

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

51e jaargang

1975/1976

no 3

november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 28,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).
Prijs nummer 4/5 f 9,50.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 250,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 135,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 75,—.

Oorzaken van slechte proefwerkresultaten

H. BOSSCHER

Oegstgeest

Regelmatig komt het voor dat bij wiskundeproefwerken de resultaten niet voldoen aan de verwachtingen die de leraar had.

Analyse van proefwerken geeft een aantal mogelijke oorzaken.

- a De aard van het proefwerk.
- b De ordening van de leerstof.
- c De situatie en de verwachting.

I Theoretische overwegingen.

a De aard van het proefwerk.

De leraar probeert in het proefwerk dikwijls inzicht te toetsen door opgaven te geven waarbij het niet voldoende is dat men de in de betreffende hoofdstukken behandelde vraagstukken begrepen heeft.

Ook wiskundige kennis en vaardigheid uit vorige hoofdstukken is nodig. Leerstof en vraagstukken uit de vorige hoofdstukken zijn niet altijd opnieuw aan de orde gekomen. In principe hebben de leerlingen de benodigde wiskundige technieken wel gehad. Daarvan is in het geheugen dan ook wel een *sporensysteem* ontstaan, maar dat systeem is tijdens de nieuwe leerstof niet *geactualiseerd*. Het betekent dat de leerstof niet geactiveerd is binnen de context waarin het destijds aan de orde was en waardoor er dus ook geen *integratie* tot stand kan worden gebracht met de nieuwe leerstof.

Transfer naar andere vakken, bv. natuurkunde, ontbreekt dan ook. Er treedt *systeemscheiding* op t.o.v. de verschillende kennisgebieden. Ter voorkoming van deze problemen moeten we er voor zorgen dat het leerresultaat steeds voldoende *wendbaar* wordt aangebracht, in verschillende situaties wordt toegepast.

Het is zinloos om inzicht te willen toetsen als er in het voorafgaande leerproces geen *inzicht-bevorderend-leren* heeft plaatsgevonden.

Er zijn eveneens bezwaren aan te voeren tegen een ander type proefwerk. Voorstanders van het aankweken van zgn. routine, bedoeld wordt dan een groot aantal eenvoudige opgaven van hetzelfde type maken, realiseren zich onvoldoende dat juist daardoor systeemscheiding bevorderd wordt. De be-

oordeling gaat bovendien plaatsvinden op grond van de vraag of men in staat is in een beperkte tijd veel van zulke opgaven te maken.

De vraag is of 'selectie' daarmee wel op de juiste wijze plaatsvindt.

Vaardigheid in het wiskunde-onderwijs is noodzakelijk, daarover is iedereen het wel eens. De vraag is echter of deze vaardigheid middel is of doel.

Inzicht-bevorderend-leren.

Het gaat erom dat leerlingen algemene principes van oplossingsmethoden in abstracte vorm leren hanteren. Het is dus zeker niet voldoende dat leerlingen bepaalde voorbeelden gaan memoriseren, om vervolgens zelf precies zulke opgaven te gaan maken. Tot onze taak in het (wiskunde)onderwijs behoort ook dat wij de leerlingen *leren* hoe zij problemen moeten aanpakken. Het leerresultaat moet zijn dat de leerling in staat is om oplossingsmethoden expliciet te formuleren en daarna problemen op te lossen. Zij moeten bv. ook leren hoe zij een moeilijk, complex probleem eerst kunnen terugbrengen tot een vergelijkbaar eenvoudiger probleem.

Van Parreren heeft in zijn *systeemtheorie* aandacht op deze zaken gevestigd. Daarbij is ook aandacht geschonken aan de invloed van aanschouwelijk materiaal op het denken en speelt de *waarneming* op basis van de *Gestalt-psychologie* een belangrijke rol. Onderzoekingen hebben daarbij aangetoond dat de wijze waarop het materiaal wordt aangeboden een belangrijke voorwaarde is om de beoogde leerresultaten te bereiken.

Willen wij in het onderwijs betere leerresultaten bereiken dan zullen wij ons niet alleen moeten bezig houden met de leerstof maar ook met de wijze van leren. De manier waarop problemen moeten worden aangepakt door leerlingen is dikwijls iets dat niet aan de orde komt omdat de leraar de aanpak haast vanzelfsprekend kiest en niet voldoende analyseert waarom hij dat zo doet en hoe hij de leerlingen moet leren om ook tot de juiste *probleemaanpak* te komen.

b De ordening van de leerstof.

Oorzaken van slechte proefwerkresultaten kunnen ook in het leerproces liggen door een verkeerde opbouw van de leerstof. Teneinde dat straks bij een aantal voorbeelden te kunnen toelichten eerst nog even iets over een model van leerstofordening.

Van Dormolen sluit in zijn model O.S.A.E.V. aan op de leerpsychologie van Van Parreren. Hij onderscheidt: de fase van het oriënteren; de fase van het sorteren; het controleren of abstractie bereikt is; de fase van het expliciteren en de fase van het verwerken. Het model is bedoeld voor het leren van begrippen, eigenschappen, algoritmen enz.

Bij het *oriënteren* gaat het om actualisering van geheugensporen van relevante voorkennis en om probleemstelling en doel.

Bij het *sorteren* wordt het nieuwe materiaal aangeboden en geordend, op basis waarvan de nieuwe kennis moet ontstaan. De leerlingen kunnen alleen of met behulp van het boek en/of de docent tot overzicht komen. Het materiaal moet in zekere mate voorgestructureerd worden aangeboden.

Tijdens de *abstractie* ontstaat het inzicht om n.a.v. het geordende materiaal

te kunnen onderscheiden. Dit kan zijn wat wel en wat niet tot het nieuwe begrip behoort, waarvoor de eigenschap wel geldt en waarvoor niet, wanneer het algoritme wel toe te passen is of wanneer niet. Abstractie vindt o.a. plaats op grond van 'aha'-ervaringen.

Bij het *expliciteren* moet de leerling komen tot het met behulp van taal en/of symbolen expliciteren van hetgeen ontdekt is. Hieronder valt m.n. ook het expliciet kunnen beschikken over oplossingsmethoden en methoden van aanpak.

Bij het *verwerken* tenslotte wordt het nieuw geleerde geoefend, vastgelegd en in verband gebracht met reeds aanwezige systemen, (wendbaarheid van het nieuwe leerresultaat en transfer naar andere systemen).

Indien nu in het leerproces abstractie niet bereikt wordt of de leerling niet komt tot expliciteren, dan zal hij moeten werken op basis van de voorbeelden. Het leerresultaat biedt dan geen mogelijkheden om in afwijkende gevallen tot oplossing van het probleem te komen.

Leren bij de opvoeding.

Een voorbeeld van een leerproces doet zich voor in de opvoeding. Doordat kinderen in allerlei bijzondere gevallen ervaren wat ze beter wel kunnen doen en wat niet, *sorteren* ze en komen tot *abstractie* wanneer ze zelf in staat zijn, om, zonder beredenering, te weten wat ze wel en wat ze niet zullen doen.

Vervolgens zijn ze ook in staat op *expliciet* onder woorden te brengen, los van de concrete voorbeeldjes, hoe zij zich willen gedragen en waarom.

Er ontstaat een soort definitie van hun gedrag. Bij het *verwerken* moet dit dan in de praktijk blijken en zal het geïntegreerd worden in het karakter.

c De situatie en de verwachting.

Dikwijls is het maken van fouten bij proefwerken ook een gevolg van slordig werken of slordig denken. Het komt bij proefwerken nogal eens voor dat wij leerlingen daartoe brengen, door hen onvoldoende tijd te geven om rustig na te denken.

De leerlingen weten dan uit *ervaring* al dat ze bij een proefwerk te weinig tijd hebben en stellen zich daarop reeds bij voorbaat in. Dit kan er toe leiden dat opgaven worden gemaakt op basis van hetgeen de leerling aanschouwelijk *waarneemt*.

Volgens de Gestaltpsychologie vindt het waarnemen plaats in grotere gehelen, die ontstaan doordat in het materiaal tijdens het waarnemen gedeelten als een 'Gestalt' worden gestructureerd. Het visuele beeld krijgt dan een zekere *valentie* voor de leerling waardoor een bepaalde reactie ontstaat, (valentie is dan de ingebouwde signaalwaarde van het materiaal).

Deze visuele waarneming is niet altijd in overeenstemming met de wiskundige spelregels!

Op grond van ervaring met vorige proefwerken kunnen bij de leerlingen dus verwachtingen ontstaan t.a.v. tijdgebrek, waardoor rustig nadenken niet goed mogelijk is. Ook kunnen verwachtingen ontstaan t.a.v. de moeilijkheidsgraad

van het proefwerk. Indien er een te groot verschil bestaat tussen het *prestatie-niveau* van de leerling en de gestelde *norm* kan dit bij leerlingen een ongunstige invloed hebben op de *motivatie* of leiden tot *spanning* op grond van de verwachting te falen.

De wijze waarop de leraar de hele proefwerksituatie hanteert, het affectief klimaat van de situatie kan ook positief werken. Ook is het van belang het proefwerk op te bouwen naar opklimmende moeilijkheidsgraad.

De leerlingen kunnen dan de ervaring hebben van 'een goed begin is het halve werk'.

II Enkele voorbeelden.

Aan de hand van enkele concrete voorbeelden uit de praktijk wil ik nu proberen het bovenstaande toe te lichten. U zult deze voorbeelden ongetwijfeld zelf met vele andere kunnen uitbreiden. Bij ieder onderwerp gaat het in feite om dezelfde soort problemen.

Ik denk bv. aan het herleiden van wortels, het kwadraat afsplitsen bij 2e-gradsfuncties (niet als cultus maar als middel tot begrip van maximale – en minimale waarden), het bepalen van (inverse) functies, het herleiden van goniometrische functies, het samenstellen van transformaties, het berekenen van integralen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen enz.

Voorbeeld I.

Bij een proefwerk over lijnen en cirkels waren in het boek alleen opgaven gemaakt over cirkels met het middelpunt in de oorsprong en over raaklijnen in de oorsprong of vanuit de oorsprong aan een gegeven cirkel, waarvan het middelpunt bekend is. In het proefwerk werd verwacht dat leerlingen ook in staat zouden zijn om vergelijkingen van raaklijnen te bepalen in *willekeurige* punten van cirkels waarvan het middelpunt *niet* in de oorsprong ligt. Bovendien werd verondersteld dat leerlingen in staat waren om, via 'kwadraat-afplitsen', hetgeen vroeger behandeld was, uit de vergelijking van de cirkel *zelf* het middelpunt te bepalen.

De aard van het proefwerk sloot niet aan bij de behandelde leerstof. Er was onvoldoende integratie van oude en nieuwe leerstof tot stand gekomen. Oplossingsmethoden waren onvoldoende geëxpliciteerd.

Voorbeeld II.

De opdracht is om de breuk $\frac{3x+1}{x-1}$ te herleiden tot een optelling van een geheel getal en een breuk. De leerling gaat een 'staartdeling' maken.

$$\begin{array}{r} x-1 \overline{) 3x+1} \\ \underline{3x-3} \\ 4 \end{array}$$

Maar wat er nu verder gebeuren moet weet de leerling niet. Dit soort herleidingen geeft problemen omdat niet geëxpliciteerd is wat delen betekent,

m.n. wat een rest betekent. De rest 4 moet nog gedeeld worden door $x-1$. Reeds bij het basisonderwijs zijn al veel staartdelingen gemaakt, maar het is vermoedelijk gebeven bij het nadoen van de voorbeelden. De leerstof moet geactualiseerd worden. Dit kan gebeuren met voorbeelden als

$$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}, \text{ waarbij } 4\frac{2}{3} \text{ dan gelezen kan worden als } 4 + 2:3.$$

Voorbeeld III.

Als van leerlingen verwacht wordt dat ze breuken kunnen optellen maken ze wel de volgende fout

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{x(x-10)}.$$

Eerst moet geactualiseerd worden wat er over het optellen van breuken bekend is.

Afhankelijk van het niveau dienen voorbeelden behandeld te worden als

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1 \cdot b}{a \cdot b} + \frac{1 \cdot a}{b \cdot a} = \frac{b}{a \cdot b} + \frac{a}{a \cdot b} = \frac{a+b}{a \cdot b}$$

We kunnen echter niet volstaan met het behandelen van deze voorbeelden die dan nagedaan worden. De leerling moet geleerd worden te *expliciteren* hoe breuken moeten worden opgeteld. *Waarom* en *hoe* de noemers gelijknamig moeten worden gemaakt.

Dat eerst van iedere breuk de teller en de noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigd moeten worden. De leerlingen moeten na enige tijd in staat zijn om dit oplossingschema *in woorden* zelf te geven, dit moet regelmatig worden herhaald.

Als we dit niet doen gaan leerlingen bij proefwerken, als ze zich (moeten) haasten, fouten maken doordat ze op basis van visuele waarneming gaan werken en niet op basis van geleerde oplossingschema's.

Voorbeeld IV.

Bij herleiding van $\frac{4}{2p}$ wordt dit gelijk gesteld aan $2p$ i.p.v. $\frac{2}{p}$.

Er is blijkbaar niet zorgvuldig nagedacht over wat delen betekent maar er is vooral op basis van aanschouwelijkheid een resultaat opgeschreven. In de opgave is nl. de letter p gebonden gezien aan het getal 2 (Gestalt).

Zodra gedacht wordt $\frac{4}{2} = 2$ vindt de volgende stap plaats op basis van deze Gestalt en komt er $\frac{4}{2p} = 2p$.

Er wordt dan niet gedacht dat 4 gedeeld moet worden door 2 en ook gedeeld moet worden door p .

Er worden herleidingen gemaakt op basis van visuele *waarneming* i.p.v. door middel van *denkprocessen*.

Voorbeeld V.

