op, dat de redactie van de Semesterberichte zich sinds 1953 aan veranderende inzichten heeft weten aan te passen.

Joh. H. Wansink.

Ontvangen boeken

Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg 1975.

Noorduijns eenvoudige wiskundige tafels. 5e druk, 20 blz. f 2,25.

Noorduijns wiskundige en statistische tafels. 1ste druk, 42 blz., f 3,50.

Getal en ruimte.

deel 4V2, 152 blz., 3e druk, f 13, —, deel 5/6V1, 209 blz., 3e druk, f 18,50, deel 4/5H2, 254 blz., 3e druk, f 18, —, documentatie, gratis voor docentgebruikers.

Nederlandse vereniging van wiskundeleraren

Bijeenkomsten bespreking normen open werk wiskunde m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3 (l.t.o.-t/l.b.o.) examen 1976

Gesteund door het succes van verleden jaar toen de bijeenkomsten ter bespreking van de normen open werk wiskunde m.a.v.o.-4 and m.a.v.o.-3 (l.t.o.-t) 1975 door meer dan 800 leraren werden bijgewoond, organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren dit jaar deze bijeenkomsten in 35 plaatsen, waarvan 29 bijeenkomsten ter bespreking van de normen van het open werk wiskunde m.a.v.o.-4 en 6 bijeenkomsten ter bespreking van de normen van het open werk wiskunde m.a.v.o.-3 (l.t.o.-t/l.b.o.-c) en wel

voor m.a.v.o.-3 (l.t.o.-t/l.b.o.-c) op dinsdag 25 mei en
voor m.a.v.o.-4 op maandag 31 mei

De normen zijn bindend, zodat daarin geen wijzigingen kunnen worden aangebracht. Er kunnen wel afspraken gemaakt worden over een bepaalde verfijning van de normen. Tijdens deze bijeenkomsten zullen bovendien de opgaven worden besproken. De gemaakte op- en aanmerkingen worden opgenomen in een verslag, dat de Commissie Vaststelling Opgaven zal worden aangeboden.

De bijeenkomsten, die ook door niet-leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren kunnen worden bijgewoond, beginnen om 16.00 uur en worden voor de diverse inspecties gehouden in onderstaande plaatsen.

m.a.v.o.-4

No. inspecties	Naam inspecteurs	Plaats	Adres van de school	Gespreksleider
IA-1	dr. G. B. W. Huizinga	Zwolle	Carolus Clusius College, Veerallee 17;	S. R. Zwaan
IA-2	drs. W. E. de Jong	Leeuwarden	M.a.v.o. 'Nijlan', Princesseweg 4;	J. P. Aldershof
IA-3	A. Petersen	Heerenveen	Ernst van Harenschool voor openbaar m.a.v.o., Van Harenpad 36;	A. J. Langelaar
IA-4	mr. H. J. M. Megens	Groningen	Menno van Coehoorn-school, Goeman Borge-siuslaan 163;	L. Wesselink
LA-5	drs. R. van der Wal	Hoogezand	Dr. Aletta Jacobs-scholengemeenschap, Nieuweweg 67;	R. A. Pijlman
IA-6	D. F. Bruins	Emmen	Alleeschool voor mavo, Oranjelaan 4;	H. Hendriks
IB-1	drs. B. J. Westerhof	Nijmegen	Klokkenberg Mavo, Hugo de Grootstraat 43,	C. M. Bos
IB-6	H. Wijk			
IB-2	drs. O. Mechelink	Apeldoorn	Van Kinbergen Mavo, Sterrenlaan 15,	
IB-3	drs. W. J. Buijs	Lochem	Openbare Mavoschool 'Mr. A. C. W. Staring-school', Van Luttenvelt-plein 4A,	J. Bargeman
IB-4	N. J. Zimmerman	Hengelo	R.K. school voor m.a.v.o., 't Lansink' Lansinkweg 80 (hoek Huygenslaan),	C. Th. J. Hoogsteder
IB-5	dr. J. P. Naeff	Arnhem	Thorbeckescholengemeenschap, Thorbeckestraat 1,	L. Hoekstra
IIA-1	drs. J. Smit	Alkmaar	Gemeentelijke school voor m.a.v.o., Krelagestraat 5,	R. Pijning
IIA-2	drs. H. Reijerse			

