EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

51e jaargang
1975/1976
no 7
maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 28,50. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 16,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: 1/1 pag. *f* 250,—, 1/2 pag. *f* 135,— en 1/4 pag. *f* 75,—.

Tentamen didactiek van de wiskunde*

De vragen en opdrachten in dit tentamen hebben betrekking op hoofdstuk 7 (LOGARITMEN) uit Moderne Wiskunde, deel 7h (1e druk). Al~ de paragraaf niet uitdrukkelijk vermeld wordt zal er steeds paragraaf 7.6 bedoeld worden. Bij alle vragen en opdrachten moet u zich proberen voor te stellen dat u morgen onderwijs moet gaan geven aan leerlingen van 5-havo, die alles wat aan 7.6 vooraf gaat 'gehad' hebben**.
Informatie over het boek: In hoofdstuk 2 (EXPONENTEN) zijn machten met negatieve en gebroken exponenten behandeld met de daarbij behorende rekenregels ($a^p \times a^q = a^{p+q}$, enz.). Verder hebben de leerlingen kennis gemaakt met de exponentiële functie, zodat de inhoud van blz. 157 en 158 in feite oprakelen van reeds behandelde leerstof is. Bedenk wel dat het minstens drie maanden tevoren is geweest. In de tussenliggende hoofdstukken 3 t/m 6 komt dit onderwerp nergens voor.

Vraag 1
Hieronder staan verschillende activiteiten, die men leerlingen kan leren (in verschillende leerjaren), waarmee men dezelfde langetermijndoelen kan nastreven. Noem een paar van die doelstellingen.
(a) $5x+81 = 256$ vervangen door $5x = 175$.
(b) x^2+6x+5 schrijven in de vorm $(x^2+6x+9)-4$.
(c) Een rotatie vervangen door de samenstelling van twee spiegelingen.
(d) $0{,}00387 \times 876{,}2$ schrijven in de vorm $3{,}87 \times 10^{-3} \times 8{,}762 \times 10^2$.
(e) In $\sqrt[3]{(10^{0,723-4})}$ de exponent schrijven in de vorm $2{,}723-6$.
(f) In $10^{3,5851-2}$ de exponent schrijven in de vorm $0{,}5851+1$.

Vraag 2
In het boek wordt de leerling regelmatig opgedragen eerst een schatting te maken voordat hij gaat rekenen.
(a) Wat zouden daarvoor de motieven van de auteurs kunnen zijn?
(b) Zou u dat ook van uw leerlingen eisen of niet? Waarom?
(c) Wat zou u doen als een leerling u vroeg: 'Waarom moeten we steeds schatten? Door de wijzer weten we toch precies waar de komma moet komen?'

Vraag 3
Bij het uitvoeren van berekeningen in de paragrafen 7.3 t/m 7.5 hebben de leerlingen geleerd volgens een zekere procedure (u mag het ook een algoritme

* Dit tentamen werd op 16 januari 1975 gegeven aan studenten aan de Rijksuniversiteit te Utrecht, als onderdeel van de vereisten voor de didactische aantekening. Mogelijk kunnen de lezers van Euclides er een leerzaam uurtje aan besteden.
** De studenten kregen de tekst van het hele hoofdstuk een week van tevoren ter bestudering.

noemen) te werken. Zie bijvoorbeeld paragraaf 7.4, voorbeeld 4. Formuleer die procedure op een manier die voor de leerlingen te begrijpen en te gebruiken is.

Vraag 4

Om op doelmatige wijze te kunnen leren van paragraaf 7.6 is het nodig dat de leerlingen beschikken over zekere kennis en vaardigheden als zij aan die paragraaf beginnen. Een leraar wil toetsen of dat het geval is. Welke van de volgende vragen zijn wel en welke niet geschikt voor zulk een toets en waarom?

(a) Gegeven $5 = 3^{1,465}$; schrijf 25 als macht van 3.
(b) Schrijf 876,5 in de standaardvorm.
(c) Benader met een logaritmentafel $0{,}156^5$.
(d) Schrijf 685 als macht van 10.
(e) Welke gehele positieve getallen onder de 30 kun je schrijven als macht van 10 als gegeven is $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$ en $\log 7 = 0{,}845$?
(f) Schrijf 0,1 en 0,0001 als macht van 10.
(g) Bereken met een logaritmentafel $\sqrt{0{,}0639}$.
(h) Bereken met een logaritmentafel $3{,}67 \times 517 : 213{,}6$.

Vraag 5

Beschouw het gedeelte van 7.6 op de bladzijden 167 en 168 (dus tot en met opgave 5).

(a) Bent u van mening dat de leerstof hier goed geordend is?
(b) Zo ja, wijs de verschillende fasen aan?
Zo nee, geef een andere ordening (eventueel met extra opdrachten).

Vraag 6

De auteurs maken naar de mening van de opstellers van dit tentamen in 7.6 na opgave 5 een paar ernstige didactische fouten. Als u dat ook vindt welke zijn dat dan?
Als u het met de werkwijze van de auteurs eens bent geef dan daarvoor een verdediging.

Vraag 7

Bij opgave 9i wordt een truc toegepast, die maakt dat de opgave handig uit te voeren is. De truc komt er op neer dat 'de wijzer deelbaar door 3 gemaakt' wordt, zoals in voorbeeld 4c wordt voorgedaan. Een leraar besluit om niet de volgorde van het boek aan te houden, maar het aanleren van deze truc afzonderlijk van de rest te houden.

(a) Wat zouden daarvoor goede motieven kunnen zijn?
(b) Wat zou u, als u in de schoenen van de leraar stond in dat geval achtereenvolgens in de verschillende fasen met de leerlingen willen doen? Geef concrete voorbeelden die u de leerlingen zou willen geven en vragen die u ze zou willen stellen. Kortom maak van een lesplan over het onderwijs van deze truc het onderdeel: leerstofordening.

Vraag 8

Leraar A vindt het schrijven als machten van 10 maar omslachtig. In plaats van $3{,}142 \times 34{,}29 = 10^{0{,}4969} \times 10^{1{,}5352} = \ldots.$ enz. kan het veel vlugger als volgt:

x		$\log x$
3,142	$\rightarrow$	0,4969
34,29 ×	$\rightarrow$	1,5352
107,67	$\leftarrow$	2,0321

Vooral als berekening uit meer getallen bestaat is deze methode sneller. Daarom laat hij leerlingen niet de voorbeelden uit het boek leren, maar onderwijst ze bovenstaande methode.
Leraar B houdt zich aan de procedure van het boek en verbiedt in het begin zelfs leerlingen het volgens een snellere methode zoals bovenstaande te doen. Als ze de procedure uit het boek goed kennen laat hij het wel toe.
Wat zouden van elk van hen de overwegingen voor hun beslissingen kunnen zijn

Didaktische literatuur

Het franse Bulletin

Met genoegen vragen we hier enige aandacht voor het vaktijdschrift van onze franse collega's, het "*Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*", kortheidshalve "de l'APMEP".
Het Bulletin verschijnt om de twee maanden en de voltooide 53e jaargang (1974) telde, enige waardevolle supplementen nog buiten beschouwing gelaten, 998 bladzijden. Tot die supplementen behoren de "*Annales du Baccalauréat, séries A, B, C, D, et E*" (193 blz.) en de "*Annales du B.E.P.C. et Concours d'entrée à l'école normale*" (64 blz.).
Deze laatste letters zijn een afkorting van "Brevet d'études du premier cycle". Een waardevol supplement van een vroegere jaargang handelde over "*L'enseignement des mathématiques en quatrième et troisième*".
De inhoud van het Bulletin is. zoals de ondertitel "de la maternelle à l'université", reeds kan doen vermoeden, buitengewoon gevarieerd. Maar het hoofdaccent valt toch op het onderwijs aan de leeftijdsgroep van 12–18 jaar, wat de betekenis die het tijdschrift ook voor de lezers van Euclides kan hebben, ten goede doet komen.
In de rubriek "*La vie de l'association*" treffen we uitvoerig gedocumenteerde verslagen aan van congressen en studiebijeenkomsten met gedetailleerde informatie over intensief groepswerk. Op het Congres van Dijon (1974) werd o.m. verslag uitgebracht over de volgende studieonderwerpen:

1 approximation, met i.h.b.: approximation en musique;
2 comportement automatique et comportement libre;
3 quelques situations de la vie courante qui veulent bien se laisser mathématiser, met bijzondere aandacht voor spelsituaties;
4 probabilité à l'école élémentaire;
5 noyaux-thèmes dans le premier cycle dans la perspective de l'enseignement de demain avec, notamment, l'interdisciplinarité; eveneens: noyaux-thèmes dans le deuxième cycle.

Er zijn twee "*Rubriques de l'APMEP*" die onze bijzondere aandacht waard zijn, Walusinski's "*Matériaux pour une bibliographie*" en Chevallier's "*Matériaux pour un dictionnaire*".

Walusinski verzorgt regelmatig een overzicht van nieuwe uitgaven die voor het hedendaags wiskunde-onderwijs van betekenis kunnen zijn, met korte karakteristieken van de inhoud en gerubriceerd naar de volgende categorieën: manuels, pédagogie générale, pédagogie mathématique, culture générale, tijdschriftartikelen. In nummer 296 worden meer dan 40 titels opgesomd, terwijl in een viertal bladzijden nog aandacht wordt gevraagd voor publicaties die op divers niveau ons wiskunde-onderwijs raken.

Chevallier maakt deel uit van een "*Commission du Dictionnaire*".

Deze verzorgt een uitgave die voor ons onderwijs van grote betekenis is: "*La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*".

Deze uitgave, daterend van 1962, wordt elke 3 jaar opnieuw uitgegeven; die van 1973 voegde 151 fiches toe aan de 125 van 1970. De gecartonneerde fiches worden periodiek in het Bulletin ingelegd.

De laatste betroffen het hoekbegrip "dans les espaces vectoriels réels de dimension finie" en de problematiek rondom het hoekbegrip gaf Chevallier aanleiding tot een kritische bijdrage over "*anglomanie*".

Rubrieken als "*Dans nos classes*" en "*Tribune libre*" die een beroep doen op de actieve medewerking van een groot aantal lezers, bevatten uiteraard bijdragen van zeer uiteenlopend niveau.

We geven enkele titels:
1 Essai d'individualisation et d'organisation du travail sur fiches.
2 L'affaire Pliouchtch met adres van het Comité international des mathématiciens pour la défense de Léonid Pliouchtch, en met dat van Amnesty International.
3 Des relations un peu plus "humaines".
4 Recherches à partir d'un jeu télévisé dans une classe rurale.
5 Insertion de la logique dans l'enseignement élémentaire.
6 Pour un enseignement de la statistique dans le premier cycle.

Nummer 292 bevatte bijdragen van twee internationaal bekende wiskundigen. Dieudonné schreef over "*Devons-nous enseigner les 'mathématiques modernes'*" en Choquet over "*Formation des chercheurs de mathématiques*".

Dieudonné is van oordeel dat 90% van de schooljeugd van ons basisonderwijs in hun later leven geen behoefte zal hebben aan enige wiskundekennis die uitgaat boven het niveau van het elementaire rekenen. In dit verband zou men zich kunnen afvragen, of wiskunde-onderwijs aan leerlingen van 15 jaar en ouder die geen technische of wetenschappelijke studie beogen, wel zinvol geacht moet worden. Karakteristiek voor Dieudonné's opvattingen lijkt me het volgende citaat:

> Avec la pression constamment croissante de la science et de la technologie sur la vie quotidienne, nous ne pouvons permettre que les futurs dirigeants et scientifiques passent la plupart de leurs précieuses années de scolarité à absorber des connaissances inutiles enseignées par des méthodes désuètes, même si nous admettons la nécessité de certains éléments de 'jeu' dans le programme. L'angoisse des parents qui ne peuvent comprendre le vocabulaire de leurs enfants s'éteindra avec l'arrivée de la prochaine génération.

Dieudonné komt van gezaghebbende zijde op voor de belangen van die leerlingen die de wiskunde later nodig zullen hebben, maar levert geen bijdrage voor de ontwikkeling van ons wiskunde-onderwijs aan de overige groepen van leerlingen.
Bij Choquet vinden we niet de minachting voor het gangbare wiskunde-onderwijs die we bij Dieudonné aantroffen. We nemen met begrip kennis van de wensen die hij ten aanzien van het onderwijs aan toekomstige onderzoekers formuleert. Hij wenst ze toe:

> Mémoire, imagination, poésie et fantasie, hardiesse, un certain goût de la contestation des idées reçues, et un don pour l'association des idées; par contre, je classerai comme inutile et parfois nuisible le brillant (particulièrement néfaste chez le professeur).
> Mais j'ai gardé pour la fin les qualités de base, absolument indispensables: l'amour des mathématiques, une grande obstination, et un grand pouvoir de concentration; on peut rappeler ici la réponse de Newton auquel on demandait comment il avait découvert son système du monde: 'En y pensant tout le temps'.

Belangstellenden kunnen zich op het Bulletin abonneren voor 60 fr per jaar. Adres: ADMEP, 29 rue d'Ulm, Paris 5ème CCP; Paris 5708-21.
Ook kunnen ze deelnemer worden aan onze Leesportefeuille, verzorgd door Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.Br.), voor *f*2,50 per tijdschrift per jaar.

Joh. H. Wansink, Arnhem.

Keuzevak Topologie

A. W. BOON

Leidschendam

Toen in augustus 1972 de eerste mammoet-vijfde klas op onze school een realiteit werd en derhalve voor het eerst een keuze-vak binnen het wiskunde programma gedoceerd moest worden, viel de keus nogal toevallig op topologie (het enige keuzevak, waarvoor een schoolleerboek beschikbaar was op dat moment). Het is wellicht geen slechte gedachte om de ervaringen met dit vak opgedaan ook aan anderen door te geven. Hieronder volgt eerst een feitenrelaas, daarna enkele persoonlijke opmerkingen.

Feitenrelaas

1 Direkt in augustus 1972 werd gestart met het onderwijs in de topologie gedurende 1 uur per week. Van de 22 leerlingen uit de 5B-klas hadden er 16 wiskunde II in hun pakket opgenomen. Schrijver gaf hen alleen onderwijs in de topologie; de analyse en vectormeetkunde werden door een collega gegeven.

2 Behandeld werden uit het bekende paarse boek: Eenvoudige topologie de hoofdstukken 1 t/m 11 gedurende ± 30 lesuren (28 aug. 1972–paasvakantie 1973). Na hoofdstuk 3 werd een schriftelijke repetitie gegeven en na hoofdstuk 8 werden alle leerlingen schriftelijk en daarna (elk apart) 30 minuten mondeling op kennis en inzicht getest. In augustus 1973 werd in twee lesuren de hele stof herhaald ter voorbereiding op het tentamen op 7–9–1973, dat deel uitmaakt van het schoolonderzoek W II.

3 Bij de overgang van 5 naar 6 lieten 4 leerlingen het vak W II vallen en 1 leerling doubleerde, zodat uiteindelijk 11 leerlingen deelnamen aan het tentamen.