Het getal 24 moet worden ontbonden in factoren. De leraar constateert dat de leerling dit niet meer kan. De leraar doet het nu voor.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 2 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 1} \end{array}$$

Als de leerling bovenstaand plaatje weer ziet, herinnert hij zich dat hij zulke plaatjes inderdaad eerder heeft gezien. Van hem werd kennelijk verwacht dat hij nog zo'n 'staart' kon maken. Hem waren zulke voorbeelden geleerd, maar kennelijk was het *expliciteren* niet aan bod gekomen. De leerling weet niet wat ontbinden in factoren betekent. Hij weet niet dat het gaat om het kleinste positieve gehele getal waardoor het getal gedeeld kan worden en dat vervolgens het quotiënt weer door het kleinst mogelijk positieve gehele getal moet worden gedeeld en dat getallen waardoor je dan gedeeld hebt de factoren zijn. De staart, het plaatje zelf, is geleerd maar er is niet via het plaatje geleerd wat ontbinden in factoren is.

De leraar moet regelmatig vragen stellen over de 'spelregels', in het begin erg concreet later meer als een signaal bv: 'waar moet je op letten'. Als dat regelmatig gebeurt krijgen op den duur de opgaven zelf al *valentie* voor het hanteren van de goede oplossingsschema's.

III Natuurkunde-onderwijs.

Bovenstaande problemen gelden eveneens in bv. het natuurkunde-onderwijs. Leraren constateren dat leerlingen bepaalde wiskundige vaardigheden niet beheersen en concluderen vervolgens dat hen dit niet goed geleerd is. Dat zou dan een gevolg van de modernisering van het wiskunde-onderwijs kunnen zijn. Natuurlijk hebben de leerlingen de vaak zeer eenvoudige opgaven met bv. breuken wel geleerd.

Aan het eind van het basisonderwijs waren de leerlingen in staat om zulke opgaven te maken. Trouwens ook voor de modernisering bestonden deze problemen bij het natuurkunde-onderwijs al (bv. t.a.v. van de lenzenformule voor de brandpuntsafstand). De leerlingen hebben echter de leerstof geleerd binnen een andere context, toen is helaas geen *transfer* tot stand gebracht naar gebieden buiten de wiskunde.

Het betekent dat de natuurkundeleraar deze kennis niet zonder meer mag vooronderstellen, maar deze moet *actualiseren* binnen het nieuwe systeem. Dat is een stukje onderwijs en niet iets dat alleen maar getoetst hoeft te worden.

IV Leerboeken.

In de wiskundeleerboeken ontbreekt ook nog al eens materiaal op basis waarvan volledige leerprocessen geheel kunnen worden doorlopen. De leraar moet dan dus zelf aanvullend materiaal geven en/of in het onderwijsleergesprek het leerproces voltooien. Aan het eind van een hoofdstuk staan soms wel extra opgaven die in zekere zin de wendbaarheid van het leerresultaat vergroten, maar dit is dan dikwijls te weinig gericht op integratie met reeds aanwezige kennis.

Er zijn ook leerboeken die zich zo sterk met het maken van veel dezelfde typen opgaven bezig houden dat daardoor de *systeemscheiding* onverantwoord groot wordt.

De leraar moet dan veel zelf toevoegen o.m. door onderwijsleergesprek. *Zelfwerkzaamheid* is zinvol bij bepaalde fasen in het leerproces, bv. bij het *sorteren* en het *verwerken*. Het leren *denken* moet echter vooral worden bevorderd in het *onderwijsleergesprek*. De leraar zal er dus voor moeten zorgen dat de leerlingen het expliciteren niet overslaan en dat daarbij vooral ook de aanpak van de opdrachten aan de orde komt. Verder moet er voor worden gezorgd dat in de verwerkingsfase men zich niet beperkt tot het aankweken van routine, ook integratie moet daar plaats vinden.

V Lesvoorbereiding.

Laatst was ik bezig met de voorbereiding van lessen over de inhoudsberekening van omwentelingslichamen. Het leerboek zegt dan te veronderstellen dat de oppervlakte van een cirkel bekend is. De meeste leerlingen zullen zich de formule voor de oppervlakte van een cirkel wel herinneren. Het lijkt echter vreemd dat deze oppervlakte niet in het vorige hoofdstuk over oppervlakteberekeningen met integralen is behandeld. Dat is wel te begrijpen, omdat er een integraal berekend zou moeten worden van een voor de leerlingen afwijkend type (substitutie $x = \sin u$).

Met een onderwijsleergesprek is deze oppervlakte echter wel te berekenen en het zal voor de meeste leerlingen verrassend zijn om de oppervlakte van de cirkel nu ook echt samen te vinden. Bovendien is het een van de weinige gelegenheden om de leerlingen een probleem voor te zetten waarbij de gegevens niet zo duidelijk van tevoren aanwezig zijn en men eerst door *analyse* van het probleem tot een vertaling in een *algebraïsch model* moet komen. De oppervlakteberekening van de cirkel is dan zowel afsluiting van de verwerking van de vorige leerstof als het instapprobleem voor de *oriëntatie* in de nieuwe leerstof. Voor de *motivatie* is het van belang om aan het begin van het leerproces een dergelijk probleempje te hebben.

Vervolgens gaat het leerboek de inhoud van een omwentelingslichaam als een integraal introduceren, het lijkt mij dat nu eerst *geactualiseerd* moet worden hoe destijds de oppervlakte als een integraal is geïntroduceerd, ook dat is van belang bij de fase van het oriënteren. Daarna kan dan de fase van het *sorteren* beginnen met een aantal eenvoudige inhoudsberekeningen van omwentelings-

lichamen die ontstaan door wenteling van bekende grafieken. Hierbij past dan ook goed het onderscheid van de wenteling om de x -as resp. de wenteling om de y -as.

In de fase van het *expliciteren* moeten de leerlingen dan in staat zijn om te formuleren welke gegevens je nodig hebt om de inhoud van een omwentelingslichaam te kunnen bepalen en hoe je dat moet doen bij wenteling om de x -as en bij wenteling om de y -as. Eerst dan is het moment aangebroken om complexere problemen voor te zetten in de fase van *verwerking*, zoals bepalen van de inhoud van een omwentelingskegel met straal x en hoogte h , de inhoud van een bol en van een ellipsoïde.

Het leerboek had deze complexe problemen echter als eerste opgaven aangeboden.

Bij de verwerking mis ik dan bovendien nog opgaven waarbij de inhoud bepaald moet worden van omwentelingslichamen die ontstaan door wenteling van de grafieken van goniometrische functies, exponentiële functies en ln-functies teneinde *integratie* met reeds aanwezige kennis tot stand te brengen.

VI Hoe leren wij zelf?

Ook voor ons geldt natuurlijk niet dat we deze voorbeelden moeten leren, maar dat wij via de voorbeelden komen tot abstractie en tot het expliciteren van oplossingschema's voor onze didaktische problemen. Verwerking volgt dan via toepassing en integratie in ons onderwijsgedrag.

Literatuur

- C. F. van Parreren, *Psychologie van het Leren I, II*, De Haan, Zeist, 1952; *Leren op School*, Wolters Groningen, 1965; *Informatie over leren en onderwijzen*, Wolters Groningen, 1972.
J. van Dormolen, *Didaktiek van de Wiskunde*, Oosthoek, Utrecht, 1974.

Verslag van de commissie in 1974 belast met het afnemen van het examen bedoeld in artikel 12 der hoger-onderwijswet: Staatsexamen Gymnasium A en B.

Wiskunde

De subcommissie voor de wiskunde heeft gaarne medewerking verleend aan de algemene tendens nog zoveel mogelijk kandidaten het diploma te verlenen. Verscheidene kandidaten bleken echter zeer onvoldoende voorbereid een laatste kans te wagen. Het spreekt vanzelf dat hun lage cijfers moesten worden gegeven. De gemiddelde prestaties werden daardoor gedrukt. Deze waren: van de A-kandidaten in de algebra 5.2 en in de meetkunde 5.8. Van de B-kandidaten in de algebra 6.3, in de meetkunde 5.6 en in de goniometrie en analytische meetkunde 5.5.

Differentiatie, het wiskundeonderwijs en klassifikatie van doelstellingen

Drs. A. van STREUN

Drachten

Inleiding

Als een team van wiskundeleraren zich gaat bezinnen op de mogelijkheden om in een (meerjarige) brugperiode zo lang mogelijk onderwijs te blijven geven aan de niet gesplitste (heterogene) groep, dan komen vrijwel alle aspecten van het onderwijs aan de orde. Men kan de onderwijskundige bezwaren tegen een vroegtijdige homogenisering wel delen (geringe prognostische waarde van de selectiemiddelen, fixering van de verschillen, negatief effect op de motivatie in de laagste niveaugroepen, 'vastprikken' in de homogene groep, om maar enkele te noemen), maar een verdoezeling van de individuele verschillen tussen de leerlingen door het 'langdurig' continueren van klassikaal onderwijs aan een heterogene groep ook niet erg aantrekkelijk voor leerlingen en docenten vinden. Het zo optimaal mogelijk verzorgen van het onderwijs aan heterogene groepen (wat men daar in een bepaalde scholengemeenschap ook onder moge verstaan) vraagt een ingrijpende verandering van tal van aspecten van het onderwijs en/of schoolorganisatie.

Heterogene leergroep

Inherent aan de zogenaamde tempodifferentiatie (alle leerlingen werken in verschillend tempo dezelfde leerstof door) is de sterke individualisering, een onderwijsvorm die alleen mogelijk is bij aangepast lesmateriaal. Omdat de groeiende verschillen tussen de leerlingen klassikale instructie onmogelijk maakt, wordt de instructie volledig geprogrammeerd (met behoud van het klasseverband), zie b.v. Euclides 49e jaargang no. 3, of wordt het klasseverband opgeheven, zodat door regelmatige hergroepering tot betrekkelijk homogene leergroepen een 'klassikale' bespreking van de gerezen problemen mogelijk wordt.

Een andere mogelijkheid is de zogenaamde differentiatie binnen klasseverband, gekenmerkt door een vaste groep (klas) en een gelijke (eerste) leertijd voor de minimumstof. Naast de minimumleerstof is extra oefenstof en keuzestof beschikbaar.

Wil er sprake zijn van een planmatige en onderwijskundig verantwoorde invoering van deze vorm van differentiatie, dan moeten tal van problemen worden opgelost b.v. de vaststelling van de minimumdoelstellingen en de differentiële doelstellingen, met hun onderlinge verhouding; b.v. het verdelen van

de leerstof in eenheden, waarvan de specifieke minimumdoelstellingen worden vastgelegd, met de bijbehorende gedragsmogelijkheden; b.v. het opstellen van diagnostische toetsen over de minimumstof met het vastleggen van de bijbehorende korrektieprocedures; b.v. het vervaardigen van differentiële opdrachten uit of bij de gebruikte leerboeken. Op slechts één klein deelprobleem wil ik nader ingaan, namelijk op de klassifikatie van de leerresultaten en de doelstellingen naar beheersingsniveau.

Klassifikatie

Zodra docenten met elkaar gaan spreken over het onderwijsdoel dat je met een bepaalde leerstofeenheid wilt bereiken, blijkt dat een opsomming van de leerstofcomponenten onvolledig is. Ook de vaardigheden, die de leerlingen moeten verwerven, de gedragsmogelijkheden ten aanzien van bepaalde leerstof, moet worden omschreven. Vage termen als kennen, begrijpen, inzicht e.d. moeten nader worden omschreven, opdat kommunikatie mogelijk wordt.

Spreeken alle (wiskunde)docenten wat dit betreft éénzelfde taal, dan kan de discussie over doelstellingen, toetsen, uitgewerkte leerplannen en niveaoverschillen tussen onderwijstypen daarbij gebaat zijn. In de onderwijskundige publikaties komen verschillende pogingen voor om toetsen en onderwijsdoelstellingen te inventariseren. Enkele van de meer bekende, voorzien van v.b. uit de wiskunde, geef ik in het vervolg weer met weglating van allerlei verfijningen van de hoofdstructuur. Het is m.i. de vraag of een zeer gedetailleerde klassifikatie naar niveau voor de praktijk van het onderwijs van belang is. Overigens moet u wel bedenken, dat waardering van de moeilijkheidsgraad niet los gekoppeld kan worden van het onderwijs dat voorafgegaan is.

Taxonomie van Bloom

Het klassifikatiesysteem van Bloom is een taxonomie, wat inhoudt dat elke categorie de voorgaande omvat. Zij omvat zes hoofdklassen:

1 Kennis 2 Begrip 3 Toepassing 4 Analyse 5 Synthese 6 Evaluatie

1 *Kennis*. Deze categorie aksentueert de afvraagbare konkrete kennis (niet alleen van specifieke feiten, maar ook van terminologie, methoden en middelen, konventies) en legt de meeste nadruk op de psychologische processen van het geheugen.

v.b. De formule voor de oppervlakte van een cirkel is . . . ?

2 *Begrip*. Deze categorie ligt op het laagste begripsniveau en heeft te maken met het kunnen vertalen van een tekst in een formule (diagram) en omgekeerd. (translatie). Ook met het interpreteren van een grafiek, met het opstellen van een hypothese op grond van waarnemingen (interpretatie).

v.b. $F = GMm/d.d$, de wet van de zwaartekracht. Geef grafisch weer hoe F verandert, als de afstand d tussen de massa's varieert.

3 *Toepassing*. 'Begrip' blijkt uit het gebruik dat de leerling van de abstraktie kan maken, wanneer dit gebruik specifiek wordt genoemd. De 'toepassings-beheersing' blijkt uit het feit dat in een gegeven situatie de leerling — zonder toevoeging van de oplossingsmodus door anderen — zelf tot de juiste toepas-

sing komt. De leerling moet al wel kennis hebben gemaakt met soortgelijke processen, m.a.w. transfer naar een verwante situatie wordt vereist.

v.b. De lengte van een rechthoekig stuk land is 20 m. meer dan de breedte. Worden de beide afmetingen met 20 m. vermeerderd dan wordt de oppervlakte verdubbeld. Bepaal de breedte van het oorspronkelijk stuk land.

(De getoetste abstraktie is een formule, die het verband legt tussen de oppervlakte en de lengte en breedte van een rechthoek. Het probleem mag niet te dicht liggen bij de in de les behandelde vraagstukken.)

v.b. Wat is het laatste cijfer van 4 tot de macht 10?