IIA-3	D. J. Steenkamp		Mavo Oost-school,	G. F. Smit
IIA-6	Mevr. drs. M. J. E. Niesten	Amsterdam	Polderweg 7 (bij Muiderpoortstation	
IIA-7	drs. W. F. Brands		invalsweg Diemen),	
IIA-4	J. M. P. Richters	Naarden	Scholengemeenschap Godelinde Tenierslaan 2 (oude rijksweg bij voetbrug),	H. J. Moerman
IIA-5	drs. D. C. Monté	Haarlem	Maria Mavo Koningsstraat 26;	H.W.C.M. Brinkman
IIIB-1	Mevr. drs. H. van der Vliet	Gouda	Prof. J. H. Gunning-school voor Mavo,	C. Slobbe
IIIB-2	L. J. Stortenbeker		Tesselschadestraat 3;	
IIIB-3	A. G. Castermans	's-Gravenhage	Groen van Prinsterer-College,	W. van der Ley
IIIB-4	dr. J. Miedema		Albardastraat 25;	
IIIB-5	dr. J. J. Vaisier	Leerdam	Christelijke Prins Willem Alexander Mavo,	C. Verwer
IIIB-6	drs. Chr. Kok	Utrecht	Eksterlaan 48;	
IIIB-7	L. Pieper	Amersfoort	Gemeentelijk Atheneum Utrecht, Kruisstraat 1A;	J. Roos
IIIA-1	drs. J. Groen	Breda	Christelijke Andreas Mavo,	J. C. H. Vos
IIIA-5	E. L. C. Kalle		Ringweg Koppel 1A;	
IIIA-2	drs. J. de Lange	Rotterdam	Rooms Katholieke Scholengemeenschap voor h.a.v.o. en m.a.v.o. 'Markenhage',	J. E. J. Dörr
IIIA-3	ir. A. Beverloo		Markendaalseweg 27;	
IIIA-4	drs. H. H. Peltenburg	Bergen op Zoom	Christelijke school voor m.a.v.o. 'Het Lage Land',	L. Bozuwa
IIIA-6	C. H. J. Rijk	Middelburg	Kromhoutstraat 3-5;	
IIIB-1	dr. H. J. W. Verhaak	Heerlen	Heilige Geest Mavo,	L. Veraart
IIIB-2	J. W. Gerlag		Rooseveltlaan 225,	
IIIB-3	drs. J. J. A. Zonneveld	Roermond	Oranje Nassaschool voor Christelijke Mavo,	A. J. L. Osté
IIIB-4	drs. W. A. H. Jongmans	Eindhoven	Oranjelaan 11;	
IIIB-5	Mevr. W. G. van Lokven	's-Hertogenbosch	Rooms Katholieke Mavo 'St. Henricus'	A. H. T. Heutinck
IIIB-6	Mevr. dr. A. J. M. Alkemade	Tilburg	Schimmelpenninkstraat 2;	
			Rooms Katholieke Mavo 'Kapel- Landanus',	J. Lemmens
			Roersingel 28;	
			Eckartcollege, scholengemeenschap voor v.w.o., h.a.v.o. en m.a.v.o.,	F. J. H. Mahieu
			Argonatutenlaan 26;	
			St. Leonardus Mavo-school, Emmaplein 19;	B. F. Heetveld
			St. Jozef Mavo,	
			Oude Dijk 3;	A. G. J. Klomberg
<i>M.a.v.o.-3 (l.t.o.-t/l.b.o.-c)</i>		Amsterdam	Osddorperscholengemeenschap, Hoekenespad 1 t/m 3;	G. Doevendans
			Osddorp;	W. Hermans

Rotterdam	Christelijke Huygens-school, Bentheimerstraat 15, ingang Hofpleintheater 8e etage;	L. Bozuwa
Roermond	Lagere technische school 'Dr. Cuypers', Sint Otgerusstraat 1;	O. Bolech P. Knops
Zwolle	Christelijke Technische school, Blaloweg 1;	C. Th. J. Hoogsteder H. van der Spek
Breda	Katholieke Technische school 'De Blauwe Kei', Van Riebeecklaan 2;	W. Heinen A. Braat
Groningen	Christelijke Scholen- gemeenschap, Admiraal De Ruyterlaan 6;	S. Kooiman F. de Boer

Boekbespreking

A. Snauwaert, G. Verschuere, *Opbouw K*, Wesmael-Charlier, Namen, 1974, XI + 131 blz.
Ondertitel: *Combinatieleer en kansrekening*.

