

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

51e jaargang

1975/1976

no 8

april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 28,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement f 16,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 250,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 135,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 75,—.

De voorgestelde nomenclatuur

A. J. TH. MAASSEN

0 Het is verleidelijk, er het zwijgen toe te doen, wanneer de oppositie tegen de voorstellen van de nomenclatuurcommissie blijkt te liggen in zulke vertrouwde handen als die van prof. dr. H. Freudenthal.

Van de andere kant: als allen die direkt betrokken zijn bij het voortgezet onderwijs, aan die verleiding toegeven, kan bij gebrek aan oppositie van die zijde de indruk ontstaan dat de leraren van dat onderwijs het met de nomenclatuurcommissie eens zijn.

De voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskunde Leraren heeft mij indertijd verzekerd, dat de discussie niet gesloten is, hoewel het rapport van de nomenclatuurcommissie 'eindrapport' heet.

Dus gord ik mij aan, overigens in het besef mij daarmee aan beweringen te wagen die prof. Freudenthal in scherpere uitspraken al eerder heeft gedaan.

Maar niet voordat ik melding heb gemaakt van enkele, voor mij vruchtbare, discussies met sommige leden van het Mathematisch Instituut van de Katholieke Universiteit i.h.b. met drs. W. H. M. Veldman (de verantwoording voor onhelderheden in hetgeen volgt, is evenwel geheel aan mij).

1 Eerst wat kruimels.

1.1 Onder 6.4. van het rapport citeert de commissie twee zinnen uit een experimenteel VWO-examen:

'Voor welke waarden van p heeft de functie g geen uiterste waarde?'

'Bereken voor $k = 2$ de uiterste waarde van $g(x)$ '.

In 6.6. beveelt de commissie gebruik van indices aan. Het verheugt mij dat de commissie voor die eerste zin liever had gelezen: 'Voor welke waarden van p heeft de funktie g_p geen uiterste waarde?' (Het spijt me een beetje dat de commissie zich met geen woord verzet tegen dat 'waarden van'; liever had ik gezien:

'Voor welke $p \in \mathbb{R}$: g_p heeft geen uiterste waarde?')

Uit wat de commissie in paragraaf 6.4. schrijft, denk ik te begrijpen dat zij liever spreekt van 'een extreem van $f(x)$ ' dan van 'een extreem van f '. Ik denk dat de commissie haar voorkeur wil verdedigen met de volgende zin (3e alinea van 6.4.):

‘Wij vinden namelijk dat het zoeken van een uiterste waarde (...) altijd betekent het zoeken van een maximaal element of minimaal element van een welbepaalde verzameling (die voorzien is van een orde)’.

Ik kan het mis hebben. Maar wel valt het op dat de commissie tamelijk consequent spreekt van ‘extreem van $f(x)$ ’. Zij spreekt daarentegen wel van ‘het bereik van f ’.

Het absolute maximum van een functie is, óók volgens de commissie, het maximale element van het bereik van die functie, d.w.z. het maximale beeld van *die functie*.

Het ontgaat mij volledig wat die ‘(x)’ moet in: ‘het maximum van $f(x)$ ’: zou dat ook vervangen mogen worden door: ‘(y)’? of door: ‘(§)’?

En wat misschien meer zegt: dat ontgaat óók aan mijn leerlingen voor wie ik, op vergoelijkende toon, moet duidelijk maken wat de auteurs daarvan ermee bedoelen.

Hetzelfde kan gezegd worden van relatieve (locale) extremen.

De commissie schrijft zelf (let op het onderwerp van de zin):

‘de functie $f: x \mapsto x^5 - 2x^3 + x$ heeft een relatief minimum $f(1)$ en een relatief maximum $f(-1)$ ’ (pag. 264, Euclides 48 (8)).

Niettemin zegt de commissie op pag. 265 (en nu repareer ik de zin zoals Vredenduin dat heeft aangegeven: ik voeg ‘in a ’ toe, de reparatie van de zojuist aangehaalde zin aan de commissie overlatend):

‘We noemen $f(a)$ een lokaal extreem van $f(x)$ in a , indien (...)’.

Ik vraag de commissie hoe ‘(x)’ hierin nu opeens opgedoken kan zijn; speelt hier de vage historische opvatting van ‘functie’ nog een rol: een uitdrukking met letter(s) ‘x’ erin, waarvoor je iets mag invullen?

1.2 N.a.v. 6.7 van het rapport.

Bovenaan op pag. 270 (‘Euclides’ 48) staat:

$$\text{‘sin } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\text{’} \quad (1)$$

en

$$\text{‘sin } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\text{’}. \quad (2)$$

De commissie zegt dat (2) correct is; maar dat het gebruik van juist deze kwantor voor vele leerlingen problemen oplevert.

Dat tweede kan ik niet begrijpen.

De commissie kan niet bedoelen dat ‘ $\exists k \in \mathbb{Z}$ ’ of ‘er is $k \in \mathbb{Z}$ ’ te moeilijk te schrijven zou zijn. De commissie gaat haar best doen, opdat ‘geen aandacht onttrokken wordt aan de wiskundig-inhoudelijke zaken waar het eigenlijk omgaat’. Rekent de commissie de existentiële kwantor (nee! niet het tekenje of de tekenjes daarvoor!) *niet* tot dergelijke zaken?

Zij komt dan tot een voorstel van nieuwe symboliek (onderaan op pag. 270):

$$\text{‘sin } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}_{2\pi}, \quad (3)$$

en

$$\text{'sin } x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in < \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} > 2\pi', \quad (4)$$

Daarmee is zij er in geslaagd om '∃ k ∈ ℤ' weg te werken uit (2) en uit:

$$\text{'sin } x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi'. \quad (5)$$

Ik vraag aan de commissie:

- Hoe wil zij aan leerlingen uitleggen wat hetgeen achter de dubbele pijl in (3) resp. (4) staat, betekent, zonder te zeggen wat hetgeen achter de dubbele pijl staat in (2) resp. (5)?
- Heeft zij er groot vertrouwen in dat leerlingen die dingen als (3) en (4) geregeld goed opschrijven en die niet in staat zijn de existentiële kwantor 'correct te hanteren', werkelijk begrijpen wat zij ermee bedoelen als zij die schrijven?

1.3 Op pag. 242 ('Euclides' 48) schrijft de commissie: 'Het is vanzelfsprekend (...) dat geen enkel element twee of meer keren tussen de accoladen voorkomt'. Daarmee ben ik het niet eens.

Is de volgende zin volgens de commissie onwaar of alleen maar belachelijk?

$$\text{'}\forall_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \forall_{b \in \mathbb{R}} \forall_{c \in \mathbb{R}} \left[b^2 - 4ac \geq 0 \rightarrow \right. \\ \left. \{x \in \mathbb{R} | ax^2 + bx + c = 0\} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \right],$$

In het geval: $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ staat er achter die pijl:

$$\text{'}\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{1, 1\}'$$

en nu wordt de ene oplossing van die vergelijking tweemaal tussen de accoladen vermeld (niet: '1 komt tweemaal tussen de accoladen voor', dat is onzin).

Het is toch nodig dat de kinderen leren:

$$\{2, 3, 5\} = \{3, 5, 3, 2, 5, 2\}: \quad (6)$$

Het wordt hoog tijd dat we onszelf bevrijden van dergelijke onzinnige opmerkingen over 'het aantal keren dat een element in een verzameling voorkomt', of: '... tussen accoladen voorkomt'; opmerkingen die je in schoolboeken en (blijkbaar ook) elders kunt lezen.

1.4 Het argument dat de commissie geeft voor haar voorkeur voor de tekenjes: $\exists, \forall, \vee, \wedge$, is niet alleen niet erg scherp uitgedrukt, het is ook niet overtuigend. Het is van het grootste belang dat leraren en leerlingen beseffen dat je de logische kwantoren op vele manieren kunt noteren, dat het evenwel gaat om

hun betekenis. Het is verstandig ze lange tijd in woorden uit te spreken en in woorden op te schrijven: het is tijd genoeg om er tekentjes voor af te spreken als de groep daar behoefte aan heeft gekregen.

Welke tekentjes je dan afspreekt, doet er niet veel toe: je zou er om kunnen dubbelen.

Dat er leerlingen zijn, die de waarde van de kwantoren door veelvuldig en vooral zorgvuldig gebruik hebben leren kennen en die behoefte hebben aan afkortingen voor 'voor elke x ' en 'er is x ', en die niet alle in zwang zijnde tekentjes zouden kunnen onthouden: zowel $\wedge_x$ en $\vee_x$ als $\forall_x$ en $\exists_x$, als (x) en Ex , dat kan de commissie mij niet wijs maken.

Wie bereid is te dubbelen om zich van een keuze gemakkelijk af te maken, is misschien óók bereid het hiernavolgende argument te laten gelden:

telkens als leerlingen (en leraren) de tekens $\wedge \dots$ en $\vee \dots$ schrijven, hebben zij de gelegenheid zich te realiseren dat zij in één regel samenvatten: oneindig veel (of: te veel om op te schrijven) uitspraken over de elementen van een concrete verzameling:

' $\wedge_{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}} [P(x)]$ 'betekent: $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5)$,

' $\vee_{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}} [P(x)]$ 'betekent: $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5)$;

dat geldt a fortiori voor degenen die een beetje moeite hebben met: 'moet het nou het ene teken of het andere zijn?'

Toegegeven: dit is een vederlicht argument; ik denk dat men het lichter zal schatten naarmate men zorgvuldiger is in het gebruik van kwantoren (in woorden).

Dat sommige leerlingen – laat ik veronderstellen, dat het waar is, wat de commissie suggereert – de betekenis van de tekentjes $\forall$ en $\exists$ beter kunnen onthouden dan die van de tekentjes $\wedge$ en $\vee$, lijkt me eerder een didactisch argument om gebruik van $\wedge$ en $\vee$ voor te stellen, gezien hun verband met de tekentjes voor de con- en disjunctie, dan een argument om gebruik van $\forall$ en $\exists$ te propagieren.

1.5 Bij pag. 273 ('Euclides' 48).

Dank aan de commissie voor het accent dat zij geeft aan: 'een basis van een lineaire vectorruimte is een *rijtje* vectoren'.

Ik mis node een sterk accent op:

'een vector wordt aangeduid met een *rijtje* kentallen, *t.o.v. de basis*: $(\dots, \dots, \dots)$ '.

1.6 Onder 7.5 wekt de commissie de indruk dat zij 'dat abstractieproces: afbeeldingen en matrices met elkaar identificeren' hoge waardering toekent, zeker voor leerlingen die amateur (liefhebber) zijn.

Als die indruk bedoeld is door de commissie, ben ik het met haar oneens.

Bijna elke lineaire afbeelding van een eindigdimensionale vectorruimte naar een eindigdimensionale vectorruimte heeft *vele* matrices:

als je in ten minste een van beide ruimten een andere basis kiest, vind je meestal een andere matrix voor dezelfde afbeelding.

Onder die amateurs zullen misschien leerlingen zijn die na hun eindexamen wiskunde gaan studeren. Ik voorspel hun serieuze moeilijkheden, als zij geleerd hebben lineaire afbeeldingen ‘met hun matrices te identificeren’.

Voor al die amateurs is het van belang dat zij begrijpen, wat betekent: ‘*deze* lineaire afbeelding van de lineaire ruimte V naar de lineaire ruimte W heeft *die* matrix t.o.v. *deze* basis in V en *deze* basis in W ’.

Verwarring van dingen met de dingen waarmee zij kunnen worden aangeduid, is een bron van veel onbegrip en vele moeilijkheden.

Het zal een grote zorg moeten zijn voor leraren die wiskunde II geven, hun leerlingen op dit punt te behoeden voor verwarring; ik denk dat speciaal op dit punt onze taak niet licht zal zijn.

2 Vervolgens waag ik het erop, mij te storten in de discussie in ‘Euclides’ over het functiebegrip, een discussie die voor een van de twee partijen en misschien ook wel voor beide, tamelijk teleurstellend verlopen is.

3 Laat ik beginnen met een verhaaltje:

Al een paar jaar wordt in het eerste practicum wiskunde van eerstejaarsstudenten aan de Nijmeegse Universiteit het volgende probleem aan de orde gesteld:

f is de afbeelding $x \mapsto x^2$ ($x \in \mathbb{N}$).

Construeer een afbeelding $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zó dat $h \circ f$ de afbeelding $x \mapsto x$ ($x \in \mathbb{N}$) is. (Degenen die assisteren bij de wiskundepractica hebben de uitdrukkelijke opdracht, de practicanten te helpen volgens wat ik nu maar kort en met dikke woorden ‘de socratische methode’ noem.)

In het college is afgesproken dat een afbeelding van de verzameling A naar de verzameling B aan elk element van A precies één element van B toewijst (ik prefereer de term ‘toewijzen’ boven de term ‘toevoegen’ omdat mij opgevallen is, dat die tweede term bij sommige mensen associaties oproept die in dit verband verkeerd zijn, bij de eerstgenoemde term heb je daar geen last van).

Voor wie het nooit heeft gedaan, is het – denk ik – onvoorstelbaar hoeveel moeite het kost, de eerste jaarsstudenten via een discussie te brengen tot een constructie van zo’n afbeelding h .

Daarbij blijken twee dingen:

- het geheel overwonnen, ouderwetse idee dat zo’n functie in één algebraïsche formule moet worden uitgedrukt, zit bij eerstejaarsstudenten ingebakken;
- velen van hen moeten grote weerstanden overwinnen om de consequenties te aanvaarden van hetgeen afgesproken is over wat we bedoelen met ‘een afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ ’.