4 *Analyse*. In de analyse gaat het om het ontleden van de stof in zijn samenstellende delen, het opsporen van relaties tussen die delen, en om de wijze van organisatie van de delen. Hier worden denkhandelingen vereist in een kontekst, die voor de leerlingen nieuw is. Het zelf ontdekken, het creatieve denken en het zoeken van nieuwe oplossingsmethoden zijn karakteristiek voor beheersing op dit niveau.

v.b. Wat is het grootste rationale getal, dat de som is van twee rationale getallen, die elk als teller 1 hebben en als noemer een geheel getal.

v.b. Schrijf zonder berekeningen uit te voeren, stap voor stap een procedure op waarmee je kunt bepalen of 12.087 een priemgetal is.

5 *Synthese*. Het gaat om een proces waarin met elementen en delen wordt gewerkt, waarbij door samenvoeging een structuur ontstaat, die er tot nu toe niet als zodanig is geweest.

6 *Evaluatie*. Het vellen van oordelen over de waarde ten opzichte van één of ander doel, van ideeën, van werkresultaten, van oplossingen, van methoden en materialen.

J.W. Wilson

J.W. Wilson heeft voor de wiskunde een koppeling gelegd tussen de leerstofgebieden en het niveau, waarop die beheerst moeten worden. De eerste categorie van Bloom noemt hij 'Computation', omdat hij er ook het kunnen hanteren van eenvoudige rekenwijzen onder bevat. De drie hoogste categorieën trekt hij voor de wiskunde samen tot één, namelijk 'Analysis'. Wilson geeft in de zgn. leerstofbeheersingsniveau-matrix voor het wiskundeonderwijs de leerstof in 16 subcategorieën en de beheersingsniveaus in 18 onderverdelingen. Zie het 'Handbook on formative and summative evaluation' door B.S. Bloom, J.T. Hastings, J.W. Wilson en anderen.

Kritiek op Bloom

De kenmerken van de verschillende gedragsmogelijkhedenkategorieën (kennis, begrip etc.) kunnen slechts vaag worden omschreven en sluiten elkaar niet volledig uit. Vandaar dat men bij het analyseren regelmatig in dubio staat: is dit nu kennis of begrip, toepassing of analyse? Als gevolg hiervan ondervindt men, zoals uit onderzoeken in de V.S. is gebleken, ernstige moeilijkheden bij het klassificeren van onderwijsdoelstellingen en toets-items met behulp van deze taxonomie.

Guilford

In de 'Beknopte didaxologie' beschrijft E. de Corte een klassifikatiesysteem dat wordt afgeleid uit het 'structure-of-intellect' model van de Amerikaanse psycholoog Guilford.

De drie *receptief-reproductieve operaties* hebben als gemeenschappelijk kenmerk, dat de leerling op een gegeven ogenblik een bepaalde informatie in zijn bewustzijn beschikbaar heeft (krijgt). Dit kan tot stand komen door:

a *Aperceptie* van informatie: in gegeven materiaal nieuwe informatie ontdekken door selectieve en vergelijkende waarneming.

b *Herkennen* van informatie: een bepaalde informatie die men vroeger reeds ontdekt of geleerd heeft, identificeren wanneer ze opnieuw wordt aangeboden.

c *Reproductie* van informatie: het herinneren van informatie, die vroeger in het geheugen werd opgenomen; hetgeen gereproduceerd wordt, is een nauwkeurige weergave van hetgeen werd ingeprent. Ook het uitvoeren van een bepaald ingeoeffend procédé behoort tot deze categorie.

v.b.

Aperceptie: opmerken van gelijkenissen en verschillen tussen meetkundige figuren.

Herkennen: meetkundige figuren herkennen in de werkelijkheid, op tekeningen en schetsen.

Reproductie: de eigenschappen van meetkundige figuren opnoemen, optellen van natuurlijke getallen, hanteren van routine rekenwijzen.

Het gemeenschappelijke van de vier *productieve operaties* bestaat hierin, dat de leerling voor een situatie geplaatst wordt, die voor hem naar vorm en/of naar inhoud in meerdere of mindere mate nieuw is.

d *Interpretatieve produktie* van informatie: uitleggen, verklaren, parafraseren en/of samenvatten van een gegeven informatie.

v.b. Tabellen, grafieken en diagrammen lezen en vergelijken met het oog op het beantwoorden van bepaalde vragen.

e *Convergente produktie* van informatie is het probleemgericht denken, de leerling moet zelf uitmaken welke vroeger verworven informatie voor de oplossing van het probleem moet worden gebruikt.

v.b. Het oplossen van een wiskundig vraagstuk, door zelfstandig uit te maken welke gegevens moeten worden gebruikt, welke bewerkingen moeten worden uitgevoerd en in welke volgorde.

f. *Evaluatieve produktie* van informatie: het uitspreken van een waardeoordeel over gegeven materiaal, op basis van toetsing ervan aan bepaalde criteria. 'Kritisch denken'.

v.b. De logische opeenvolging van argumenten in een redenering evalueren; de geschiktheid evalueren van een methode voor het oplossen van een bepaald probleem.

g *Divergente produktie* van informatie: een probleem kan verschillende goede oplossingen hebben, het denken kan verschillende richtingen ingaan 'Kreatief denken'.

v.b. Aan de hand van enkele kwantitatieve gegevens, zelf een rekenkundig

vraagstuk opstellen. Een methode of een werkwijze ontwerpen om een bepaald probleem te benaderen en op te lossen (b.v. om een hypothese te toetsen).

Nader onderzoek

In Euclides 46e jaargang no. 1 bespreekt Drs. J. van Dormolen de schaal, die Johnson voor de niveaueisen hanteert. Ook de didaktiekkommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft, blijkens hetzelfde nummer van Euclides de niveaubepaling van leerstofgebieden in het werkplan opgenomen. Het werk van het IOWO, de leerplanontwikkeling, zal evenmin aan de geschetste problematiek kunnen voorbij gaan, gezien de noodzaak om doelstellingen te operationaliseren. Is het al mogelijk om in Euclides verslag te doen van de gedachtevorming in allerlei werkgroepen, die zich met doelstellingen bezighouden? Of moet er voor de wiskunde nog een werkgroep worden samengesteld, die uit de onderwijskundige publikaties een voor het wiskunde-onderwijs aanvaardbare en éénduidige 'taal' voor de niveau's kan destilleren?

Literatuuropgave

- 1 B.S. Bloom, Taxonomie I, Het cognitieve gebied. Universitaire Pers, Rotterdam.
- 2 B.S. Bloom e.a., Handbook on formative and summative evaluation. New York, Mc Graw Hill.
- 3 E. de Corte e.a., Beknopte Didaxologie: Wolters-Noordhoff.
- 4 Johnson and Rising, Guidelines for teaching mathematics. Belmind California, Wadsworth.
- 5 P. de Koning, Interne Differentiatie. Muusses, Purmerend.
- 6 M.J.G. Nuy, B.W. v.d. Krogt, Leerstofanalyse en het wiskundeonderwijs. Kath. Ped. Centrum.

Ontvangen boeken

M. Kindt e.a., *Opgaven wiskunde havo*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 50 blz., f 6,50.

In opdracht van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is deze verzameling samengesteld. De examenopgaven van de laatste vier jaar zijn opgenomen.

Drs. Chr. Boormeester/dr. P. M. van Hiele, *AZ M4-4*, werkboek der wiskunde voor het vierde leerjaar mavo.

Muusses, Purmerend, ISBN 90 231 3137 1, derde geheel herzienie druk, 179 blz., f 15,90.

Het oplossen van differentiaalvergelijkingen

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

In zijn artikel getiteld 'Nomenclatuur en geen einde' heeft Freudenthal een aanval gedaan op de opmerkingen van de nomenclatuurcommissie aangaande het oplossen van differentiaalvergelijkingen (Euclides 49, p. 57). Daar ik me in dit geval persoonlijk aansprakelijk voelde voor eventueel gemaakte fouten, heb ik Freudenthal gevraagd waar de schoen wrong. Als ik het met zijn opmerkingen niet eens was geweest, was er voor mij geen reden geweest dit stukje te schrijven, want niets is vervelender dan gelijk willen hebben. Na zijn bezwaren gehoord te hebben dacht ik dat het verstandig is meer uitvoerig op de zaak in te gaan.

Als voorbeeld neem ik de differentiaalvergelijking

$$x \, dy + y \, dx = 0$$

Gebruik is als oplossing te geven

$$xy = c$$

Probleem is: hoe kunnen we leerlingen uitleggen wat oplossen van een differentiaalvergelijking wil zeggen en verder wat het wil zeggen dat $xy = c$ de oplossing van de vergelijking is.

Iedere leerling is duidelijk, dat aan bijv. de vergelijking $x + 2y = 7$ voldoen $(1, 3)$, $(0, \frac{7}{2})$, $(-3, 5)$, enz. Ten minste als we paren (x, y) zoeken.

Wat voldoet nu aan

$$x \, dy + y \, dx = 0?$$

Bekend is dat dx en dy geen afzonderlijke betekenis hebben, maar alleen de differentiaalverhouding $dx : dy$ betekenis heeft. Er zullen dus voldoen geordende tripels $(x, y, dx : dy)$. Bijv. $(1, 3, 1 : -3)$, $(0, 4, 0 : 1)$.

Met zo'n tripel correspondeert in de meetkundige voorstelling een punt met

een richting. Met $(1, 3, 1 : -3)$ correspondeert het punt $(1, 3)$ gekoppeld met de richting $dx : dy = 1 : -3$.

Een combinatie van een punt en een richting (of als men dat mooier vindt: een geordend paar waarvan het eerste element een punt en het tweede een richting is), noemen we een lijnelement. In de figuur stellen we een lijnelement voor door een punt met daardoor een kort streepje met de bijbehorende richting. Dat is awiskundig, maar daardoor juist zo heerlijk praktisch. We krijgen in elk punt van het vlak (de oorsprong laten we voorlopig buiten beschouwing) een klein streepje. Zoiets hebben de leerlingen vaker gezien. Houd een magneet onder een papier waarop ijzervijlsel gestrooid is en men krijgt een soortgelijk effect. De staafjes ijzervijlsel worden aaneengeregen tot krachtlijnen. Wel, dat doen we met onze (getekende) lijnelementen ook. We rijgen ze aan elkaar tot krommen.

Nu wordt het tijd weer serieus wiskundig te worden. Wat voor krommen zijn dat? Zo'n kromme heeft de eigenschap, dat in elk punt de raaklijn juist de richting heeft van het ijzervijlsel. Nog wat serieuzer. Zo'n kromme heeft de eigenschap dat elk raaklijnelement (combinatie van punt op de kromme met richting van de raaklijn in dat punt) aan de differentiaalvergelijking voldoet. Een kromme met deze eigenschap heet een integraalkromme van de differentiaalvergelijking.

Dergelijke integraalkrommen kunnen we gemakkelijk vinden. Hier zijn er enkele

$$x = 0, \quad y = 0, \quad xy = 1, \quad xy = -8$$

Allicht komt nu de vraag naar voren: hoe vinden we ze allemaal? En het ligt voor de hand een ogenblik te denken, dat

$$xy = c$$

ze allemaal zijn. Dat is natuurlijk niet zo, want bijv. $x = 0$ is er niet bij. Toch is het gebruik als oplossing van de vergelijking

$$xy = c$$

te geven. Wat wordt hier nu eigenlijk mee bedoeld? Alleen maar dat we in $xy = c$ een eenvoudige uitdrukking gevonden hebben om het hele lijnelementenveld te beschrijven. Alle lijnelementen van het veld zijn raaklijnelementen aan een van de krommen $xy = c$. Dat is alles en meer zit er niet achter.

Helemaal waar is het niet eens. We hebben voorlopig de oorsprong buiten beschouwing gelaten en dat was onze redding. Zodra we echter de oorsprong mee bekijken, gaat het mis. Elk lijnelement met als punt de oorsprong voldoet aan de vergelijking. Bijv. voldoet

$$(0, 0, 1 : 1)$$

Zou er een integraalkromme zijn waarvan dit lijnelement raaklijnelement is? Begin eens in de oorsprong en ga een miniscuul eindje in de richting $(dx : dy = 1 : 1)$. Dan merken we ogenblikkelijk dat we totaal de verkeerde kant opgaan, want zodra we de oorsprong verlaten hebben, hebben de lijnelementen als richting $1 : -1$. We kunnen ons dus niet verroeren zonder meteen te merken dat onze richting 90° verkeerd is. En dus zal $(0, 0, 1 : 1)$ geen raaklijnelement van een integraalkromme kunnen zijn. Het ijzervijselbeeld maakt dat direct duidelijk. Wie graag discontinuïteiten erbij wil halen om zijn redenering mathematisch kracht bij te zetten, zal het zijn leerlingen alleen maar moeilijk maken.

Omdat we ons interesseren voor integraalkrommen, laten we daarom deze singuliere lijnelementen (lijnelementen in singuliere punten) buiten beschouwing. Deze singuliere punten zijn in ons onderwijs de punten waarin elk lijnelement aan de vergelijking voldoet.

Nu wordt het tijd de differentiaalvergelijking eens wat meer leven in te blazen door een probleem te stellen waarvoor je nu juist deze vergelijking nodig hebt. Dat is niet moeilijk. Teken een coördinatenstelsel. Een stoffelijk punt bevindt zich in het punt P . Teken OP (fig. 1) en daarna PQ zo, dat $\angle O_1 = \angle Q_1$.

Het punt beweegt zich zo in het vlak, dat voor elk punt van zijn baan geldt: als het punt zich in P bevindt, dan is de richting van de snelheid de richting van PQ .

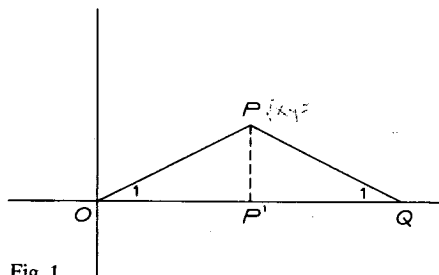


Fig. 1

Maak van P een hond en van Q een haas. De haas loopt verschrikt van de hond weg langs een rechte weg (de x -as). Hij loopt zo hard, dat steeds zijn afstand tot O gelijk is aan $2 \cdot OP'$. En de jachthond loopt uiteraard voortdurend in de richting van de lijn hond-haas. Wat voor baan beschrijft de hond?