4 *Inrichting tentamen*: Aan het eind van de cursus '72/'73 ontvingen de leerlingen een stencil, waarop de omvang van de stof voor het tentamen zeer gedetailleerd was aangegeven (o.m. welke bewijzen men wel en welke men niet moest kunnen reproduceren). Het tentamen bestond uit een schriftelijk en een mondeling gedeelte met dien verstande, dat alleen zij, die voor het schriftelijk gedeelte een cijfer lager dan 7 scoorden, recht konden doen gelden op een mondeling gedeelte.

5 Bijlagen bij het feitenrelaas: (voor geïnteresseerden verkrijgbaar bij de redactie)

a repetities
b omvang stof tentamen
c opgaven tentamen
d resultaten tentamen
e enquête leerlingen.

Persoonlijke opmerkingen

Het boek: eenvoudige topologie

1 Het groeperen van de elementaire begrippen uit de topologie rond een existentie-stelling werkt weliswaar motiverend, maar heeft het nadeel, dat weinig tijd overblijft voor een dieper ingaan op die elementaire begrippen (Vb.: het begrip afstandsfunctie toegepast in andere ruimten dan R^n).
2 De keus van deze stelling heeft het voordeel, dat zij binnen het W-I programma herhaaldelijk (niet-bewezen) gebruikt wordt (stelling van Rolle, middelwaardestellingen), nog afgezien van het (onbewuste) gebruik bij het maken van tal van opgaven.
3 Vele leerlingen vonden het een bezwaar, dat zo weinig gebruik gemaakt wordt van logische symbolen in de bewijzen der stellingen.
Suggestie: de weg van het bewijs globaal (in woorden) aangeven en het exacte bewijs m.b.v. logische symbolen (al of niet in een appendix).
4 De vraagstukken zijn vaak òf te simpel òf te moeilijk. Een aanvulling zou welkom zijn.
5 Hoewel *f* 17,50 niet duur is voor een boek van deze omvang en kwaliteit, meen ik dat de prijs van het boek in geen verhouding staat tot
a het aantal lesuren, dat eraan besteed wordt;
b de prijzen van de boeken van andere keuzevakken.
(Men werkt het zelf diktaten maken in de hand).
Daarbij moet bedacht worden, dat de leerling het boek niet gemakkelijk voor een redelijke prijs kan overdoen.

Het keuzevak

Ik ben van mening, dat topologie als keuzevak zeker voor de leerlingen niet het gemakkelijkste vak is, dat te kiezen valt. Daar moet m.i. bij het stellen van eisen rekening mee gehouden worden.

Slotopmerking

De middagbijeenkomsten op het I.O.W.O., waarop met de schrijver (vertaler) en collega's van gedachten gewisseld wordt, zijn m.i. onontbeerlijk. Naast het uitwisselen van ervaringen en vaktechnische informatie kan in de toekomst (als we er allemaal een beetje aan gewend zijn) wellicht nog iets meer gebeuren op het terrein van de didaktische informatie. (voorbeelden e.d.).

Keuzevak: Getallentheorie

A. W. BOON en W. J. GROENEVELT

Leidschendam

Binnen de Wiskunde 2 bestaat gelukkig nog altijd de mogelijkheid voor de docent om een aantal uren te besteden aan een vak van zijn keuze. Het eindexamenprogramma noemt met name een aantal mogelijkheden waarbinnen die keuze mag vallen.
Om eens wat anders te doen – en destijds, juni 1974, bij gebrek aan goede boeken op de diverse keuzeterreinen – besloten we een poging te doen om het vak 'Getallentheorie' op onze scholen te introduceren. Die poging is dermate aardig verlopen, dat wij het aandurven U daarvan langs deze weg op de hoogte te stellen.
Daar ons geen boeken voor v.w.o.-leerlingen op dit terrein bekend waren, maakten we een (voorlopig) diktaat, dat de volgende opbouw vertoont:
deel I: *basisstof* (rekenen met restklassen, volledige inductie, de chinese reststelling, de stelling van Fermat)
deel II: *kwadraatresten* (primitieve wortels, vergelijkingen van het type $x^n \equiv a \pmod p$, specialisatie voor $n = 2$, reciprociteitsstelling van Gauss)
deel III: *kettingbreuken* (benaderen van irrationale getallen met rationale getallen)
deel IV: *capita selecta* (o.a.: indicator van Euler, stelling van Pythagoras, sommen van kwadraten, de irrationaliteit van pi en e)
Natuurlijk kan het diktaat niet in z'n geheel behandeld worden. De bedoeling is om na hoofdstuk I een keuze te maken uit II of III en ter afsluiting de leerling een werkstuk te laten maken uit IV.
We hebben geprobeerd de leerstof zo te brengen, dat zij grotendeels door de leerling zelf kan worden bestudeerd. De indeling is zodanig dat per les een paragraaf kan worden behandeld. In de praktijk is gebleken, dat aan deze beide eisen redelijk voldaan wordt.
De leerlingen reageren doorgaans positief. De objectenverzameling $\mathbb{Z}$ is genoegzaam bekend en de resultaten van de getallentheorie zijn ook op dit niveau toch wel spectaculair (stelling van Fermat).
Binnen één groep leerlingen is de opdracht gegeven om in groepjes van drie een onderwerp uit IV zelfstandig te bestuderen. Zij beschikten toen evenwel nog niet over de diktaattekst, maar moesten het doen met engelse teksten.

Hoewel zij er eerst erg tegenop zaken – vooral tegen 't engels – werd deze proef een groot succes. Met plezier hebben zij er uren in geïnvesteerd – op school mochten zij er 4 lesuren aan besteden – en de bevrediging voor beiden, leerling en docent, was groot.
Vanzelfsprekend vertoont het diktaat gebreken. Aan een herschrijving zijn we nog niet toe gekomen omdat we alleen onze eigen ervaringen hebben. Voor de komende cursus ('76/'77) hebben we aan een paar collega's gevraagd het diktaat te behandelen.
Wellicht zijn er onder U enkelen die, net als wij, bezig zijn geweest met getaltheorie. Misschien wilt U dan met ons kontakt opnemen om ervaringen uit te wisselen.
Voor belangstellenden is ons diktaat te verkrijgen door een briefje te sturen aan A. W. Boon, Burg. Caan van Necklaan 263, Leidschendam, tel. 070-272520.

Examens Algemeen Voortgezet Onderwijs in 1975

MAVO 3 – WISKUNDE I – vrijdag 22 augustus, 9.30–11.30 uur.

Lees dit eerst:

Dit gedeelte van het examen bestaat uit vijfentwintig vierkeuzevragen.
Bij elke vraag staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters A, B, C en D.
Precies één van deze antwoorden is het goede antwoord.

Controleer vóór het einde van dit examen of alle vragen zijn beantwoord.
Voor een niet-ingevuld antwoord wordt geen enkel punt toegekend.

Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel XOY.

Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij duidelijk anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij duidelijk anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld:

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad y \in \mathbb{R}, \text{ m.a.w. } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein de verzameling van alle reële getallen bedoeld waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1 Een factor van $x^2 - 9x + 18$ is
A $x-9$
B $x+9$
C $x-3$
D $x+3$

2 $ax+b=c \wedge a \neq 0 \Rightarrow$

A $x=\dfrac{b+c}{a}$

B $x=\dfrac{b-c}{a}$

C $x=\dfrac{b+c}{-a}$

D $x=\dfrac{b-c}{-a}$

3 Gegeven zijn de relaties $P=\{(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)\}$,
$Q=\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$,
$R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ en
$S=\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

Welke van deze relaties is *geen* functie?

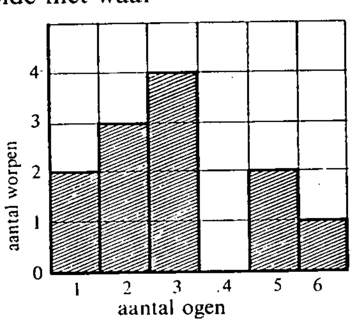
A P
B Q
C R
D S

4 Van een balk verhouden de lengten van de ribben zich als de getallen 1, 2 en 3.
De oppervlakten van de grensvlakken verhouden zich als de getallen

A 1, $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$
B 1, 2 en 3
C 1, 4 en 9
D 2, 3 en 6

5 Met een dobbelsteen wordt 12 keer geworpen.
Het resultaat is weergegeven in nevenstaand histogram.
Hieruit is af te lezen
(1) de modus is gelijk aan de mediaan
(2) de modus is gelijk aan het gemiddelde

A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



6 In $\triangle ABC$ is D het midden van zijde AC en E het midden van zijde BC.
De oppervlakte van $\triangle DEC$ is gelijk aan p.
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan
A $2p$
B $4p$
C $2p^2$
D $4p^2$

7 Gegeven zijn de puntverzamelingen $V = \{(x,y)| y > 2x-2\}$ en
$W = \{(x,y)|x^2+y^2 < 4\}$
$V \cap W$ bevat punten uit
A precies 1 kwadrant
B precies 2 kwadranten
C precies 3 kwadranten
D alle kwadranten

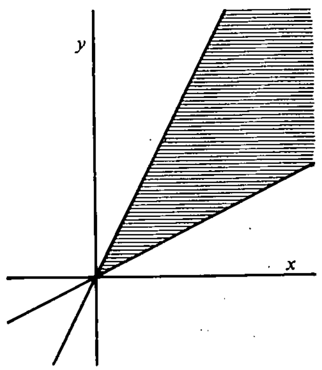
8 De bewering $5(4x-1) < 4(5x-1)$ is waar voor
A geen enkele waarde van x
B alleen niet-positieve waarden van x
C alleen niet-negatieve waarden van x
D alle waarden van x

9 Bij een translatie over $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gaat de grafiek van $4y = 3x+1$ over in zichzelf.
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan zijn
A $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
B $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
D $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

10 Als $\{(x,y)| y = px-3\} \cap \{(x,y)| y = 2x+q\} = 3$ dan
A $p = 2 \wedge q = -3$
B $p = 2 \wedge q \neq -3$
C $p \neq 2 \wedge q = -3$
D $p \neq 2 \wedge q \neq -3$

11 $\{x|x^2 = 2x-1\} =$
A $\emptyset$
B $\{-1\}$
C $\{1\}$
D $\{-1, 1\}$

12 In nevenstaand assenstelsel zijn getekend de grafieken van $y = 2x$ en $y = \frac{1}{2}x$.
Voor de coördinaten x en y van de punten (x, y) van het gearceerde vlakdeel geldt
A $y \leqq 2x \wedge y \leqq \frac{1}{2}x$
B $y \leqq 2x \wedge y \geqq \frac{1}{2}x$
C $y \geqq 2x \wedge y \leqq \frac{1}{2}x$
D $y \geqq 2x \wedge y \geqq \frac{1}{2}x$



13 Van vierkant $ABCD$ is E het midden van zijde AD en S het midden van diagonaal BD.
Voor elk punt P binnen vierhoek $ABSE$ geldt
A $d(P, AB) > d(P, DC) \wedge d(P, AB) > d(P, BC)$
B $d(P, AB) > d(P, DC) \wedge d(P, AB) < d(P, BC)$
C $d(P, AB) < d(P, DC) \wedge d(P, AB) > d(P, BC)$
D $d(P, AB) < d(P, DC) \wedge d(P, AB) < d(P, BC)$

14 Een cirkel met straal r wordt vermenigvuldigd ten opzichte van het middelpunt met de factor 4.
De oppervlakte van de beeldfiguur is gelijk aan
A $2\pi r^2$
B $4\pi r^2$
C $8\pi r^2$
D $16\pi r^2$

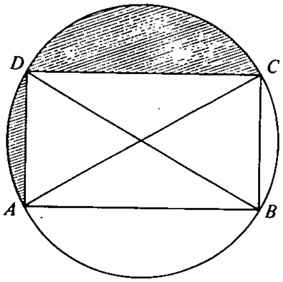
15 De relaties $\{(x, y) | y - px + 4 = 0\}$ en $\{(x, y) | y = px + q\}$ hebben meer dan 1 element gemeenschappelijk.
Voor q geldt
A $q = -p$
B $q = -4$
C $q = 4$
D $q = p$

16 De grafiek van een functie $x \to px+q$ gaat door de punten $(3,4)$ en $(4,3)$.
Voor p geldt
A $p=\frac{3}{4}$
B $p=\frac{4}{3}$
C $p=-1$
D $p=1$

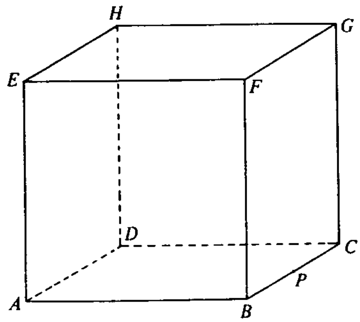
17 Gegeven is een functie f gedefinieerd door $f(x)=x^2+px+q$.
Het volledig origineel van 0 is $\{1,7\}$.
Voor p en q geldt
A $p=-8 \wedge q=-7$
B $p=-8 \wedge q=7$
C $p=8 \wedge q=-7$
D $p=8 \wedge q=7$

18 De grafiek van $x \to x^2-2x+p$ heeft geen punten gemeen met de x-as.
Voor p geldt
A $p \leqq -1$
B $-1<p \leqq 0$
C $0<p \leqq 1$
D $1<p$

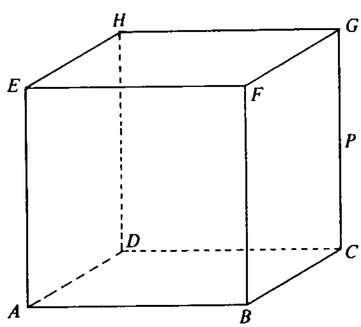
19 In nevenstaande figuur zijn getekend de rechthoek $ABCD$ met $AD=5$, $AC=10$ en de cirkel door de punten A, B, C en D.
Voor de oppervlakte p van het gearceerde vlakdeel geldt
A $p \leqq 20$
B $20<p \leqq 30$
C $30<p \leqq 40$
D $40<p$



20 In de kubus $ABCD.EFGH$ is de lengte van een ribbe 6.
P is het midden van de ribbe BC.
De oppervlakte van $\triangle DHP$ is gelijk aan
A $9\sqrt{5}$
B $18\sqrt{5}$
C $27\sqrt{5}$
D $54\sqrt{5}$



21 Van de kubus $ABCD.EFGH$ is P het midden van ribbe CG.
Voor de grootte α van het hoek BAP geldt
A $\alpha \leqq 30°$
B $30° < \alpha \leqq 45°$
C $45° < \alpha \leqq 60°$
D $60° < \alpha$



22 Als $0° < \alpha \leqq 360° \wedge \sin\alpha < 0 \wedge \cos\alpha > 0$
dan geldt
A $0° < \alpha \leqq 90°$
B $90° < \alpha \leqq 180°$
C $180° < \alpha \leqq 270°$
D $270° < \alpha \leqq 360°$

23 De oplossingsverzameling van $\frac{1}{2}(2x-3) = \frac{1}{3}(3x-2)$ bevat
A geen elementen
B alleen het getal 0
C alleen een positief getal
D alleen een negatief getal

24 Gegeven zijn de functies $f: x \rightarrow 3x+2$ en $g: x \rightarrow 6x+4$.
Het aantal gemeenschappelijke punten van de grafieken van f en g bedraagt
A nul
B één; dit punt is de oorsprong

C één; dit punt is niet de oorsprong
D meer dan één

25 als $x = -3+\sqrt{7}$ dan geldt
A $x \in \mathbb{N}$
B $x \in \mathbb{Z} \wedge x \notin \mathbb{N}$
C $x \in \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{Z}$
D $x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Q}$

MAVO 3 – WISKUNDE II Dinsdag 26 augustus, 9.30–11.00 uur

Lees dit eerst:

a Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden zijn verkregen.
b Bij berekeningen mag gebruik worden gemaakt van een rekenliniaal of van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen.