4 Het gebeurt niet zelden dat opvattingen over didactiek van onderwerpen van de wiskunde ondersteund worden met historische argumenten.

Zulke argumenten spreken dikwijls sterk aan. Maar historische argumenten werken niet altijd. Ik denk dat dáárvan de ontwikkeling van de idee ‘functie’,

‘afbeelding’ een fraai voorbeeld is.

Met te zeggen:

‘Een afbeelding is een machientje; en wel een machientje dat werkt op heel bepaalde dingen; een machientje dat uit elk van die dingen één heel bepaald ding fabriceert’ of, zoals prof. Kuiper jaren geleden al heeft voorgesteld:

‘een automaat waar je heel bepaalde dingen in kunt stoppen, en dat, nadat je er één zo’n ding ingestopt hebt, één heel bepaald ding oplevert’ wordt de vaagheid die kleeft aan ‘een of andere uitdrukking met een (of meer) letter(s) waarvoor je iets mag invullen, zo dat er wat uitkomt’ weggenomen.

Die vaagheid wordt óók weggenomen met te zeggen dat een afbeelding een relatie is met de volgende eigenschap: . . (en nu mag U, wat mij betreft, invullen wat U wilt, al naargelang U de opvatting van de commissie huldigt of de gangbare).

De hemel wordt er helemaal mee opgeklaard.

Dat het lang geduurd heeft eer mensen afbeeldingen zó opvatten, is geen argument *tegen* introductie van afbeeldingen als machientjes.

De zaak is, dat wat met ‘afbeelding’ bedoeld wordt, nu pas helemaal helder is; en precies die helderheid levert het didactische argument om afbeeldingen zó, en niet op die vage historische manier, in het onderwijs te behandelen.

5 Als ik de teksten die het voorstel van de commissie begeleiden, goed begrijp, dan ligt aan dat voorstel enerzijds misschien dat vage historische idee, en anderzijds het volgende ten grondslag:

- Onder een ‘relatie van de verzameling A naar de verzameling B ’ verstaan we een deelverzameling van $A \times B$.
- Onder ‘het domein van de relatie R van A naar B ’ verstaan we:

$$\{a \in A | \exists_{b \in B} [(a, b) \in R]\}.$$

- Onder ‘het bereik van de relatie R van A naar B ’ verstaan we:

$$\{b \in B | \exists_{a \in A} [(a, b) \in R]\}.$$

- Als R een relatie is van A naar B , dan verstaan we onder ‘ R^{inv} ’ de relatie van B naar A waarvoor geldt:

$$\forall_{x \in B} \forall_{y \in A} [(x, y) \in R^{\text{inv}} \Leftrightarrow (y, x) \in R].$$

- Als R een relatie is van A naar B en S een relatie van C naar D , dan verstaan we onder ‘de samenstelling $S \circ R$ van R en S ’:

$$\{(a, d) \in A \times D | \exists_{x \in B \cap C} [(a, x) \in R \wedge (x, d) \in S]\}.$$

- Onder ‘de identieke relatie I_A van A naar A ’ verstaan we:

$$\{(x, y) \in A \times A | x = y\}.$$

Mocht U zin hebben in een eenvoudig voorbeeld: hier volgt er een: Laat A een verzameling zijn met vier elementen; ik noem die elementen: 'a', 'b', 'c', 'd'. Laat R de volgende relatie zijn van A naar A :

$$\{(a, b), (a, c), (b, c)\};$$

dan:

$$R^{\text{inv}} = \{(b, a), (c, a), (c, b)\},$$

en dan:

$$R^{\text{inv}} \circ R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \text{ en}$$

$$R \circ R^{\text{inv}} = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\};$$

terwijl:

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

- Onder 'een functie (afbeelding) van de verzameling A naar de verzameling B ' verstaat de commissie een relatie F van A naar B met de volgende eigenschap:
 $\forall r \in A \forall s \in B \forall t \in B [((r, s) \in F \wedge (r, t) \in F) \Rightarrow s = t].$

Ook zulke relaties hebben ieder een inverse; en ook twee van zulke relaties kunnen worden samengesteld.

De inverse van een functie hoeft geen functie te zijn; de compositie van elke twee functies is een functie.

(Zulke functies pleegt men 'partiële functies op A ' te noemen; de commissie laat het woordje 'partiële' weg.)

6 Bekijkken we het voorbeeld van de commissie in 'Euclides' 48(8), pag. 254:

f is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{16-x}$;

g is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Wat is $g \circ f$?

6.1 Eerste uitwerking:

$$f = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | b^2 = 16-a \wedge b \geq 0\};$$

$$g = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | s^2 = 4-r^2 \wedge s \geq 0\}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \exists z \in \mathbb{R} [(x, z) \in f \wedge (z, y) \in g]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \exists z \in \mathbb{R} [z^2 = 16-x \wedge z \geq 0 \wedge y^2 = 4-z^2 \wedge y \geq 0]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \exists z \in \mathbb{R} [z^2 = 16-x \wedge z^2 = 4-y^2 \wedge z \geq 0 \wedge y \geq 0]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y^2 = x-12 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 16\} \end{aligned}$$

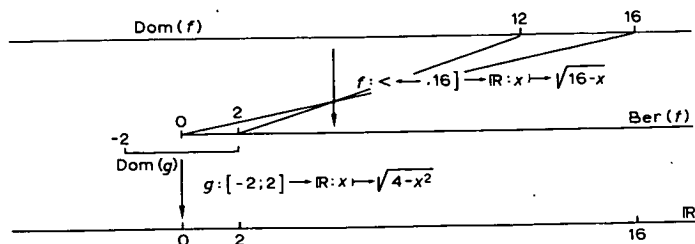
Dus:

$$g \circ f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \sqrt{x-12} \wedge 12 \leq x \leq 16\}$$

Het domein van $g \circ f$ is kennelijk $[12, 16]$.

Ik denk dat de commissie zo'n uitwerking niet wil propageren.

6.2 Tweede uitwerking:



kennelijk bestaat $g \circ f$ niet; wèl bestaat: $g \circ f'$, waarin f' de restrictie is van f tot $[12, 16]$;

$$g \circ f'(p) = g(\sqrt{16-p}) = \sqrt{4-(16-p)} = \sqrt{p-12},$$

en dàt voor alle $p \in [12, 16]$.

Dit resultaat is geheel in overeenstemming met dat van de eerste uitwerking. Geen wonder: beide uitwerkingen zijn goede wiskunde; bovendien: die twee uitwerkingen verschillen niet essentieel: zij verschillen alleen maar in de taal waarin zij geschreven zijn. Maar dit is óók niet, wat de commissie propageert.

6.3 Wat wil de commissie dan wèl?

Ik vrees, maar hoop dat ik er helemaal naast ben, dat de commissie bij veel lezers de indruk wekt, de volgende uitwerking te propageren als een goede (of: als een die goed genoeg is voor leerlingen(?)).

Derde uitwerking:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{16-x}) = \sqrt{4-(16-x)} = \sqrt{x-12};$$

dus: $g \circ f$ is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x-12}$.

Maar dat is wel 'knetterfout'. Want de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$:

$x \mapsto \sqrt{x-12}$ geeft aan 37 als beeld: 5, terwijl $g \circ f$ helemaal niet op 37 werkt. Zeker! De commissie weet óók dat dit fout is: zij schrijft; 'volgens onze opvatting is $g \circ f$ een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ met als koppelingsvoorschrift $x \mapsto \sqrt{x-12}$ en met als domein $[12, 16]$ '.

Dat domein komt in het rapport wel erg plotseling uit de lucht vallen. Nu was de commissie natuurlijk niet verplicht om de vraag van de argeloze lezer die ik ben: 'hoe komt U erbij dat $[12, 16]$ het domein is?' in haar rapport vóór te zijn; ik moet daar dan zelf achter zien te komen: de commissie kàn aan dat domein gekomen zijn via de eerste uitwerking (6.1), ook via de tweede uitwerking (6.2).

Als de commissie alleen langs (een van) deze twee wegen gevonden heeft wat het domein van $g \circ f$ is, dan is dit stukje van haar propaganda voor haar opvatting bedrieglijk: in het ene geval heeft zij een existentiële kwantor (die

zij elders zegt zo moeilijk te vinden) verdonkeremaand, in het andere geval preekt zij de ene opvatting en hanteert de andere.

Conclusie: de commissie heeft niet alleen langs deze wegen vastgesteld wat het domein van $g \circ f$ is.

Wellicht heeft zij dat ook als volgt gedaan; andere wegen zie ik niet.

$$g(f(x)) = \sqrt{4 - \sqrt{(16-x)^2}} = \sqrt{4 - (16-x)} = \sqrt{x-12}$$

↑
Pas op! $x \leq 16$

↑
Wij zien: $x \geq 12$.

Op grond van ons onverwoestbaar vertrouwen in de wiskunde, durven wij te beweren dat het domein van $g \circ f$ is: $[12, 16]$.

Hoewel dit optimisme over de wiskunde, ook ditmaal bevestigd wordt: somberdere naturen kunnen terecht protesteren en opmerken:

‘uit die overwegingen volgt alleen maar dat het domein van $g \circ f$ bevat is in $[12, 16]$: uit die uitkomst $\sqrt{x-12}$ kun je immers dat rechteruiteinde 16 niet aflezen; waarom zou 12 het linkereindpunt zijn? trouwens waarom is 16 het rechteindpunt? en: waarom zou dat domein eigenlijk een interval zijn?’

Een ding lijkt me duidelijk: alleen wie goed let op het domein en het bereik van elke van die functies, begrijpt wat het domein is van $g \circ f$. Maar wat is dan toch het didactische voordeel van te zeggen (in dit geval):

‘ $g \circ f$ is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R} \dots \rightarrow \dots$ met als domein ...’

i.p.v. te zeggen (in dit geval):

‘ $g \circ f$ is de functie $\dots \rightarrow \dots$ met als domein ...’?

Is in dit geval ‘van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ *niet* ‘een zinloze label’? En is een veelvuldig hanteren van die label *niet* een invite, die domeinen onder tafel te werken?

6.4 De commissie kan wat zojuist vragenderwijs gesuggereerd is, als een valse aantijging verwerpen:

‘wij willen die domeinen niet onder tafel werken; die label ‘van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ ’ is niet zinloos: door die te hechten aan een of ander koppelingsvoorschrift geven we het geordende paar verzamelingen aan waarvan het cartesisch product de bedoelde functie als deelverzameling bevat; met:

‘ $g \circ f$ is een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, met als koppelingsvoorschrift $x \mapsto \sqrt{x-12}$ en met als domein het interval $[12, 16]$ ’ willen wij zeggen: $g \circ f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x-12} \wedge 12 \leq x \leq 16\}$ ’.

Als de commissie dat zou zeggen, zouden wij haar moeten geloven, en wij zouden haar graag geloven!

Er blijven dan wel vragen!

- Zou uit deze (eventuele) verdediging van de commissie tegen die valse aantijging, niet volgen dat de commissie het samenstellen van afbeeldingen behandeld wil zien op een wijze waarin de eerste uitwerking (6.1) past en waarvan zij een demonstratie is?
- Als de commissie vindt dat dat geconcludeerd moet worden, wil zij dat dan alsnog heel duidelijk zeggen?
- Als zij meent dat die conclusie niet terecht is, zou de commissie dan willen zeggen, hoe zij vindt dat ‘samenstellen’ wél behandeld kan worden vanuit de visie op afbeeldingen die uit die (eventuele) verdediging tegen mijn lasterlijke suggesties blijkt?

Op gevaar af, de ene slag in de lucht na de andere te doen, wil ik ter plaatse de volgende vraag stellen die mij kwelt:

- naar ik begrijp, bedoelt de commissie als zij over ‘een afbeelding’ spreekt, *niet* een geordend drietal:

een verzameling, een verzameling, een toewijzing;

bedoelt de commissie met ‘een relatie’ soms ook iets anders dan een geordend drietal:

een verzameling, een verzameling, een deelverzameling?

Mag ik mijn vraag toespitsen op het voorbeeld dat de commissie in haar eindrapport (pag. 254) geeft?

$f: x \mapsto \sqrt{x+2}$ van $[-2, \rightarrow >$ naar $\mathbb{R}$;

$g: x \mapsto \sqrt{x+2}$ van $[-2, \rightarrow >$ naar $[0, \rightarrow >$.

Probleem: heeft f (resp. g) een inverse die een functie is?

Ter oplossing van dat probleem:

$$f = \{(x, y) \in [-2, \rightarrow > \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x+2}\};$$

$$g = \{(x, y) \in [-2, \rightarrow > \times [0, \rightarrow > \mid y = \sqrt{x+2}\};$$

dus:

$$\begin{aligned} f^{\text{inv}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [-2, \rightarrow > \mid x = \sqrt{y+2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [-2, \rightarrow > \mid y = x^2 - 2 \wedge x \geq 0\} \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} g^{\text{inv}} &= \{(x, y) \in [0, \rightarrow > \times [-2, \rightarrow > \mid x = \sqrt{y+2}\} \\ &= \{(x, y) \in [0, \rightarrow > \times [-2, \rightarrow > \mid y = x^2 - 2\}. \end{aligned}$$

En: zowel f^{inv} als g^{inv} zijn functies (in de zin van de commissie).

