

Maandblad voor  
de didactiek  
van de wiskunde

Orgaan van  
de Nederlandse  
Vereniging van  
Wiskundeleraren

51e jaargang

1975/1976

no 2

oktober

Wolters-Noordhoff

# EUCLIDES

**Redactie:** G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.  
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.  
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.  
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 28,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.  
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Prijs nummer 4/5 f 9,50.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven:  $\frac{1}{1}$  pag. f 225,—,  $\frac{1}{2}$  pag. f 120,— en  $\frac{1}{4}$  pag. f 67,50.

# S.M.P. Advanced Mathematics Book 1-4

P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

In een vorig artikel besprak ik de boeken die voorbereiden op het eindexamen op O level. In dit artikel worden de boeken besproken die voorbereiden op het A level. Voor de lezer die niet voldoende thuis is in het Engelse onderwijs volgt hier eerst een korte uiteenzetting hierover. Deze is overgenomen uit de publikatie Selectie voor en in het hoger onderwijs (Staatsuitgeverij, 1972, blz. 151-152).

Grammar schools leiden hun leerlingen op voor de 'General Certificate of Education'-examens. Dit zijn externe examens die voor elk vak op twee niveaus afgenomen kunnen worden, nl. op 'Ordinary (O) level' en 'Advanced (A) level'. Men verkrijgt het 'General Certificate of Education' (G.C.E.) als men ten minste voor één vak op O level geslaagd is en men kan onbeperkt vakken op O of A level aan zijn G.C.E. toevoegen. Voor toelating tot een universiteit of andere hogere opleiding moet men in het bezit zijn van een G.C.E. met bepaalde minimumeisen. Gedurende de eerste 4 of 5 jaar van de grammar school bereiden de leerlingen zich voor op de O level G.C.E. examens.

Een deel van de leerlingen verlaat de school op 15-jarige leeftijd (einde leerplicht), een ander deel na O level examens gedaan te hebben (al of niet met succes), de rest (d.w.z. degenen die geslaagd zijn voor een bepaald aantal vakken op O level en door willen gaan) gaat naar de 'sixth form' van de grammar school, waarin zij voorbereid worden op A level examens. In de 'sixth form' worden meestal niet meer dan vier nauw-verwante vakken, gedurende ten minste 2 jaar bestudeerd.

De toelatingseisen voor universiteiten worden geformuleerd in termen van het G.C.E. Iedere universiteit stelt afzonderlijk per studierichting vast voor hoeveel en voor welke vakken men op A level en O level geslaagd moet zijn wil men in aanmerking komen voor toelating tot die universiteit en die studierichting. . . . De laagste minimumeisen zijn drie O levels en twee A levels.

Tot zover genoemd rapport. Nu de boeken.

Men heeft nauwelijks enkele bladzijden in book 1 gelezen en men merkt al, dat het in geheel andere trant geschreven is dan de boeken die bestemd zijn voor O level. Hoofdstuk 1 draagt de titel Structures. In dit hoofdstuk vinden we een systematisch overzicht van al datgene wat we vroeger min of meer te hooi en te gras over structuren zijn tegengekomen. De gebezigde taal is veel meer to the point en minder gemoedelijk dan we dat gewend waren. Veel onderwerpen die vroeger reeds ter sprake kwamen, passeren opnieuw de revue, maar nu strenger en uitgebreider, zoals: getalstelsels en algebraïsche vormen, functies en grafieken, logaritmen, goniometrische functies, vectoren.

Voor de Nederlandse lezer is uiteraard het belangrijkst te zien in welke opzichten de behandelingswijze afwijkt van de bij ons gebruikelijke. Allereerst valt dan op dat, hoewel de wiskundige strengheid belangrijk opgevoerd is, deze toch niet als hoogste ideaal gesteld wordt. Van zeer groot belang blijft ook in deze boeken de relatie tussen de wiskunde en de praktijk.

Zo draagt reeds het tweede hoofdstuk de naam: Flow diagrams, natural numbers and induction. En inderdaad: wat ligt meer voor de hand dan een inductieve definitie toe te lichten door de computer erop los te laten. Laat hem maar eens de twintigste term uitrekenen van de rij van Fibonacci.

Ik wil weer geen volledigheid nastreven bij het weergeven van de inhoud, maar me beperken tot enkele dingen die me zijn opgevallen. In dit verband zou ik uit het eerste boek ter sprake willen brengen de definitie van de afgeleide en de invoering van de vectoren.

In fig. 1 en fig. 2 zijn pijldiagrammen getekend voor de functies

$$f: x \rightarrow 3x - 2$$

en

$$g: x \rightarrow x^2$$

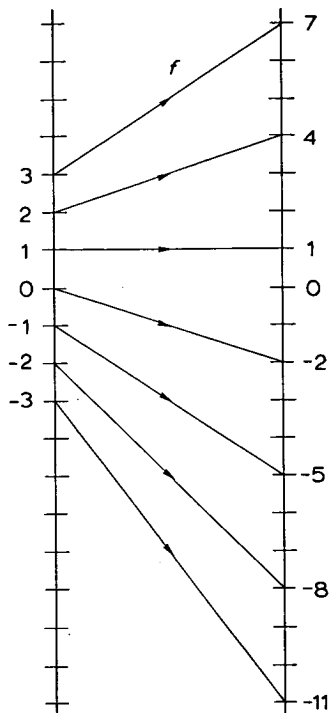


Fig. 1

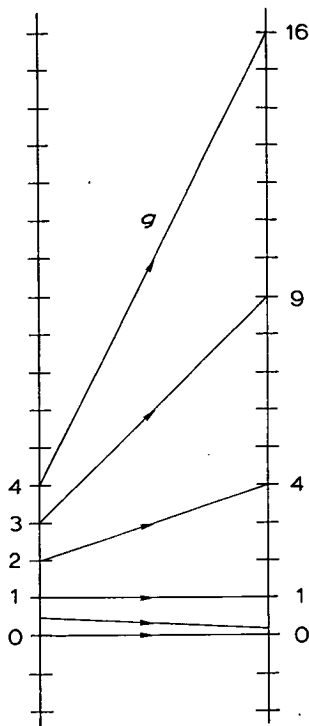


Fig. 2

In fig. 1 zien we, dat het beeld van elk interval een 3 maal zo groot interval is. De schaaftactor van de afbeelding is dus 3.