Noem de coördinaten van P in het algemeen x en y en de richting van de lijn PQ $dx : dy$. Dan geldt voor de hondebaan

$$dx : dy = x : -y$$

of

$$x dy + y dx = 0$$

Wat doet de hond dus? Hij loopt langs een integraalkromme van deze diffe-

rentiaalvergelijking.

Langs welke? Er zijn er zo veel. Om dat te beslissen moeten we iets meer weten. Bijv. dat op een gegeven ogenblik de hond zich bevond in het punt (2, 1).

Nu weten we, dat hij langs de integraalkromme $xy = 2$ liep.

Maar een hond is geen kangeroe en hij kan niet springen. En al was hij een kangeroe, dan zou hij alleen maar eindige sprongen kunnen maken. De baan van de hond is dan ook niet

$$xy = 2$$

maar

$$xy = 2 \quad \wedge \quad x > 0$$

(althans langs deze kromme loopt hij).

Wat is nu het belang van de gegeven oplossing $xy = c$? Deze hyperbolen zijn in de praktijk van geen enkel belang. Het is uitgesloten, dat de oplossing van een praktisch probleem luidt: er wordt een hyperbool beschreven. Het enige belangrijke is, dat we met $xy = c$ een beschrijving van het veld hebben gegeven. Het is een arsenaal van lijnen waaruit we kunnen putten, als we een praktisch probleem oplossen. Welke kromme we dan uit het arsenaal halen, hangt af van een initiaalvoorwaarde. En nimmer is dat een hele hyperbool.

De praktisch belangrijke integraalkrommen zijn dus alleen de halve hyperbolen en de beide coördinaatassen.

Maar als de krommen $xy = c$ nu juist niet de praktisch belangrijke integraalkrommen zijn, dan geven we onze leerlingen een verkeerde suggestie mee door juist aan deze verzameling een speciale naam te geven en ze te betitelen met volledige verzameling integraalkrommen.

Moraal: we kunnen zonder enig bezwaar als oplossing van de vergelijking $x dy + y dx = 0$ geven $xy = c$. Ieder zal dan begrijpen, dat we daarmee het ijzervijlselpatroon beschreven hebben. Maar verder gewicht aan deze oplossing hechten door het een volledige verzameling integraalkrommen te noemen is onverstandig en alleen geschikt om het inzicht in de betekenis van differentiaalvergelijkingen te vertroebelen. Dus: liever deze term niet in de boekjes.

Ik geloof dat Freudenthal hier volkomen gelijk heeft en dank hem voor zijn correctie.

P.S. Om misverstand te voorkomen: dit is een persoonlijk antwoord en geen officieel antwoord van de nomenclatuurcommissie.

Afbeeldingen

W.A.M. BURGERS

Wassenaar

Als we de elementen van V afbeelden op die van V dan zijn er afbeeldingen waarbij géén beeld samenvalt met zijn origineel.

Is n het aantal elementen van V dan noemen we dat specifieke aantal afbeeldingen A_n . In dit artikel zullen we enige formules voor A_n afleiden.

Eerst enige voorbeelden

$$n = 1, A_1 = 0$$

$$n = 2, \underline{1} \underline{2}, 2 \ 1 \text{ dus } A_2 = 1 \text{ (onderstreping: beeld = origineel)}$$

$$n = 3, \underline{1} \underline{2} \underline{3}, 2 \ 1 \underline{3}, 3 \ 1 \ 2$$

$$\underline{1} \ 3 \ 2, 2 \ 3 \ 1, \underline{3} \underline{2} \ 1 \text{ dus } A_3 = 2$$

$$n = 4, \underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{4}, \underline{2} \ 1 \underline{3} \underline{4}, \underline{3} \ 1 \ 2 \underline{4}, \underline{4} \ 1 \ 2 \ 3$$

$$\underline{1} \underline{2} \underline{4} \ 3, \underline{2} \ 1 \underline{4} \ 3, \underline{3} \ 1 \underline{4} \ 2, \underline{4} \ 1 \underline{3} \ 2$$

$$\underline{1} \ 3 \underline{2} \underline{4}, \underline{2} \ 3 \ 1 \underline{4}, \underline{3} \underline{2} \ 1 \underline{4}, \underline{4} \underline{2} \ 1 \ 3$$

$$\underline{1} \ 3 \underline{4} \ 2, \underline{2} \ 3 \underline{4} \ 1, \underline{3} \underline{2} \underline{4} \ 1, \underline{4} \underline{2} \underline{3} \ 1$$

$$\underline{1} \underline{4} \underline{2} \ 3, \underline{2} \underline{4} \ 1 \ 3, \underline{3} \underline{4} \ 1 \ 2, \underline{4} \ 3 \ 1 \ 2$$

$$\underline{1} \underline{4} \underline{3} \ 2, \underline{2} \underline{4} \underline{3} \ 1, \underline{3} \underline{4} \underline{2} \ 1, \underline{4} \underline{3} \underline{2} \ 1 \text{ dus } A_4 = 9.$$

Voor kleine waarden van n zijn deze aantallen experimenteel vast te stellen. Laten we het voor $n = 5$ systematisch doen.

	<u>Beeld = origineel</u>	<u>Beeld $\neq$ origineel</u>	<u>Aantal</u>
Aantal	5	—	$C_0^5 A_0 = 1, A_0 \equiv 1$
	4	1	$C_1^5 A_1 = 0$
	3	2	$C_2^5 A_2 = 10$
	2	3	$C_3^5 A_3 = 20$
	1	4	$C_4^5 A_4 = 45$

Totaal aantal afbeeldingen is $5!$ Dus $A_5 = 120 - 76 = 44$.

Het is duidelijk dat algemeen geldt:

$$A_n = n! - 1 - C_2^n A_2 - C_3^n A_3 \dots - C_n^n A_{n-1}.$$

$$\text{of } n! = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} C_i^n A_i \dots \text{I}$$

We kunnen nu a.v. te werk gaan

$$\begin{array}{ccccccc} A_0 & A_1 & A_2 & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & A_3 & 1 & 0 & 1 & 2 & A_4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 9 & A_5 \\ \hline 1 & 2 & 1 & , & 1 & 3 & 3 & 1 & , & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & , & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \hline 1 + 0 + A_2 = 2! & 1 + 3 + A_3 = 3! & 1 + 6 + 8 + A_4 = 4! & 1 + 10 + 20 + 45 + A_5 = 5! \\ A_2 = 1 & , & A_3 = 2 & , & A_4 = 9 & , & A_5 = 44, \end{array}$$

Letten we nu op de rij $A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = 2, A_4 = 9, A_5 = 44$, dan blijkt: $A_2 = 2A_1 + 1, A_3 = 3A_2 - 1, A_4 = 4A_3 + 1, A_5 = 5A_4 - 1$ zodat de verwachting is dat $A_6 = 6A_5 + 1 = 265$. Deze verwachting wordt bewaarheid.

We trachten dus aan te tonen dat

$$\text{II} \dots A_n = n A_{n-1} + (-1)^n \Leftrightarrow n! = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} C_i^n A_i \dots \text{I}$$

kortweg $\text{II} \Leftrightarrow \text{I}$.

We kunnen II ook anders schrijven

$$\begin{aligned} A_n &= n A_{n-1} + (-1)^n = n(n-1) A_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n = \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} A_{n-2} + \frac{n!}{(n-1)!} (-1)^{n-1} + \frac{n!}{n!} (-1)^n = \\ &= \frac{n!}{(n-3)!} A_{n-3} + \frac{n!}{(n-2)!} (-1)^{n-2} + \frac{n!}{(n-1)!} (-1)^{n-1} + \frac{n!}{n!} (-1)^n \\ A_n &= n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \dots \text{III} \end{aligned}$$

zodat $A_3 = 3! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right), A_4 = 4! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right), A_5 = 5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) \dots$

Het is duidelijk dat $\text{II} \Leftrightarrow \text{III}$. Geldt $\text{II} \Leftrightarrow \text{I}$?

We nemen eerst twee voorbeelden

Stel $A_n = n A_{n-1} + (-1)^n$ is juist voor $n = 2, 3$ en 4 .

$$A_4 = 4! - 1 - C_2^4 A_2 - C_3^4 A_3 \text{ volgens I.}$$

$$\begin{aligned} 5A_4 - 1 &= 5! - 5 - \frac{5!}{2!2!} A_2 - \frac{5!}{3!} A_3 - 1 = 5! - C_1^5 - C_3^5 3A_2 - C_4^5 4A_3 - 1 = \\ &= 5! - 1 - C_1^5 - C_3^5 (A_3 + 1) - C_4^5 (A_4 - 1) \text{ volgens II.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5A_4 - 1 &= [5! - 1 - C_3^5 A_3 - C_4^5 A_4] - C_1^5 - C_3^5 + C_4^5 \\
 &= [A_5 + C_2^5] + 1 - C_1^5 - C_3^5 + C_4^5 - 1 = A_5, \text{ want} \\
 1 - C_1^5 + C_2^5 - C_3^5 + C_4^5 - 1 &= 0.
 \end{aligned}$$

En evenzo

$$\begin{aligned}
 6A_5 + 1 &= 6! - C_1^6 - C_3^6 3A_2 - C_4^6 4A_3 - C_5^6 5A_4 + 1 = \\
 &= 6! - C_1^6 - C_3^6 (A_3 + 1) - C_4^6 (A_4 - 1) - C_5^6 (A_5 + 1) + 1 = \\
 &= 6! - 1 - C_3^6 - C_3^6 A_3 - C_4^6 A_4 - C_5^6 A_5 = A_6, \text{ want} \\
 1 - C_1^6 + C_2^6 - C_3^6 + C_4^6 - C_5^6 + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

Hiermede is de poort voor volledige inductie geopend.

We hebben dus

- I $A_k = k A_{k-1} + (-1)^k, A_0 \equiv 1, A_1 = 0$, geldt voor $k = 1$ t/m $k = n$
- II $n! = 1 + C_2^n A_2 + \dots + C_{n-1}^n A_{n-1} + A_n$ voor $n \in \mathbb{N}^+$
- III $1 - C_1^{n+1} + C_2^{n+1} - C_3^{n+1} + \dots + C_n^{n+1} (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$
- IV $(n+1) C_k^n = (k+1) C_{k+1}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
 (n+1)! &= (n+1) + (n+1) C_2^n A_2 + \dots + (n+1) C_{n-1}^n A_{n-1} + (n+1) A_n \text{ volgens II;} \\
 (n+1)! &= n+1 + C_3^{n+1} \cdot 3A_2 + C_4^{n+1} \cdot 4A_3 + \dots + C_n^{n+1} \cdot nA_{n-1} + (n+1)A_n \text{ volgens IV;} \\
 (n+1)! &= n+1 + C_3^{n+1}(A_3+1) + C_4^{n+1}(A_4-1) + \dots + C_n^{n+1}[A_n + (-1)^n] + (n+1)A_n \text{ volgens I;} \\
 (n+1)! &= [1 + C_3^{n+1} A_3 + C_4^{n+1} A_4 + \dots + C_n^{n+1} A_n] + \\
 &\quad \text{P} \\
 &+ [-1 + (n+1) + C_3^{n+1} + \dots + C_n^{n+1} (-1)^{n+1}] + (n+1)A_n = P + Q + (n+1)A_n.
 \end{aligned}$$

Nu is $P = (n+1)! - A_{n+1} - C_2^{n+1}$ volgens II,

$$Q = + C_2^{n+1} + (-1)^{n+1} \text{ volgens III.}$$

$$\text{Zodat } A_{n+1} = (n+1)A_n + (-1)^{n+1}.$$

I geldt dus ook voor $k = n+1$.

Een kleine aanvulling bij het stukje no. 9 van Prof. Dr. O. Bottema over ingeschreven driehoeken*

B. C. DIJKSTRA-KLUYVER

Zutphen

In §5 wordt opgemerkt dat alle gelijkvormige driehoeken $B_1 B_2 B_3$ die in driehoek $A_1 A_2 A_3$ beschreven zijn, samen één gelijkvormigheidspunt P hebben. Het omgekeerde is nog makkelijker te bewijzen. Kies een punt P , laat daaruit de loodlijnen PB_1 , PB_2 , PB_3 op de zijden $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ neer. Draai die drie lijnen elk over dezelfde hoek, dan is de nieuwe driehoek, gevormd door de snijpunten met de zijden van de A -driehoek, gelijkvormig met de voetpuntsdriehoek.