Mijn vraag aan de commissie:

- Is volgens de mening van de commissie f gelijk aan g ?
- Is volgens de mening van de commissie f^{inv} gelijk aan g^{inv} ?

6.5 Het voorbeeld dat Freudenthal geeft in ‘Euclides’ 47(5) pag. 183 is, in zijn eenvoud, zeker zo illustratief als het voorbeeld van de commissie (dat van 6.1); beide voorbeelden verduidelijken evenwel voor mij didactische bezwaren die kleven aan de opvatting van de commissie en niet de didactische voordelen daarvan.

Ik kan niet begrijpen dat de commissie, na gelezen te hebben wat Freudenthal schrijft op pag. 183 en 184 van ‘Euclides’ 47(5), dit voorbeeld in haar rapport opneemt en daarvan geen andere verantwoording geeft dan:

‘de didactische voordelen van onze opvatting zijn duidelijk’.

Als het niet om didactiek van wiskunde maar om wiskunde ging, zou prof. de Bruijn deze manier van doen ‘een bewijs volgens volledige intimidatie’ noemen.

Misschien – zeker ben ik er niet van – zou de commissie haar standpunt kunnen ‘verdedigen’ vanuit het ouderwetse en overwonnen idee dat een functie zoiets is als een ‘(algebraïsche) uitdrukking met letters erin waarvoor je wat mag invullen’. Het schijnt, o.a. gezien wat Vredenduin bovenaan op pag. 145 ‘Euclides’ 47(4) schrijft, dat de commissie zich niet geheel heeft kunnen bevrijden van dat idee (Dat de zetter iets anders gezet heeft dan Vredenduin wilde, is een niet-relevante bijkomstigheid: je kunt wel vermoeden wat er (ongeveer) gestaan zou hebben als de zetter zijn werk nauwkeurig had gedaan).

Waarom verantwoordt de commissie haar opvatting niet t.a.v. de opmerkingen die Freudenthal onder 10. maakt op pag. 189 van ‘Euclides’ 47(5)?

Wie aan zijn leerlingen leert (en nu kies ik het voorbeeld van Vredenduin, ‘Euclides’ 47(4) pag. 144):

f is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $x \mapsto 2x-1$,

g is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $x \mapsto \sqrt{x}$;

dus:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{(2x-1)}$$

en dus:

$$g \circ f \text{ is de functie van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{(2x-1)},$$

leert toch aan zijn leerlingen die foute 3e uitwerking: hoe kunnen die leerlingen van tevoren weten dat zich met die domeinen geen moeilijkheden voordoen?

De leraar die het zó doet, zal veel moeite hebben zijn leerlingen duidelijk te maken waarom er geen aanmerking op hun werk wordt gemaakt als zij dit voorbeeld van Vredenduin behandelen als hierboven aangegeven, en wél als zij het voorbeeld van de commissie volgens die 3e uitwerking behandelen.

7 Het kan natuurlijk zijn, dat de opvatting van de nomenclatuurcommissie veel verstandiger is dan uit haar verdediging daarvan blijkt.

Zonder ook maar een moment de pretentie gehad te hebben, een goede advocaat voor die opvatting te zijn, heb ik wel geprobeerd of ik, startende vanuit wat ik denk dat het vertrekpunt van de commissie geweest is, een goede verdediging van haar voorstel kon vinden.

Om misverstanden te vermijden:

een NC-afbeelding is een afbeelding in de zin van de Nomenclatuur Commissie;

een FR-afbeelding is een afbeelding in de zin die Freudenthal voorstaat.

Dus:

een NC-afbeelding van A naar B is een deelverzameling van $A \times B$ met de volgende eigenschap: als (a, b) en (a, c) tot die deelverzameling behoren, dan: $b = c$;

een FR-afbeelding van A naar B is een deelverzameling van $A \times B$ met de volgende twee eigenschappen:

als (a, b) en (a, c) tot die deelverzameling behoren, dan: $b = c$, en: voor elke $a \in A$ is er een $b \in B$ zó dat (a, b) tot die deelverzameling behoort.

Ik twijfel er niet serieus aan, dat je met NC-afbeeldingen op volledig correcte wijze alle functies kunt behandelen die in de school plegen voor te komen, ooit zijn opgetreden of in de toekomst zullen optreden, en dat je op basis van NC-afbeeldingen aanverwante zaken als inverse en samenstelling helemaal helder in de school kunt vertellen (en dat je daarmee veel meer kunt doen).

Die wijze zal er dan m.i. wel een zijn waarin consequent met NC-afbeeldingen wordt gewerkt (uiteraard!) en waarin die eerste uitwerking (van 6.1) helemaal past.

Uit het feit dat de commissie ook tekencombinaties als ' $f(1)$ ' en ' $x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$ ' gebruikt, concludeer ik dat de commissie daar geen voorstander van is. In ieder geval moeten dergelijke tekencombinaties worden ingevoerd.

Dat ga ik dan maar doen:

Als F een NC-afbeelding is van A naar B , dan wordt voor iedere d die element is van het domein van F , met ' $F(d)$ ' bedoeld: $de b \in B$ waarvoor $(d, b) \in F$ (over een betekenis van ' $F(c)$ ' waarin c een element is van A en niet van het domein van F , wordt niets afgesproken).

Het volgende komt soms, en op school zelfs dikwijls, voor:

Er is een verzameling; laten we die ' A ' noemen;

er is een verzameling; laten we die ' B ' noemen;

er is een NC-afbeelding van A naar B ; laten we die ' G ' noemen;

er is een bepaald schrijfsel – we zullen dat ' S ' noemen – opgebouwd uit bekende algebraïsche tekentjes (zoals: $+$, $-$, $.$, $:$, $\sqrt{}$, $\sin$, $\ln$, ...)

en een letter (zeg: de letter x), zodat voor alle d van het domein van G geldt:

Als je in S elke letter x door een naam van d vervangt, dan ontstaat een schrijfsel dat, bij de gebruikelijke duiding van de tekentjes daarin, $G(d)$ betekent.

De volgende afspraak ligt nu voor de hand:

In dat geval zullen we, door te schrijven ' G vanuit A naar B : $G(x) = S$ ' en ook door te schrijven ' G vanuit A naar B : $x \mapsto S$ ' pretenderen een beschrijving van G te geven.

Tot zover kon ik de commissie goed volgen. Maar ik meende, dat je, als je het hierbij laat, bloot staat aan de volgende aanval:

Maar stel nu eens dat er een element p van A is zodanig dat:

als je elke letter x in S vervangt door een of andere naam van p , er een schrijfsel ontstaat dat een element van B beduidt, terwijl p niet element is van het domein van G !

In dat geval heb je een heel bedriegelijke beschrijving van G gegeven.

Om die aanval te pareren, moet er een afspraak worden gemaakt; op gevaar af u te vervelen, formuleer ik die volledigheidshalve even:

Als het domein van G een echte deelverzameling is van de verzameling van alle elementen a van A met de eigenschap:

als je in S elke letter x door een naam van a vervangt, dan ontstaat een schrijfsel dat een element van B beduidt, dan zullen we, ter beschrijving van G , zo'n uitdrukking ' G van A naar B : $G(x) = S$ ' en zo'n uitdrukking ' G van A naar B : $x \mapsto S$ ' vergezeld doen gaan van een vermelding van het domein van G .

Laten we gemakshalve even een afspraak maken:

Als S een schrijfsel is als hierboven bedoeld, en a een object is, dan zullen we met ' a past

in S bedoelen:

er ontstaat een schrijfsel dat een bekend object beduidt als je in S elke letter x door een of andere naam van a vervangt.

De volgende aanval is niet onredelijk:

Het is toch niet ondenkbaar dat er een element a van A is dat wel in S past terwijl het schrijfsel dat je krijgt als je elke letter x in S door een naam van a vervangt, een bekend object aanduidt dat *geen* element van B is.

U behoort te vertellen wat U in dat geval doet.

Wat moet ik, als advocaat die zich ongevraagd aan de commissie opgedrongen heeft, antwoorden? 'In dat geval zullen we het domein van G óók vermelden'?

Of:

'In dat geval behoort je te weten dat zo'n a niet tot het domein van G behoort'?

Als ik van de commissie het tweede antwoord zou moeten geven, zou ik er de commissie wel op wijzen dat zij dan in het vervolg met 'die tweede verzameling' (die tot nu toe met ' B ' is aangeduid) heel zorgvuldig moet zijn.

In deze trant kan ik nog een tijdje doorgaan; ik zie er van af.

Het voorgaande is didactisch heel slecht:

de grammatica van die taal vergt te veel aandacht; wie het zó doet, laadt de verdenking op zich dat het hem begonnen is om een *taal*, méér dan om de dingen die met die taal beschreven worden; maar in het AVO en het VWO gaat het niet in de eerste plaats om de *taal* waarmee de dingen en hun relaties beschreven worden, het gaat daar in de eerste plaats om de *dingen en die relaties zelf*.

Leerlingen van het AVO en het VWO moeten er zich voortdurend van bewust zijn, dat zij door formules neer te schrijven, uitspraken doen over concrete objecten en dat zij met vele van die formules zelfs oneindig veel uitspraken, over die concrete objecten, samenvatten in één enkele regel.

(Degenen onder hen die zich later willen bezighouden met de constructie van formele talen, die gaan hun gang! Zij zullen het evenwel slechts kunnen als zij eerst geleerd hebben, concrete gevallen te beschrijven in talen die doelmatig zijn voor die beschrijving;

kortom: zij moeten eerst wiskunde geleerd hebben.)

8 De verdediging, die ik in 7. begonnen ben, van de opvatting van de commissie, kan niet zijn in de geest van de commissie: zij loopt uit op ideeën die didactisch monstrueus zijn.

Nogmaals: ik denk dat de grammatica van de taal die de commissie voorstelt tot een doelmatige grammatica kan worden uitgewerkt: ik denk dat je dan terecht komt bij een taal waarvan 6.1 een stukje proza is.

De taal die de commissie in haar eindrapport spreekt is er een die elementen ontleent aan de taal waarin NC-afbeeldingen als deelverzamelingen van cartesische producten worden beschreven, die ook elementen ontleent aan de taal waarin over FR-afbeeldingen als over 'toevoegingen' ('toewijzingen') of 'machientjes' ('automaten') wordt gesproken en die óók elementen ontleent aan een formele taal.

Freudenthal heeft op overtuigende wijze aangetoond dat de terminologie van de commissie onvoldoende uitgewerkt is, en dat die gebrekkige terminologie ondoelmatig is: de commissie heeft voetangels en valkuilen ingebouwd; in haar propaganda voor haar opvatting heeft zij bovendien verzuimd op die voetangels en valkuilen te wijzen. Daarentegen heeft de taal die Freudenthal propageert, in zijn aanvallen op het rapport van de commissie, een heel preciese grammatica, die bovendien doelmatig is.

Die taal kan bovendien in de didactisch zeer aantrekkelijke machientjestaal zonder moeite worden omgezet.

Tegen afbeeldingen aankijken alsof het machientjes zijn, lijkt mij voor kinderen

veel gemakkelijker dan afbeeldingen alleen te beschouwen als deelverzamelingen (van cartesische producten) met een bijzondere eigenschap. Een ketting van zulke machientjes fabriceren lijkt me gemakkelijker dan relaties samenstellen.

Een machientje omkeren lijkt me niet moeilijker dan een relatie inverteren.

Ik geef toe dat de beeldspraak van machientjes nog verfijnd moet worden:

- wat je in zo'n machientje stopt, ben je niet kwijt;
- het omgekeerde machientje M^{inv} van een machientje M werkt (natuurlijk!) alleen op dingen die door M kunnen worden gemaakt;
- achter een machientje M schakelen we slechts machientjes die werken op elk ding dat door M kan worden gemaakt (om er geen 'janboel' van te maken);
- als M een machientje is dat werkt op alle elementen van een verzameling A en M' een machientje dat alleen maar werkt op de elementen van een echte deelverzameling van A , dan is M' een ander machientje dan M ;
- een machientje is volledig bepaald door de paren die het vormt uit de dingen waarop het werkt en de dingen die het daaruit maakt: (ik citeer prof. J. J. de Iongh:) 'het machientje *log* is de logarimetabel, (die dan wel oneindig groot is); een machientje is volledig bepaald door zijn eigen lijst van geordende paren; de wijze *waarop* (de tussenstapjes *waarmee*) een machientje het object b maakt, als het object a of het rijtje objecten $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ in zijn ingang (of zijn rijtje van ingangen) wordt gezet, is irrelevant'.

Mijn ervaring is dat die preciseringen geen problemen in de school opleveren. Natuurlijk moeten we in het voortgezet onderwijs óók deelverzamelingen van cartesische producten (relaties) behandelen.

De opmerking tegenover leerlingen – achteraf – dat afbeeldingen bijzondere relaties zijn, is voor hen nauwelijks meer dan een triviale opmerking: een waarheid als een koe; dat weet ik uit ervaring.

Die machientjes- of automatentaal nodigt veel dringender dan de taal die de nomenclatuurcommissie in haar voorbeelden gebruikt, uit tot concreetheid en precisie:

concreetheid en precisie is typerend voor zgn. moderne wiskunde;

'moderne wiskunde' in de zin waarin de voorzitter van de CMLW die term gebruikt;

niet in de zin waarin ouders van sommige leerlingen, misleid door een (gedeeltelijk) slechte voorlichting die term – zo pijnlijk treffend – gebruiken: 'die verzamelingsleer die in brugklassen en zelfs in scholen voor basisonderwijs tegenwoordig behandeld wordt en die ik niet goed begrijp, want ik heb dat vroeger op school niet geleerd'.