1 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(-5, -2)$, $B(3, 4)$ en $C(-5, 8)$.
a. Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
b. Bereken $\angle ABC$ in graden nauwkeurig.
Bij de vermenigvuldiging met O als centrum en $\frac{1}{2}$ als factor is A' het beeld van A, B' het beeld van B en C' het beeld van C.
c. Bereken de oppervlakte van $\triangle A'B'C'$.
d. Bereken de coördinaten van de punten A', B' en C'.

2 Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 15$, $AD = 8$ en $AE = 12$.
Het punt P is het midden van de zijvlaksdiagonaal BD.
Het punt Q is het midden van de lichaamsdiagonaal BH.
a. Bereken BD.
b. Bereken de oppervlakte van $\triangle HPQ$.
c. Bereken $\angle HPQ$ in graden nauwkeurig.

3 Met domein $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqq x \leqq 4\}$ is de functie f gedefinieerd door $x \rightarrow x^2 - 2x - 3$.
a. Los op $f(x) = -3$.
b. Bereken de grootste en de kleinste waarde van het bereik van f.
c. Teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel.
d. Het beeld van de grafiek van f bij de translatie $\binom{3}{-3}$ is de grafiek van een functie g.
Bepaal van g een functievoorschrift en het domein.

4 Gegeven zijn de relaties $V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x - 3y + 6 = 0\}$
en $W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | 5x - 3y - 6 = 0\}$.
a. Toon aan dat $V \cap W$ niet leeg is.

b. Teken de grafieken van V en W in één rechthoekig assenstelsel.
Voor elke $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ is gegeven de relatie $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b\}$.
c. Voor welke a en b geldt $(0, 6) \in U$?
d. Gegeven is dat $V \cap W \cap U$ niet leeg is en dat $b = 6$.
Bereken a.

MAVO 4 – WISKUNDE I – Vrijdag 22 augustus, 9.30–11.30 uur.

Lees dit eerst:

Dit gedeelte van het examen bestaat uit dertig vierkeuzevragen.
Bij elke vraag staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters A, B, C en D.
Precies één van deze antwoorden is het goede antwoord.

Controleer vóór het einde van dit examen of alle vragen zijn beantwoord.
Voor een niet-ingevuld antwoord wordt geen enkel punt toegekend.

Coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig assenstelsel XOY.

Cursief gedrukte kleine letters stellen elementen van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen voor, tenzij duidelijk anders blijkt.
Evenzo wordt, tenzij duidelijk anders blijkt, met het geordende paar (x, y) bedoeld:

$x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$, m.a.w.: $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Als bij een functie $x \to f(x)$ geen domein is aangegeven, wordt als domein de verzameling van alle reële getallen bedoeld waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

1 Een factor van $x^2 - 9x + 18$ is
A $x - 9$
B $x + 9$
C $x - 3$
D $x + 3$

2 $ax + b = c \wedge a \neq 0 \Rightarrow$

A $x = \dfrac{b + c}{a}$

B $x = \dfrac{b - c}{a}$

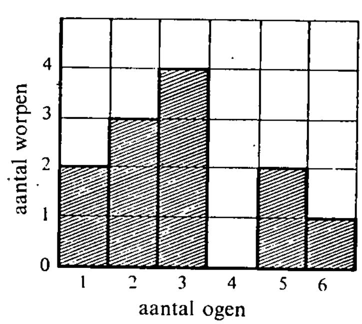
C $x = \dfrac{b + c}{-a}$

D $x = \dfrac{b - c}{-a}$

3 Gegeven zijn de relaties $P = \{(0,3), (1,3), (2,3), (3,3)\}$,
$Q = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$,
$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$ en
$S = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$.
Welke van deze relaties is *geen* functie?
A P
B Q
C R
D S

4 Van een balk verhouden de lengten van de ribben zich als de getallen 1, 2 en 3.
De oppervlakten van de grensvlakken verhouden zich als de getallen
A 1, $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$
B 1, 2 en 3
C 1, 4 en 9
D 2, 3 en 6

5 Met een dobbelsteen wordt 12 keer geworpen.
Het resultaat is weergegeven in nevenstaand histogram.
Hieruit is af te lezen
(1) de modus is gelijk aan de mediaan
(2) de modus is gelijk aan het gemiddelde
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



6 In $\triangle ABC$ is D het midden van zijde AC en E het midden van zijde BC.
De oppervlakte van $\triangle DEC$ is gelijk aan p.
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan
A $2p$
B $4p$
C $2p^2$
D $4p^2$

7 Gegeven zijn de puntverzamelingen $V = \{(x,y) | y > 2x-2\{$en

$W = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$.
$V \cap W$ bevat punten uit
A precies 1 kwadrant
B precies 2 kwadranten
C precies 3 kwadranten
D alle kwadranten

8 De bewering $5(4x-1) < 4(5x-1)$ is waar voor
A geen enkele waarde van x
B alleen niet-positieve waarden van x
C alleen niet-negatieve waarden van x
D alle waarden van x

9 Bij een translatie over $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gaat de grafiek van $4y = 3x + 1$ over in zichzelf.

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kan zijn

A $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

10 Als $\{(x, y) | y = px - 3\} \cap \{(x, y) | y = 2x + q\} = \emptyset$ dan
A $p = 2 \wedge q = -3$
B $p = 2 \quad q \neq -3$
C $p \neq 2 \wedge q = -3$
D $p \neq 2 \wedge q \neq -3$

11 $\cos 140° =$
A $\sin 40°$
B $-\sin 40°$
C $\cos 40°$
D $-\cos 40°$

12 $\{x | (x-2)(2-x) > 0\} =$
A $\emptyset$
B $\{x | x > 2\}$
C $\{x | x < 2\}$
D $\{x | -2 < x < 2\}$

13 $-x^2+4x=$
A $-(x-2)^2-4$
B $-(x-2)^2+4$
C $-(x+2)^2-4$
D $-(x+2)^2+4$

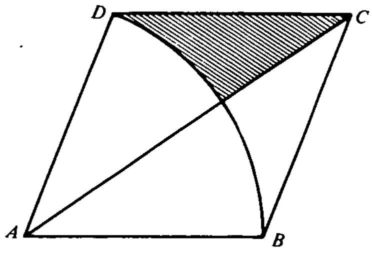
14 Gegeven is een vlieger $ABCD$ met $AB \neq AD$. Bij een afbeelding gaat de vlieger in zichzelf over, terwijl het beeld van A niet met A samenvalt. Deze afbeelding kan zijn een
A lijnspiegeling
B puntspiegeling
C rotatie
D vermenigvuldiging

15 Het beeld van punt (a, a) bij spiegeling in de grafiek van $y = 2$ is het punt
A $(4-a, a)$
B $(a, 4-a)$
C $(2-a, a)$
D $(a, 2-a)$

16 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \binom{6}{8}$, $\vec{b} = \binom{-2}{-4}$ en $\vec{c}$.
Als $\vec{a}-\vec{b}-4\vec{c} = \vec{o}$ dan geldt
A $\vec{c} = \binom{1}{1}$
B $\vec{c} = \binom{-1}{-1}$
C $\vec{c} = \binom{2}{3}$
D $\vec{c} = \binom{-2}{-3}$

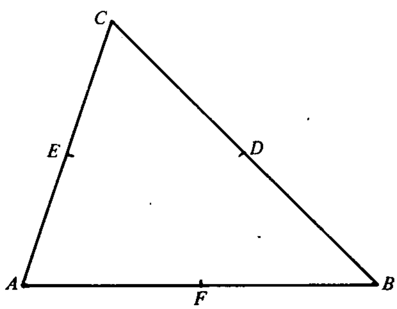
17 Als $\left|\begin{pmatrix} x-1 \\ x+1 \end{pmatrix}\right| = 4$ dan kan x gelijk zijn aan
A 1
B $\sqrt{3}$
C 2
D $\sqrt{7}$

18 In nevenstaande ruit $ABCD$ zijn de diagonaal AC en een deel van de cirkel (A, AB) getekend.
Voor elk punt P van het gearceerde vlakdeel geldt
A $d(P, AB) \geqq d(P, AD) \wedge PA \geqq AB$
B $d(P, AB) \geqq d(P, AD) \wedge PA \leqq AB$
C $d(P, AB) \leqq d(P, AD) \wedge PA \geqq AB$
D $d(P, AB) \leqq d(P, AD) \wedge PA \leqq AB$



19 In het platte vlak zijn de twee verschillende lijnen l en m evenwijdig.
l en m worden gesneden door de lijn n.
$\{P \mid d(P,l) = d(P,m) = d(P,n)\}$ bevat
A geen elementen
B precies 1 element
C precies 2 elementen
D meer dan 2 elementen

20 In $\triangle ABC$ zijn D, E en F de middens van respectievelijk de zijden BC, AC en AB.
Het snijpunt van AD en BE is O.
(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \vec{o}$
(2) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF} = \vec{o}$
A (1) en (2) zijn beide waar
B (1) is waar en (2) is niet waar
C (1) is niet waar en (2) is waar
D (1) en (2) zijn beide niet waar



21 $V = \{(x,y) \mid y = x-4\}$ en $W = \{(x,y) \mid y = (x-4)^2\}$.
$V \cap W$ bevat
A geen elementen
B precies 1 element
C precies 2 elementen
D meer dan 2 elementen

22 De cirkel $(x-1)^2+(y+2)^2 = 16$ heeft precies 1 punt gemeen met de lijn
A $x = 5$
B $x = -5$
C $y = 5$
D $y = -5$

23 De grafiek van een functie $f: x \to px+p$ gaat door het punt $(1,0)$.
De grafiek gaat ook door het punt
A $(0,0)$
B $(0,1)$
C $(-1,1)$
D $(-1,-1)$

24 Van $x \to x^2+p$ is -2 een origineel van 0.
Voor p geldt
A $p = -4$
B $p = -2$
C $p = 2$
D $p = 4$

25 Een functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2+5x+4$.
De originelen van 4 zijn
A 1 en 4
B -1 en -4
C 0 en 5
D 0 en -5

26 Gegeven is een tweedegraads functie $f: x \to ax^2+bx$ met $b \neq 0$.
De top van de grafiek van f is een punt van het eerste kwadrant.
Voor a en b geldt
A $a > 0 \wedge b > 0$
B $a > 0 \wedge b < 0$
C $a < 0 \wedge b > 0$
D $a < 0 \wedge b < 0$

27 Van een ruit $ABCD$ is $AB = a$ en $\angle BAD = \alpha$.
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is gelijk aan
A $a \sin \frac{1}{2}a$
B $a^2 \sin \frac{1}{2}a$
C $\frac{1}{2}a \sin \alpha$
D $\frac{1}{2}a^2 \sin \alpha$

28 Gegeven is $\sin\alpha = -0{,}8 \wedge 90° < \alpha < 270°$.
Er geldt
A $90° < \alpha \leqq 135°$
B $135° < \alpha \leqq 180°$
C $180° < \alpha \leqq 225°$
D $225° < \alpha < 270°$

29 Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y > x+1\}$ en $B = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2+y^2 < p\}$.
Als $A \cap B$ precies 3 elementen bevat dan geldt voor p
A $0 < p \leqq 2$
B $2 < p \leqq 4$
C $4 < p \leqq 5$
D $5 < p \leqq 8$

30 De punten A en B liggen op cirkel (M, r). Bij spiegeling in de lijn AB is het beeld van M een punt van cirkel (M, r).
$AB =$
A r
B $r\sqrt{2}$
C $r\sqrt{3}$
D $2r$

MAVO 4 – WISKUNDE II – Dinsdag 26 augustus, 9.30–11.30 uur.

Lees dit eerst

a Schrijf de uitwerkingen van de volgende vier vraagstukken zo op, dat blijkt hoe de antwoorden zijn verkregen.

b Bij berekeningen mag gebruik worden gemaakt van een rekenliniaal of van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen.

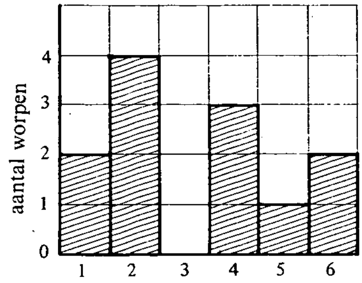
1 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten A, B en C door achtereenvolgens de plaatsvectoren
$\vec{a} = \binom{1}{7}$, $\vec{b} = \binom{3}{-4}$ en $\vec{c} = \binom{8}{6}$.
a. Bewijs dat $\angle AOC = 45°$.
Op het verlengde van het lijnstuk OC ligt een punt D zo, dat $AD = 10$.
b. Bereken $\angle ODA$.
c. Druk $\vec{c}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de cirkel c met vergelijking $(x+2)^2+y^2 = 16$ en de lijn l met vergelijking $x+y = 2$.
De afbeelding van de verzameling

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | (x+2)^2+y^2 \leqq 16 \wedge x+y \geqq 2\}$$

is het vlakdeel V.
a. Teken de cirkel c en de lijn l en arceer het vlakdeel V.
b. Bereken de omtrek van V.
Bij de vermenigvuldiging met het punt $P(2,8)$ als centrum en $\frac{1}{2}$ als factor, zijn c', l' en V' de beelden van achtereenvolgens c, l en V.
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van c' en l'.
d. Bereken de omtrek van V'.

3 Iemand werpt vijftien maal met een dobbelsteen.
Het resultaat van de eerste twaalf worpen blijkt uit nevenstaand histogram.
a. Bereken de modus, het gemiddelde en de mediaan van deze twaalf uitkomsten.
b. Bereken hoeveel procent van de twaalf uitkomsten minder dan 1 van het gemiddelde afwijkt.
c. Na de laatste drie worpen blijkt het gemiddelde van de vijftien uitkomsten $3\frac{1}{3}$ te zijn, terwijl er geen modus is.
Beredeneer welke uitkomsten de laatste drie worpen hebben.
Teken het resultaat van de vijftien worpen in een histogram.



4 Voor elke $k \in \mathbb{N}$ is een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$x \to (1-k)x^2 + (3k-2)x.$$

Neem $k = 0$ en noem de functie die ontstaat f_0,
neem $k = 1$ en noem de functie die ontstaat f_1,
neem $k = 2$ en noem de functie die ontstaat f_2.

a. Bereken de uiterste waarde van f_0.