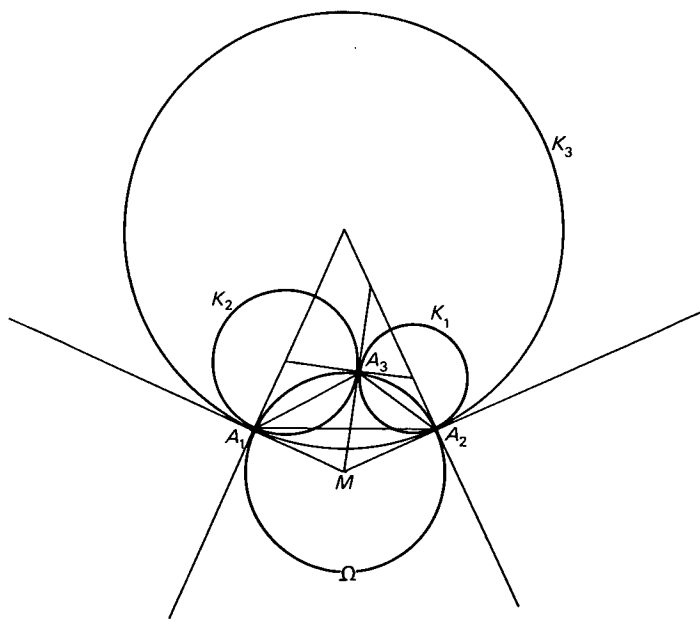
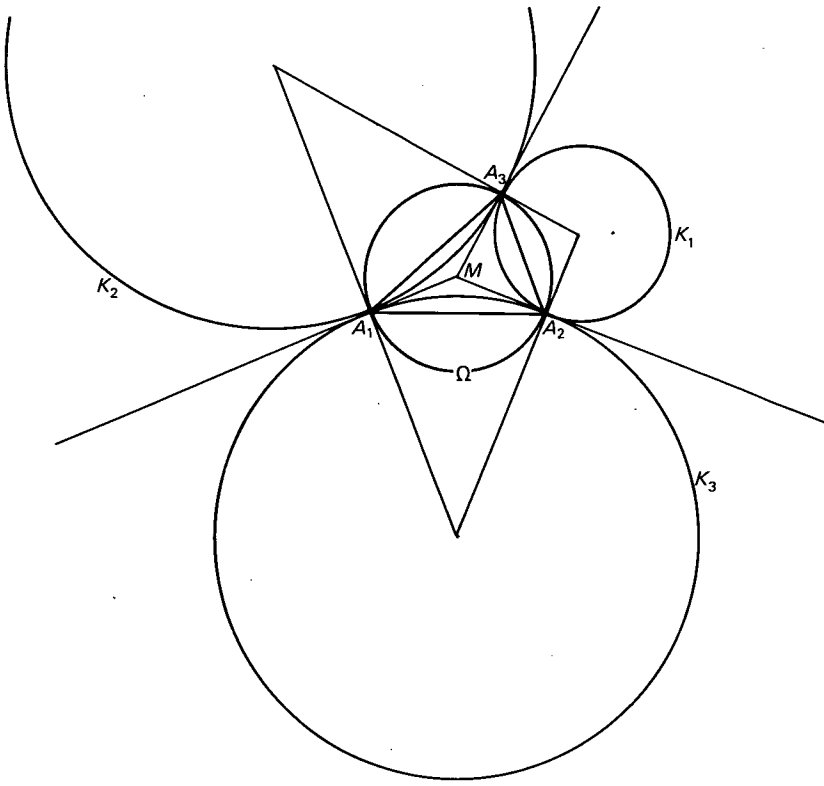
Men kan nu het punt P over het vlak laten wandelen en vragen naar de vorm van de voetpuntsdriehoek. Ligt P op de omgeschreven cirkel, dan is de voetpuntsdriehoek plat. Een hoek is 180° . Ligt P op een van de zijden, dan is P zelf hoekpunt van de B -driehoek en de bijbehorende hoek is het supplement van de overstaande A -hoek.

Verdere resultaten levert de ook door Bottema genoemde stelling, dat vanuit P de zijde $A_2 A_3$ gezien wordt onder een hoek gelijk $A_1 + B_1$. Eis ik dat $B_1 = 90^\circ$ dan moet P op een bepaalde cirkel liggen K_1 . Deze cirkel raakt in A_2 aan de straal MA_2 en in A_3 aan MA_3 . Zo zijn er nog twee cirkels K_2 en K_3 .

Is de gegeven A -driehoek scherphoekig, dan liggen de drie cirkels buiten elkaar en raken elkaar in de hoekpunten. Als P binnen een van de cirkels ligt is de bijbehorende hoek stomp. P in het kleine binnengebied of het grote buitengebied maakt alle hoeken scherp.

Is A_3 stomp, dan liggen K_1 en K_2 binnen K_3 . P binnen K_1 geeft B_1 stomp, dus B_2 en B_3 scherp. P binnen K_2 geeft B_2 stomp en de andere scherp. We concluderen, dat P binnen K_3 een scherpe B_3 geeft en P buiten K_3 een stompe. In dat buitengebied ligt – terecht – een stuk van de omgeschreven cirkel, waar P een gestrekte hoek geeft. Ligt P buiten die cirkel, dan wordt $B_1 B_2 B_3$ in tegengestelde richting doorlopen.

* Zie: Euclides 1974/1975, No. 9.



Ned. Ver. v. Wisk. Leraren

Verslag van de didactiekcommissie

In april 1970 werd de didactiekcommissie ingesteld. Hoewel haar activiteiten merkbaar waren is daarvan nooit een verslag verschenen. De commissie meent dat het nodig is na vijf jaar verantwoording af te leggen van haar werk.

1 Oorspronkelijk bestond de commissie uit Van den Briel (voorz.), Broekman (secr.), H. de Jong, Goffree, Muskens en Vaessens. In de loop van de jaren traden enigen uit en anderen toe. Op dit moment (april 1975) wordt de commissie gevormd door Van Dormolen (voorz.), Broekman (secr.), Eilander, Jimkes, Knip, Mahieu, Muskens, Vedder en Zwaneveld.

2 In eerste instantie wilde de commissie het ontwikkelen van een nieuw leerplan voor wiskunde stimuleren. Zij ging daarbij uit van een strategie die neergelegd was in artikelen van Broekman¹ en van Dormolen³.

Het eerste werk, inventarisatie van doelstellingen, leerstofgebieden, werkvormen en hulpmiddelen en toetsingsmethoden, zou gedaan moeten worden door een viertal subcommissies. Daarnaast werd contact gezocht met C.M.L.W., Landelijke Pedagogische Centra, R.I.T.P. en C.I.T.O.*. Dit resulteerde echter niet in enig werkverband, hoewel er later belangrijke contacten met en medewerking van de C.M.L.W. kwamen.

Het werk in de subcommissies werd gedaan door commissieleden en door een tiental personen, die positief gereageerd hadden op persoonlijke verzoeken en de oproep in Euclides (zie ¹). Het resulteerde in:

a een publicatie van Van Dormolen⁵, die dank zij belangrijke financiële en personele steun van de C.M.L.W. onder de leden van de vereniging verspreid kon worden;

b een uitgebreid overzicht van voorwaarden voor en gevolgen van het toepassen van verschillende werkvormen in het wiskunde onderwijs, opgesteld door Broekman, Van der Krogt en Eilander.

c een artikel van Van Dormolen over leerstofordening⁴.

d een artikel van Broekman over differentiatie².

De onder a, b, c genoemde publicaties zijn later met wat wijzigingen opgenomen in een boek van Van Dormolen⁶.

3 In oktober 1973 heeft de commissie om verschillende redenen haar oorspronkelijke plan losgelaten:

a De oproep in ¹ leverde een teleurstellend klein aantal medewerkers op.

* C.M.L.W. = Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.

R.I.T.P. = Research Instituut voor Toegepaste Psychologie.

C.I.T.O. = Centraal Instituut voor Toets Ontwikkeling.

Vermoedelijk sloeg het plan niet aan, omdat het te ver van de dagelijkse praktijk van de leraar stond.

b De werkzaamheden van de commissie hadden zich geleidelijk verplaatst naar het voorbereiden en uitvoeren van werkconferenties, die veel directer met die dagelijkse praktijk verband hielden.

c De wetenschap dat het I.O.W.O.* als (ondermeer) uitvoerend orgaan van de C.M.L.W. veel beter toegerust is voor de taak van de ontwikkeling van een wiskunde werkplan en ook de intentie had die taak op zich te nemen.

4 Op basis van de publicaties ⁴ en ⁵ werden in februari 1973 en april 1973 in Woudschoten twee tweedaagse werkconferenties (hierna te noemen: A-cursussen) gehouden, die de bedoeling hadden leraren bewust te maken van de mogelijkheden om doelstellingen en leerstofordening systematisch in hun lesvoorbereiding in te bouwen. Dat deze A-cursussen daar in geslaagd zijn blijkt uit de vele positieve reacties uit de in totaal 80 deelnemers. Dit succes moedigde de commissie aan om wederom contact te zoeken met de C.M.L.W. Dit resulteerde in de financiële en personele medewerking bij nog vijf A-cursussen, waarvan er twee gehouden zijn in Noordwijkerhout (nov. '73 en jan '74) met totaal 100 deelnemers, één in Putten (okt. '74) met 50 deelnemers en één in Amersfoort (febr. '75) met 70 deelnemers. In mei '75 kwamen we opnieuw. Gezien de ervaringen opgedaan bij vorige gelegenheden werd – met ingang van febr. '75 – de cursus driedaags gemaakt.

5 Met medewerking van de C.M.L.W. konden tevens drie B-cursussen worden georganiseerd in oktober 1973 (Egmond aan Zee), maart 1974 (Noordwijkerhout) en oktober 1974 (Woudschoten). Deze driedaagse cursussen waren gewijd aan het samenwerken tussen mensen, in het bijzonder tussen leerlingen en leraren.

Ook de gehouden B-cursussen, elk met 50 deelnemers, kunnen geslaagd genoemd worden.

6. In mei '74 kwam een publicatie van Zwaneveld ¹⁰ gereed over een vorm van wiskunde onderwijs waarbij differentiatie naar tempo centraal staat. Ook deze publicatie kon, dankzij belangrijke steun van de C.M.L.W., onder de leden verspreid worden. Gezien de overweldigende belangstelling voor de differentiatie-problematiek werd besloten in maart '75 een C-cursus te organiseren met als thema 'differentiatie'. Deze proef-cursus, die alleen open stond voor een vijftigtal leraren die reeds een A- en/of B-cursus gevolgd hadden, kon eveneens geslaagd genoemd worden.

7 Op dit moment is in voorbereiding een publicatie over vaardigheden. Het ligt in de bedoeling deze publicatie tijdig vóór de jaarvergadering op 1 nov. '75 gereed te hebben, zodat het mogelijk zal zijn die dag te wijden aan dit voor vele wiskundeleraren belangrijke thema.

* I.O.W.O. = Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs.

8 De behoefte van leraren om het op de cursussen geleerde direct toe te passen in de dagelijkse praktijk leidde tot een geheel nieuwe activiteit, namelijk de voorbereiding van regionale didactiek werkgroepen in het schooljaar 1974-'75. De leiders van deze werkgroepen kwamen op gezette tijden in een landelijke bijeenkomst van één dag bijeen om de programma's door te praten. Er werd gewerkt op basis van gedeelten uit ⁶, ⁷, ⁸, ⁹.

De aanmelding voor deze regionale bijeenkomsten, die op een twintigtal plaatsen eens in de 4 à 6 weken gedurende 4 à 5 uren gehouden werden, was niet overweldigend. Zie ook Euclides 49 1973-74, p. 348.

Uit de evaluatie – na afloop van de serie bijeenkomsten – bleek dat een groot aantal deelnemers graag door wil gaan met de bijeenkomsten. Over de organisatie van deze nieuwe bijeenkomsten in het cursusjaar '75-'76 wordt nog overleg gepleegd. Dit mede in verband met het feit dat we graag zouden zien dat de groep deelnemers zich uitbreidt.

9 Voor de leiding van de derde en latere A-cursussen en voor de regionale werkgroepen hebben zich leraren beschikbaar gesteld die een A- en een B-cursus hebben gevolgd. Hiermee wil de commissie bereiken dat deze mensen hun leerervaringen versterken ('Je leert iets grondig als je er zelf les in moet geven') en bovendien hoopt de commissie daarmee een sneeuwbal effect te bereiken. Als het werk steeds gedaan zou moeten worden door dezelfde mensen zou de didactiekcommissie in zijn taak tekort schieten.

Utrecht, juni 1975

1 Broekman,

Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Euclides 46, 1970-71, p. 8.

2 Broekman,

Differentiatie in het onderwijs, Euclides 46, 1970-71, p. 281.

3 Van Dormolen,

Naar een nieuw onderwijsprogramma voor wiskunde, Euclides 46, 1970-71, p. 1 en 121.

4 Van Dormolen,

Kriteria voor de ordening van de leerstof, Euclides 48, 1972-73, p. 161.

5 Van Dormolen,

Voorbeeld van een lesvoorbereiding.

6 Van Dormolen,

Didactiek van de wiskunde, Oosthoek, Utrecht 1974.

7 Van Hiele,

Begrip en inzicht, Muusses, Purmerend 1973.

8 Van Parreren,

Leren op school, Wolters-Noordhoff, Groningen 1971.

9 Skemp,

Wiskundig denken, Aula-reeks, 1973.

10 Zwaneveld,

Rapport over een vorm van wiskunde onderwijs waarbij differentiatie naar tempo centraal staat.

Programma van het examen voor de akten wiskunde M.O.

M.O-A

Algebra

1 *Inleiding.*

- a Verzamelingen.
- b Cartesisch produkt.
- c Relaties en afbeeldingen.
- d Binaire operaties.

B. Baumslag and B. Chandler. *Theory and problems of grouptheory*. Schaum's outline series. Chapter I.

2 *Groepen.*

- a Groepen, ondergroepen, nevenklassen.
- b Homomorfïën, normaaldelers, faktorgroepen; commutatorgroep.
- c Voorbeelden en toepassingen.
Groepen van permutaties. De volle lineaire groep.
Groepen van translaties, rotaties en isometriën.
Cyclische groepen.

Dr. F. Loonstra. *Inleiding tot de algebra* HIV m.u.v. § 13 en § 14.

3 *Ringen en lichamen.*

- a Commutatieve ringen, integriteitsgebieden.
- b Lichamen (commutatief).
- c Quotiënten lichaam.
- d Homomorfïën van ringen: idealen, priemidealen, maximale idealen; restklasse ringen.
- e Ontbinding in irreducibele elementen (Euclidische ringen; veelterm-ringen).
- f Wortels van vergelijkingen.

Symmetrische functies van de wortels van een vergelijking.

Dr. F. Loonstra. *Inleiding tot de algebra* HV § 1 t/m § 11. (van § 9 slechts de hoofdzaken).

4 *Uitbreiding van lichamen.*

- a Deellichaam, priemlichaam, karakteristiek van een lichaam.
- b Enkelvoudige uitbreidingen van een lichaam.
- c Eindige en algebraïsche uitbreiding van een lichaam.
- d Eindige lichamen.

Dr. F. Loonstra. *Inleiding tot de algebra* H VII § 1 t/m § 5 en § 10 (hoofdzaken).

Voor inzicht in de toepassingen is zeer aan te bevelen: G. Birkhoff en T. C. Barteo: *Modern Applied Algebra* (McGraw-Hill, 1970).

Analyse

1 *Het reële getal en limieten van functies.*

Examenstof in:

[1] H 1 en H 3; [2] H 1 tot § 15.

2 *Differentiaal rekening.*

Examenstof in:

[1] H 4; [2] H 1 van § 15 tot § 27 en H 3.