Vraag ik werkelijk te veel, als ik de nomenclatuurcommissie uitnodig sommige van haar voorstellen zodanig te herzien, dat betere kansen worden geboden voor concreetheid en precisie in de wiskunde van het AVO en VWO, dan in haar eindrapport geschiedt?

Schoolboekenmarkt voor wiskunde

Drie enquêtes: 1890 - 1961 - 1973

Dr. JOH. H. WANSINK

Arnhem

1. Slechts enkele malen werden we in het verleden doeltreffend ingelicht over de frequentie waarmee titels van voor onze scholen geschreven leerboeken voor wiskunde in de boekenlijsten van onze scholen optraden.

Mij zijn slechts de volgende publicaties over deze materie bekend:

- a een enquête van W. F. Koppeschaar jr uit 1890 over de leerboeken voor wiskunde bij het h.b.s.-onderwijs in gebruik;
- b een enquête van het Paedagogisch Instituut van de Universiteit van Amsterdam uit 1961 over de voor ons v.h.m.o. geschreven leerboeken;
- c een enquête uit 1973 van het CITO over de situatie in ons huidige voortgezet onderwijs.

We beginnen onze mededelingen met deze laatste enquête die voor ons onderwijs van vandaag van directe betekenis is; de beide andere enquêtes hebben op dit moment voor ons alleen nog maar historische waarde.

2. De ingrijpende reorganisatie van ons onderwijs in de zestiger jaren leidde ertoe, dat vrijwel alle voor ons v.h.m.o. geschreven leerboeken voor wiskunde uit de roulatie moesten worden genomen. Wie verwacht mocht hebben, dat de nieuwe start waarvoor ons onderwijs kwam te staan, zou leiden tot een radicale inperking van de keuzemogelijkheden waaraan de v.h.m.o.-leraar gewend geraakt was, kwam bedrogen uit. Het duurde niet lang, of er was weer een bonte veelheid van leerboeken op de markt: in 1971 konden we bijna 30 titels opsommen, waarvan sommige betrekking hadden op uit 18, uit 23 of uit 29 delen bestaande series. Voor nadere informatie over enkele aspecten waardoor de schoolboekenmarkt na 1968 zich van de vroegere ging onderscheiden, verwijs ik naar deel II van mijn *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren* (1).

3. Aan de bovengenoemde CITO-mededeling ontleen we nu het volgende. Aan 2975 scholen voor lbo en aan 1502 voor mavo, voor havo en voor vwo werden in 1973 enquêteformulieren gezonden met de vraag, hoeveel brugklassen de school bevatte en welke leerboeken er in die brugklassen voor de wiskunde werden gebruikt. Van de 8920 brugklassen hadden er 5747 betrekking op mavo, havo en vwo, 3173 op lbo. Deze laatste groep zullen we hier verder buiten beschouwing laten (2).

Uit de antwoorden blijkt dat de 5747 brugklassen zich in een vijftal groepen laten onderbrengen.

- 3579 ervan gebruikten ‘*Moderne Wiskunde*’, uitgave van Wolters-Noordhoff;
- 753 gebruikten ‘*Getal en Ruimte*’, uitgegeven door Noorduin;
- 638 gebruikten ‘*Van A tot Z*’ van Muusses;
- 712 gebruikten de nog in staat van opbouw zijnde methode ‘*Sigma*’, dan wel een der methoden van het Sigma-team van auteurs, die aanvankelijk met eigen methoden op de markt waren gekomen, maar die in tweede instantie tot bundeling van krachten waren overgegaan;
- 65 brugklassen gebruikten andere methoden.

Opvolgend vertegenwoordigen deze vijf groepen 62%, 13%, 11%, 13% en 1% van het totaal van 5747 brugklassen.

Aan het CITO-onderzoek van 1973 is een onderzoek uit 1969 voorafgegaan. Hierdoor wordt het mogelijk na te gaan in hoeverre er verschuivingen zijn opgetreden in de voorkeur die er ten opzichte van bepaalde methoden aan de dag is getreden.

De CITO-mededeling bevat de volgende tabel, waarin de tussen haakjes geplaatste procenten betrekking hebben op de enquête uit 1969.

Vergelijkingslijst van de marktaandelen van de wiskundeleerboeken bij het mavo, havo en vwo in september 1969 en september 1973.				
soorten brugklassen gebruikte leerboeken	mavo	havo-vwo	ongesplitst	totaal
Moderne Wiskunde (Wolters-Noordhoff)	39%(42%)	14%(17%)	9%(9%)	62%(68%)
Van A tot Z (J. Muusses)	9%(9%)	1%(1%)	1%(1%)	11%(11%)
Andere leerboeken dan de hierboven genoemde	7%(3%)	13%(10%)	7%(7%)	27%(20%)
Totaal	55%(54%)	28%(28%)	17%(17%)	100%(100%)

De CITO-mededeling stelt ons in staat enige conclusies te trekken ten aanzien van wijziging in de voorkeur die de scholen in 1973 vergeleken bij 1969 aan de dag leggen. We zien dat de ‘*Moderne Wiskunde*’ zijn dominerende positie ten opzichte van de andere methoden heeft kunnen handhaven, zij het enigszins verzwakt. Dit overwicht geldt in het bijzonder voor de mavo-brugklassen. In de marktpositie van de methode ‘*Van A tot Z*’ is in de vier jaren geen wijziging gekomen. Ook hier valt op, dat het gebruik in de mavo-brugklassen groter is dan in de havo-vwo-classes en in de ongesplitste brugklassen.

De uitgaven 'Getal en Ruimte' en 'Sigma' waarvoor in de enquête 1969 nog geen afzonderlijke getallen werden opgegeven, nemen elk van de 27% die voor rekening van de rubriek 'Andere leerboeken' staat vermeld bijna de helft in beslag. Men krijgt de indruk dat voor deze methoden vooral in de havo-vwo-klassen debiet is weggelegd.

Het meest opvallende is echter, dat er door 4 methoden vrijwel volledig beslag wordt gelegd op de gehele schoolboekenmarkt voor wiskunde in de mavo-, havo- en vwo-afdelingen van ons voortgezet onderwijs. Dit betekent een belangrijke verandering in het marktbeeld als we deze situatie vergelijken bij die van ons wiskunde-onderwijs oude stijl.

4. Over deze periode van vóór de mammoetwet worden we ingelicht door een enquête over de in de cursus 1956-1957 bij het v.h.m.o. in gebruik geweest zijnde leerboeken, een enquête die werd gehouden door het *Paedagogisch-Didactische Instituut van de Universiteit van Amsterdam*. Van elk der in de schoolboekenlijsten voorkomend leerboek werd vastgesteld hoe dikwijls het in gebruik was bij de volgende schooltypen:

gymnasium – lyceum – hbs – mms en middelbare handelsschool.

Van deze vijf schoolsoorten namen opvolgend 68, 185, 146, 74 en 14 scholen aan de enquête deel.

Prof. Stellwag kondigde in het voorwoord aan, dat het onderzoek zou worden voortgezet met de frequentiebepaling van de leerboeken uit de cursus 1960-1961, waardoor op basis van twee enquetes een vergelijkend onderzoek mogelijk zou worden gemaakt. Voor zover ik weet is dit vergelijkend onderzoek nimmer tot stand gekomen (3).

De inventarisatie waarover ik beschik maakt overigens de indruk van een ontwerp dat zijn definitieve vorm nog niet heeft bereikt. Stellwag gewaagde in haar inleiding zelf al over fouten in de publicatie. 'Ondanks de nauwkeurige bewerking' schrijft zij, 'is het mogelijk dat hier en daar een drukfout is ingeslopen. Een voorbeeld hiervan is de naam van de uitgeverij Tjeenk Willink die op enkele plaatsen als Willink is vermeld'. Inderdaad treffen we deze laatste naam aan, 19 keer; de naam Tjeenk Willink zelf echter nergens. Er zijn ernstiger feilen. Bij enkele boeken (Schogt, Derksen en De Laive) is een verkeerde uitgever vermeld, op naam van Wansink staat een boekje over kegelsneden dat aan de 'auteur' zelf onbekend is. Er wordt niet gediscrimineerd tussen boeken in gebruik op heel kleine scholen en boeken op zeer grote scholen waar alle klassen in tal van parallelafdelingen zijn gesplitst. Het zou zinvoller geweest zijn gymnasiumklassen en h.b.s.-klassen te onderscheiden dan van de groepen gymnasium, lyceum en h.b.s. uit te gaan. De door het CITO gevolgde methode waarbij de brugklas als markteenheid werd gehanteerd heeft onmiskenbare voordelen bij het nagaan aan welke methode het meeste gewicht toekomt.

Ondanks de uitvoerige detaillering leent zich de enquête 1961 niet al te best voor een voortgezet vergelijkend onderzoek. Op grond van de verzamelde gegevens is het niet mogelijk de diverse auteurs volgens hun marktaandeel lineair te rangschikken.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

STATUTEN*

Artikel 1. De vereniging heet: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en is gevestigd te Amsterdam. Zij is een voortzetting van de Vereniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).

Artikel 2. De vereniging is opgericht op 13 december 1925 en is opnieuw aangegaan voor de duur van 29 jaren te rekenen vanaf 23 december 1968; derhalve eindigende op 22 december 1997.

Artikel 3. Het doel van de vereniging is aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen, die betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde aan scholen genoemd in de Wet op het Voortgezet Onderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs.

Artikel 4. De vereniging tracht haar doel te bereiken

- a* door het houden van vergaderingen van de leden;
- b* door het doen van publikaties;
- c* door het nemen van andere maatregelen, die tot het bereiken van het doel wenselijk worden geacht.

Artikel 5. Ten minste éénmaal per verenigingsjaar wordt een algemene ledenvergadering gehouden, waarin het bestuur verslag uitbrengt over het afgelopen verenigingsjaar. Andere algemene ledenvergaderingen worden gehouden in de gevallen aan te geven in het huishoudelijk reglement.

Artikel 6. Het verenigingsjaar loopt van 1 augustus tot en met 31 juli daaropvolgend.

Artikel 7. Lid kunnen worden leraren in de wiskunde aan scholen, als bedoeld in de Wet op het Voortgezet Onderwijs. Door het bestuur kunnen ook tot lid worden toegelaten andere personen op wier lidmaatschap in verband met het doel van de vereniging prijs wordt gesteld. Voorts kent de vereniging ereleden: zij, die daartoe door de algemene ledenvergadering zijn benoemd. Ereleden hebben stemrecht en betalen geen contributie.

Artikel 8. Hij, die lid der vereniging wenst te worden, dient een verzoek tot toelating in bij het bestuur.

Artikel 9. Het lidmaatschap eindigt:

- a* door schriftelijke opzegging aan het bestuur;
- b* door overlijden;
- c* door royement.

Opzegging is slechts mogelijk met ingang van een nieuw verenigingsjaar en dient plaats te vinden ten minste één maand daaraanvoorafgaande. Royement vindt plaats door een daartoe strekkend besluit van de algemene ledenvergadering met een meerderheid van ten minste tweederde der geldig uitgebrachte stemmen.

Artikel 10. De algemene ledenvergadering stelt een huishoudelijk reglement vast ter uitwerking van deze statuten. Het huishoudelijk reglement mag geen bepalingen bevatten, die strijdig zijn met deze statuten.

* Goedgekeurd bij Koninklijk besluit, dd. 20 juni 1969, nr. 15.

Artikel 11. De leden betalen jaarlijks een contributie, die wordt vastgesteld door de algemene ledenvergadering. De contributie is invorderbaar bij de aanvang van het verenigingsjaar.

Artikel 12. De leiding van de vereniging is opgedragen aan het bestuur. Het bestuur wordt door de algemene ledenvergadering verkozen uit de leden van de vereniging. Het bestaat uit ten minste vijf leden, waaronder een voorzitter, een secretaris en een penningmeester. De functies van secretaris en penningmeester kunnen echter door één persoon vervuld worden. De zittingsduur alsmede de wijze van benoeming en aftreding van de leden van het bestuur worden geregeld in het huishoudelijk reglement.

Artikel 13. De vereniging wordt in en buiten rechte vertegenwoordigd door ten minste twee bestuursleden, waaronder de voorzitter, de secretaris of de penningmeester.

Artikel 14. Een besluit tot wijziging der statuten of tot ontbinding der vereniging kan slechts worden genomen op voorstel van het bestuur of op voorstel van ten minste 25 leden. Het voorstel moet letterlijk in de oproeping tot de vergadering zijn vermeld. Het besluit kan slechts worden genomen door de algemene ledenvergadering met een meerderheid van ten minste tweederde der geldig uitgebrachte stemmen. Een besluit tot wijziging van de statuten treedt niet in werking, alvorens daarop de Koninklijke goedkeuring zal zijn verkregen.

Ingeval van een besluit tot ontbinding dient de algemene ledenvergadering tevens een beslissing te nemen over de bestemming van een mogelijk batig saldo, met inachtneming van het bepaalde in art. 1702 van het Burgerlijk Wetboek.

HUISHOUELIJK REGLEMENT

Bestuur

Artikel 1

De leden van het bestuur worden verkozen voor een periode van drie jaar. Elk jaar dienen echter één of meer bestuursleden af te treden volgens een daartoe door het bestuur vast te stellen rooster. Een aftredend bestuurslid is terstond herkiesbaar.