Bestemd voor de laatste klasse bij het Rijksonderwijs en voor de voorlaatste klasse bij het Vrij (= katholiek) Onderwijs.

Programma Rijksonderwijs: Combinatieleer. Binomium van Newton.

Kans van een gebeurtenis; eigenschappen. Voorwaardelijke kans; onafhankelijke gebeurtenissen.

Programma Vrij Onderwijs: Combinatieleer, binomium van Newton.

Kansrekening: enkelvoudige en samengestelde experimenten, uitkomstenverzameling, waarschijnlijkheid of kans, complementregel, somregel, produktregel.

Deze programma's gelden voor het Nederlandstalige deel van België; het Franstalige deel heeft twee eigen programma's.

De combinatieleer is op lucide manier behandeld. Alle formules zijn afgeleid aan de hand van eenvoudige getallenvoorbeelden. De auteur heeft zich gelukkig niet ingespannen door gebruik van variabelen (n , k en dergelijke) de afleidingen algemeen en ondoorzichtig te maken. De combinatieleer wordt gefundeerd met behulp van afbeeldingen, waardoor een fraaie behandeling ontstaat. Men gaat vrij ver: ook herhalingspermutaties en herhalingscombinaties komen ter sprake. Ook uit didactisch oogpunt vind ik de behandelingswijze bijzonder mooi.

Het tweede deel van het boek, dat over de kansrekening gaat, vormt een merkwaardig contrast met het eerste. De auteur heeft zich er in de allereerste plaats om bekommerd vooral strenge wiskunde te produceren. In twee hoofdstukken, die tesamen 21 bladzijden beslaan, zijn het begrip experiment en het begrip gebeurtenis gefundeerd en een gebeurtenissenalgebra opgebouwd. Eerst daarna komt komt het kansbegrip. Dit wordt op twee manieren intuïtief ingeleid (gunstige en mogelijke gevallen resp. frequentiedefinitie). Deze inleiding dient om zo gauw mogelijk te komen tot de axiomatische fundering van het kansbegrip volgens Kolmogorof. Vanuit deze axioma's wordt dan de kansrekening streng opgebouwd.

Afgeleid worden de complementregel, de produktregel (kans in een experimentenruimte die het produkt is van twee experimentenruimtes of, om het duidelijker te zeggen: de kans dat men een rode knikker trekt uit de ene vaas en een groene uit de andere), voorwaardelijke kans, onafhankelijke gebeurtenissen en zelfs de stelling van Bayes. Op al deze onderwerpen wordt theoretisch tamelijk diep ingegaan.

Statistiek is geen onderdeel van de Belgische programma's (althans niet van de Nederlandstalige). Men moet dus geen vervolg verwachten waarbij de kansrekening toegepast wordt op statistische onderwerpen.

P. G. J. Vredenduin

Friedrich, Vogel, *Probleme und Verfahren der numerischen Klassifikation*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975, DM 56.—, 410 p.

Beschouw het volgende probleem: Gegeven is een verzameling objekten. Ieder objekt wordt gekenmerkt door een aantal grootheden. Is het mogelijk klassen van objekten te definiëren zodat objekten binnen klassen veel overeenstemming vertonen en de klassen onderling zoveel mogelijk verschillen?

Dit probleem komt men tegen in toegepast wetenschappelijk werk in verschillende disciplines. Het wordt besproken onder namen als Klassifikation en engelse termen als cluster analysis of numerical taxonomy. Verwante problemen zijn identification en allocation. Alle zijn onderdelen van de multivariate analyse, een tak van de statistiek. Deze tak met zijn vele toepassingen was tot voor kort weinig geliefd bij de statistici. De laatste tijd wordt er ook door hen veel werk op dit gebied verricht.

Het boek van Vogel geeft een uitgebreide bespreking van de problemen en methoden van classificatie. Het is speciaal gericht op de toepassers van classificatie. Voor statistici – waartoe ik mijzelf ook wil rekenen – is het boek minder interessant. Misschien is voor hen de aankondiging van een ander boek over classificatie, dat bij de zelfde uitgever verschijnt, van meer belang.