De grafieken van de functies f_0 en f_1 snijden elkaar in de punten A en B.

b. Bereken de coördinaten van A en B.

c. Teken de grafieken van de functies f_0, f_1 en f_2 in een rechthoekig assenstelsel.

d. Bewijs dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt:
de grafiek van $x \to (1-k)x^2 + (3k-2)x$ gaat door de punten A en B.

HAVO

WISKUNDE – Dinsdag 26 augustus, 9.30–12.30 uur

1 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven
de lijn l met vergelijking $x + y = 0$,
de parabool p met vergelijking $y^2 + 2x - 8 = 0$
en de cirkel c met vergelijking $x^2 + 4x + y^2 - 16 = 0$.
De lijn l snijdt de cirkel c in de punten A en B.

a. Bereken de coördinaten van A en B en toon aan dat A en B op de parabool p liggen.

b. Teken l, p en c in één figuur.

c. Geef de verzameling

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 + 2x - 8 > 0 \wedge x^2 + 4x + y^2 - 16 < 0\}$$

door arceren aan.

d. Welke elementen heeft de verzameling

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 + 2x - 8 > 0 \wedge x^2 + 4x + y^2 - 16 < 0\}?$$

Teken deze elementen in dezelfde figuur.

2 In R_3 zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel gegeven de punten $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$.
Deze punten zijn hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$.
Verder zijn gegeven de punten $P(10,0,1)$ en $Q(0,10,6)$.
a. Bereken de cosinus van de hoek van de lijn PQ en het vlak BGO.
b. De kubus snijdt van de lijn PQ een lijnstuk af.
Bereken de lengte van dat lijnstuk.
c. Onderzoek of de punten D en F gelijke afstanden hebben tot het middelloodvlak van het lijnstuk PQ.

3 Met domein $\mathbb{R}$ zijn gegeven de functies

$$f : x \rightarrow 2^{-x} \quad \text{en} \quad g : x \rightarrow 2^{x^2-2}.$$

a. Los op: $f(x) > g(x)$.
b. Voor welke $p \in \mathbb{R}$ is de oplossingsverzameling van $g(x) \leqq p$ de lege verzameling?
c. Teken de grafiek van f.
Leid uit de figuur af het bereik van de afgeleide functie f'.

4 Op een rij van zes stoelen moeten zes personen A, B, C, D, E en F plaats nemen.
Er wordt hun op geheel willekeurige wijze een plaats aangewezen.
a. Hoe groot is de kans dat A op een hoekplaats komt te zitten met B naast zich?
b. Hoe groot is de kans dat A en B niet naast elkaar komen te zitten?
c. Hoe groot is de kans dat er precies één persoon tussen A en B komt te zitten?

5 Met domein $[0, 2\pi]$ is voor elke $p \in \mathbb{R}$ gegeven de functie $f_p : x \rightarrow \sin px$.
a. Los op: $f_{\frac{1}{2}}(x) = f_{-2}(x)$.
b. Teken in één figuur de grafieken van $f_{\frac{1}{2}}$ en f_{-2}.
c. Voor welke $p \in \mathbb{R}$ heeft de functie f_p als bereik $[0, 1]$?
d. Los op: $f_{-2}(x) = +1 - (\sqrt{3}) . \cos 2x$.

GYMNASIUM EN ATHENEUM

WISKUNDE I – Dinsdag 26 augustus, 9.30–12.30 uur

Kandidaten opgeleid volgens het definitieve examenprogramma maken de opgaven 1, 2, 3 en 4.
Kandidaten van scholen die deelnemen aan het experiment „Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek" bij Wiskunde I maken de opgaven 1, 2, 3 en 5.

1 De functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven door $f : x \rightarrow \dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}}$.

a. Bewijs dat f niet differentieerbaar is voor $x = 4$.

b. Onderzoek f en teken de grafiek van f.

c. Bereken p in het geval dat $\int_1^p f(x)\mathrm{d}x = 14$.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is de kromme K gegeven door $x = 4\ \ln^2 t$ en $y = t^2 - \mathrm{e}^2$.

a. Bewijs dat K de y-as raakt en bereken de coördinaten van het raakpunt. Bereken de tangens van de hoek waaronder K de x-as snijdt.

b. Bewijs dat K precies één buigpunt heeft en bereken de coördinaten van het buigpunt.

c. Stel een vergelijking op van de asymptoot van K. Teken K.

3 Voor elke $p \in \mathbb{R}$ is de functie f_p van $[0, \pi]$ naar $\mathbb{R}$ gegeven door

$$f_p : x \rightarrow \sin^2 x + p \cos 2x.$$

a. Druk het bereik fan f_p uit in p.

b. Voor welke p heeft de grafiek van f_p één of meer raaklijnen die evenwijdig zijn aan de lijn $y = x$?

c. Voor welke $a \in <0, \pi>$ geldt dat $\int_0^a f_p(x)\mathrm{d}x$ onafhankelijk is van p?

4 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + y + 5$.

a. Teken de verzameling van de punten waarin het door de differentiaalvergelijking bepaalde lijnelement een positieve richtingscoëfficiënt heeft.

b. Een functie f met domein $\mathbb{R}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.
Onderzoek het aantal extreme waarden van f en bepaal de aard van deze extreme waarden.

c. Een integraalkromme van de differentiaalvergelijking snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}x + 2$ in het punt A loodrecht.
Bereken de coördinaten van A.

5 Een spel bestaat uit tien kaarten. Deze tien kaarten hebben gelijke ruggen, maar zijn aan de voorzijde al of niet voorzien van een gekleurde stip. Er zijn vier kaarten met een rode stip, vier met een blauwe stip en twee zonder stip.
A trekt vijf keer aselect een viertal kaarten uit het spel en legt dit viertal telkens terug.
Het aantal keren van deze vijf trekkingen dat A vier kaarten met stip trekt, is een stochast X.

a. Bereken de kans dat A bij een trekking van vier kaarten uitsluitend kaarten met een stip trekt en geef de kansverdeling van X.

A schudt de tien kaarten en geeft er drie aan B.

b. Toon aan dat de kans dat B ten minste twee kaarten met een rode stip krijgt $\frac{1}{3}$ is.

B krijgt voor elke kaart zonder stip tien punten en tevens voor ten minste twee kaarten met gelijkgekleurde stip dertig punten.

c. Hoeveel punten verwacht B in zijn drie kaarten?

B gaat ervan uit dat A eerlijk deelt. Hij zal zijn oordeel wijzigen als hij bij de volgende tien keer dat hij drie kaarten ontvangt, ten hoogste één keer twee of drie kaarten met gelijkgekleurde stip ontvangt.

d. Formuleer een nulhypothese en een alternatieve hypothese. Bereken de onbetrouwbaarheid van de toets.

WISKUNDE II – Woensdag 27 augustus, 9.30–12.30 uur

1 In R_3 is ten opzichte van een orthonormale basis voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding A_λ gegeven met matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Toon aan dat voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ de afbeelding A_λ regulier is.

b. Toon aan dat precies twee van de afbeeldingen A_λ orthogonale afbeeldingen zijn.

c. Bewijs dat voor elke $\bar{x} \in R_3$ en voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ de punten $A_0(\bar{x})$, $A_1(\bar{x})$ en $A_\lambda(\bar{x})$ op één rechte lijn liggen.

d. Voor welke λ geldt dat voor alle $\bar{x} \in R_3$

$$|A_\lambda(\bar{x})| = |A_3(\bar{x})|?$$

2 In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de lijnen

p met vectorvoorstelling $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

q met vectorvoorstelling $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

r met vectorvoorstelling $\bar{x} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

s met vectorvoorstelling $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

V is de verzameling punten die gelijke afstand hebben tot de lijnen p en q.

a. Toon aan dat een vergelijking van de verzemeling V is

$$x_1^2 - x_2^2 = 2(x_1 - x_3).$$

b. Toon aan dat de doorsnede van V met het vlak met vergelijking $x_1 + x_2 = 2$ een rechte lijn is.
c. Toon aan dat de lijnen r en s deelverzamelingen van V zijn.
d. Bewijs dat iedere rechte lijn die r en s snijdt en evenwijdig is aan het vlak met vergelijking $x_1 + x_2 = 0$, een deelverzameling van V is.
e. Bewijs dat V de vereniging van alle onder d genoemde rechte lijnen is.

3 In R_2 is ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de vector $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

De afbeelding A is gegeven door $A(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}\, D(\bar{a}, \bar{x})$ waarin

$$D(\bar{a}, \bar{x}) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 \\ a_2 & x_2 \end{vmatrix}.$$

a. Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.
b. Bewijs dat A een reguliere afbeelding is.
c. Bewijs dat voor elke $\bar{x} \in R_2 \setminus \{\bar{o}\}$ geldt:

$$A(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow \lambda = 1.$$

d. Vind de verzameling van de vectoren $\bar{x}$ waarvoor $A(\bar{x}) = \bar{x}$.

Vereniging voor Statistiek

Onder toezicht van de Minister van Economische Zaken neemt de Vereniging voor Statistiek het examen ALGEMENE STATISTIEK-VVS af op:
Maandag 10 mei 1976 in de Stadsgehoorzaal te Leiden en
in de Stadsschouwburg te Heerlen
Degenen die aan het examen wensen deel te nemen dienen zich vóór 16 maart 1976 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie Algemene Statistiek, Zeemanlaan 5 te Leiden. Aanmeldingsformulieren voor dit examen zijn eveneens op dit adres verkrijgbaar.

De MAVO-examens wiskunde in 1975

I. Open vraagstukken

Op 28 mei j.l. organiseerde de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in alle inspecties een vergadering ten behoeve van de docenten die in het schooljaar 1974–1975 betrokken waren bij de eindexamens wiskunde voor mavo-3 en mavo-4.

Het doel van deze vergaderingen was tweeledig:

a zo snel mogelijk na het centraal schriftelijk examen tot een gedachtenwisseling te komen omtrent de normering van het open werk wiskunde en daar waar de beoordeling van het werk op moeilijkheden zou stuiten regionaal tot afspraken te komen, teneinde meer eenheid te verkrijgen bij de correctie door leraar en gecommiteerde (vanzelfsprekend binnen de door de C.V.O. verstrekte bindende normen);

b een bespreking van het niveau van het werk en de redactie van de opgaven.

Van de onder b genoemde bespreking hebben de gespreksleiders een verslag gemaakt dat vaak nog vergezeld ging van aanvullende opmerkingen, vooral t.a.v. de normering. Van dit alles is de hierna volgende samenvatting gemaakt. De verwachting dat voor deze bijeenkomsten méér belangstelling zou zijn dan voor de bijeenkomsten in het verleden, die geruime tijd na het examen aan het begin van het nieuwe schooljaar werden gehouden, werd bewaarheid. Ruim 800 docenten, waarvan 300 lid van de NVWL, woonden de vergaderingen bij. Een vervelende omstandigheid was dat de meeste docenten pas 's morgens de normen in handen hadden gekregen. Ondanks het zorgvuldig gemaakte tijdschema bleken de normen op weg van de drukpers naar de brievenbus op school minstens één dag stagnatie te hebben opgelopen. Hierdoor hadden de gespreksleiders, die gelukkig wat eerder van de normen konden worden voorzien,. beslist geen gemakkelijke taak.

Omtrent het nut van deze vorm van examenbespreking werd geen enkele negatieve reactie ontvangen. Integendeel: in verschillende verslagen werd de hoop uitgesproken het volgend jaar over méér tijd te kunnen beschikken; nu was het haasten geblazen en het mavo-3-werk schoot er hier en daar (weer) geheel of gedeeltelijk bij in. De algemene opmerkingen die in de verslagen over het examenwerk in zijn geheel werden gemaakt hadden meestal alleen betrekking op het mavo-4-werk.

Het mavo-4-examen

a *Niveau*

De overgrote meerderheid van de collega's achtte het niveau van het werk goed; een kleine minderheid vond het aan de moeilijke kant.

Wat betreft de verwerkte stof was het voor bijna iedereen een teleurstelling dat er een opgave met functies als onderwerp ontbrak. Een groot deel van de wiskundelessen wordt immers besteed aan het werken met eerste- en tweede-

graads functies. Hoewel dit onderwerp bij het meerkeuzewerk en het schoolonderzoek natuurlijk wel aan de orde komt, wilde men het blijkbaar bij de open vragen toch niet missen.
Hier en daar vond men dat een onderwerp als spiegelen over het algemeen wat te veel aandacht krijgt.
Omtrent opgave 4 waren de meningen erg verdeeld; deze varieerden van 'leuk', 'origineel', 'test inzicht' tot 'test alleen maar inzicht', 'puzzel', te laag niveau'.
In een zestal verslagen kwam tot uiting dat men voor een goede verwerking van allerlei onderwerpen in het examen liever vijf opgaven heeft dan vier. De vraag is dan wel, of bij een behoorlijk niveau van de opgaven de beschikbare tijd niet te krap wordt. Voor het hier besproken werk bleek de tijd van twee uren in ieder geval voldoende.
Ten aanzien van de bewijs-opdrachten werd opgemerkt dat ook nu weer iets bewezen moest worden dat, omdat het om roosterpunten ging, te gemakkelijk afleesbaar was in een goede tekening. De bewijs-motivatie zou zeker versterkt kunnen worden door punten te gebruiken waarvan de coördinaten nu eens niet uit gehele getallen bestaan. Dit geldt ook voor de bereken-opdrachten. In dit licht bezien oogstte opdracht 2d. dan ook waardering.
Dan vonden enkelen twee maal naar een bewijs vragen in één opgave (opgave 3) iets te veel van het goede; daarentegen kreeg opdracht 1a. waardering, omdat een vraag in deze vorm kettingwerking in de opgave voorkomt.