Artikel 2

Het bestuur bepaalt, met inachtneming van het bepaalde in artikel 12 der statuten, het aantal bestuursleden. Kandidaten voor de functie van bestuurslid worden voorgedragen door het bestuur. Bij schriftelijke kennisgeving aan het bestuur door ten minste vijf leden binnen veertien dagen na kandidaatstelling kunnen tegenkandidaten worden ingediend.

Artikel 3

Indien voor een vacature meer dan één kandidaat is gesteld, geschiedt de verkiezing met gesloten briefjes en bij volstreekte meerderheid. Wordt deze bij eerste stemming niet verkregen, dan vindt herstemming plaats tussen de twee personen die bij de eerste stemming de meeste stemmen hebben verkregen; bij staken van stemmen beslist het lot. Is voor een vacature slechts één kandidaat gesteld, dan wordt deze geacht te zijn verkozen op de vijftiende dag na zijn kandidaatstelling.

Sectiecommissies

Artikel 4

Er zijn een of meer sectiecommissies, welke het bestuur bijstaan bij zijn taak en wel voor zover dit het onderwijs in de wiskunde betreft aan een of meer door het bestuur per sectiecommissie te bepalen type school, als genoemd in de Wet op het Voortgezet Onderwijs. De door een sectiecommissie te nemen maatregelen behoeven de goedkeuring van het bestuur.

Artikel 5

De sectiecommissies worden ingesteld door het bestuur en bestaan uit leden van de vereniging. De leden van de sectiecommissie worden aangewezen door het bestuur. In elke sectiecommissie heeft ten minste één bestuurslid zitting.

Artikel 6

Een sectiecommissie bestaat uit ten minste vijf leden. De meerderheid van de leden van een sectiecommissie, waaronder de voorzitter, bestaat uit leraren, die les geven aan een der schooltypen van de betrokken sectiecommissie.

Artikel 7

In afwijking van het bepaalde in artikel 5 van dit reglement heeft iedere sectiecommissie het recht uit zijn midden een lid aan te wijzen om zitting te nemen in een andere sectiecommissie.

Algemene Ledenvergaderingen

Artikel 8

De algemene ledenvergaderingen worden bijeengeroepen door het bestuur. De oproeping dient schriftelijk te geschieden, onder vermelding van de te behandelen onderwerpen en met een termijn van ten minste vier weken.

Artikel 9

De jaarlijkse algemene ledenvergadering, genoemd in artikel 5 van de statuten, dient gehouden te worden in de periode van 1 september tot 1 maart.

Artikel 10

In de oproeping voor de jaarlijkse algemene ledenvergadering deelt het bestuur mede welke bestuursleden voor aftreden in aanmerking komen en welke kandidaten door het bestuur voor de functie van bestuurslid worden voorgedragen.

Artikel 11

Indien, ingevolge het bepaalde in artikel 2 van dit reglement, tegenkandidaten zijn ingediend, geeft het bestuur daarvan ten minste één week vóór de algemene ledenvergadering kennis aan de leden.

Artikel 12

Indien binnen veertien dagen na de oproeping tot de algemene ledenvergadering ten minste vijf leden schriftelijk aan het bestuur hebben te kennen gegeven een bepaalde aangelegenheid op de agenda te willen zien opgenomen, geeft het bestuur daarvan ten minste één week vóór de algemene ledenvergadering kennis aan de leden.

Artikel 13

De penningmeester is belast met het financiële beheer en legt daarover rekening en verantwoording af op de jaarlijkse algemene ledenvergadering. Goedkeuring daarvan strekt de penningmeester tot décharge van het gevoerde beheer.

Artikel 14

Door de algemene ledenvergadering wordt een kascommissie benoemd, bestaande uit twee leden, tot het nazien van de rekening en verantwoording van de penningmeester. De kascommissie brengt van haar bevindingen verslag uit aan de algemene ledenvergadering.

Artikel 15

Naast de jaarlijkse algemene ledenvergadering zullen algemene ledenvergaderingen worden gehouden in de volgende gevallen:

- a* wanneer het bestuur dit wenselijk acht;
- b* wanneer een sectiecommissie of ten minste 25 leden schriftelijk de wens daartoe aan het bestuur te kennen geven.

Indien in het onder *b* genoemde geval niet binnen veertien dagen een oproeping voor een algemene ledenvergadering is geschied, hebben de verzoekers het recht zelf de vergadering namens het bestuur uit te schrijven.

Artikel 16

De algemene ledenvergadering staat onder leiding van de voorzitter van het bestuur en bij diens ontstentenis onder leiding van een der andere leden van het bestuur. Het bestuur kan echter de leiding opdragen aan een ander lid der vereniging. De algemene vergadering is bevoegd in haar leiding te voorzien, indien dit niet op grond van het voorgaande is geschied.

Artikel 17

Op een algemene ledenvergadering kunnen geen besluiten worden genomen over aangelegenheden, die niet, conform het bepaalde in de artikelen 8 en 12 van dit reglement, op de agenda voorkomen.

Artikel 18

Stemming over zaken geschiedt mondeling. Bij staken van stemmen over zaken wordt het voorstel geacht te zijn verworpen. Stemming over personen geschiedt met gesloten briefjes. Bij staken van stemmen over personen is de procedure van art. 3 van dit reglement van toepassing.

Algemene bepaling

Artikel 19

In de gevallen waarin de statuten of het huishoudelijk reglement niet voorzien, beslist het bestuur.

Een en ander neemt niet weg, dat deze publicatie van 1961 door de overvloed van gegevens erin opgenomen toch wel geschikt is om ons enig beeld te geven van de situatie op de boekenmarkt anno 1957, en van de voorkeur die er in ons onderwijs voor diverse schoolboekschrijvers aan de dag is getreden. Het is nu eenmaal niet aan de enquêteurs te wijten, dat er destijds omstandigheden waren die het verkrijgen van een juiste kijk op de boekenmarkt schier onmogelijk maakten. In 1973 kon men kiezen voor een bepaalde didactische methode, in 1957 koos men nog vaak voor een leerboek van een auteur zonder dat dit deel uitmaakte van een volledige leergang voor wiskunde. Bij mijn komst op de h.b.s. in de twintiger jaren ontmoette ik een situatie waarbij voor een der onderdelen van de wiskunde in elk van de vier parallelafdelingen waarin de eerste klas was gesplitst een verschillend leerboek werd gebruikt.

Uit de Amsterdamse publicatie komt wel duidelijk naar voren dat we door de hoge frequentie die hun uitgaven op de markt bereikten sommige auteurs als koplopers kunnen aanwijzen. Voor algebra vonden we de hoogste percentages bij Alders (*Algebra voor M.O. en V.H.O.*), Stoelinga en Van Tol (*Leerboek der Algebra*) Coster, van Dop en van Haselen (*Algebraïsche vraagstukken voor de hogere klassen van gymnasium en h.b.s.*), opvolgend gebruikt op 96, op 80 en op 72 scholen.

Voor planimetrie:

Alders (*Vlakke meetkunde*), Bos en Lepoeter (*Wegwijzer in de meetkunde*), Van Dop en Van Haselen (*Vlakke meetkunde*), opvolgend gebruikt op 75, op 41 en op 31 scholen.

Voor stereometrie:

Van Dop en Van Haselen (*Stereometrie*), Alders (*Stereometrie voor V.H.M.O.*), Bos en Lepoeter (*Wegwijzer in de Stereometrie*), opvolgend gebruikt op 74, 62 en 41 scholen.

Voor analytische meetkunde:

Schrek (*Beginselen der analytische meetkunde*) in gebruik op 93 scholen.

Voor beschrijvende meetkunde:

Wansink, Holwerda en Van der Neut (*Beschrijvende Meetkunde*), Alders (*Beschrijvende Meetkunde*), opvolgend gebruikt op 60 en 52 scholen.

Er staan in de publicatie nog wel een aantal interessante gegevens. Zo blijken er op onze scholen liefst 25 schooltafels in gebruik te zijn, waarbij Noordhoff en Wolters het debiet vrijwel beheersen: *Noordhoff's tafel in 4 decimalen* wordt op 178 scholen gebruikt, *Wolters tafels voor schoolgebruik* op 84 scholen. Hoge cijfers halen voorts de verzamelingen eindexamenopgaven: Kruytbosch voor de h.b.s. met 155, Stoelinga en Van Tol voor het gymnasium met 116 scholen.

Uit het verslag komt naar voren, dat sommige auteurs favoriet waren voor het gymnasiaal onderwijs, andere voor de h.b.s.

Totaal loopt het aantal afzonderlijk vermelde uitgaven tegen de 300, waarvan er bijna 50 blijken te zijn die maar voor één school worden vermeld. Daarbij zijn er zelfs die door meer dan één auteur werden samengesteld.

5. In het *Nieuwe Schoolblad* van 26 december 1890 gaf W. F. Koppeschaar jr een statistiek van de bij het middelbaar onderwijs in gebruik zijnde schoolboeken voor wiskunde. Deze statistiek werd later overgenomen in '*De Vriend der Wiskunde*' (4). Deze statistiek had betrekking op de leerboeken in gebruik op de hogereburgerscholen met driejarige cursus en de eerste drie klassen van de hogereburgerscholen met vijfjarige cursus. Er werden gegevens verzameld van 60 scholen; dat betekent dat alle scholen aan de enquête hebben meegedaan (5).

Voor rekenen, algebra en meetkunde (planimetrie) werden opvolgend 12, 18 en 12 titels van leerboeken opgegeven. 18 scholen gebruikten voor het rekenonderwijs geen leerboek, 16 ook niet voor algebra. 29 van de opgesomde werken blijken aan minder dan 3 scholen te worden gebruikt.

Boven aan de lijsten staan de volgende titels:

Voor rekenen:

- | | |
|---|---------------------|
| J. Versluys, <i>Leerboek der rekenkunde</i> , 12 scholen. | } Samen 17 scholen. |
| J. Versluys, <i>Beknopt leerboek der rekenkunde</i> , 5 scholen. | |
| Dr. C. J. J. Ninck Blok, <i>Leerboek der wiskunde (rekenkunde)</i> , 7 scholen. | |
| W. H. Wisselink, <i>Kern van de theorie der rekenkunde</i> , 5 scholen. | |
| A. J. M. Brogtrop, <i>Gronden der rekenkunde</i> , 3 scholen. | |
| L. van Zanten Jzn, <i>Leidraad voor de theorie en praktijk van het rekenen</i> , 3 scholen. | |

Voor algebra:

- | | |
|---|---------------------|
| J. Versluys, <i>Leerboek der algebra</i> , 11 scholen. | } Samen 13 scholen. |
| J. Versluys, <i>Repetitieboek der algebra</i> , 2 scholen. | |
| P. J. Bos, <i>Leerboek der algebra</i> , 7 scholen. | |
| G. Smits, <i>Verzameling van algebraïsche vraagstukken met de hoofdpunten der theorie en aantekeningen</i> , 7 scholen. | |
| W. H. Wisselink, <i>Kern van de theorie der algebra</i> , 5 scholen. | |

En tenslotte voor meetkunde:

- | | |
|--|---------------------|
| J. Versluys, <i>Nieuw leerboek der vlakke meetkunde</i> , 23 scholen. | } Samen 24 scholen. |
| J. Versluys, <i>Beknopt leerboek der vlakke meetkunde</i> , 1 school. | |
| C. Knapper Kz, <i>Leerboek der meetkunde (planimetrie)</i> , 11 scholen. | |
| J. Versluys, <i>Leerboek der vlakke meetkunde</i> , 10 scholen. | |
| W. Kreling, <i>Beginselen der meetkunde</i> , 3 scholen. | |
| D. B. Wisselink, <i>Leerboek der vlakke meetkunde</i> , 3 scholen. | |

Doordat Koppeschaar's enquête evenals die van Stellwag 'eenmalig' is geweest, hebben ze geen aanleiding gegeven tot een onderzoek over zich voltrekkende verandering van voorkeur.

Het is jammer dat er in de twintiger jaren geen analoog onderzoek is verricht. Het was de tijd waarin de werken van Wijdenes op de voorgrond kwamen te staan. Om een kijk te krijgen op het didactisch klimaat van een bepaalde periode is het van betekenis, dat men speciale aandacht schenkt aan die auteurs die door hun leerboeken op het gegeven onderwijs grote invloed kunnen hebben uitgeoefend.

Aantekeningen

1. *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren*; deel II, p. 367 e.v., 1972² en deel III, p. 347 e.v., 1970; Wolters-Noordhoff, Groningen.
2. *CITO-informatie*, Uitslag van een enquête over de marktaandelen van leerboeken wiskunde; 4 blz.; 1974; CITO, Arnhem en RITP, Amsterdam.
3. *Inventarisatie en frequentie* van de bij het vmo in gebruik zijnde leerboeken; Wiskunde; Uitgave van het Paedagogisch-Didactische Instituut der Universiteit van Amsterdam; Hoogleraar-directeur prof. dr. H. W. F. Stellwag; 14 blz.; 1961.
4. *De Vriend der Wiskunde* 6, 1890-1891; p. 35-37; Blom en Olivierse, Culemborg, 1891.
5. A. Bartels, *Een eeuw middelbaar onderwijs, 1863-1963*; p. 31 en p. 35; J. B. Wolters, Groningen; 1963.

Aan Bartels' werk ontleen we voor het jaar 1890-1891 de volgende getallen.