Tenslotte moet worden opgemerkt dat het boek een uitgebreide bibliografie bevat (50 bladzijden) waarin ook moderne literatuurverwijzingen voorkomen.

dr. J. L. Mijnheer

Ir. R. Kammer, *Numerieke methoden voor technici*, Agon Elsevier, 1975, 184 blz., f 23,50.

Door de behandelde stof aan de hand van vele uitgewerkte voorbeelden te illustreren, is dit voor de praktijk bedoelde boek zeer geschikt voor zelfstudie.

Hoofdstuk 1 bespreekt het rekenen met onnauwkeurige getallen. Uit de voorbeelden blijkt dat alleen betrouwbare decimalen een zinvolle benadering geven.

Hoofdstuk 2 behandelt de methode van iteratie om de wortels van niet lineaire vergelijkingen te benaderen.

Hoofdstuk 3 behandelt de interpolatie m.b.v. polynomen. Men kiest een aantal abscissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ en een polinoom $p(x)$ zò dat $p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2) \dots p(x_n) = f(x_n)$.

Hier bewijst het polynoom van Lagrange goede diensten. Al zijn a priori geen bepaalde eisen aan de x_i gesteld, toch zou indien men b.v. $x_1, \dots, x_n$ zo zou kiezen, dat $f(x_1) = f(x_2) \dots = f(x_n)$ dan wordt het benaderingspolynoom een constante!

Met behulp van deze polynomen worden dan in de hoofdstukken 4 en 5 de numerieke differentiatie en integratie besproken en in hoofdstuk 7 de numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen. Hoofdstuk 6 behandelt de methode van de kleinste kwadraten en hoofdstuk 8 het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.

W. Burgers

A. Voigt und J. Wloka, *Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren*, B.I.-Wissenschaftsverlag (Mannheim Wien-Zürich), 1975, 260 bl.

Dit boekje is ontstaan uit door de eerste auteur gemaakte aantekeningen van een college dat door de tweede auteur gegeven is aan de Universiteit van Karlsruhe. In de eerste twee hoofdstukken (die samen iets meer dan de helft van het boek beslaan) worden een aantal onderwerpen uit de theorie van de ruimten van Hilbert behandeld, die nodig zijn voor een bespreking van differentiaaloperatoren. Van belang zijn hierbij de paragrafen over Fredholmoperatoren en over elliptische operatoren. In het derde hoofdstuk vindt men, eveneens nog als voorbereiding te beschouwen, de theorie van de ruimten van Sobolev (dat wil zeggen, ruimten van functies van meerdere variabelen van wie alle partiële afgeleiden van zekere orde bestaan en kwadratisch integreerbaar zijn). In deze ruimten van Sobolev kan men een inwendig product definiëren, ten opzichte waarvan de

ruimte de structuur van een Hilbertruimte krijgt. Het laatste hoofdstuk tenslotte is gewijd aan randwaardeproblemen voor gewone differentiaalvergelijkingen en aan elliptische differentiaaloperatoren. Hoewel, in theorie, de vereiste voorkennis niet groot is, vereist het met enig succes in zich opnemen van de inhoud van dit boekje toch wel vertrouwdheid met een aantal begrippen uit de lineaire algebra en de theorie van functies van meerdere variabelen.

A. C. Zaanen

W. Schwarz, *Einführung in Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1975.

Het is steeds zeldzamer dat niet-specialisten kennis kunnen nemen van recente ontwikkelingen op onderzoeksgebied. Dit boekje, dat de uitwerking vormt van een seminarium aan de Universiteit van Frankfurt, is een inleiding in de zeefmethoden, die door iedere wiskundige met veel doorzettingsvermogen gelezen kan worden. Zeefmethoden zijn er sinds Eratosthenes, maar vooral de laatste tijd wordt er veel gewerkt met de zg. grote zeef en de zeef van Selberg aan problemen uit de priemgetaltheorie, zoals het vermoeden van Goldbach dat elk even natuurlijk getal ≥ 4 te schrijven is als som van twee priemgetallen. Het boekje heeft vier hoofdstukken die min of meer onafhankelijk gelezen kunnen worden. Elk hoofdstuk behandelt een zeefmethode en bevat één of meer toepassingen. In zijn totaal geeft het een goede indruk van de problematiek die in dit deel der getaltheorie centraal staat en van de gemaakte vorderingen. Talrijke verwijzingen voor meer informatie worden gegeven.