b *Normering.*
Over het algemeen gaf de normering weinig moeilijkheden (uitgezonderd opgave 2) en was men met de verdeling van de punten tevreden (hier en daar opgave 1c. en 4 uitgezonderd).
Uit bijna alle verslagen bleek dat er weer gediscussieerd is over wat gedaan moet worden als een leerling een fout heeft in een formule (1a.), een fout heeft in een vergelijking (2c), bij een berekening afrondt zonder dat dit gevraagd wordt (2a en 4a), fouten maakt als gevolg van andere fouten, onderdelen niet kan maken tengevolge van fouten in voorafgaande onderdelen of de tekening (2d), rekenfouten maakt.
Dat men op deze punten tijdens de bijeenkomsten nogal eens in een impasse raakte, blijkt uit het dringende verlangen een gedragslijn op te stellen voor dit soort beoordelingsmoeilijkheden. Wat te doen b.v. als een candidaat als antwoord bij opdracht 2c voor de vergelijking van de cirkel c′ geeft $(x-2)^2+y^2 = 4$ of $(x+2)^2+y^2 = 16$ in plaats van het goede antwoord $(x-2)^2+y^2 = 16$.? Er zijn veel correctoren die géén punten toekennen als er dergelijke fouten gemaakt worden, maar er zijn er ook die één punt in mindering willen brengen op de drie te verdienen punten voor dit onderdeel.
Toch zijn de gesignaleerde moeilijkheden voor een groot deel op te lossen als men de opmerkingen op de voorzijde van het normenblad in acht neemt en de bestaande circulaires nog eens naleest.
Een oplossing zou volgens sommigen zijn de normen dusdanig te verfijnen dat nergens meer twijfel zou kunnen bestaan, mede door allerlei alternatieve oplossingen te vermelden. Het gevaar bestaat dan natuurlijk wel dat de normen te omvangrijk en daardoor weer niet-hanteerbaar worden. Bovendien is

volledigheid nooit te bereiken;er zullen altijd moeilijkheden blijven waarvoor de correctoren zelf, in overleg met elkaar, een oplossing moeten vinden. Naar aanleiding van de in de normen niet gewaardeerde tekening van opgave 2 kwamen allerlei ideeën naar voren als: de 10 punten die nu gratis vooraf gegeven worden als beloning toekennen voor de tekeningen; en: als een vraagstuk daartoe aanleiding geeft steeds een tekening eisen en in de normen belonen. Het laatste lijkt aantrekkelijker dan het eerste.

c *Redactie en lay-out.*
Over het algemeen was men over de redactie tevreden. Alleen opgave 2 gaf hier en daar aanleiding tot opmerkingen.
Dan zag men (weer?) tegenstrijdigheid in het kadertje aan de voorkant van het opgavenblad (b bij berekeningen mag gebruik worden gemaakt van een rekenliniaal of van tabellen van wortels en goniometrische verhoudingen) en de opdracht 'Bereken . . .', waarbij zonder een toevoeging als 'in één decimaal nauwkeurig' niet mag worden afgerond en dus meestal juist géén gebruik mag worden gemaakt van rekenliniaal enz. Sommigen bepleitten een herziening van het kadertje, waarbij een onderscheid wordt gemaakt tussen berekenen, benaderen, oplossen en bewijzen.
Om de leesbaarheid van de opgaven te vergroten adviseerden enkelen om de spatie tussen een stukje tekst en een opgave-onderdeel groter te maken.
Hier en daar werd nog een opmerking gemaakt over de volgorde van de opgaven, hetgeen meestal neerkwam op het naar voren brengen van opgave 4 en het meer naar achteren plaatsen van opgave 2.

Enkele opmerkingen over de opgaven afzonderlijk.
Opgave 1.
Onderdeel a was niet zo gemakkelijk. Op een vraag als: bereken $\angle AHC$ reageren veel leerlingen blijkbaar anders dan bij de vraag: toon aan dat $\cos \angle AHC = \frac{16}{25}$. Er waren leerlingen die a niet konden vinden en bij b dus pas één of meer van de lijnstukken AH, CH en AC hadden berekend. Deze kregen toch de hiervoor bestemde waarderingspunten.
Men vond bij c het geven van 4 punten (van de 9) voor het afronden van $6\sqrt{41}$ tot 38,4 nogal royaal beloond. Er zijn bovendien dan altijd mensen die een volkomen verkeerde oplossing, waarbij ook een dergelijke afronding plaats vond, met 4 punten willen waarderen!

Opgave 2.
Deze opgave ging bij veel leerlingen bij onderdeel b de mist in, omdat ze de vermenigvuldiging niet konden uitvoeren en dan zo maar ergens een cirkel tekenden. Veel collega's zochten de oorzaak in de weliswaar correcte maar voor de leerlingen misschien moeilijke redactie van de opgave. Immers: heel wat leerlingen tekenden een cirkel met het punt $P(-2,0)$ als middelpunt (verwarring van de termen 'middelpunt' en 'centrum van de vermenigvuldiging'). Als dieper liggende oorzaak voerden sommigen echter aan dat een vermenigvuldiging toepassen op een cirkel en dan nog met als centrum een punt dat niet in 0 ligt, nogal ongebruikelijk is en daardoor voor de leerlingen

problematisch werd. Omdat door het verkeerd vermenigvuldigen de opgave verder vaak onoplosbaar of te gemakkelijk werd, meenden sommigen de opgave als een 'kettingsom' te moeten aanmerken.
Verscheidene collega's vonden het getal 2 als straal van de cirkel (de oppervlakte van het gevraagde segment is gelijk aan de omtrek ervan) en tevens als factor van de vermenigvuldiging bezwaarlijk.
De hierboven geschetste moeilijkheden maakten de correctie van het vraagstuk vaak moeilijk. Bijna algemeen vond men het jammer dat de tekening niet gevraagd werd, waardoor een beloning voor een blijkens de tekening goed uitgevoerde vermenigvuldiging niet gegeven kon worden. Bij een verkeerde tekening werd de beoordeling van vooral de onderdelen c en d weer moeilijk, omdat de verkeerd getekende lijn en cirkel vaak van correcte vergelijkingen werden voorzien.
Onderdeel d, waar veel candidaten niet aan toe kwamen, werd door verschillende collega's als een goede selectieve vraag gewaardeerd.

Opgave 3.
Deze opgave diende zich aan als vectorenopgave, maar bleek bij onderdeel a verder zonder gebruik te maken van vectoren te kunnen worden gemaakt. Hoewel de mogelijkheid van oplossingen van verschillende aard als een voordeel kan gelden, vonden nogal wat collega's de opgave halfslachtig.
Bij b werd opgemerkt dat de twee hier gestelde vragen misschien beter in twee verschillende onderdelen ondergebracht hadden kunnen worden.
Bij c hadden enkelen liever gezien dat de na onderdeel a genoemde lijnspiegeling nog eens duidelijk werd genoemd.

Opgave 4.
Hier is vooral de waarde van het vraagstuk als examenopgave in het geding geweest. Hoewel op zichzelf een fris, origineel vraagstuk, vonden velen dit toch geen opgave voor het mavo-4-examen, deels vanwege het volgens hen te lage niveau, deels vanwege het puzzelkarakter. Verscheidene collega's vroegen zich af in hoeverre het iets met statistiek te maken had.
Een klein aantal vond dat c met teveel punten werd gehonoreerd.
Bij a werd behalve het enig juiste antwoord 3 ook 3,14 en 3,1 goed gerekend. Het antwoord π kwam ook hier en daar voor. Wat de redactie betreft: liever 'bepaal de modus en bereken het gemiddelde'.

Het mavo-3-examen.
Naar schatting ongeveer 50 collega's hebben als betrokkenen bij het mavo-3-examen hun opinie over dit werk gegeven.
Zowel wat niveau, normering als redactie betreft was men tevreden met het werk. Alleen de beschikbare tijd van $1\frac{1}{2}$ uur vond men over het algemeen aan de krappe kant. 'Waarom ook niet 2 uur, zoals bij het mavo-4-examen?' vroeg men zich af. Verder misten enkelen een opgave over statistiek.

Enkele opmerkingen over de opgaven afzonderlijk.
Opgave 1.
Onderdeel b van de normen was voor velen onbegrijpelijk.

Opgave 2.
Hier kwam weer de vraag naar voren hoeveel en welke punten een leerling moet tekenen alvorens hij de grafiek van een tweedegraads functie mag schetsen.
Opgave 3.
'Licht het antwoord toe' vond men een onduidelijke opdracht; liever splitsen in twee onderdelen.
Opgave 4.
Hier school in feite de enige kritische noot. Men vond de onderdelen c en d tezamen een doublure van opdracht 3b. Door de eis a en b te moeten berekenen en dan nog gesplitst in twee onderdelen, werd er door de kandidaten te zwaar aan getild. Men was tevens van mening dat deze onderdelen vergeleken met a en b met een te hoog aantal punten werden beloond.

Slotopmerking.
Uit verschillende verslagen bleek dat men veel waarde hecht aan gedachtenuitwisselingen over het examenwerk 'heet van de naald'. Hopenlijk is men van elkaar iets wijzer geworden en heeft men een meer eensluidend oordeel gekregen omtrent de eisen waaraan het werk van onze leerlingen moet voldoen.

II. Het meerkeuzewerk.

Op 6 september j.l. organiseerde de NVWL een bijeenkomst in 'De Uithof' te Utrecht.
Het doel was om van gedachten te wisselen over het meerkeuzewerk lbo-mavo-3 en mavo-4. Hiertoe werd een forum gevormd, bestaande uit inspecteur N. J. Zimmerman, vertegenwoordigers van het Cito en leden van de schrijfgroep van het Cito.
De heer Broekman van het Cito gaf een overzicht van de resultaten van het werk, waarbij hij inging op een aantal technische zaken betreffende verschillende items. Hiervoor verwijzen we naar de Cito-publicatie die jaarlijks omstreeks november verschijnt.
Het lbo-mavo-3-examen en het mavo-4-examen hadden de items 6 tot en met 15 gemeenschappelijk.
Naar aanleiding van het werk werden door een aantal collega's nog de volgende opmerkingen gemaakt.
Item 6. Sommigen vonden dat er kennelijk te weinig vaardigheid bestaat in het ontbinden van veeltermen; anderen dachten dat de term 'factor' te weinig bekendheid geniet als het gaat om produkten van veeltermen. Men vond overigens dat dit item een nuttig leerdoel onderzoekt.
Item 9. Enkelen meenden dat in één item niet naar twee verschillende dingen zou mogen worden gevraagd. Als men één van de twee goed maakt wordt dit immers niet beloond. Iets dergelijks geldt ook bij *item 14.*
Item 12. Men was het er over eens dat randen van gebieden en de = tekens in de hiermee samenhangende ongelijkheden geen problemen opleveren.
Item 15. Veel docenten schijnen nog gewoontegetrouw de termen 'kwadratisch'

en 'lineair' te gebruiken, terwijl 'tweedegraads' en 'eerstegraads' de voorkeur verdienen (zie het rapport van de Nomenclatuurcommissie).

Mavo-4

Item 1. Een kleine opmerking t.a.v. de typografische verzorging: grotere vectorhaken.

Item 18. In de stam van dit item had moeten staan: scherphoekige driehoek *ABC*. Ook leerlingen die B hadden aangestreept mochten een scorepunt hebben.
Veel docenten wisten dit niet, ofschoon aan de voorkant van het normenblad voor het open werk reeds een mededeling over dit item was geplaatst.

Item 21. Een groot deel van de aanwezigen vond dat er in het onderwijs te weinig met 'wortelgetallen' wordt gewerkt. Zo wordt b.v. aan herleidingen als $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ vaak te weinig aandacht besteed.

Item 22. Hier had men liever iets grotere gebieden gezien. Nu maakten de leerlingen gemakkelijk afrondingsfouten.

Item 25. Men vroeg zich af of de terminologie van 'volledig origineel' wel overal is ingeburgerd (zie het Rapport van de Nomenclatuurcommissie).

Item 26. Sommige leerlingen denken dat $0° = 360°$, omdat deze waarden dezelfde plaats op de eenheidscirkel hebben. Men vroeg zich af of men zich bij het mavo niet beter kan beperken tot hoeken van maximaal $180°$.

Item 30. Waarschijnlijk is het zo, dat er minder met produktverzamelingen wordt gewerkt dan de diverse leergangen doen vermoeden. Acht men een duidelijk begrip van produktverzameling overbodig?

Over het algemeen genomen toonde iedereen zich tevreden met het werk en de normering. Wel vond men het aantal items voor lbo-mavo-3-werk aan de lage kant en achtte men het wenselijk dat het aantal items in de toekomst vergroot wordt.
Het merendeel van de aanwezigen vond de bijeenkomst, waar in tegenstelling tot vorige jaren voor het eerst het open werk niet aan de orde kwam, zinvol.

Boxtel, 20 september 1975.
Namens het bestuur van de NVWL,
F. J. Mahieu.

Enige opmerkingen naar aanleiding van opgave 2^b van Wiskunde II van het schriftelijk eindexamen V.W.O. 1975

A. E. TIGGELAAR
Leeuwarden
Nieuw Rapenburg 14

A. WESTERVELD
Midlum
Julianalaan 17

Tijdens de correctie van het in de aanhef genoemde onderdeel van opgave 2 zijn we geconfronteerd met iets merkwaardigs. Voor alle duidelijkheid volgt hier eerst nog even de volledige tekst van de bedoelde opgave.

In R_3 is t.o.v. een orthonormale basis voor elke $p \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} p & 0 & -2 \\ -2 & p & 0 \\ 0 & -2 & p \end{pmatrix}$ de matrix van een afbeelding A_p.

a Voor welke p is het A_p-beeld van R_3 een vlak? Stel een vectorvoorstelling van dit vlak op.

b V is het vlak met vergelijking $x_1 - x_2 = 0$. Voor welke p is het A_p-beeld van V een vlak, dat loodrecht op V staat?

c Voor welke $p \neq 2$ is er precies één lijn door $O = (0,0,0)$, die onder A_p op zichzelf afgebeeld wordt. Bewijs dit. Voor welke p is deze lijn puntsgewijs invariant?

Meerdere leerlingen in den lande gaven voor 2b de volgende oplossing. Normaalvector $\bar{n}_v$ van V is $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_p\bar{n}_v = \begin{pmatrix} p \\ -2-p \\ 2 \end{pmatrix}$. Neem $\bar{n}_v \perp A_p\bar{n}_v$; dus

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ -2-p \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow p+2+p = 0 \Rightarrow p = -1$. Voor $p = -1$ staat $V \perp A_pV$. Terecht of niet terecht?

1 Laten we eens nemen de reguliere matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ van een afbeelding A en daarbij een gegeven vlak V met vergelijking $x_3 = 0$.

Een normaal vector van V is $\bar{n}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; een vectorvoorstelling van V is

$\bar{x}_1 = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A\bar{n}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. AV heeft een vectorvoorstelling: $A\bar{x} =$

$\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ met een normaal vector $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. M.a.w. $A\bar{n}_v = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ is helemaal niet een normaal vector van AV, zodat de door de genoemde leerlingen gegeven oplossing in zijn algemeenheid onjuist is.

2 Neem nu eens als voorbeeld een reguliere 'cyclische' matrix, zoals in de opgave voor $p \neq 2$ voorkwam.

We nemen matrix A van een afbeelding en wel $\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$ en passen weer met V: $x_3 = 0$ bovenstaand procédé toe. $\bar{n}_v = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. $A\bar{n}_v = \begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}$.

AV heeft tot vectorvoorstelling $\bar{x} = \lambda\begin{pmatrix}a\\c\\b\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}b\\a\\c\end{pmatrix}$. Is nu $A\bar{n}_v \perp A_pV$?

In 't algemeen niet, tenzij $ac+bc+ab = 0$ is, dus tenzij de kolomvectoren van de 'cyclische' matrix loodrecht op elkaar staan.
Weer komen we tot de conclusie, dat de leerlingen die er zondermeer van uitgingen, dat het A-beeld van de gegeven normaal een normaal is van het A beeld van V foutief handelden.