3 *Integraalrekening.*

Examenstof in:

[1] H 5 en H 6; [2] H 1 van § 27 tot § 46; H 4 en H 5.

4 *Rijen en reeksen.*

Examenstof in:

[1] H 2; H 7 en H 8; [2] H 6 en H 7.

5 *Numerieke methoden.*

Examenstof in:

[2] H 8 en H 9.

6 *Functies van 2 veranderlijken.*

Examenstof in:

[2] H 10.

[1] Dr. L. Kuipers, *Leerboek der Analyse. Deel I.*

[2] Dr. B. Meulenbeld en Dr. A. W. Grootendorst, *Analyse Deel I.*

Voor Vraagstukken:

– W. J. H. Salet e.a., *Vraagstukken over analyse en algebra I.*

– Dr. J. H. J. Almering e.a., *Analyse I.* Bevat vraagstukken over numerieke methoden. H 5.80 no 12–25 en H 6.47 no 33–39.

– Dr. G. R. Veldkamp, *Inleiding tot de Analyse.* Bevat vraagstukken van ‘theoretische aard’.

Analytische Meetkunde

1 Axioma's vectorruimte; deelruimten, (on)afhankelijkheid, rang, dimensie, basis, coördinaten.

2 Lineaire afbeeldingen, kern en beeld, matrices, coördinatentransformaties.

3 Lineaire vergelijkingen, determinanten, regel van Cramer.

4 Eigenwaarden, eigenvectoren.

5 Inproduct, orthogonaliteit, orthonormale bases.

6 Isometrische en zelfgeadjungeerde afbeeldingen.

Bij de behandeling van de stof dient er op geattendeerd te worden dat de theorie bij punten 1 t/m 3 geldig is onafhankelijk van de keuze van het grondlichaam der scalaire grootheden. Bij de te behandelen voorbeelden dient evenwel de nadruk te vallen op reële en complexe vectorruimten. Bij de theorie van eigenwaarden en eigenvectoren beperke men zich tot complexe en reële ruimten. Voorts dient speciale aandacht te worden besteed aan de volgende onderwerpen in vlak en ruimte ($\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$):

- I. Vergelijkingen van lijn en vlak, normaalvorm van Hesse, uitwendig product, vergelijking van cirkel en bol.
- II. Affiene afbeeldingen, bewegingen en spiegelingen.
- III. Eenvoudige eigenschappen van kegelsneden en kwadratische oppervlakken.

Waar mogelijk dienen eigenschappen van eenvoudige meetkundige figuren als illustratie behandeld te worden zoals bijv.:

Eenvoudige eigenschappen van zwaartelijnen en hoogtelijnen, orthocentrisch viervlak, eigenschappen van parallellogram, kubus, viervlak:

Bij determinanten kan de interpretatie als georiënteerde inhoud ter sprake komen.

Wat betreft de onderwerpen 1 t/m 6 kan de meer gedetailleerde stofomschrijving door bijv. de volgende paragrafen uit het boekje van Halmos: *Finite dimensional vector spaces* (Springer) worden aangegeven: §§ 1–13, 18, 19, 26, 32–39, 41, 46, 47, 49, 50, 53–55, 59–66, 70, 72–75, of door de overeenkomstige stof uit ieder ander leerboek der lineaire algebra.

Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek

1 Kansrekening:

Kombinatoriek: 'de kunst van het tellen' o.a. permutaties; variaties en combinaties met en zonder herhaling.

Kansbegrip: vanuit historisch oogpunt de klassieke (Laplace) definitie en statistische (Von Mises) definitie. Echter werken met de moderne definitie (Kolmogoroff) via een kansveld (U, F, P); axioma's; som-, produkt-, complementregel; voorwaardelijke kans; onafhankelijke gebeurtenissen; Bayestheorema.

Stochastiek: definitie stochast (= toevalsvariabele); verdelingsfunctie; kansdichtheid;

discreet: rechthoekig (= uniform, homogeen), Bernoulli, binomiaal, Poisson met μ en λT als parameter;

kontinu: uniform, normaal, exponentiël; ε -operator (= verwachting) met eigenschappen; momenten o.a. variantie (spreiding/en) en gemiddelde van de bestudeerde verdelingen, met eigenschappen; mediaan; ongelijkheid van Bienaymé-Cebysev. tweedim. verdeling, marginale-, voorwaardelijke verdeling, covariantie en correlatie coëf. (deze laatste 5 begrippen alleen discreet) onafhankelijke en ongecorreleerde stochasten; variantie en verwachting van lineaire combinatie van stochasten; theoretische (zwakke)

wet van de grote aantallen; centrale limietstelling (bijzonder geval) met toepassingen; centrale χ^2 -, en t-verdeling.

2 Statistiek:

histogram; turfstaat; frekwentieverdeling; simuleren; toevalscijfers; schatters met eigenschappen zuiver, consistent, asymptotisch nauwkeurig, steekproefvariantie en -gemiddelde met eigenschappen; toetsingsgrootte; onbetrouwbaarheidsdrempel; kritiekgebied; fout van de 1e en 2e soort; onderscheidingsvermogen met curve; 1- en 2-zijdig toetsen van hypothesen; betrouwbaarheidsinterval; maximum likelihood methode; toets en betrouwbaarheidsinterval voor μ van een normale verdeling met σ bekend en onbekend; toets en betrouwbaarheidsinterval voor p van een binomiale verdeling na normale aanpassing; χ^2 -toets voor $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ van normale verdeling; tekentoets; nomogram.

[1] E. Kreyzig: *Introductory mathematical statistics*, Wiley, London 1970. Hoofdst. 2; Hoofdst. 4, 5, 6 (uitgezonderd § 6.6), 7, 8, 9 (alleen discreet), 10 (uitgezonderd gammaverdeling), 11, 12, 13 (uitgezonderd § 13.7 en 13.8); § 18.1, 2; § 20.1.

[2] B. Nijdam e.a.: *Statistiek en Kansrekening voor het V.W.O.*, uitgave I.V.I.O., Lelystad 1974. (met tabellen-, antwoorden- en kanttekeningenboekje).

M.O.-B

Analyse

- 1 Eenvoudigste begrippen uit de verzamelingenleer (eventueel axiomastelsel van Zermelo-Fraenkel, echter niet formeel).
Verzamelingen algebra (Boole). Geordende paren, relaties, functies (in het bijzonder van R_n naar R_m).
Cardinaalgetallen, aftelbare verzamelingen en eenvoudige eigenschappen. Topologie, metriek. Deelruimte, produktruimte. Verdichtingspunt, compactheid. Karakterisering van compacte verzamelingen in R_n .
[1], Hoofdstuk 1 = [2], Hoofdstuk 1.
- 2 Continue functies, dekpuntstelling. Fundamentele eigenschappen van continue functies op compacte verzamelingen. Samenhang.
[1] Hoofdstuk 2 = [2] Hoofdstuk 2.
- 3 Differentieerbare functies. Partiële afgeleiden, differentieerbaarheid. Kettingregel, Jacobiaan. Stelling van Taylor, extremen. Impliciete functiestelling (geen bewijs op examen), inverse functiestelling (geen bewijs op examen). Afhankelijkheid van functies (geen bewijs op examen). Functies gedefinieerd door bepaalde (ook oneigenlijke) integralen. Continuïteit, differentieerbaarheid en integreerbaarheid van dergelijke functies.
Niet: Verwisseling integratievolgorde bij twee grenzen $\pm \infty$, multiplicatorenregel van Lagrange.
[1] Hoofdstuk 3 (met uitzondering van de laatste twee onderwerpen),
[2] Hoofdstuk 3.
- 4 Meervoudige integralen (tweevoudig). Kenmerken voor Riemann-integreerbaarheid. Jordan maat, oneigenlijke gebiedsintegralen. Transformatie formule voor gebiedsintegralen. Meetkundige toepassingen in R_2 en R_3 .

booglengte, oppervlakte, lijnintegralen, oppervlakte-integralen, stelling van Gauss. Speciale functies: gammafunctie, betafunctie.

[1] Hoofdstuk 4, [2] hoofdstuk 4.

- 5 Differentiaalvergelijkingen. Elementaire oplossingsmethoden. Stelsels, existentiestelling. Lineaire stelsels, algemeen en met constante coëfficiënten. Structuur van de oplossingsruimte. Impliciete vergelijkingen, Beginselen van de algebraïsche theorie: singuliere oplossingen, p -discriminant, c -discriminant. Lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Integraaloppervlakken, karakteristieken.

[1] Hoofdstuk 5, § 1–6, [2] Hoofdstuk 6.

[1] B. van Rootselaar, *Analyse 2 $\frac{1}{2}$* . Uitgave LH, 3e druk 1971. Aan te vragen bij afdeling wiskunde, DE Dreijen 8, Wageningen (er zijn nog ± 20 exemplaren in voorraad).

[2] B. van Rootselaar, *Analyse 2 $\frac{1}{2}$* . Verschijnt eind 1975 bij H. D. Tjeenk Willink (Noordhoff).

[3] M. H. Hendriks, *Vraagstukken Analyse 2 $\frac{1}{2}$* . Uitgave LH, uitverkocht. Sluit aan bij [1].

[4] M. H. Hendriks, *Vraagstukken Analyse 2 $\frac{1}{2}$* . Verschijnt eind 1975 bij H. D. Tjeenk Willink (Noordhoff), sluit aan bij [2].

Uiteraard vindt men de stof – zij het in verouderde notatie – in het bekende leerboek t.v. Prof. dr. L. Kuipers deel II.

Functietheorie

De vereiste stof is te vinden in:

Complex Variables and Applications (3rd edition 1974) door: R. V. Churchill, J. W. Brown, R. F. Verhey. Uitgegeven door: Mac Graw-Hill. (International student edition) f 22,50 en wel in de hoofdstukken 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12. In dit boek vindt men veel oefenmateriaal.

1 *Complexe getallen*

Definitie. Algebraïsche eigenschappen. Cartesische coördinaten. Driehoeksongelijkheid. Poolcoördinaten. Machten en wortels. Gebieden in het complexe vlak. Het punt op oneindig.

2 *Analytische functies*

Functies van een complexe variabele. Afbeeldingen. Limieten. Stellingen over limieten. Continuïteit. Afgeleiden. Regels voor het differentieren. Differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann. Voldoende voorwaarde (voor omkeerbaarheid van het voorgaande). De differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann in poolcoördinaten. Analytische functies. Harmonische functies.

3 *Elementaire functies*

De exponentiële functie. Verdere eigenschappen van exp. z. Trigonometrische functies. Verdere eigenschappen van trigonometrische functies.

Hyperbolische functies. De logaritmische functie. Takken van de logaritmische functies. Verdere eigenschappen van logaritmen. Complexe exponenten. Inverse van trigonometrische functies.

4 *Afbeelding door middel van elementaire functies*

Lineaire functies. De functie f met $f(z) = 1/z$. Gebroken lineaire transformaties. De gevallen: $w = z^n$ en $w = z^{\frac{1}{2}}$. Andere irrationale functies. De transformatie waarbij $w = \exp. z$. De transformatie waarbij $w = \sin z$. Samengestelde transformaties.

5 *Integraalrekening*

Bepaalde integralen. Contouren. Lijnintegralen. Voorbeelden. De stelling van Cauchy-Goursat. (met bewijs) Enkelvoudig samenhangende gebieden en meervoudig samenhangende gebieden. Onbepaalde integralen. De integraalformule van Cauchy. Formules voor de afgeleiden van analytische functies. Stelling van Morera. Maximum-modulus stelling. Hoofdstelling van de algebra.

6 *Reeksen*

Convergentie van rijen en reeksen. Taylor reeksen. Laurentreeksen. Verdere eigenschappen van reeksen. Uniforme convergentie van machtreeksen. Integratie en differentiatie van machtreeksen. Eenduidigheid van de machtreeksontwikkeling. Vermenigvuldigen en delen van machtreeksen. Voorbeelden. Nulpunten van analytische functies. Zie noot.

7 *Residuen en polen*

Residuen. De Residuenstelling. Het hoofddeel van een functie. Polen. Quotiënten van analytische functies. Berekening van oneigenlijke reële integralen.

Oneigenlijke integralen met trigonometrische functies. Bepaalde integralen met trigonometrische functies. Integratie om een vertakkingspunt.

8 *Conforme afbeelding*

Elementaire eigenschappen. Verdere eigenschappen en voorbeelden. Toegevoegd harmonische functies. Transformatie van harmonische functies. Transformatie van de randvoorwaarde.

9 *Verdere toepassingen*

A *Analytische voortzetting*

Voorwaarden waaronder $f(z) \equiv 0$. Geldigheid van identiteiten bij analytische voortzetting. Voorbeelden. Spiegelingsprincipe.

B *Singuliere punten en nulpunten*

Polen en nulpunten. Essentiële singulariteiten. Aantal nulpunten en polen. Argumenten principe.

C *Oppervlakken van Riemann*

Oppervlak van Riemann voor:

$\log z$; $z^{\frac{1}{2}}$; $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

De hierboven beschreven stof vindt men ook in:

Basic Complex Analysis door J. E. Marsden, uitgegeven door W. H. Freeman and Company. Prijs f 40,75, en wel in de hoofdstukken 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Noot bij 6:

In dit boek wordt gelijkmatige convergentie alleen voor machtreksen besproken. Op het examen dient men dit begrip en de bijbehorende stellingen ook voor 'willekeurige' reksen te kennen.

Hoofdstukken uit de meetkunde

Differentiaalmeetkunde

A *Krommen.*

Kromming, torsie, formules van Frenet, natuurlijke vergelijkingen.

B *Oppervlakken.*

1ste fundamenteaal vorm: lengte, hoeken, oppervlakten op oppervlak.

2de fundamenteaal vorm: normale kromming, indicatrix van Dupin, kromtelijnen, asymptotische lijnen, kromming van Gauss.

Meetkunde op oppervlak: parallele verplaatsing langs krommen, geodeten, geodetische kromming, modellen voor niet-Euclidische meetkunden, stelling van Gauss-Bonnet.

Toelichting.