R. Tijdeman

L. A. G. M. Muskens, J. Timmer e.a., *Vier-keuzevragen wiskunde*, uitgave III, CITO en RITP.

In deze verzameling voor brugklassen en tweede klassen van lbo, mavo, havo en vwo is wederom een groot aantal z.g. diagnostische toetsen bijeengebracht.

Er zijn 6 series:

serie M: aansluitend bij 'Moderne Wiskunde', AVO editie.

serie B: aansluitend bij 'Moderne Wiskunde', LBO editie.

serie Z: aansluitend bij 'Van A tot Z', AVO editie.

serie L: aansluitend bij 'Van A tot Z', LTO editie.

serie T: twee itemverzamelingen voor LBO-T, MAVO III, MAVO IV, afsluiting onderbouw HAVO/VWO.

serie D: twee experimentele verzamelingen.

Een aantal uitstekende informatiekaternen (over interne, differentiate, mastery-learning, diagnostisch toetsen, leerstof-analyse, model Schagen) sluit de band af.

De uitvoering is als van de andere banden weer zeer verzorgd.

Het wiskunde-onderwijs bezit in deze banden een rijke verzameling toetsen, waaruit iedere leraar met vrucht kan putten. Ze hebben hun weg naar de scholen reeds gevonden. Mogen ze hier een vaste plaats verwerven.

W. Kleijne

Ontvangen boeken

K. de Bruin e.a. *Getal en ruimte*, deel 5/6V2, Analyse en statistiek voor de vijfde en zesde klas VWO, 2de druk, 232 blz., f 18,50.

Supplement statistiek.

Te gebruiken naast 1ste en 2de druk van 5/6V1 en eerste druk 5/6 2, 205 blz., f 4,90.

Aanwijzingen en antwoorden bij de derde druk van getal en ruimte 5/6V1, 29 blz., f 2,50.

Aanwijzingen en antwoorden bij de derde druk van getal en ruimte 3MIV-1, 38 blz., f 2,50.

Tjeenk Willink/Noorduijn B.V. Culumborg 1975.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

347. Verdeel een vierkant in vijf stukken zo, dat de vijf delen aaneengelegd kunnen worden tot een regelmatige achthoek.

348. Op randen behangselpapier vindt men vaak patronen die zich steeds weer herhalen. Elk volgend patroon ontstaat uit het vorige door een isometrie. Hoeveel verschillende isometrieën leveren dergelijke patronen?

Oplossingen

345. In wiskundige vorm gegoten was de opgave aldus. Gegeven in het vlak een aantal convexe figuren. Elk drietal figuren heeft een gemeenschappelijk punt. Te bewijzen: er is een punt dat gemeenschappelijk punt is van alle gegeven figuren.

Bewijs. Met volledige inductie. Onderstel het aantal figuren is 4. A_1 is gemeenschappelijk punt van de figuren F_2, F_3, F_4 ; A_2 van F_1, F_3, F_4 ; enz. Er zijn twee mogelijkheden.

a. De punten A_1, A_2, A_3, A_4 zijn hoekpunten van een convexe vierhoek. Omdat de figuren convex zijn, behoort dan het snijpunt van de diagonalen tot F_1, F_2, F_3 en F_4 .

b. Een van de punten, bijv. A_4 , ligt binnen de driehoek waarvan de andere drie punten hoekpunten zijn. Dan behoort A_4 tot $F_1, \dots, F_4$.

Onderstel de stelling is bewezen voor n figuren. Gegeven zijn de figuren $F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}$.

Beschouw de n convexe figuren $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n \cap F_{n+1}$. Dit zijn n convexe figuren waarvan elk drietal een gemeenschappelijk punt heeft. Dit moet nog bewezen worden voor drietallen van de vorm $F_i, F_j, F_n \cap F_{n+1}$. Nu hebben de vier drietallen F_i, F_j, F_n ; F_i, F_j, F_{n+1} ; F_i, F_n, F_{n+1} ; F_j, F_n, F_{n+1} elk een gemeenschappelijk punt. Dus ook het viertal F_i, F_j, F_n, F_{n+1} .

En dus ook het drietal $F_i, F_j, F_n \cap F_{n+1}$.