3 Vervolgens nemen we een reguliere 'cyclische' matrix, die niet orthogonaal is en we vragen ons af: zijn er vlakken zó, dat $A\bar{n}_v \perp AV$ is? Dit leidt tot de volgende stelling:

Gegeven reguliere 'cyclische' matrix $\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & b & a\\ b & c & a\end{pmatrix}$ met $ab+ac+bc \neq 0$.

Te bewijzen: $A\bar{n}_v \perp AV$ als V een vergelijking heeft $p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3 = 0$ met voorwaarde $p_1+p_2+p_3 = 0$ of als V een vergelijking heeft van de gedaante $x_1+x_2+x_3 = 0$.

Bewijs: $\begin{pmatrix}a & b & c\\ c, & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ap_1+bp_2+cp_3\\ cp_1+ap_2+bp_3\\ bp_1+cp_2+ap_3\end{pmatrix} = A\bar{n}_v = \bar{X}$.

Een vectorvoorstelling van V is: $\bar{x} = \begin{pmatrix}-\lambda p_2-\mu p_3\\ \lambda p_1\\ \mu p_1\end{pmatrix}$; dus een vectorvoorstelling van AV: $\lambda\begin{pmatrix}-ap_2+bp_1\\ -cp_2+ap_1\\ -bp_2+cp_1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-ap_3+cp_1\\ -cp_3+bp_1\\ -bp_3+ap_1\end{pmatrix} = \lambda\bar{y}+\mu\bar{z}$.

Nu is $A\bar{n}_v = \bar{x} \perp AV$, als $(\bar{x},\bar{y}) = 0 \wedge (\bar{x},\bar{z}) = 0$ is. Na enige herleiding geeft dit $(ab+ac+bc)(p_1+p_2+p_3)(p_1-p_2) = 0 \wedge (ab+ac+b)(p_1+p_2+p_3)(p_1-p_3) = 0$. Dit voert, wegens $ab+ac+bc \neq 0$ tot $p_1+p_2+p_3 = 0 \vee p_1 = p_2 = p_3$, wat bewezen moest worden. Om nu terug te keren tot opgave 2b: Er was gegeven

een 'cyclische' matrix, n.l. $\begin{pmatrix} p & 0 & -2 \\ -2 & p & 0 \\ 0 & -2 & p \end{pmatrix}$. Verder vlak V met vergelijking $x_1 - x_2 = 0$.
Als $p \neq 2$ genomen wordt, is de matrix regulier en niet orthogonaal, terwijl wat betreft het vlak V, voldaan is aan $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ (zie 3).
Volgens de in 3 bewezen stelling geldt nu: $A\bar{n}_v \perp AV$.
Derhalve was aan de eis $AV \perp V$ voldaan door $(A\bar{n}_v, \bar{n}_v) = 0$ te stellen, zodat de leerlingen, die dit deden, terecht tot het goede antwoord kwamen; 'huns ondanks' of 'per geluk' kan men zeggen.
Men kan bij 't corrigeren nu twee dingen doen:
Eenvoudig zeggen: 'Alles goed en wel, maar deze stelling is zo onbekend, dat geen leerling(e) zich daarop kan beroepen' en op grond daarvan geen enkele waarde, in de vorm van toekenning van punten, aan de vermeende oplossing toekennen, òf: 'Een leerling(e), die de oplossing gegeven heeft, zoals beschreven werd in 't begin van dit artikel, handelde juist, 'zijns (haars) ondanks' en heeft dus recht op 't volledig aantal toe te kennen punten'.
Ondertekenaars van dit artikel stelden zich op 't laatste standpunt, daar zij van mening zijn, dat het in de situatie, waarin de leerlingen op dit moment verkeren, zo vaak voorkomt, dat zij onwetend, maar wel min of meer intuïtief, stellingen gebruiken, waarvan ze 't bestaan niet weten, dan wel, stellingen gebruiken, die misschien wel door hun leraar (lerares) genoemd zijn, maar nooit bewezen werden. Denk alleen maar aan zoveel stellingen in de theorie der limieten, de theorie der continuïteit, differentiaal- en integraalrekening, enz.
Het is per saldo hun mening, dat een vraagstuk zó gesteld moet worden, dat leerlingen niet 'per ongeluk' of zo men wil 'per geluk' een vraag goed kunnen beantwoorden. Men had in plaats van het vlak met vergelijking $x_1 - x_2 = 0$ eenvoudig kunnen kiezen $x_1 + x_2 = 0$. Eén van de ondertekenaars heeft omstreeks 1958 in een uitgebreide verhandeling in een Duits artikel over orthogonaliteit, voornoemde stelling gelezen, maar kan onmogelijk de bron terugvinden. Is er iemand van de collega's, die deze bron kent en hun bekend wil maken?

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde-Olympiade 1975

donderdag 30 oktober, 14.00 tot 17.00 uur

Schrijf *uitsluitend* de antwoorden van de onderstaande vraagstukken op een blad papier, dat uw naam en die van uw school vermeldt.
Een goed antwoord bij een A-, B-, C-opgave levert opvolgend 2, 3, 4 punten op.
Er zijn *twaalf* vraagstukken.

A1 Op hoeveel nullen eindigt het produkt van de getallen 1 t/m 50?

A2 Het produkt van vier opeenvolgende natuurlijke getallen is gelijk aan 110 355 024. Hoe groot is het kleinste van die vier getallen?

A3 Voor welke natuurlijke getallen x kleiner dan 100 eindigt het getal $x^2 - x$ op twee nullen?

A4 Bepaal alle geordende paren (x, y) van positieve gehele getallen x en y met $x < y$, die voldoen aan $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$.

B1 A en B ontmoetten elkaar in de trein op 1 januari 1975. Het gesprek kwam op hun beider leeftijd. A zei 'De som van de cijfers van mijn geboortejaar is gelijk aan mijn leeftijd'. Na enig nadenken stond B toen op en feliciteerde A met zijn verjaardag. Hij kon hem bovendien zijn geboortejaar noemen. Jij ook?

B2 Hoeveel getallen van zes cijfers zijn er waarbij die cijfers in opklimmende volgorde staan (zoals bijvoorbeeld bij 124689)?

B3 Jan heeft van vier van de cijfers 1 t/m 6 een natuurlijk getal van vier verschillende cijfers gevormd en Piet probeert dit getal te raden. Piet raadt 1234 en Jan antwoordt: 'Twee van de door jou genoemde cijfers heb ik gebruikt, maar slechts één van die twee heb je op de goede plaats gezet'. Piet raadt opnieuw en nu 6135. Jan zegt daarop: 'Je hebt opnieuw twee cijfers goed geraden en die staan allebei op de juiste plaats in het getal'.
Welk getal had Jan in gedachten genomen?

B4 Gegeven is een driehoek ABC met P op zijde BC, Q op zijde CA en R op zijde AB zo, dat

$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB} = \frac{1}{2}$$

S is het snijpunt van BQ en CR, T is dat van CR en AP en U is dat van AP en BQ. Bereken nu het getal

$$\frac{\text{oppervl. van } \triangle STU}{\text{oppervl. van } \triangle ABC}$$

C1 Er is een getal van vier cijfers dat
- het kwadraat van een geheel getal is,
- een kwadraat blijft als er het cijfer 7 vóór geschreven wordt.
Welk getal is dat?

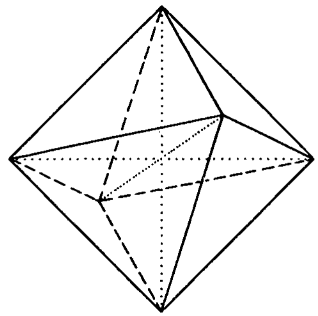
C2 $f(x)$ is een voor alle reële x gedefinieerde funktie met de eigenschap:

$$3f(x-1)+2f(1-x) = 5x \text{ voor elke } x.$$

Bepaal $f(x)$.

C3 De hoekpunten A, B, C en D van kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 12 zijn de middelpunten van vier bollen met straal 6. Bereken de straal van een vijfde bol, die raakt aan elk van de vier eerstgenoemde bollen en ook raakt aan het bovenvlak $EFGH$ van de kubus.

C4 In de onderstaande figuur is een regelmatig achtvlak afgebeeld. Dit veelvlak heeft als zijvlakken acht gelijkzijdige driehoeken.
Van zulk een massief regelmatig achtvlak wordt bij elk hoekpunt een stuk afgezaagd; de zaagsnede gaat door de middens van de in dat hoekpunt samenkomende ribben. Daarna wordt dezelfde handelwijze ook nog eens toegepast op het overblijvende veelvlak.
Druk de totale lengte van het nu tenslotte verkregen veelvlak uit in de ribbe a van het oorspronkelijke achtvlak.



Errata in de opgaven:
C3: toevoegen: ', en die geheel binnen de kubus ligt'.
C4: laatste zin: 'totale lengte' vervangen door 'totale lengte van de ribben'.

Resultaten van 179 scholen van deelnemers met 4 of meer (max. 36) punten.

punten	aantal 5e klassers	aantal 6e klassers	totaal
4	24	15	39
5	42	15	57
6	63	25	88
7	68	32	100
8	78	28	106
9	82	45	127
10	89	58	147
11	77	32	109
12	61	39	100
13	59	32	91
14	99	53	152
15	36	52	88
16	58	38	96
17	37	26	63
18	48	28	76
19	29	25	54
20	22	34	56
21	11	15	26
22	7	11	18
23	10	13	23

punten	aantal 5e klassers	aantal 6e klassers	totaal	cumm. totaal
24	8	14	22	62
25	3	5	8	40
26	4	5	9	32
27	0	3	3	23
28	0	2	2	21
29	3	6	9	18
30	1	1	2	9
31	0	1	1	7
32	0	2	2	6
33	0	3	3	4
34	0	1	1	1
35	0	0	0	0
36	0	0	0	0
$\sum f_i$	1019	659	1678	
$\overline{X}$	11,97	13,96	12,75	
σ	4,82	5,82	5,32	

Deelnemers met 24 punten of meer zijn uitgenodigd voor de tweede ronde

Aantal goede antwoorden bij 61 deelnemers met 24 of meer punten (van 1 deelnemer geen opgave ontvangen)

opgave	aantal goede antw.
A1	41
A2	59
A3	57
A4	56
B1	61
B2	37
B3	60
B4	16
C1	56
C2	49
C3	47
C4	19

Reactie op Korrel van P. G. J. Vredenduin (Euclides 50, p. 390)

We beschouwen de twee vergelijkingen $y-x=0$ en $x^2-2xy+y^2=0$. Ze zijn *gelijkwaardig*, omdat ze dezelfde oplossingsverzameling hebben (namelijk $\{(x, y)|x = y\}$). Ze kunnen echter *niet gelijk* zijn, omdat de bewering de vergelijking $y-x = 0$ is een tweedegraads vergelijking niet waar is en de bewering de vergelijking $x^2-2xy+y^2 = 0$ is een tweedegraads vergelijking wel waar is. Conclusie: de vergelijking $y-x = 0$ is *een* vergelijking van de lijn $\{(x, y)|x = y\}$ en *niet de* vergelijking van deze lijn.
Hoe komt het nou dat mijn conclusie strijdig is met de conclusie van collega Vredenduin? Collega Vredenduin verkiest een relatie op te vatten als een deelverzameling van een produktverzameling, en dit is *formeel* ook juist. Uit mijn voorbeeld blijkt echter dat een belangrijk nadeel van deze opvatting is dat deze ons verhindert vergelijkingen naar graad te klassificeren (de eerstegraads vergelijking $y-x=0$ zou, omdat hij *gelijk* zou zijn aan de vergelijking $x^2-2xy+y^2 = 0$, ook van de tweede graad zijn).
Daarom (*didaktisch* argument) meen ik dat het voor de wiskundeles beter is een relatie op te vatten als een open bewering. Deze opvatting geeft ons *wel* de gelegenheid vergelijkingen naar graad te klassificeren.
Simpel: twee relaties zijn gelijk alleen dan wanneer ze precies het zelfde zijn opgeschreven (zo zijn de vergelijkingen $y-x=0$ en $x = y$ wel gelijkwaardig maar niet gelijk).
Tenslotte: onder een tweedegraads vergelijking in één variabele verstaan we een vergelijking van het type $ax^2+bx+c = 0$ met $a \neq 0$ en niet: een vergelijking gelijkwaardig met een vergelijking van het type $ax^2+bx+c = 0$ met $a \neq 0$ (zoals in Moderne Wiskunde deel 4V, p. 160).

J. Zuidhoek.

Internationaal BCMW-congres

Het volgende door het BCMW te organiseren Internationaal Congres vindt plaats **van 24 tot 27 augustus 1976 te JAMBES** in het Domein Haut-Enhaive en in het Koninklijk Atheneum Jambes.
Onderwerp: **Didactische situaties**
Inlichtingen: te bevragen bij het
Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde
Albertlaan 224, B-1180, Brussel, België, tel. 02/345.31.37

Het congres wordt voorafgegaan door een ontmoeting van de contactgroep 'Didactiek van de wiskunde' van het NFWO op maandag 23 augustus 1976 in het Domein van Haut-Enhaive.

Vereniging voor Statistiek

Examens Statistisch Assistent en Analist VVS 1976
Onder toezicht van de Minister van Economische Zaken neemt de Vereniging voor Statistiek in 1976 de examens Statistisch Assistent en Analist VVS af op de volgende data:
Statistisch Assistent VVS – *maandag 31 mei*
(uitsluitend schriftelijk)
Statistisch Analist VVS
schriftelijk gedeelte – *woensdag 26 mei*
mondeling gedeelte – *30 juni, 1 en 2 juli*
Eventuele verlengde examens zullen omstreeks 1 oktober worden afgenomen.
Het schriftelijk (gedeelte van het) examen wordt afgenomen in de Grote Zaal van Musis Sacrum, Velperplein, Arnhem; het mondelinge gedeelte in het Bouwcentrum, Weena 700, Rotterdam. Degenen, die aan de examens wensen deel te nemen, dienen zich vóór 1 mei 1976 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie, de heer R. Tillemans, Bolthagen 4, Zevenaar.
Aanmeldingsformulieren zijn tussen 1 maart en 30 april verkrijgbaar bij het secretariaat van de Vereniging voor Statistiek, mevrouw M. den Ouden, Weena 700, Rotterdam, tel. 010-116181, toestel 2126.

Boekbespreking

Dr. P. M. van Hiele, *Mogelijkheden van het wiskunde-onderwijs*, 71 blz., brochure, *f* 6,50; Muusses, Purmerend, 1975.