Het is de bedoeling de nadruk te leggen op de meetkundige inhoud van de stof; ontwikkeling van de tensor algebra wordt niet verlangd (en is niet nodig). De speciale oppervlakken (ontwikkelbare opp., regelopp., e.d.) zijn bedoeld als voorbeeld en illustratie van de theorie en niet als doel op zichzelf.

De niet-Euclidische meetkunde is slechts bedoeld in de omvang als in § 16 van [1].

Een bewijs van de stelling van Gauss-Bonnet wordt op het examen niet gevraagd.

[1] J. J. Stoker, *Differential Geometry* (Wiley). Hofst. I § 9, III (waarbij zo nodig II wordt geraadpleegd), IV, V § 1, 2, VII § 1–19.

De Commissie adviseert om bij het onderwijs te benutten de overeenkomstige stof uit:

[2] M. Lipschutz, *Differential Geometry* (Schaum's Outline Series).

[3] T. J. Willmore, *Differential Geometry* (Oxford Univ. Press).

Projectieve Meetkunde

1 Projectieve ruimten. Projectieve coördinatenstelsels. Projectieve transformaties.

2 Dualiteit.

3 Meetkunde op de projectieve lijn. Dubbelverhouding, harmonische ligging.

4 Meetkunde in het projectieve vlak. Coördinatendriehoek. Volledige vierzijde.

- 5 Projectieve afbeeldingen tussen lijnen, tussen waaiers.
- 6 Stelling van Desargues, van Pappus.
- 7 Kegelsneden. Projectieve voortbrenging van kegelsneden. Pool en pool-lijn. Stellingen van Pascal en Brianchon.
- 8 Affiene meetkunde.
- 9 Gelijkvormigheidsmeetkunde en metrische meetkunde.

Toelichting.

Verlangd wordt zowel elementair meetkundig inzicht in, als exacte behandeling van de stof. Bijvoorbeeld bij de invoering van projectieve ruimten kan men denken aan een intuïtieve benadering vanuit de vlakke meetkunde door toevoeging van 'punten op oneindig', gevolgd door een behandeling via vectorruimten.

Een ander voorbeeld: de elementaire betekenis van de dubbelverhouding en de projectieve behandeling.

Kennis van een axiomatisch-synthetische *opbouw* wordt niet vereist. Gedacht is aan een analytische opbouw waarbij echter een ruime plaats voor meetkundige beschouwingen is ingeruimd, bijvoorbeeld bij de theorie van projectieve afbeeldingen via projecties en met name bij de theorie van kegelsneden (methode van Steiner).

A. Heyting, *Projectieve Meetkunde* (Noordhoff), Hoofdstukken 1–5, 7, 9–12. De commissie adviseert om bij het onderwijs ook nog te benutten de overeenkomstige hoofdstukken uit

F. Ayres, *Projective Geometry* (Schaum's Outline Series).

In dit laatste boek komt de elementair meetkundige benadering goed naar voren, terwijl de onderwerpen 8 en 9 iets uitvoeriger dan in het eerste boek worden behandeld; het bevat veel vraagstukken.

Ontvangen boeken

Dr. P. M. van Hiele, e.a., *Van A tot Z HV-3b*, werkboek der wiskunde voor het derde leerjaar havo-vwo, tweede, geheel herziene druk, 1974, 187 blz. f 15.90.

Drs. Chr. Boermeester, e.a., *Van A tot Z M⁴-3b*, werkboek der wiskunde voor het derde leerjaar mavo, vijfde geheel herziene druk, 1974, 146 blz., f 14.50.

J. Mussess b.v. Purmerend 1975.

H. J. Jacobs e.a., *Moderne wiskunde* voor voortgezet onderwijs deel 6 voor vwo, derde herziene druk Wolters-Noordhoff Groningen, 1975, 153 blz., f 14.40.

Stichting Nederlandse Onderwijs Televisie

Schooltelevisieproject 'Wiskunde voor de brugklas'

De onderwijs televisie (NOT/NOS) brengt met ingang van het schooljaar 1975/1976 een onderwijsleerpakket 'wiskunde voor de brugklas' uit.

Het bestaat uit 3 televisieprogramma's (in kleur), een werkboek voor de leerlingen en een lerarenboek.

Aan de samenstelling hebben een aantal leraren van het l.b.o., a.v.o. en v.w.o. meegewerkt, teneinde het project geschikt te maken voor alle brugklassen van het voortgezet onderwijs.

Om de bestaande lesprogramma's van de brugklassen niet te doorkruisen is gekozen voor een kort lopend project, geheel aan het begin van het brugjaar. Het project 'Wiskunde voor de brugklas' is bedoeld als een inleidende cursus, die onder andere

- teruggrijpt op een aantal onderwerpen uit het basisschoolprogramma
- op de basisschool ingeoefende vaardigheden leert gebruiken in toepassingsgebieden
- uitnodigt tot intuïtief inspelen op een aantal onderwerpen uit het brugklasprogramma
- relatie legt tussen aspecten van het dagelijkse leven en de wiskunde
- laat zien hoe je door middel van abstraheren greep op een stukje werkelijkheid kunt krijgen
- een ontdekkende werkwijze stimuleert
- aanleiding geeft tot het hanteren van diverse werkvormen
- een positieve houding ten aanzien van de wiskunde bevordert.

De *televisieprogramma's 1 en 2* zijn vooral bedoeld als startpunt van een aantal activiteiten in de klas. De motivatie daartoe wordt opgewekt door het aanbieden van een zestal problemen uit de belangstellingswereld van 12- en 13-jarigen.

In *televisieprogramma 3* wordt getracht de leerlingen vanuit de opgedane ervaringen zicht te laten krijgen op een aantal aspecten van de wiskunde, die in het brugjaar aan de orde komen.

De oplossing van de in de televisieprogramma's geïntroduceerde problemen wordt geheel begeleid door middel van het *werkboek*. Allerlei activiteiten spelen daarbij een rol, zoals:

- het interpreteren van tabellen, diagrammen, luchtfoto's, plattegronden en striпкаarten
- het toepassen van meetstrategieën bij het bepalen van lengte en oppervlakte
- het maken en interpreteren van een histogram
- het opereren met gehele en gebroken positieve getallen
- het oplossen van telproblemen

- het simuleren van een stukje werkelijkheid
- het vervaardigen van en werken met randponskaarten
- het werken met een blokschema.

Ook begrippen als schaal, gemiddelde snelheid, maximum en minimum, verzameling en relatie komen hierbij onder meer aan de orde.

Het *lerarenboek* geeft uitgebreide didactische aanwijzingen, ervaringen die opgedaan zijn tijdens de try-out op een aantal scholen voor l.b.o., a.v.o. en v.w.o., suggesties voor aansluitende activiteiten, informatie over ontwikkelingen in het wiskunde-onderwijs.

Nadere inlichtingen over dit project zijn verkrijgbaar bij:
NOT, Riouwstraat 163, Den Haag, tel. 070-609815.

Boekbespreking

Programmierter Mathematikunterricht

Trigonometrie

I. Hempel

H. Schroedel Verlag, Hannover 1974.

De goniometrische functies $\sin$, $\cos$ en $\tan$ worden afgeleid m.b.v. vectoren. Tegelijk met eenvoudige vektorstellingen komen de opteltheorema's, de sinus- en cosinusregel aan de orde en het inwendig produkt van twee vectoren.

Men gebruikt het boek van voor naar achter, draait het om en men keert weer terug tot de eerste bladzijde.

De hoekmaat is in graden en minuten of decimaal in graden.

W. Burgers

E. Härtter. *Wahrscheinlichkeitsrechnung für Wirtschafts und Naturwissenschaftler*. Vandenhoeck/Ruprecht, Göttingen, 1974, 230 blz., DM 19.80.

Uitgaande van de klassieke Laplace-definitie wordt de ontwikkeling van het waarschijnlijkheidsbegrip in historische volgorde via de statistische waarschijnlijkheid en die met behulp van de theorie der verzamelingen besproken. Een volledig systeem van waarschijnlijkheden kan isomorf worden afgebeeld op een verzamelingsalgebra. Opgaven komen niet voor, wel uitgewerkte voorbeelden en wiskundige afleidingen van min of meer gecompliceerde vorm.

W. Burgers

Het hier te bespreken boekwerk is in sterke mate afwijkend van wat men gewoonlijk op dit gebied te zien krijgt. Het maakt niet de indruk volledig te willen zijn, maar enkele hoogtepunten worden vrij diepgaand behandeld. In het voorwoord zeggen de schrijvers onder meer: 'Es erscheint uns zweckmässig, der von Cantor vor fast 100 Jahren begründeten Theorie der Punktmengen eine besondere Darstellung zu widmen. Dabei wird darzustellen sein, was Cantor selbst auf diesem Gebiet geleistet hat. Schwieriger ist es, die Weiterführung seiner Ideen und den modernen Ausbau der Theorie aufzuzeigen. Schliesslich könnte man die gesamte moderne Topologie als eine Fortsetzung des Cantorsche Ansatzes denken. Daher mussten wir zwangsläufig eine Auswahl treffen und uns auf einige wenige Themen der Theorie der Punktmengen beschränken'.

In hoofdstuk I, Grundlagen der Mengenlehre, worden de grondbegrippen van de verzamelingstheorie ten toon gespreid. Ook worden reële getallen ingevoerd en worden de elementaire stellingen bewezen.

Vooraf hoofdstuk II, Elemente der Topologie im euklidischen Raum, is in historisch opzicht zeer interessant omdat aandacht wordt geschonken aan de ontwikkeling van sommige topologische begrippen sinds Cantor's tijd.

In hoofdstuk III, Folgen von Punktmengen, wordt enige aandacht besteed aan convexe deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, maar het grootste deel van dit hoofdstuk is gewijd aan de structuur van de ruimte der compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, speciaal ten aanzien van convergentie van rijen (Minkowski-optelling en Hausdorff-metrie).

Hoofdstuk IV, Minkowskische Reihen und Integrale, is een voortzetting van hoofdstuk III, met convergentie van reeksen en Minkowskische Riemann- en Stieltjes-integralen.

Hoofdstuk V, die Isoperimetrische Eigenschaft der Kugel, laat uitvoerig de prachtige constructies (o.a. van Steiner) zien die gebruikt kunnen worden bij het probleem van minimale oppervlakte bij constante inhoud.

Enige opvallende punten van kritiek zijn:

- De lijst met notatieconventies bevat enkele fouten.
- Nergens wordt het begrip afbeelding gedefinieerd; daarentegen gebruiken de schrijvers te pas en te onpas het begrip eenduidige afbeelding, wat verwarrend werkt ten opzichte van eeneenduidige afbeelding.
- Bij het stuk over Peanokrommen wordt deze term niet gebruikt, zelfs wordt Peano in dit verband niet eens genoemd.
- Op pag. 42 vinden we: 'Dedekind beglückwünschte seinen Freund Cantor zu seinem Ergebnis, sprach aber die Vermutung aus dass eine stetige Abbildung zwischen Punktmengen von verschiedenen Dimensionen nicht möglich sei. Das ist tatsächlich (zuerst von Brouwer) Jahrzehnte später bewiesen worden'.
- Ik heb niet nagegaan wat Dedekind precies geschreven heeft, maar de tweede zin uit het citaat is een pertinent onjuiste bewering.
- Veel definities worden zo gegeven dat ze alleen voor metrische ruimten het gewenste begrip opleveren, maar niet uit te breiden zijn tot algemenere topologische ruimten.
- Op pag. 49 en 50 komen van de begrippen samenhang en continuüm twee definities voor, die van Cantor en de moderne definities. Er wordt echter nergens duidelijk gezegd met welke definities verder gewerkt zal worden.

P. W. H. Lemmens.

Voor mij ligt de tweede, verbeterde druk van een boek dat in 1965 verscheen. Ik heb de indruk dat het geschreven is voor (aanstaande) leraren die meetkunde (zullen) onderwijzen. De auteur vindt dit onderwijs waardevol; hij verwerpt de opvatting dat het, ook voor het v.w.o., voldoende zou zijn meetkunde te onderwijzen als lineaire vectoralgebra.

De auteur wil de wetenschappelijke grondslagen van de schoolmeetkunde beschrijven. In hoeverre de school deze axiomatic kan gebruiken waagt hij niet te beoordelen. Wel volgt hij met het oog op dit eventuele gebruik niet Bachmann in diens fundering op spiegelingen daar hij deze methode voor beginners te moeilijk vindt, al kent hij haar het voordeel toe een gemeenschappelijke onderbouw voor de euclidische, de hyperbolische en de elliptische meetkunde te kunnen geven.

In een inleidend hoofdstuk gaat de schrijver in op de ontwikkeling van het grondslagenonderzoek na Hilbert. Bij de opbouw van de meetkunde zal hij gebruik maken van 'geprefabriceerde' eenheden zoals verzamelingen, relaties en structuren. De euclidische meetkunde wordt opgevat als de theorie van een verzameling R , waarvan de elementen punten worden genoemd. De verzameling R heet ruimte; bepaalde deelverzamelingen van R worden lijnen, andere vlakken genoemd.

De auteur legt eerst de basis voor de absolute meetkunde, de gemeenschappelijke onderbouw van de euclidische en de hyperbolische meetkunde. De grondslag wordt gevormd door 16 axioma's, verdeeld in vier rubrieken: zeven voor de *incidentie* (drie voor de vlakke meetkunde), drie voor de *ordering*, waarvan twee voor de lijn en een voor het vlak (Pasch), vijf voor de *congruentie* en één voor de *continuïteit*.

Het laatste wordt geformuleerd met behulp van begrippen uit de verzamelingsleer: elke lijn is een antireflexief geordende puntverzameling V met de eigenschap dat elk punt een snede van Dedekind (V_1, V_2) bepaalt waarvoor één van de volgende eigenschappen geldt: V_1 heeft een laatste element, V_2 heeft een eerste element. Zoals bekend geeft Hilbert in zijn 'Grundlagen der Geometrie' twee axioma's voor de continuïteit: de stelling van Archimedes en het volledighedsaxioma. Beide worden door de schrijver uit zijn continuïteitsaxioma afgeleid.