Er waren destijds:

11 rijkshogereburgerscholen met vijfjarige cursus;

25 gemeentelijke met vijfjarige cursus;

10 rijkshogereburgerscholen met driejarige cursus;

13 gemeentelijke met driejarige cursus;

1 r.k. hogereburgerschool met vijfjarige cursus.

Afzonderlijk vermeldt Koppeschaar nog de scholen voor handel en nijverheid in Haarlem en Enschede.

Arnhem

Julianalaan 84

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voor de leden van de vereniging die niet in het bezit zijn van de notulen en het huishoudelijk reglement zijn deze als uitneembare middenpagina's in dit nummer opgenomen.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft, Ch. de Bourbonstraat 2

XCVI Met de lineaal alleen

1 Wij beschouwen een driehoek $A_1 A_2 A_3$ met het volgende viertal van zijn merkwaardige punten: het *zwaartepunt* G , het *hoogtepunt* H , het *middelpunt* M van de *omgeschreven cirkel* en het *punt* K van *Lemoine*. Een symmedian door een hoekpunt wordt, gelijk bekend, verkregen door de zwaartelijnen in de bissectrice te spiegelen; K is het snijpunt der symmedianen. De punten G en K , als ook H en M zijn t.o.v. de driehoek isogonaal verwant.

Wij stellen de volgende vraag: *als de driehoek en twee van de vier punten gegeven zijn kan men dan de andere twee construeren door alleen de lineaal te gebruiken?* Gezien het aantal tweetallen in een viertal zijn dat zes vragen. Vijf ervan zullen hier bevestigend worden beantwoord en de zesde ontkennend.

2 Ons probleem behoort tot de leer der meetkundige constructies, een meer dan twee duizend jaar oud gebied van wiskundige aandacht. Een aloude conventie staat in de elementaire geometrie het gebruik toe van passer en lineaal, beide op bepaalde en vrij beperkte wijze te hanteren. Al een paar eeuwen lang heeft men getracht het zelfde resultaat op een althans principieel meer efficiënte wijze te bereiken. In die historie zijn er twee hoogtepunten: de stelling van *Mascheroni* (1797) en die van *Steiner* (1833). De eerste zegt: alles wat met passer en lineaal kan, gaat ook wel met de passer alleen. Het beste geschrift over deze materie is in het Nederlands geschreven¹). Bij *Steiner* een ander uiterste: als men over één cirkel met zijn middelpunt mag beschikken gaat het verder wel met de lineaal alleen.

Met de lineaal *sec* komt men er niet; die is, als we de taal der algebra gebruiken, alleen in staat constructies van de eerste graad uit te voeren. Men kan er geen vierkantsvergelijkingen mee oplossen.

3 Wij gaan nu eerst nader in op enige mogelijkheden van de lineaal alleen. In de volledige vierzijde van fig. 1, met de hoekpunten A_i en B_i , ligt het punt

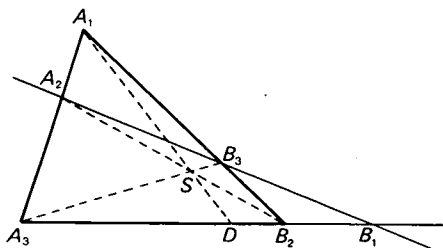


Fig. 1.

¹) S. C. van Veen, Passermeetkunde (Gorinchem, 1951).

P harmonisch met B_1 t.o.v. A_3 en B_2 . Daaruit volgt dat men (fig. 2) als drie collineaire punten A , B en C gegeven zijn, met de lineaal het punt D kan construeren dat harmonisch ligt met C t.o.v. A en B ; men neemt T willekeurig als ook de lijn $CS_1 S_2$; D is het snijpunt van AB met de lijn die T met het snijpunt van AS_2 en BS_1 verbindt.

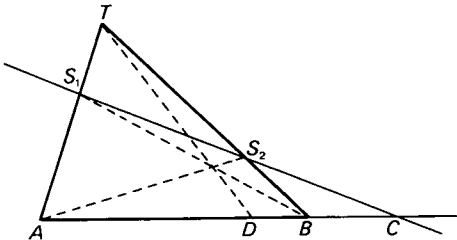


Fig. 2.

Dit was een *projectieve* constructie. *Affiene* opgaven ontstaan als de oneigenlijke rechte mee gaat doen. Stel dat twee evenwijdige lijnen l en m gegeven zijn (fig. 3) en op l de punten A en B . Dan volgt uit een specialisatie van fig. 2 het

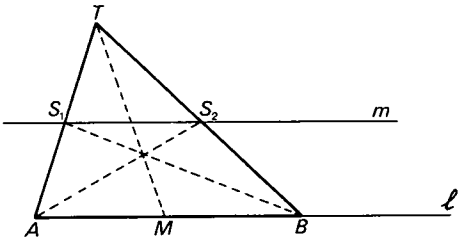


Fig. 3.

midden M van AB . Heeft men op l de punten A , B en M en is P een gegeven punt buiten l , dan neme men (fig. 4) T op AP , trekt TM , TB en BP en bepaalt

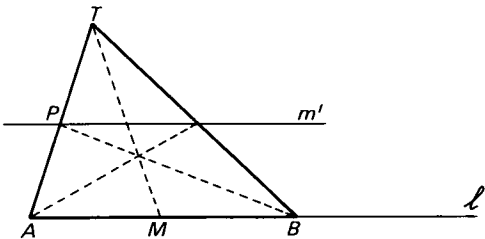


Fig. 4.

zo $m' // l$. Zijn dus twee evenwijdige lijnen gegeven dan is de lineaal bij machte door een gegeven punt de daarmee evenwijdige lijn te construeren. Twee evenwijdige lijnen bepalen één oneigenlijk punt. Om de oneigenlijke rechte vast te leggen heeft men twee paren evenwijdige lijnen nodig, l_1, m_1 en l_2, m_2 , die een parallelogram insluiten. Volgens de stelling van *Desargues* zijn

twee driehoeken $A_1 A_2 A_3$ en $B_1 B_2 B_3$ waarvoor $A_i A_j // B_i B_j$, perspectivisch: $A_i B_i$ gaan door één punt S (fig. 5). Van deze stelling geldt ook een omgekeerde:

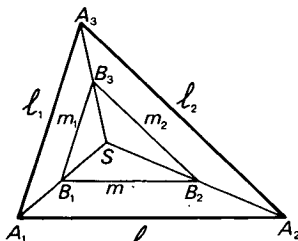


Fig. 5.

is $A_1 A_3 // B_1 B_3$ en $A_2 A_3 // B_2 B_3$ en gaan $A_i B_i$ door een punt S dan is $A_1 A_2 // B_1 B_2$. Zijn dus $l_1 // m_1$ en $l_2 // m_2$ gegeven en ook een lijn l dan volgt hieruit de mogelijkheid een lijn m voort te brengen die evenwijdig is met l . Combineert men dit met de vorige constructie dan komt er: *zijn twee paren evenwijdige lijnen gegeven dan kan de lineaal door een gegeven punt de rechte construeren evenwijdig met een gegeven rechte.*

Om metrische constructies uit te voeren zijn nog meer gegevens nodig. Stel dat er behalve twee paar evenwijdige ook nog twee paar loodrechte lijnen p_1, q_1 en p_2, q_2 gegeven zijn. Is (fig. 6) P een punt buiten l , trekt men $PA_1 // P_1$,

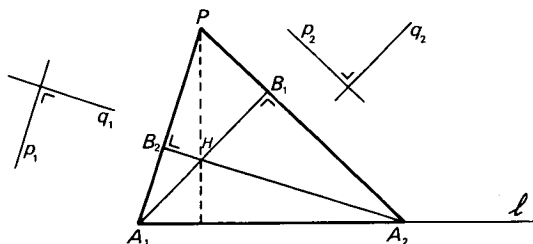


Fig. 6.

$PA_2 // p_2$, $A_1 B_1 // q_2$, $A_2 B_2 // q_1$, dan is PH de loodlijn op l . Zou P op l liggen dan trekt men er de lijn door evenwijdig met een willekeurige loodlijn. Het resultaat is: *beschikt men naast twee paar evenwijdige ook over twee paar loodrechte lijnen dan is de lineaal in staat door een gegeven punt de loodlijn op een gegeven lijn te trekken.*

De gegevens kunnen eventueel worden samengevat in de voorwaarde: er is in het vlak een rechthoek gegeven.

4 Zijn a_i de zijden van $A_1 A_2 A_3$ dan zijn de afstanden van G tot de zijden omgekeerd evenredig met a_i en dus die van het met G isogonale punt K evenredig met a_i . Zijn x_1, x_2, x_3 homogene afstandscoördinaten t.o.v. de driehoek dan is $K = (a_1, a_2, a_3)$. De omschreven cirkel Ω heeft de vergelijking $a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$; de raaklijn l_1 in $A_1(1, 0, 0)$ is $a_3 x_2 + a_2 x_3 = 0$. Zij snijdt $A_2 A_3$ in $S_1(0, -a_2, a_3)$ terwijl $A_1 K$ dat doet in $K_1(0, a_2, a_3)$. Dus S_1 en K_1 liggen harmonisch t.o.v. A_2 en A_3 . (fig. 7). Hieruit volgt dat men als

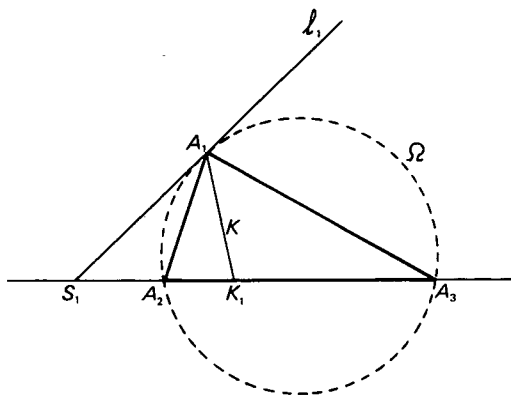


Fig. 7.

K gegeven is met de lineaal de raaklijn l_i in A_i aan Ω kan bepalen en omgekeerd: als twee raaklijnen gegeven zijn is K construeerbaar.

Na al deze voorbereidingen keren wij naar de in 1 gestelde vragen terug.

5 *Gegeven G en H . Is G_i het snijpunt van $A_i G$ met de overstaande zijde dan zijn $G_2 G_3$ en $A_2 A_3$, als ook $G_3 G_1$ en $A_3 A_1$ een paar evenwijdige lijnen, terwijl wij in $A_2 H_2$, $A_3 A_1$ en $A_3 H_3$, $A_1 A_2$ over twee paren loodrechte lijnen beschikken. De loodlijnen in G_i op de zijden leveren M , die in A_i op MA_i de raaklijnen l_i en daar uit volgt met 4. het punt K . De punten M en K zijn met de lineaal te construeren.*

6 *Gegeven G en M . Het zwaartepunt G zorgt weer voor twee paar evenwijdige lijnen en daar MG_i een middelloodlijn is zijn ook twee paar loodrechte lijnen aanwezig. De hoogtelijnen zijn dus te bepalen, alsmede de raaklijnen l_i en K , zoals in 5. De punten H en K zijn met de lineaal te construeren.*

7 *Gegeven K en M . Uit K volgen de raaklijnen l_i . Is L_1 het snijpunt van l_2 en l_3 dan deelt ML_1 de zijde $A_2 A_3$ loodrecht middendoor; het verkregen materiaal is meer dan voldoende. De punten G en H zijn met de lineaal te construeren.*

8 *Gegeven K en G . Het eerste punt leidt weer tot de raaklijnen l_i , terwijl $G_1 L_1$ loodrecht staat op $A_2 A_3$. De punten M en H zijn met de lineaal te construeren.*

9 *Gegeven K en H . Opnieuw levert K de lijnen l_i . Verder is $H_2 H_3$ anti-parallel met $A_2 A_3$ en dus evenwijdig met l_1 . Wij beschikken over twee paar evenwijdige lijnen en over twee paar loodrechte lijnen. De middens der zijden kunnen volgens fig. 3 worden bepaald. De punten G en M zijn met de lineaal construeerbaar.*

10 Na al deze successen komt de tegenslag, of als men wil de interessante uitzondering: de onmogelijkheid om in het algemeen G en K te bepalen als M en H gegeven zijn. Voor het bewijs van deze negatieve uitspraak hebben wij de algebra nodig.

De projectieve meetkunde leert dat men niet alleen door centrale projectie een dubbelverhouding op een andere rechte kan overbrengen, maar dat men ook op een rechte met dubbelverhoudingen (dat is dus: met geordende puntviertallen) kan rekenen; men kan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, alles met de lineaal. (Daarbij treden viertallen $P_1 P_2 P_3 P_1$, $P_1 P_2 P_3 P_2$ en $P_1 P_2 P_3 P_3$ resp. op als de „getallen” ∞ , 0 en 1). Kortom: men kan met de lineaal een dubbelverhouding construeren die rationaal afhangt van gegeven dubbelverhoudingen.