Dit boekje bevat tien hoofdstukken, waarvan er negen eerder zijn gepubliceerd in het boek *Begrip en inzicht* van dezelfde auteur en wel als de hoofdstukken 5, 6, 7, 11, 13, 19, 22, 24 en 26. De hoofdstukken 6 en 22 zijn enigszins bekort. Nieuw is hoofdstuk 10: Moet het L.B.O. zijn eigen leergang hebben?
Aangezien *Begrip en inzicht* uitvoerig door dr. Joh. H. Wansink is besproken in het mei-nummer 1974 van *Euclides* volgt hier slechts een enkele opmerking.
De bedoeling van deze publicatie blijkt uit de Inleiding, waar de auteur zegt: 'Bij gesprekken over wiskunde in het L.B.O. zijn er onderwerpen van didactische aard die telkens in de discussie terugkomen. In deze brochure heb ik verschillende van deze onderwerpen zo toegelicht, dat de gesprekken daardoór vlotter zouden kunnen verlopen.'
In het tiende hoofdstuk gaat de auteur na welke bijzondere didactische eisen gesteld worden aan een onderwijs dat gegeven wordt aan lbo-leerlingen, die voor wiskunde in het algemeen over een geringere intelligentie beschikken en minder gemotiveerd zijn dan leerlingen van andere scholen van voortgezet onderwijs. De schrijver concludeert dat het l.b.o. zijn eigen leergang nodig heeft. Z.i. zijn echter ook leerlingen van het m.a.v.o. en h.a.v.o./v.w.o. gediend met een leergang die aan de door hem genoemde hogere eisen voldoet.
Het boekje kan m.i. ook goede diensten bewijzen aan (aanstaande) leraren van het l.b.o. die zich voorbereiden op het examen voor een wiskunde-bevoegdheid.

E. H. Schmidt

Drie boekjes, rechtstreeks uitgegeven door het K.P.C., Postbus 432 's-Hertogenbosch, welker onderlinge samenhang ze toegankelijk maakt voor een gemeenschappelijke recensie. Het zijn:
(A, 97 blz.) nr. 1 in de serie '*Achtergronden*', Mastery learning, waarin de auteur Nuy de onderwijskundige grondslagen behandelt van een door de Amerikaanse psycholoog B. S. Bloom voorgestelde onderwijsvorm, gericht op rendementsverhoging binnen de bestaande klassikale onderwijsstructuur.
(S, 50 blz.) nr. 1 in de serie ' Practisch experimenteren', *Schoolsucces* voor iedereen?, waarin de

auteur Doomen wijst op het grote belang van individualisering van het onderwijs en als mogelijke oplossing Masterylearning bespreekt. Daarnaast wordt de zogenaamde Taxonomie van Bloom behandeld.
(W, 52+43 blz.) Nr. 3.5 in de serie 'Practisch experimenteren', leerstofanalyse en het *wiskunde-onderwijs*, waarin de auteur Nuy een algemeen model voor de analyse van de leerstof van een boek behandelt en de auteur v. d. Krogt dit model toespitst op de eigen problematiek van het vak wiskunde.
Tot zover de aankondigingen. Ik gebruik bij verwijzing de letters A, S, W met bladzijdennummers. Het werk van K.P.C. en auteurs verdient minstens oprechte dankbaarheid; (S) en (W) worden aan de scholen aangeboden en (A) is tegen kostprijs verkrijgbaar.
Hoewel de auteurs zich gelukkig wel critisch opstellen, zijn ze er toch niet in geslaagd het werk van Bloom e.a. (Carroll, Gagné, Glaser, Wilson) los te maken van Amerika. B.v. behavior i.p.v. behaviour (A, 27), geen andere dan Amerikaanse geschiedenisvoorbeelden (W, 49), geen critiek op Amerikaanse argumentatie, die maar al te vaak bestaat uit 'dan zal' of 'dan zullen' zonder nader bewijs. (A, 40/41, 78) en (S, 28–31). Bloom zelf geeft mij niet de indruk verstand te hebben van taalonderwijs (A, 49) en Wilson heeft zeker geen verstand van wiskundeonderwijs, anders zou hij synthese niet als een soort analyse beschouwen (W, 61). Toch wijdt de auteur vrij veel ruimte aan Wilson en besluit slechts met een uiterst voorzichtig critiekje (W, 65).
Twee interessante punten komen in het werk naar voren; de Mastery-learning wordt in (A, 87) aldus omschreven: Kortweg kan men onderwijs, dat is opgezet volgens de leren-voor-beheersing-strategie, karakteriseren als: instructie aan groepen met ingebouwde terugkoppeling. (Deden de goeie ouwe schoolmeesters dit niet intuïtief?). Het idee is, geen leerling verder te laten gaan zonder dat het vorige na controle beheerst blijkt. Maar ik vind geen uitleg, wat men onder beheersen moet verstaan. Ik vat het op als 'klaar voor overdracht'. Ook de ontwerper heeft er blijkbaar moeite mee. In (S, 22) lezen we n.l.: Het leerproces zou zo moeten verlopen, dat alle leerlingen tenminste tot beheersing komen van de minimumdoelstellingen van het onderwijs. Onder miniumdoelstellingen moet niet verstaan worden een zo laag niveau, dat ook de allerzwakste leerlingen dit nog kunnen bereiken. (S, 22) Ik lees hierin enige tegenspraak! Terecht stelt de auteur zich in (A, 90–92) critisch op, hij bedrijft hier niet alleen journalistiek, maar geeft zijn eigen mening.
Het tweede interessante punt is de taxonomie van Bloom. Hij meent, dat leerstofanalyse niet één-maar twee-dimensionaal moet geschieden. Dat geeft een tabel met dubbele ingang (die in (W, 62) ten onrechte matrix wordt genoemd, omdat een matrix een getallenschema is), waarin niet alleen de leerstof componenten, maar ook de gedragsmogelijkheden van de leerlingen een rol spelen. Zetten we de leerstofcomponenten bovenaan, dan kunnen de gedragsmogelijkheden er voor komen, de eenvoudigste onderaan, in de vorm van een ladder met 6 treden (S, 42). Ik vermeld ze hier na elkaar: kennis – begrip – toepassing – analyse – synthese – evaluatie. Over het idee ben ik enthousiast, maar niet over de uitvoering (ik heb wel eens gedacht, dat onze wiskunde-schoolprogramma's niet in de eerste plaats de te onderwijzen begrippen moesten voorschrijven, maar meer de denkprincipes, b.v. geen deductie op de l.t.s. De leraren hadden dan grotere vrijheid en de examenopgaven zouden vrije-keuze-onderwerpen moeten bevatten). Kan zo'n ladder alle onderwijs bestrijken? Bij het aanleren van een techniek of een taal kom ik tot: waarnemen hoe een ander het doet – proberen, dit te begrijpen – proberen het zelf te doen – begrijpen, waarom juist zo, met zelfcritiek – het onderwijzen aan een ander – eigen initiatief t.a.v. nieuwe wegen, fantasie en creativiteit. Dat zijn er toevallig ook zes.
Behalve enthousiasme heb ik helaas ook veel bezwaren, en wel tegen de exactheid en tegen de taal. In (W, 28 en 34) wordt ten onrechte ondersteld dat opklimming in complexiteit hetzelfde is als opklimming in moeilijkheid. In (W, 19) wordt iets gevraagd, dat al gegeven is (waarschijnlijk een simpele, maar toch vreemd aandoende slip). In (A, 63) wordt een correlatie van ongeveer 0.65 hoog genoemd (tussen schoolprestaties en als tijdsvariabele gegrondveste aanleg). In (W, 69) begint een vraag met 'Wat' in plaats van met 'Hoe groot'. Wat vraagt immers naar een definitie. Mijn critiek op de taal valt uiteen in iets over nodeloze uitvoerigheid en de taal zelf.
Als zoveel boeken, die over deze materie handelen, vragen deze wel niet om vervanging van elke bladzijde door één enkele kernachtige zin, maar toch . . .. De overigens fraaie tabel over regen, hagel en sneeuw komt dubbel voor (A, 51) en (W, 31). In (A, 10/11) wordt een stuk van de inhoudsopgave in uitvoerigheid herhaald. Geen gebrek aan pleonasmen in het groot en in het klein. Wat het laatste betreft: Een curriculumontwikkeling (A, 28/33) en een sequentiële reeks hebben voor mij dezelfde gevoelswaarde als een service dienst!

Behalve dat het Nederlands weinig fraai is (op zich; op de eerste plaats; de drie eerste; iets, wat in plaats van iets, dat; diag-nostisch in plaats van dia-gnostisch) heeft het mij niet in staat gesteld deze recensie te schrijven zonder hulp van een Nederlands en een Engels woordenboek, die mij ook wel eens in de steek lieten.
Volgens de auteur heeft de lezer recht op een minimum aan vakjargon (A, 6), maar niettemin geven ze hem de volle laag daarvan met vele tientallen kogels, waarvan er zelfs enige onontploft blijven liggen: gemanipuleerde stimuli (A, 29), criterion-referenced (A, 89), idiosyncratisch (A, 71). Behalve deze zware munitie klinken er nog talloze 'losse flodders' zo in de geest van: Bij het translateren van deze expressies pretendeer ik zo veel als possibel is de Nederlandse langage te avoideren. Het zou de moeite waard zijn, deze overigens serieuze arbeid te doen opgaan in één door de samenwerkende auteurs in kort en bondig Nederlands te schrijven deel, goed gebonden, met een verklarende lijst van weinige wel noodzakelijke vaktermen, ontdaan van goed en verkeerd Engels (A, 9 en 25) en afgestemd op het toekomstige Nederlandse onderwijs.

J. K. Timmer

Milton D. Eulenberg, Theodore S. Sunko, Howard A. James, *Introductory Algebra*, John Wiley & Sons, Inc., $ 5,90.

Dit boek is bestemd voor die college-studenten, die, zoals wij nu zeggen, met een deficiënt pakket zijn toegelaten. De elementaire algebra wordt behandeld ongeveer in de omvang zoals wij deze in het pre-mammoetstadium behandelden in de eerste drie klassen van de h.b.s. Begonnen wordt met een paragraaf over verzamelingen. Deze stof wordt echter in de rest van het boek niet toegepast. Het laatste hoofdstuk van het boek behandelt nogmaals verzamelingen (vereniging, doorsnede, cartesisch produkt). De lezer krijgt het gevoel dat de schrijvers in onze moderne tijd toch wel iets over verzamelingen moeten zeggen, maar ze weten er eigenlijk geen raad mee. In de opzet van dit boek had deze stof achterwege kunnen blijven.
Al in het begin van het boek gaan de schrijvers in op diverse structuureigenschappen van het integriteitsgebied der natuurlijke getallen. Echter, structuren worden niet bestudeerd, toegepast worden de gevonden eigenschappen niet. Zelfs de distributieve eigenschap wordt nauwelijks genoemd bij de berekening van bijv. $(a+b)(c+d)$. Kortom: een modern vernisje over oude koek. Het boek *geeft* een overmaat aan regels. De leerling krijgt geen kans een regel of een algoritme zelf te formuleren. Zelfs mogelijke uitzonderingen op een regel worden geformuleerd.
Onzorgvuldigheden komen dikwijls voor. Enkele voorbeelden. Het verhaal over wortels is zeer dubieus:
'Thus $+4$ has two square roots; the positive root we designate by $\sqrt{+4} = +2$, and the negatieve square root we designate by $-\sqrt{+4} = -2$" en even verder 'A positive number has two square roots, equal in absolute value but opposite in sign'.
Een ander voorbeeld: 'Every quadratic equation has two roots.'
De adviezen, aan de leerling gegeven, zijn vaak goed, maar komen soms voort uit onzorgvuldige didaktische overwegingen. Hierbij denk ik aan het veelvuldige 'Check the resulting solution'. Op zich een goed advies, maar in een goede oplosmethode is controle, logisch gezien, overbodig. De door het boek gegeven oplosmethode van gebroken vergelijkingen leidt niet tot een keten van gelijkwaardige vergelijkingen (beide leden worden vermenigvuldigd met het k.g.v. van de optredende noemers), waardoor controle *noodzakelijk* wordt.
Diverse eigenschappen worden zonder meer gegeven, niet bewezen, niet door analogie acceptabel gemaakt.
Bijvoorbeeld wordt zonder meer vermeld:
als $x > y$ en z negatief, dan $xz < yz$; direct een toepassing: $6 > -3$ dan $-12 < 6$.
De schrijvers besteden grote aandacht aan de ontwikkeling van de vaardigheid van de leerling. Alleen ben ik bang, dat hun methode zal leiden tot trucmatige routine: massa's opgaven van precies hetzelfde type per paragraaf, uitsluitend ter inoefening van een *gegeven* regel. Ieder hoofdstuk eindigt met een overzicht, een index sluit het boek af.
Door dit boek leert de leerling heel wat doen, of hij inzicht krijgt in wat hij doet is de vraag.
De wiskunde zal door dit boek hem overkomen als een dorre verzameling regels i.p.v. als een boeiend schoon bouwwerk.

W. Kleijne

Kr. De Munter, R. Holvoet, J. Oris, A. Warrinnier, *Moderne wiskunde*, Deel I, *De taal der verzamelingen*, Universitaire Pers Leuven, 1974, 78 blz., 210 BF.

Een moeilijkheid in de universitaire wereld is tegenwoordig, dat weliswaar de wiskundige taal van de studenten aan het veranderen is, maar dat de taal van degenen die zelf geen wiskundigen zijn, maar de wiskunde wel in hun onderricht hanteren, nog niet gewijzigd is. Holvoet en Warrinnier hebben dan ook aan de universiteit van Leuven een serie voordrachten voor wetenschappelijk personeel van de universiteit gehouden om hen op de hoogte te brengen van de moderne terminologie, notatie en vooral het huidige begrippenkader dat gehanteerd wordt. Uit deze serie voordrachten is dit boekje geresulteerd. Het is handig uitgevoerd met slechts rechter pagina's bedrukt en linker pagina's open voor aantekeningen.
Over de inhoud kan ik kort zijn. Het boek gaat over verzamelingen en relaties. Men vindt er begrippen in uitgelegd, maar men zal gelukkig tevergeefs zoeken naar een reeks stellingen. Het boekje is voor het gestelde doel uitermate geschikt samengesteld. In het begin is de stof zeer eenvoudig, zodat oefeningen haast overbodig zijn. Later wordt het iets gecompliceerder, zodat de lezer om de stof te verwerken toch zelf wel iets moet doen. Korte series goed gekozen opdrachten zijn dan toegevoegd.
Eén opmerking zou ik toch willen maken. Wij wiskundigen vinden de anormale (volgens niet wiskundigen: abnormale) randgevallen erg interessant. Ook in dit boekje duiken ze op. Hoeveel afbeeldingen zijn er van de lege verzameling naar zichzelf?, kan je een relatie vinden die zowel reflexief als anti-reflexief is?, is de relatie $\{0, 4\}$ een transitieve relatie? Iemand die de wiskunde toepast stuit niet op dergelijke, zonder enige twijfel leuke, hersenkronkels en zelfs stoot je hem er wel eens mee af. Gezien het doel van het boek zouden ze hier misschien gemist kunnen worden. Maar dit is slechts een opmerking en stellig geen aanmerking.
Het komt me voor dat ook in ons land een dergelijke uitgave uitermate nuttig zou kunnen werken.

P. G. J. Vredenduin

R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and some of Their Applications*; John Wiley and Sons, New York/London/Sydney/Toronto, 1974; £ 14,–.