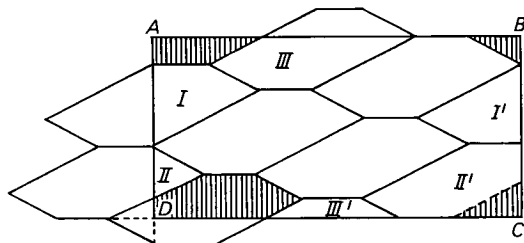
Dus hebben de n figuren $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n \cap F_{n+1}$ een gemeenschappelijk

punt en daarom ook de $n+1$ figuren $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$.

Het antwoord op de vraag is diensgevolge: men kan met 2 punaises volstaan.

346. Gevraagd op de torus een landkaart te ontwerpen waarvoor zeven kleuren nodig zijn om hem zo te kleuren, dat aangrenzende landen verschillende kleur krijgen.

Men kan een torus opensnijden volgens twee cirkels die loodrecht op elkaar staan en dan uitrollen op een plat vlak. Men verkrijgt dan de rechthoek $ABCD$ uit onderstaande figuur.



Men moet in deze figuur AD en BC identificeren en ook AB en DC . In de figuur is een landkaart aangebracht. Men moet eraan denken dat de vier gearceerde stukken samen één land vormen. Evenzo de stukken I en I' , de stukken II en II' en de stukken III en III' .

De kaart bestaat uit zeven landen. Elk land wordt door de zes overige omringd. Hieruit volgt dat voor de zeven landen zeven verschillende kleuren gebruikt moeten worden.

Ad 337. Prof. Dr. G. Pickert (Giessen) zond me de volgende bondige definitie van een herhalingscombinatie.

Eine k -Kombination aus n Elementen mit Wiederholung ist eine Abbildung f einer n -elementigen Menge G in $\mathbb{N}$ ($=$ Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich Null) mit $\sum_{x \in G} f(x) = k$.

Ruimte voor Getallen



Een nieuwe uitgave voor de rekenvaardigheid

- Een uitgave waarin de rekentechnieken systematisch worden behandeld.
- Grote aandacht wordt besteed aan het beredeneerd oplossen.
- Veel variatie is aangebracht in de oefenstof.

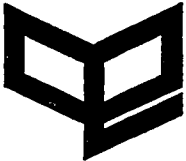
A. Roodhardt/P. C. Schnetz

Ruimte voor Getallen

9011 81652 8/96 blz. / f 6,90

Antwoordboekje bij Ruimte voor Getallen

9011 81653 6/32 blz. / f 3,50



vraag informatie

educaboek bv culemborg

telefoon 03450-3143

In opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en sterrenkunde
is uitgegeven de

STERRENGIDS 1976

Samengesteld door Lic. Jean Meeus

70 pag., ing. geïll. f 13,50. ISBN 90 01 81278 3

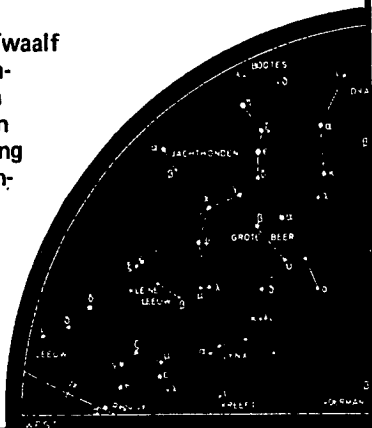
Inhoud:

Tijdaanwijzing; beknopt jaaroverzicht; Twaalf
sterrenkaarten-zes paren; Hemelverschijn-
selen in 1976; De wegen van planeten en
planetoiden; De zon in 1976; De maan in
1976; De planeten in 1976; Sterbedekking
1976; Minima van Algol; Mira; Verklaren-
de woordenlijst van enkele astron-
omische termen; Griekse letters; Enkele
hemelverschijnselen in 1977.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel.



H.D. Tjeenk Willink Groningen



INHOUD

- P. G. J. Vredenduin: Het huidige leerplan wiskunde 337
A. van Streun: 'Didactiek van de wiskunde' door drs. J. van Dormolen 339
Inspectie algemeen voortgezet onderwijs 344
Joh. H. Wansink: 'Leren denken', anno 1975 346
Hans Freudenthal: Variabelen 349
P. G. J. Vredenduin: Logische perikelen 350
Statistische dag 1976 354
H. J. K. Moet: Over differentiaalvergelijkingen 355
Ontvangen boeken 362
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 363
Joh. H. Wansink: Didaktische literatuur uit buitenlandse tijdschriften 368
Ontvangen boeken 369; 374
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 370
Boekbespreking 372
Recreatie 375