Nemen wij als voorbeeld de constructie uit 5; G en H zijn gegeven. Op $A_1 A_2$ liggen G_3 en H_3 ; de dubbelverhouding $d_3 = (A_1 A_2 G_3 H_3)$ is dus bekend. Drukken wij haar uit in de verhoudingen a_i^2/a_j^2 van de kwadraten van de zijden dan vindt men $d_3 = (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)/(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ en analoog voor $d_1 = (A_2 A_3 G_1 H_1)$. Daaruit volgen twee lineaire vergelijkingen voor de verhoudingen van a_i^2 , die dus met de lineaal kunnen worden bepaald. Daar $(A_1 A_2 G_3 M_3) = a_1^2(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)/a_2^2(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)$ en $(A_1 A_2 G_3 K_3) = a_1^2/a_2^2$, zijn ook M_3 en K_3 te construeren en tenslotte M en K . Daarmee is de uitvoerbaarheid van de constructie uit 5. bevestigd en hetzelfde kan met meer of minder gereken gebeuren met die uit 6., 7., 8. en 9.

Laat nu M en H gegeven zijn. Men vindt $d_3 = (A_1 A M H_3) = \cos^2 \alpha_3 / \cos^2 \alpha_1$ en $d_1 = (A_2 A_3 M_1 H_1) = \cos^2 \alpha_3 / \cos^2 \alpha_2$. Het zou mogelijk moeten zijn daaruit b.v. $x = a_3^2/a_1^2$ te bepalen; immers dat is $(A_3 A_1 G_2 K_2)$. Om aan te tonen dat zulks in het algemeen niet kan hebben wij slechts één tegen-voorbeeld nodig. Neem $a_1 = a_2$, dan is $d_3 = 1$ en men vindt verder $d_1 = (2-x)^2/x$, waaruit volgt dat x voldoet aan $x^2 - (d_1 + 4)x + 4 = 0$. Daar een vierkantsvergelijking in het algemeen niet met de lineaal is op te lossen is onze negatieve bewering bewezen.

De kritische lezer zal opmerken dat het er op gaat lijken dat bij gegeven M en H , twee antwoorden bestaan voor de verhoudingen van a_i^2 en dus ook twee punten G en twee punten K , al of niet met de lineaal construeerbaar. Dat is dan ook zo; de zaak is deze dat door het voorschrijven van M en H de Euclidische metriek in het vlak niet ondubbelzinnig is bepaald. Twee lijnen komen als oneigenlijke rechte in aanmerking, beide de drager van een paar mogelijke isotrope punten. De situatie komt in de onderhavige theorie wel meer voor: *Hilbert*, aan wie wij veel belangrijke resultaten in de leer der constructies danken, heeft er op gewezen dat men bij de constructies van *Steiner* het gegeven „een cirkel met zijn middelpunt” wel mag vervangen door de figuur van twee snijdende cirkels, maar niet door die van twee cirkels die geen punt gemeen hebben; inderdaad, in het eerste geval zijn de isotrope punten bepaald, in het andere komen twee gelijkwaardige stellen toegevoegd imaginaire punten in aanmerking.

Nemen wij in ons voorbeeld $d_1 = \frac{1}{3}$ dan is de vierkantsvergelijking voor x reducibel; de wortels zijn $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Voor de zijden geldt of $a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 = 1 : 1 : 3$, of $a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 = 3 : 3 : 4$; in het eerste geval is de driehoek stomphoekig met een tophoek van 120° , in het andere scherphoekig. Daaruit volgen twee mogelijke punten G en twee punten K . Wie dan zegt dat hij wel kan „zien” of zijn M en H binnen of buiten de driehoek liggen brengt een element van aanschouwing in het geding dat in de abstracte leer der constructies niet is toegestaan, of wel afzonderlijk moet worden gepostuleerd.

Boekbespreking

Papy, *Minimath 1*, met medewerking van Frédérique Papy en Pierre Debbaut, Marcel Didier, Bruxelles-Montréal-Paris, 1970, V + 249 blz.

In 1963 verscheen: Papy, *Mathématique Moderne 1*. Dit boek is besproken in *Euclides* 39, blz. 237–247. Het is in België gebruikt als tekst voor experimenten bij het middelbaar onderwijs. Het hoofddoel ervan was echter toch wel de verspreiding van de gedachten die aan de moderne wiskunde ten grondslag liggen, onder de leraren in België en daarbuiten. Thans is de situatie in zoverre veranderd, dat dit laatste niet meer urgent is, maar dat de behoefte aan een schoolboek dat direct voor de leerlingen bestemd is, zich meer doet gevoelen. Vandaar dat *Minimath 1* geschreven is. Het is een verkorte uitgave van *Mathématique Moderne 1*. Men vindt er alle onderwerpen in terug die in *MM1* behandeld zijn, iets anders gegroepeerd. De meetkundige onderwerpen zijn achter elkaar aan het einde van het boek geplaatst.

Essentiële verschillen tussen *MM1* en *Minimath 1* heb ik niet gevonden. De behandeling is even streng. De meetkunde is zuiver axiomatisch opgebouwd. Alleen de aanschouwelijke fundering van de axioma's is thans weggelaten.

Verder zijn enkele zaken achterwege gelaten, die van meer belang voor leraren dan voor beginnende leerlingen zijn, zoals het theorema van Bernstein betreffende gelijkmachtingheid van verzamelingen. Voor een uitvoerige bespreking van de inhoud leze men het bovengenoemde artikel betreffende *MM1*.

P. G. J. Vredenduin

Papy, *Minimath 2*, met medewerking van Frédérique Papy en Gilberte Capiaux, Marcel Didier S.A., Bruxelles-Montréal-Paris, 1974, 206 blz.

Dit deel is een bewerking voor schooldoeleinden van Papy, *Mathématique Moderne 2*, welk boek verscheen in 1965 en besproken is in *Euclides* 42, blz. 90–94.

Ook nu is de hoofdgedachte van de oorspronkelijke uitgave bewaard gebleven. Achtereenvolgens komen aan de orde:

het gepuncteerde vlak Π_0 ; de punten zijn vectoren en de operaties van de vectorrekening worden erop uitgevoerd;

geordende rechte en gegradueerde rechte (d.i. een rechte waaraan de gehele getallen toegevoegd zijn);

binaire ondergraduaties, eindige binaire getallen, reële getallen als oneindige binaire getallen; scalaire vermenigvuldiging, homothetie;

optellen van reële getallen gebaseerd op de vectoroptelling;

vermenigvuldiging van reële getallen gebaseerd op de homothetie;

afleiding van de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen;

rationale getallen;

symmetrieën, isometrie, afstand, hoek.

Het grootste deel van het boek wordt, evenals in *MM2*, ingenomen door een wetenschappelijk verantwoorde theorie van het reële getal.

Bezien we beide delen nog eens, dan zien we dat een strenge opbouw van de meetkunde tot stand gebracht is, uitgaande van 13 axioma's. Verder zijn de reële getallen streng ingevoerd. Bij het invoeren van de natuurlijke en de gehele getallen is iets meer water in de wijn gedaan; enkele intuïtieve elementen zijn in de behandeling als grondslag geaccepteerd.

Hoewel ik enorme bewondering heb voor de geestkracht die aan de beide boeken ten grondslag ligt, vraag ik me toch af of een dergelijke behandeling van de wiskunde voor kinderen van de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs verantwoord is. Wiskunde leert men slechts langzaam begrijpen. Een meerrondensysteem om tot een goed inzicht te komen, lijkt me onvermijdelijk. Ik kan me wel voorstellen, dat leerlingen deze stof leren, maar niet dat ze de draagwijdte ervan doorgronden. Moet men zich niet elk gebied eerst ter dege intuïtief eigen maken, voordat men tot een theoretische fundering en het doorzien van een dergelijke fundering kan overgaan?

P. G. J. Vredenduin

R. Bens, H. Roothaer, F. Smissaert, *Opbouw 6b*, Wesmael-Charlier N.V., Namen, 1974, XIV + 198 blz.

Bestemd voor de eerste klasse van de afdelingen latijn-wiskunde en wetenschappelijke A (in noord-nederlandse taal: voor klas 6B).

In het boek wordt de analyse grondig voortgezet; de differentiaalrekening is in een vorig deel reeds aan de orde geweest. Nu worden achtereenvolgens behandeld: logaritmische en exponentiële functie, rijen en reeksen, reeksontwikkeling van Taylor en Mac Laurin. Daarna differentialen, de onbepaalde integraal en een uitvoerige techniek om deze op te sporen, bepaalde integralen, met ten slotte toepassing daarvan op het berekenen van oppervlakten, inhouden, lengte van een kromme en oppervlakte van een omwentelingsoppervlak.

Technisch voldoet de behandelingswijze aan hoge eisen. Ons niveau van het wetenschappelijk onderwijs wordt veelal bereikt. De begripsvorming is als regel correct. Tot mijn vreugde vond ik een juiste definitie van een onbepaalde integraal. De definitie van een reeks als een uitdrukking van een bepaalde gedaante $(a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots)$ leek me minder geslaagd.

Ik heb één bezwaar tegen het boek. De notatie is op verschillende plaatsen niet correct; met name wordt er niet zorgvuldig onderscheid gemaakt tussen de functie f en de functiewaarde $f(x)$. Dit lijkt van secundair belang. Het heeft echter als gevolg, dat soms een mechanisch werken met symbolen bevorderd wordt waarachter geen goed begrip meer aanwezig is. En dat is jammer. Het zou met enkele ingrepen hersteld kunnen worden.

Men ziet uit dit boek weer duidelijk hoeveel meer omvattend het Belgische programma voor het voortgezet onderwijs is dan het onze.

P. G. J. Vredenduin

J. J. A. Moors en J. Muilwijk. *Steekproeven, een inleiding tot de praktijk*. Agon Elsevier, Amsterdam/Brussel, 1975, XI + 226 p. Prijs f 38,50.

Dagelijks komen we in aanraking met de resultaten van een of ander steekproefonderzoek. Problemen bij zo'n steekproefonderzoek zijn o.a.

1. hoe (en hoe groot) kiest men de steekproef
2. hoe formuleer ik de vragen
3. hoe verwerk ik de resultaten
4. hoe moeten de resultaten geïnterpreteerd worden.

Dit boek is bedoeld om de theorie van de steekproefmethoden te behandelen op een wiskundig laag niveau. Dit wiskundeniveau reikt niet hoger dan de algebra die op mavo en havo behandeld wordt. Wel wordt van de lezer verwacht dat hij enige routine in het lezen van formules en kennis van elementaire statistiek (toetsingstheorie) bezit.

Het boek is goed leesbaar en bevat vele voorbeelden. Hoofdstuk 13 geeft vijf praktijkvoorbeelden. Tot slot een drietal kritische opmerkingen:

- a. Door geen onderscheid te maken tussen populatie-elementen en elementen uit de steekproef kan de lezer makkelijk verward raken.
- b. Voor het invoeren van de normale verdeling kan men niet volstaan met de kansdefinitie van Laplace.
- c. De opmerking 'Een speciaal geval van de binomiale verdeling is nog de Poisson verdeling...' p. 31 kan niet serieus bedoeld zijn.

J. L. Mijnheer

'In dit rapport wordt verslag gedaan van een onderzoek naar de mogelijkheid om diagnostische informatie te ontlocken aan een gewoon schoolproefwerk'. Als onderwerp voor het proefwerk is gekozen 'machtsverheffen' uit de wiskunde voor de brugklas. Allereerst wordt gepoogd psychologische processen d.m.v. operatoren te beschrijven waarna hierop een meetmodel gebouwd kan worden. Uitvoerig en duidelijk wordt e.e.a. beschreven waarna het statistisch onderzoek wordt behandeld Hypothesetoetsing, samenstelling van studietoets en constructie van de items komen daarna aan de orde.

Uit de bespreking wordt duidelijk dat de auteurs allesbehalve tevreden zijn over hun resultaten. De opzet en uitvoering van hun onderzoek mag goed genoemd worden. Echter, zonder computer is dit onderzoek niet uit te voeren. Bovendien blijkt dat aan diverse items niet de gewenste psychologische opvatting gegeven mag worden. Al met al een aanzet tot verdere studie en onderzoek. Het zou mooi zijn als de leraar een onderzoeksapparaat gegeven zou kunnen worden dat a) hanteerbaar is (zonder computer), b) redelijk betrouwbare diagnostische informatie verschaft. De auteurs zelf geven richtingen aan waarin verder onderzoek kan gaan.

W. Kleijne.

J. de Koning en J. Smit, *Wiskunde voor het economisch onderwijs*, Stam-Robijns, Culemborg 1975, dl. I, 126 blz., f 15,75.

Om de leerlingen die economisch onderwijs willen volgen voor te bereiden op het gebruik van wiskunde hebben beide auteurs hiervoor een aangepast leerboek geschreven. Het geheel zal uit twee delen bestaan. Prof. Dr. M. de Haas spreekt in een voorwoord zijn vreude over het verschijnen uit. Na een inleiding over de verzamelingsleer volgen de hoofdstukken: algebraïsche bewerkingen, eerste graads vergelijkingen en ongelijkheden, relaties, functies en afbeeldingen. Grafieken van eerstegraads functies en dan het belangrijkste hoofdstuk: *Practische toepassingen*, dat geheel op eenvoudige economische problemen is ingesteld, waarbij vraag- en aanbodfunctie, consumptie-, evenwichts- en spaarfuncties, etc. aan bod komen, waarbij met grafieken van lineaire functies volstaan kan worden. Het geheel maakt een verzorgde indruk. Enkele kleine opmerkingen: In hoofdstuk I ontbreekt de definitie van gelijke verzamelingen. Hiermee zou men de nulverzameling hebben kunnen uitvoeren.