Dit boek is door een theoretisch fysicus voor fysici geschreven met de bedoeling om hen vertrouwd te maken met de theorie van de Lie groepen en met de betekenis van deze theorie voor de moderne fysica. De schrijver deinst er gelukkig niet voor terug om bij de ontwikkeling van de theorie een groot aantal figuren en tabellen op te nemen, waarmee de stof voor de lezer verduidelijkt wordt. Een tweede kenmerk van het boek is dat wel is waar gestreefd is naar een zo rigoureus mogelijke behandeling, maar dat daarbij steeds in het oog is gehouden dat het boek voor fysici is bestemd; de strengheid van behandeling is dan ook niet tot het uiterste volgehouden.
Na een inleiding over de algemene eigenschappen van Lie groepen en Lie algebra's wordt vooral aandacht besteed aan de klassieke Lie groepen, de klassificatietheorie van Lie algebra's, de klassificatie van reële vormen, aan pseudo-Riemannse symmetrische ruimten en aan de expansie resp. contractie van Lie groepen.
De auteur verwijst naar andere werken over niet door hem behandelde onderwerpen zoals een systematische bespreking van de representatietheorie van Lie groepen en Lie algebra's respectievelijk van de theorie van speciale functies uit de mathematische fysica. Omdat de representatietheorie van Lie groepen niet is behandeld, kon geen systematische discussie van de toepassing van deze theorie in de theoretische fysica plaats vinden. In plaats hiervan is een groot aantal opgaven betreffende de toepassing op fysische problemen opgenomen.
Het boek geeft veel en wekt nieuwe verlangens op. Het is waardevol voor hen wie het samenspel tussen de moderne wiskundige ontwikkeling en de theoretische fysica boeit.

W. J. Claas sr.

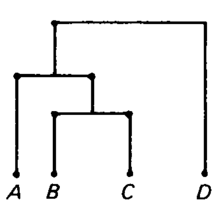
Kr. De Munter, R. Holvoet, J. Oris, A. Warrinnier, *Moderne wiskunde, deel II, lineaire algebra en meetkunde*, Universitaire Pers Leuven, 1975, 93 blz., 360 BF.

Ook dit boek wil de gemeenschappelijke basiskennis en de terminologie weergeven waarover de aankomende student beschikt. In Nederland is het echter ook zeer geschikt voor ieder die zich op een gemakkelijke manier wil inwerken in de moderne wiskunde. Evenals deel I is het boek uitermate helder en overzichtelijk geschreven. Geen ingewikkelde redeneringen; goed gekozen eenvoudige vraagstukken ter ondersteuning van de begripsvorming.
We maken eerst met enkele basisstructuren kennis: groepen, ringen, lichamen en vectorruimten. Een diversiteit van voorbeelden maakt duidelijk wat structuren eigenlijk betekenen.
Vectoren worden ingevoerd door eerst de ekwivalentierelatie ekwipollent te definiëren, daarna over te gaan op translaties en tenslotte een translatie te identificeren met een (vrije) vector. Zo ontstaat het eerste voorbeeld van een vectorruimte. Het gepunte vlak, waarin punten met vectoren geïdentificeerd worden, is het tweede voorbeeld. En dan volgen er natuurlijk meer.
Lineaire afbeeldingen van vectorruimten op zichzelf met als operaties optelling en samenstelling vormen weer een mooi voorbeeld van een ring.
Natuurlijk wordt het begrip basis van een vectorruimte ingevoerd. Daarmee is de weg geopend via de lineaire afbeeldingen de matrices en het rekenen met matrices te definiëren.
Tot slot nog een kort woord over determinanten (alleen 2×2) en over het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van de veegmethode.
Graag wens ik dit boek een goede toekomst toe.

P. G. J. Vredenduin

H. H. Bock, *Automatische Klassification*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, Zürich, 1974.

Het, in ons land meestal als 'Cluster-analyse' gekenmerkte, vak is in zijn mathematische modelvorming vrij recent. Het probleem is oud; we gaan uit van een aantal objecten (b.v. dieren of planten) en willen deze indelen in klassen. Soms is het duidelijk, bij een bijeengeraapt hoopje van vissen en honden is het duidelijk wat vis is en wat hond is. Maar variëteiten van tulpen zijn al veel moeilijker te klassificeren. We kunnen b.v. uitgaan van een aantal 0,1 kenmerken en verwantschap aflezen als een afstand die we verkrijgen door het aantal verschillende kenmerken te tellen.
De objecten worden dan ingedeeld in klassen die zelf in een hiërarchie ondergebracht zijn, tellen tot het niveau waarop de klassen verbonden worden geeft een maat van de verwantschap, B en C zijn nauw verwant, A en D slechts verre verwanten.



Wanneer men niet met 0,1 kenmerken werkt, maar met kenmerken die beschreven worden door een (reëel of rationaal) getal, kunnen we in het geval van twee kenmerken, de objecten representeren door punten in een vlak. Hoe verdelen we de punten in een aantal klassen (clusters) als we al of niet weten hoeveel klassen er zijn. Hoe bepalen we of een bepaald punt tot de ene of de andere klasse behoort? Men kan werken met rechte lijnen die in het vlak de klassen scheiden, en deze lijnen de klasse-indeling laten bepalen.
Hoe vindt men die lijnen, zijn ze altijd te vinden?
Het zal duidelijk zijn dat niet steeds zulke lineaire drempelfuncties te vinden zijn. Dan andere als rechte lijnen gebruiken?

Deze vragen goed wiskundig behandelen vraagt velerlei wiskundig gereedschap, statistiek, beslis-kunde, lineaire algebra, grafentheorie, mathematisering van leerprocessen (er komt een nieuw object bij dat duidelijk tot klasse 1 behoort, dan moet de beschrijving met de drempelfuncties misschien aangepast worden) en nog veel meer. Het vak is jong, maar groeit snel, dit boek van 475 pagina's bevat een literatuurlijst van vele honderden titels van boeken en artikelen! Vele auteurs ontwerpen varianten van eerder voorgestelde methoden, met eigen voor- en nadelen. In dit boek is een goede documentatie te vinden over vele van deze procedées. Het woord automatisch duidt er natuurlijk op dat bij deze processen als het over vele objecten met vele kenmerken gaat, de computer ingeschakeld moet worden.
De 42 paragrafen zijn verdeeld over 9 hoofdstukken in drie delen, namelijk: I. Gelijkvormigheids-, afstands- en homogeniteitsmaten; II. Indeling in disjuncte klassen; III. Niet disjuncte en hiërarchische verdelingen. Bij ieder onderdeel zijn voorbeelden gegeven en vergelijkingen van verschillende methoden. Hoewel lang niet triviale wiskundige formules gebruikt worden krijgt men de indruk dat een unificatie binnen dit vak nog maar nauwelijks begonnen is. Maar dat is geen verwijt aan de auteur van dit werk, die veel materiaal in een zinvolle samenhang bijeen maakt.

F. van der Blij

IOWO

Onlangs is het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs gestart met de uitgave van de WISKRANT, een informatieblad voor alle wiskundeleraren van het voortgezet onderwijs in Nederland.
De eerste twee nummers zijn verschenen en twee exemplaren daarvan zijn verstuurd naar alle scholen voor voortgezet onderwijs.
In de Wiskrant geven wij een beeld van onze activiteiten t.a.v. wiskunde-onderwijs aan leerlingen van 12 tot 19 jaar. Activiteiten die vaak net op gang zijn gekomen. Denk hierbij aan stukjes leerstof die in de klas zijn uitgeprobeerd of aan experimenten in het kader van de differentiatieproblematiek. Juist door vroegtijdige publicatie van dit materiaal stellen wij een ieder in de gelegenheid hierin mee te denken.
De drie nummers van de eerste jaargang zijn gratis beschikbaar voor iedere belangstellende. Presentexemplaren aan te vragen bij: IOWO, Redactie Wiskrant, Antwoordnummer 1566, Utrecht.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

343. Via de heer R. Troelstra ontving ik de volgende opgave, waarin weer het getal 1976 een rol speelt.
Begin met 1976. Tel de cijfers op: $1+9+7+6 = 23$; $23 = 3 \pmod{10}$. Schrijf achter de 6 het cijfer 3.
Ga zo verder: $9+7+6+3 = 25$; $25 = 5 \pmod{10}$. Schrijf achter de 3 het cijfer 5.
Neem weer de som van de laatste vier cijfers, enz.
Wordt gevraagd:
a Komt de cijferrij 1976 ooit weer terug?
b Krijgen we wel eens 9197?
c Krijgen we wel eens 1234?

344. In een Pelican Book (Henrietta Midonick, The Treasure of Mathematics 2) vond ik een serie originele opgaven van Diophantus met de uitwerkingen. Hieronder volgt er één.
Vind drie vierkanten zo, dat de som van hun vierkanten weer een vierkant is.

Oplossingen

341. In een vlak liggen n rode en n blauwe punten waarvan er geen drie op één rechte lijn liggen. Bewijs dat het mogelijk is elk rood punt met een blauw punt te verbinden zo, dat geen twee verbindingslijnstukken een punt gemeen hebben.
1. Beschouw alle bijectieve afbeeldingen van de rode naar de blauwe punten. Bepaal de som s van de bijbehorende verbindingslijnstukken. Neem een van deze afbeeldingen waarvan s minimaal is. Onderstel dat bij deze afbeelding de lijnstukken AC en BD (A en B rood) elkaar snijden. Vervang de lijnstukken AC en BD door AD en BC. De som neemt dan af. Een afbeelding met minimale som voldoet dus aan de eis.
2. Met volledige inductie. Neem het convexe omhulsel van de puntverzameling (span er een touw om). Onderstel het omhulsel bevat zowel rode als blauwe punten. Er is dan een consecutief paar bestaande uit een rood en een blauw punt. Verbind dit. Daarmee is n met 1 verminderd.
Onderstel het omhulsel bestaat uit alleen rode punten. Kies een rechte lijn l die niet evenwijdig is aan aan een verbindingslijn van twee van de punten. Verschuif l evenwijdig van rechts naar links. Eerst ligt dan rechts van l alleen 1 rood punt en zijn dus rechts de rode punten in de meerderheid. Later liggen rechts van l alle punten op 1 rood na en zijn dus rechts van l de blauwe in de meerderheid. In een tussenstand zijn er dus rechts van l evenveel rode als blauwe punten. Waarmee de reductie op lagere n voltooid is.
Opmerking. Het is niet noodzakelijk te eisen dat geen drie punten op één rechte lijn liggen, maar wel dat geen vier punten op één rechte lijn liggen.

342. Iemand heeft vijf gewichten van resp. 1, 2, 3, 4, 5 gram. Hij heeft een normale weegschaal zonder gewichten. Door maximaal vijf wegingen moet hij de vijf gewichten identificeren.
De hier volgende oplossing is afkomstig van Aaron J. Friedland en werd mij toegezonden door Dr. P. Bronkhorst.
Noem de gewichten a, b, c, d, e. Kies er vier uit en noem die a, b, c, d. Vergelijk door weging. $a+b$ met $c+d$; $a+c$ met $b+d$; $b+c$ met $a+d$. Er kunnen zicn de volgende mogelijkheden voordoen:

A	B	C	D	E
$1+2 < 3+4$	$1+2 < 3+5$	$1+2 < 4+5$	$1+3 < 4+5$	$2+3 < 4+5$
$1+3 < 2+4$	$1+3 < 2+5$	$1+4 < 2+5$	$1+4 < 3+5$	$2+4 < 3+5$
$2+3 = 1+4$	$2+3 < 1+5$	$1+5 = 2+4$	$1+5 < 3+4$	$2+5 = 3+4$

Is er drie keer geen evenwicht en komt op de zewar schaal drie keer hetzelfde gewicht voor, dan hebben we geval B. Dan zijn dus de 5 en de 4 al geïdentificeerd. Door op te merken, dat $1+2 < 5$; $1+3 < 5$; $2+3 = 5$ kunnen we het derde geval onderscheiden van het eerste en tweede. Dan ligt de 1 vast. Door één weging beslissen we ten slotte welk van de resterende gewichten 2 en welk 3 is. Geval D wordt analoog behandeld. We onderscheiden daar de eerste regel van de andere twee door op te merken, dat $2+3 = 5$; $2+4 > 5$; $2+5 > 4$. Nu de gevallen A, C en E. Lichtste en zwaarste gewicht liggen daar al vast, maar het kunnen zijn 1 en 4; 1 en 5; 2 en 5. Vergelijk de twee overige met elkaar. Dit kunnen zijn resp. 2 en 3; 2 en 4; 3 en 4. Nu kunnen we de drie gevallen van elkaar onderscheiden door op te merken: $1+2 < 5$; $1+2 = 3$; $2+3 > 1$. Hierin is 5, 3 resp. 1 het nog niet in de weging betrokken gewicht e.
Opmerking. Vijf wegingen is het minimale aantal. A priori zijn er $5! = 120$ mogelijkheden voor de toekenning van 1, 2, 3, 4 en 5 aan de vijf gewichten. Elke weging kan drie verschillende uitslagen hebben. En $3^4 < 5!$.

Vacantiecursus voor leraren VWO en andere belangstellenden 1976

De jaarlijkse door het Mathematisch Centrum te organiseren Vacantiecursus voor leraren VWO en andere belangstellenden zal dit jaar plaatsvinden:
in AMSTERDAM op 11 en 12 augustus 1976;
in EINDHOVEN op 12 en 13 augustus 1976.

ONDERWERP: 'FUNCTIONAALANALYSE'

De sprekers, in alphabetische volgorde, en de (voorlopige) titels van hun voordrachten zijn:

Prof. Dr. S. T. M. Ackermans (Techn. Hogeschool Eindhoven)
Functionaalanalyse en toepassingen;
Prof. Dr. M. A. Kaashoek (Vrije Universiteit, Amsterdam)
Lineaire operatoren;
Prof. Dr. A. F. Monna (Rijksuniversiteit Utrecht)
Geschiedenis van de functionaalanalyse;
Dr. J. de Vries (Mathematisch Centrum, Amsterdam)
Oneindig dimensionale genormeerde lineaire ruimten (inleiding);
Prof. Dr. A. C. Zaanen (Rijksuniversiteit Leiden)
Integratietheorie.

Nadere inlichtingen zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-1005, tel. 020-947272, toestel 64.

INHOUD

Tentamen didactiek van de wiskunde 253
Didaktische literatuur 255
A. W. Boon: Keuzevak topologie 258
A. W. Boon en W. J. Groenevelt: Keuzevak: Getallentheorie 260
Examens Algemeen Voortgezet Onderwijs in 1975 261
Mededeling 279
De MAVO-examens wiskunde in 1975 280
A. E. Tiggelaar en A. Westerveld: Enige opmerkingen naar aanleiding van opgave 2b van Wiskunde II van het schriftelijk eindexamen V.W.O. 1975 286
Eerste ronde Nederlandse wiskunde-Olympiade 1975 289
J. Zuidhoek: Reactie op korrel van P. G. J. Vredenduin (Euclides 50, p. 390) 292
Mededeling 292
Mededeling 293
Boekbespreking 293
Mededeling 298
Recreatie 299
Mededeling 300