Aangetoond wordt dat de gewone analytische meetkunde in R_2 een model is voor de absolute vlakke meetkunde, d.w.z. dat, bij geschikte definitie van ordening en congruentie, aan alle axioma's wordt voldaan. Dan wordt opgemerkt dat de gevolgde redenering ook opgaat, behalve voor het continuïteitsaxioma, als men slechts rationale getallen voor de coördinaten en de coëfficiënten toelaat (pag. 105–106). Dit verwondert mij. Hilbert heeft hiervoor een ruimere verzameling nodig ('Grundlagen', 9e druk, pag. 34–36).

Vervolgens wordt de existentie van een tweede model voor de absolute meetkunde aangetoond: het model van Poincaré. Uit het feit dat de beide genoemde modellen niet isomorf zijn volgt dat het systeem van de absolute meetkunde niet categorisch is.

Eerst in hoofdstuk IX wordt het parallellenaxioma ingevoerd.

Dat dit onafhankelijk is van de eerder vermelde axioma's blijkt uit het bestaan van het model van Poincaré. Nu is de grondslag van de euclidische meetkunde voltooid. Aangetoond wordt dat dit systeem categorisch is.

Schrijver besteedt ook aandacht aan die delen van de euclidische meetkunde die zonder gebruikmaking van het continuïteitsaxioma kunnen worden ontwikkeld. In dit kader behandelt hij de gelijkvormigheid, de afbeeldingen translatie (vectoren), spiegeling en rotatie, de oppervlakte-theorie.

Het laatste hoofdstuk behandelt elementen van de projectieve meetkunde.

Het boek is prettig leesbaar, het geeft veel voorbeelden en een aantal opgaven. Belangrijker nog vind ik dat het een heldere doorlichting van het systeem geeft. Ook wanneer men oog heeft voor een enigszins andere opbouw van de meetkunde, ik denk bijvoorbeeld aan Artin, Bachmann of Choquet, is het meer dan nostalgie wanneer men in bewondering omziet naar de denkbaarheid die gestalte kreeg in het systeem 'der guten alten euklidischen Geometrie' (citaat).

Voor leraren aanbevolen.

E. H. Schmidt.

G. Ewald, *Geometrie, Eine Einführung für Studenten und Lehrer*, Vandenhoeck en Ruprecht, Göttingen, 1974, 201 blz., DM 26,—.

De oorspronkelijke uitgave verscheen in 1971 in het engels. Het is dus een vertaling in de moedertaal van de auteur.

Door de afbeelding centraal te stellen wordt de meetkunde van zijn statisch element verlost en zal, naar de mening van de auteur, de meetkunde weer een centrale plaats kunnen innemen in het wiskunde-onderwijs.

‘In der jüngeren Vergangenheit wurde die Geometrie vernachlässigt. Ein Grund hierfür dürfte sein dasz man Geometrie zuweilen als altmodisch betrachtet hat im Grunde als Rahmen für Rätsel brauchbar’.

De opzet is axiomatisch. Hoofdstuk I bespreekt de fundamentele axioma's.

Objecten zijn ‘punten’ en ‘rechten’. Er zijn twee logische alternatieven: ‘liggen op’ of ‘liggen niet op’, en ‘loodrecht’ of ‘niet loodrecht’.

Dan volgen drie incidentie-axioma's en drie spiegelingen-axioma's, opgevat als afbeeldingen. Draaiingen en translaties worden gedefinieerd als een samenstelling van spiegelingen, waarna vier bewegings-axioma's volgen. Op blz. 15 wordt zonder nadere precisering over *snijden* gesproken. Wat bedoelt de auteur hiermee? Treedt snijding alleen op bij ‘loodrecht’ zijn? Of stapt men af van de abstracte elementen en moet men een ‘lijn’ toch maar opvatten als een verzameling ‘punten’? Door het na elkaar uitvoeren van bewegingen ontstaat de bewegingsgroep van het platte vlak en worden de voornaamste eigenschappen van de groep besproken. Een uitvoerige bespreking van alle hoofdstukken zou teveel plaats vragen. Daarom een kort overzicht. Hoofdstuk II: ordening en congruentie.

Hoofdstuk III affine vlakken en coördinaten.

In de aanhang nog een historische beschouwing over Kant en Einstein, eindige bewegingsgroepen en coördinaten systemen in euclidische vlakken.

W. Burgers

W. Kerby, *On infinite sharply multiply transitive groups*, Hamburger Math. Einzelschriften, N.F. 6, 69 blz., Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. DM 18,—

Een op een verzameling X werkende groep G heet scherp m -voudig transitief indien er bij elk paar geordende m -tallen van X precies één afbeelding uit G bestaat, die het éne m -tal in het andere overvoert. De eindige onder deze G overziet men goed: ze zijn met behulp van zekere algebraïsche structuren, de bijna-lichamen, te beschrijven. Het voorliggende boekje stelt een extensieve en intensieve studie van de oneindige scherp m -voudig transitieve groepen (m eindig) voor.

Hans Freudenthal

Ontvangen boeken

H. J. Jacobs e.a., *Moderne wiskunde*, deel 4 voor havo en mavo, derde herziene druk, 232 blz., van Wolters-Noordhoff, Groningen, 1974. f 14,50.

G. Krooshof e.a., *Moderne wiskunde voor het l.b.o.*, deel 3T, 3de herziene druk, 182 blz., f 17,—. Moderne wiskunde voor het l.b.o. Antwoorden deel 2T A/B, f 8,50.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

335 In het vorige nummer stond als opgave: iemand heeft een stapel kaarten van boven naar beneden genummerd 1 tot en met n . Hij gooit er telkens p weg, legt de eerstvolgende onderop de stapel, en herhaalt deze bewerking, totdat het niet meer mogelijk is. Er blijft dan precies één kaart over. Gevraagd het getal dat op deze kaart staat.

De lezers hebben zonder twijfel gemerkt, dat ze in deze rubriek op een karakteristieke wijze een gelukkig nieuwjaar gewenst worden. Ze kunnen zelf dergelijke gelukwensen ook wel bedenken. Om ze de weg te wijzen het volgende. Kies n en p zo, dat de overgebleven kaart het getal 1976 vertoont. Slimmeriken zeggen natuurlijk: kies $n = 1976$ en $p = 1975$, dan heb je je zin. Maar om ze deze pas af te snijden, stel ik nog de eis, dat $p \leq 9$. Aan het eind van dit jaar verwacht ik nu van de lezers talrijke puzzels waar 1976 uitkomt. De beste wordt gaarne geplaatst.

336. De zijden van een n -hoek zijn in de hoekpunten scharnierend verbonden. Is $n > 3$, dan kan men de n -hoek deformeren. Zo kan men bijv. een vierkant samenknijpen tot een scheve ruit. Alleen de driehoeken zijn stabiel. Beschouw nu een samenstel van een eindig aantal scharnierende veelhoeken. Bestaat dit samenstel uit louter veelhoeken met meer dan 3 zijden, dan kan het gedeformeerd worden. Bestaat het uit louter driehoeken, dan is het stabiel. Wordt gevraagd een samenstel te ontwerpen van veelhoeken dat stabiel is en waar relatief zo min mogelijk driehoeken in voorkomen.

Oplossingen

333. A is het bovenaanzicht, B het vooraanzicht en C het zijaanzicht van een ruimtefiguur.

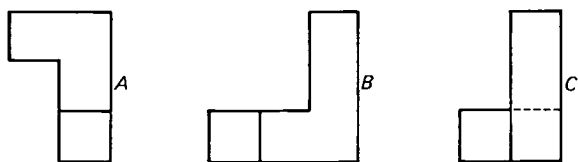


Fig. 1.

Deze ruimtefiguur ziet er als volgt uit:

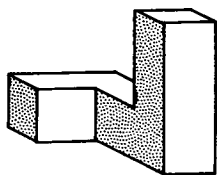


Fig. 2.

334. Bij wijze van voorbeeld kiezen we $p = 9$. Het is duidelijk, dat n gelijk moet zijn aan een 9-voud + 1. We kiezen $n = 66286$. Bij het uitvoeren van de voorgeschreven procedure komen achtereenvolgend onderop de stapel:

10, 20, 30, ..., 66280

De eerstvolgende keer gooien we weg

66281, 66282, ..., 66286, 10, 20, 30

Onderop komen nu resp.

40, 140, 240, ..., 66240

Daarna gooien we weg

66250, 66260, ..., 66280, 40, 140, 240, 340, 440

Onderop komen nu

540, 1540, 2540, ..., 65540

We gooien weg

65640, 65740, ..., 66240, 540, 1540

Onderop komen

2540, 12540, 22540, ..., 62540, 63540, 64540, 65540

Hiervan worden de eerste negen weggegooid en blijft ten slotte alleen 65540 over.

Uit dit proces blijkt dat we de volgende algoritme kunnen uitvoeren.

Voorbeeld: $p = 9$, $n = 5164327$.

Uit $n = 5164327$

volgt dat het laatste getal is 4627030

We gaan daartoe als volgt te werk:

het laatste cijfer is 0

$10 - 7 = 3$; het voorlaatste cijfer is 3

$12 - 3 = 9$ en $9 - 9 = 0$; het volgende cijfer is dus 0.

Deze 0 trekken we nu niet af van de erboven staande 3, maar van 2 (omdat we bij $12 - 3 = 9$ van deze 3 er 1 'geleend' hebben), dus $2 - 0 = 2$ en $9 - 2 = 7$; het volgende cijfer is 7.

Nu $14 - 7 = 7$ en $9 - 7 = 2$; het volgende cijfer is 2.

Daarna $5 - 2 = 3$ (van de 6 is weer 1 geleend) en $9 - 3 = 6$; het volgende cijfer is 6.

Ten slotte wordt het voorste cijfer 4.¹

Bovenstaand algoritme geldt alleen voor $p = 9$. Als p een ander getal is, schrijven we het getal n eerst in het $p + 1$ -tallig stelsel. Daarna voeren we in dit talstelsel dezelfde algoritme uit als bij $p = 9$.

¹ Wie de redenering wil volgen, moet zich de moeite getroosten het procedé zelf uit te voeren.

wiskunde docenten

Wolters-Noordhoff bv is een educatieve uitgeverij, die leerpakketten ontwikkelt, voornamelijk voor het primair en secundair onderwijs.

Binnen de redactie wiskunde, die de ontwikkeling, produktie en verkoop van wiskunde-uitgaven voor het voortgezet onderwijs tot taak heeft, bestaan plannen voor een project Wiskunde-16+.

Hiertoe wordt contact gezocht met *wiskunde docenten*, werkzaam in het m.b.o., h.b.o. of in de bovenbouw van havo en v.w.o., die belangstelling hebben voor vernieuwingen in het wiskundeonderwijs.

Van deelnemers aan de te formeren werkgroep wordt bereidheid verwacht eigen en anderer didactische, wiskundige en redactionele kwaliteiten te ontwikkelen bij het totstandkomen van een gemeenschappelijke visie.

Aan de oprichting van de werkgroep zullen een aantal studiedagen voorafgaan opdat het de potentiële partners duidelijk wordt waar zij op intekenen.

Belangstellenden die direct of na een inwerkperiode aan de ontwikkeling van Wiskunde-16+ willen bijdragen, worden gaarne uitgenodigd op deze oproep te reageren.

Ook docenten die hiervoor geen belangstelling hebben maar wel willen meewerken op een andere manier, bijvoorbeeld door te reageren op door anderen geschreven kopij nadat die in een eigen klas is beproefd, kunnen reageren.

Voor nadere inlichtingen kunt u zich wenden tot:

Drs. J. van Dormolen, medewerker Ped. Did. Inst. Rijksuniversiteit, Utrecht

J.H.G. Vaessens, leraar St. Maartenscollege, Maastricht

D.W. Soeteman, hoofd redactie wiskunde Wolters-Noordhoff

Uw reacties kunt u richten aan: Wolters-Noordhoff bv, t.a.v. de heer D.W. Soeteman, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162120.

ICU

Wolters-Noordhoff bv is een werkmaatschappij van de nv ICU, Informatie en Communicatie Unie, waarin o.a. samenwerken Samsom/Alphen aan den Rijn, A.W. Sijthoff/Leiden en Wolters-Noordhoff/Groningen.



Wolters-Noordhoff bv

In opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en sterrenkunde
is uitgegeven de

STERRENGIDS 1976

Samengesteld door Lic. Jean Meeus

70 pag., ing. geill. f 13,50. ISBN 90 01 81278 3

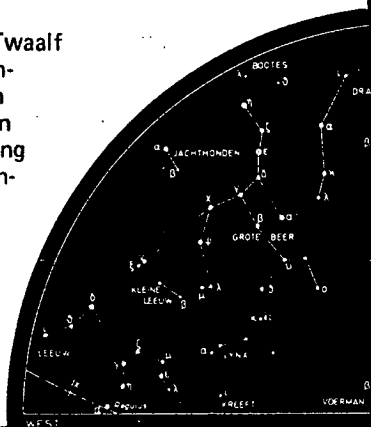
Inhoud:

Tijdaanwijzing; beknopt jaaroverzicht; Twaalf
sterrenkaarten-zes paren; Hemelverschijn-
selen in 1976; De wegen van planeten en
planetoiden; De zon in 1976; De maan in
1976; De planeten in 1976; Sterbedekking
1976; Minima van Algol; Mira; Verklaren-
de woordenlijst van enkele astrono-
mische termen; Griekse letters; Enkele
hemelverschijnselen in 1977.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel.



H.D. Tjeenk Willink Groningen



INHOUD

H. Bosscher: Oorzaken van slechte proefwerkresultaten 87

Verslag staatsexamen 94

Drs. A. van Streun: Differentiatie, het wiskundeonderwijs en klassifikatie van
doelstellingen 95

P. G. J. Vredenduin: Het oplossen van differentiaalvergelijkingen 100

W. A. M. Burgers: Afbeeldingen 104

B. C. Dijkstra-Kluyver: Een kleine aanvulling bij het stukje no. 9 van
Prof. Dr. O. Bottema over ingeschreven driehoeken 107

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 109

Programma van het examen voor de akten wiskunde M.O. 112

Stichting Nederlandse Onderwijs Televisie 120

Boekbespreking 121

Ontvangen boeken 99, 119, 124

Recreatie 125