Het oplossen van een vergelijking (resp. ongelijkheid) wordt niet correct gegeven. Het 'zoeken' van de waarden van de variabelen die de open bewering moeten waar maken is daarvoor een te goedkope beloning. Waarom niet het vaststellen van de oplossingsverzameling? Dan kan het begrip 'vaste vergelijking' meteen verdwijnen.

W. Burgers.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

J. H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*, Cambridge University Press, London, 1970, XII + 180 blz., £2.90 (eerste druk: 1966).

Het boek bestaat uit vijftien losstaande hoofdstukken. De titels van de hoofdstukken zijn: regelmatige lichamen, de rij van Fibonacci, nesten polygonen, de distributie van priemgetallen, inversie, regelvlakken, random walks, het vierkleurenprobleem, verdeling van veelhoeken en veelvlakken, algebraïsche krommen, groepen isometrieën in het vlak, reële getallen, de stelling van Helly, het getal π , krommen met constante breedte.

In elk hoofdstuk wordt een aantal aardige resultaten afgeleid. De bewijzen zijn eenvoudig gehouden. De auteur heeft zich veel moeite gegeven om langs elegante weg tot verrassende resultaten te komen. Vooral de meetkundige hoofdstukken vond ik zeer boeiend.

Verbluffend vond ik het volgende. Men wil een naald met lengte a in het vlak zo bewegen dat de naald zijn oorspronkelijke plaats weer terugkrijgt, maar begin- en eindpunt verwisseld zijn. Dat is niet zo moeilijk. Roteer om het midden over een hoek van π radialen. De grootte van het oppervlak dat door de naald bestreken wordt bij de beweging, is $\frac{1}{4}\pi a^2$. Is het ook mogelijk de beweging zo uit te voeren dat een kleiner oppervlak bestreken wordt en zo ja, hoe groot is de minimale oppervlakte die men nodig heeft? Het antwoord is: er is geen minimum; gegeven een willekeurig positief getal, dan kan men de beweging zo uitvoeren dat een kleinere oppervlakte bestreken wordt. Een elementair bewijs vindt men in het hoofdstuk over verdelingen.

Het is niet moeilijk meer leuke resultaten op te sommen. Ik wil dat niet doen en volstaan met te verwijzen naar een viertal aan het boek ontleende recreatie-opgaven die men in dit en het volgende nummer vindt. U zult dan ook merken, wat de stelling van Helly inhoudt.

Een erg geschikt boek om van tijd tot tijd eens ter hand te nemen, als men behoefte heeft aan ontspannende wiskunde.

P. G. J. Vredenduin

Opgaven

345. Om een stuk papier op een takanbord vast te prikken, heeft men twee punaises nodig. Wil men meer dan één stuk papier vastprikken, dan kan het zijn, dat men met twee punaises kan volstaan, namelijk als de papieren zo op het bord liggen dat men ze tegelijk doorboren kan.

Op een tekenbord liggen een aantal vellen papier. Elk vel is convex. Elk drietal vellen kan met twee punaises tegelijk vastgeprikt worden. De tekenaar wil alle vellen vastprikken, bijv. om ze de volgende dag weer in goede orde terug te vinden. Hoeveel punaises heeft hij nodig? De punaises zijn uiteraard theoretisch afmetingsloos.

Als u het resultaat gevonden heeft, heeft u daarmee de stelling van Helly afgeleid. En als u van deze stelling nog een aantal aardige toepassingen wilt zien, dan kunt u die vinden in het boek van Cadwell.

346. Het vierkleurenprobleem is nog steeds een naar probleem. Bewoners van een tor7s die een landkaart willen kleuren, weten beter dan wij, waar ze aan toe zijn. Ze kunnen in elk geval met zeven kleuren volstaan als de eis gesteld wordt dat aangrenzende landen verschillend gekleurd worden. En men kan een voorbeeld vinden waaruit blijkt dat zes kleuren niet altijd voldoende zijn. Kunt u zo'n voorbeeld vinden?

Oplossingen

343. Begin met 1976. De som van de cijfers is gelijk aan 3 (mod 10). Schrijf achter de 6 het cijfer 3. Neem weer de som van de laatste vier cijfers. Deze som is gelijk aan 5 (mod 10). Schrijf achter de 3 het cijfer 5 enz.

Krijgen we op de duur wel eens weer 1976? Krijgen we wel eens 9197? Wel eens 1234?

Evident is dat het proces repeteert. Elk viertal cijfers bepaalt eenduidig het voorgaande. Zo gaat aan 1976 vooraf het cijfer 9. Uit deze twee resultaten volgt, dat het onmogelijk is dat het repeteerproces een 'lus' vertoont. De rij 1976 zal dus terugkeren. En de voorafgaande zal 9197 zijn, waarmee ook de tweede vraag beantwoord is.

Nu 1234. Neem alle cijfers en hun sommen modulo 2. Het startgetal 1976 wordt dan 1110. Hiervan uitgaande vinden we: 11101110 ...

Vanaf dit moment begint het proces al te repeteren. Dus wordt nimmer bereikt de rij 1010. En daarom mod 10 ook niet 1234.

344. Gevraagd werd drie vierkanten te vinden zo, dat de som van hun vierkanten weer een vierkant is.

De originele oplossing van Diophantus is als volgt. Laat de vierkanten zijn x^2 , 4 en 9.

Dan is $x^4 + 97 =$ een vierkant $= (x^2 - 10)^2$, laten we zeggen. Waaruit volgt $x^2 = \frac{3}{20}$.

Als de verhouding van 3 tot 20 was als van een vierkant tot een vierkant, dan was het probleem opgelost. Maar dit is niet het geval.

Daarom moet ik twee vierkanten vinden, p^2 en q^2 , en een getal m^1) zo, dat $m^2 - p^4 - q^4$ tot $2m$ de verhouding heeft als een vierkant tot een vierkant.

Stel $p^2 = z^2$, $q^2 = 4$ en $m = z^2 + 4$.

Dan $m^2 - p^4 - q^4 = (z^2 + 4)^2 - z^4 - 16 = 8z^2$.

Dus $8z^2/(2z^2 + 8)$ of $4z^2/(z^2 + 4)$ moet de verhouding zijn van een vierkant tot een vierkant.

¹⁾ p^2 en q^2 i.p.v. 4 en 9 en m i.p.v. 10.

Stel $z^2 + 4 = (z + 1)^2$, laten we zeggen.

We vinden $z = 1\frac{1}{2}$ en de vierkanten zijn $p^2 = 2\frac{1}{4}$, $q^2 = 4$, terwijl $m = 6\frac{1}{4}$.

Of, als we ze 4 keer zo groot nemen, $p^2 = 9$, $q^2 = 16$ en $m = 25$.

We beginnen opnieuw en stellen de vierkanten x^2 , 9, 16.

De som van de vierkanten is dan $x^4 + 337 = (x^2 - 25)^2$, zodat $x = 1\frac{1}{2}$.

De gevraagde vierkanten zijn $1\frac{44}{25}$, 9, 16.

Diophantus is steeds met rationale uitkomsten tevreden. Het is niet moeilijk door vermenigvuldiging met 25 een uitkomst met natuurlijke getallen te geven.

Grappig is dat Diophantus steeds tevreden is, als hij één oplossing gevonden heeft. Een meer algemeen procédé is:

Stel dat de vierkanten zijn x^2 , p^2 , q^2 en dat x , p en q geen factor gemeen hebben. We vinden dan:

$$x^4 + p^4 + q^4 = (x^2 - m)^2 \quad (1)$$

$$x^2 = \frac{m^2 - p^4 - q^4}{2m}$$

Stel $m = p^2 + q^2$.

$$\text{Dan is } x^2 = \frac{p^2 q^2}{p^2 + q^2}$$

p^2 , q^2 en $p^2 + q^2$ zijn de kwadraten van de zijden van een rechthoekige driehoek. Eisen we dat de lengten van deze zijden gehele getallen zijn, dan vinden we

$$p = \frac{1}{2}(a^2 - b^2), \quad q = ab \quad \text{en} \quad x = \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$$

Door vermenigvuldiging met $a^2 + b^2$ zijn deze uitkomsten geheel te maken.

Verdere oplossingen worden gevonden door in (1) $x^2 - m$ te vervangen door $x^2 + m$ en analoog door te rekenen.

Bijeenkomsten bespreking normen open werk wiskunde m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3/ l.b.o. 1976.

Evenals voorgaande jaren organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook dit jaar een aantal bijeenkomsten ter bespreking van de normen open werk wiskunde m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3/l.b.o. examen 1976.

Deze bijeenkomsten zijn vastgesteld voor

m.a.v.o.-3/l.b.o. op dinsdag 25 mei en

m.a.v.o.-4 op maandag 31 mei.

Voor m.a.v.o.-3/l.b.o. zullen een vijftal bijeenkomsten worden gepland, terwijl voor m.a.v.o.-4 in vrijwel elke v.w.o./h.a.v.o./m.a.v.o.-inspectie een bijeenkomst zal plaats vinden.

Voor nadere bijzonderheden (plaatsen, tijd en gespreksleiders), verwijzen we naar Euclides van de maand mei.

sigma

Het complete leerpakket voor wiskunde voor mavo, en
onderbouw havo/vwo door K.H. Cohen, dr A. van Dop,
dr. ir. B. Groeneveld, drs L.W. van der Horst,
F.D.A. van der Houven, K.J.L. Rogier,
dr. P.G.J. Vredenduin, N.B. Walters,
drs. A.J. Westermann.

Sigma

is gebaseerd op 4 jaar ervaring met
wiskundeleergangen voor mavo, havo en vwo.

Sigma

biedt de leerstof aan in
overzichtelijke hoofdstukken afgesloten door een
groot aantal in moeilijkheid opklimmende opgaven.

Sigma

heeft docentenhandleidingen.
Deze bevatten suggesties voor de les, toetsen-
materiaal en volledige uitwerkingen van de vraagstukken.

Sigma

splitst na het brugklasdeel in afzonderlijke delen voor havo/mavo
en voor havo/vwo en het jaar daarop in mavo, havo en vwo.
De mavo-delen bevatten de gehele voor de examens vereiste leerstof.
De havo- en vwo-delen zullen aansluiten op de bestaande
series 'Wiskunde bovenbouw havo' en Wiskunde bovenbouw
vwo' van dr. A. van Dop e.a. Ook de vormgeving sluit hierbij aan.

Voor nadere informatie kunt u zich wenden tot
Wolters-Noordhoff, postbus 58 in Groningen,
telefoon 050 - 162314.



Wolters-Noordhoff

Ruimte voor Getallen



Een nieuwe uitgave voor de rekenvaardigheid

- Een uitgave waarin de rekentechnieken systematisch worden behandeld.
- Grote aandacht wordt besteed aan het beredeneerd oplossen.
- Veel variatie is aangebracht in de oefenstof.

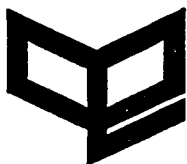
A. Roodhardt/P. C. Schnetz

Ruimte voor Getallen

9011 81652 8/96 blz. / f 6,90

Antwoordboekje bij Ruimte voor Getallen

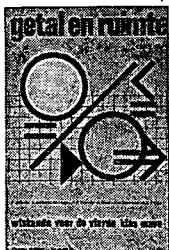
9011 81653 6/32 blz. / f 3,50



vraag informatie

educaboek bv culemborg

telefoon 03450-3143



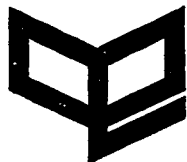
GETAL EN RUIMTE

Ook voor MAVO

de methode die af is en bij blijft.

Zojuist is verschenen de tweede geheel herziene druk van GETAL EN RUIMTE 4M1. Binnenkort verschijnen ook de herziene drukken van GETAL EN RUIMTE 4M2, 3M III-1 en 3M III-2.

Uitvoerige documentatie op aanvraag bij de uitgever verkrijgbaar.



vraag informatie

educaboek bv culemborg

telefoon 03450-3143

In opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en sterrenkunde
is uitgegeven de

STERRENGIDS 1976

Samengesteld door Lic. Jean Meeus

70 pag., ing. geïll. f. 13,50. ISBN 90 01 81278 3

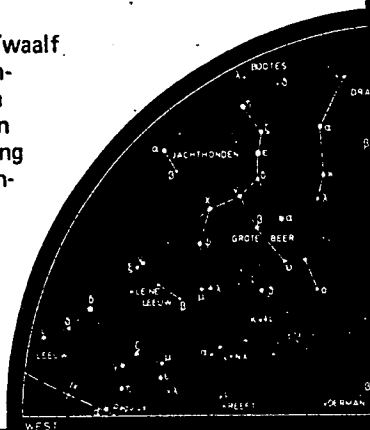
Inhoud:

Tijdaanwijzing; beknopt jaaroverzicht; Twaalf
sterrenkaarten-zes paren; Hemelverschijn-
selen in 1976; De wegen van planeten en
planetoiden; De zon in 1976; De maan in
1976; De planeten in 1976; Sterbedekking
1976; Minima van Algol; Mira; Verklaren-
de woordenlijst van enkele astrono-
mische termen; Griekse letters; Enkele
hemelverschijnselen in 1977.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel.



H.D. Tjeenk Willink Groningen



INHOUD

A. J. Th. Maassen: De voorgestelde nomenclatuur 301

Dr. Joh. H. Wansink: Schoolboekenmarkt voor wiskunde 315

Ned. Ver. v. Wisk. leraren: Statuten 318

Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 325

Boekbespreking 330

Recreatie 333

Mededeling 335