Uit figuur 2 blijkt, dat er bij de afbeelding  $g$  geen sprake is van een vaste schaaftactor. Anders gezegd

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

is geen constante. Wel kunnen we spreken van een locale schaaftactor. Deze definiëren we als

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Deze limiet wordt genoteerd  $f'(a)$  en daarmee is het differentiatieproces tot stand gekomen.

Voor wie nieuwsgierig is: op dit moment komt de term 'limiet' voor het eerst voor; de limiet wordt gedefinieerd als continuummakende waarde. Te voren is continuïteit reeds gedefinieerd door middel van omgevingen.

Typerend voor de praktische instelling van de Engelsen is de manier waarop in kort bestek (27 blz.) de beginselen van de vectorrekening uiteengezet worden. Een vector wordt in het platte vlak gedefinieerd als een ekwivalentieklasse van gerichte lijnstukken. Optelling geschiedt volgens de kop-staart-methode door representanten van twee vectoren aan elkaar te koppelen. De optelling blijkt commutatief en associatief te zijn; er is een neutraal element. Nu verlaten we de eigenlijke wiskunde en gaan naar de mechanica. Een verplaatsing heeft een grootte en een richting en kan dus voorgesteld worden door een vector. De verplaatsing die resulteert uit twee achtereenvolgende verplaatsingen krijgen we door de bijbehorende vectoren op te tellen. Op dezelfde manier worden twee snelheden opgeteld. B.v. een man schiet uit een rijdende auto. Bekend zijn de snelheid van de auto en die van de kogel t.o.v. de auto. Vind de snelheid van de kogel t.o.v. de aarde.

Ook het optellen van krachten geschiedt op deze manier. Experimenten hebben uitgewezen, dat de som van twee krachten verkregen wordt door de diagonaal te tekenen van het parallelogram op de twee krachten beschreven. Ook hier is sprake van vectoroptelling. Vraagstukken over samenstellen van krachten worden gemaakt, zoals:

een lichaam met bekend gewicht wordt door een gegeven kracht schuin omhoog tegen een verticale muur gedrukt, het lichaam is in evenwicht; gevraagd de normale kracht;

een auto rijdt naar boven op een weg met gegeven hellingshoek, gewicht van de auto en wrijvingskracht zijn gegeven; gevraagd de kracht die de auto moet ontwikkelen om met constante snelheid te blijven rijden.

Nu volgt de scalaire vermenigvuldiging met associatieve en beide distributieve eigenschappen.

Plaatsvectoren worden ingevoerd. In het nu volgende deel zijn alle vectoren plaatsvectoren. Allereerst wordt het ratio-theorema afgeleid:

als  $P$  op de lijn  $AB$  ligt en  $AP : PB = \lambda : \mu$ , waarin  $\lambda + \mu = 1$ , dan geldt voor de bijbehorende plaatsvectoren

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

Of meer algemeen: als  $P$  op de lijn  $AB$  ligt en  $AP : PB = l : m$ , dan is

$$\mathbf{p} = \frac{l\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{l + m}$$

Hierna gaan we weer terug naar de mechanica. Twee massa's  $l$  en  $m$  bevinden zich in  $A$  resp.  $B$ . Ze kunnen dan vervangen worden door één enkele massa  $l + m$  in het 'point of balance'  $P$  bepaald door de plaatsvector

$$\mathbf{p} = \frac{l\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{l + m}$$

Voor drie massa's in het platte vlak leiden we hieruit af, dat we ze vervangen kunnen door één massa  $l + m + n$  in het point of balance

$$\mathbf{p} = \frac{l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}}{l + m + n}$$

We schakelen weer terug naar de meetkunde, maken de drie massa's gelijk, en vinden zo het zwaartepunt van een driehoek:

$$\mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Spelenderwijs zijn in de vraagstukken naast de vectoren in het platte vlak ook vectoren in de ruimte tevoorschijn gekomen. Waardoor we nu het voorgaande kunnen overdragen op de theorie van het viervlak. Het zwaartepunt is het punt

$$\mathbf{z} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$$

Door dit punt gaan de drie zwaartelijnen en ook de drie verbindingslijnen van de middens van overstaande ribben.

Ten slotte volgt nog in kort bestek afhankelijkheid van vectoren, basis en dimensie van een vectorruimte.

Luchtig en praktisch. Geen algemene theorie van een lineaire ruimte. Krachten maken (wiskundig ten onrechte) een even gereede aanspraak op het predikaat vector als snelheden of verplaatsingen. Maar mechanica en wiskunde worden zo doelmatig verweven, dat je het begrip vector in je vingers krijgt en het tegelijkertijd in en buiten de wiskunde leert hanteren.

Om misverstand te voorkomen: mijn enthousiasme houdt niet in, dat ik vind dat het zo moet gebeuren. Maar wel dat het voor ieder de moeite waard is te overwegen, of hij het zo wil doen.

In boek 2 zien we dezelfde tendensen die we ook in de O-boeken gezien hebben: opvolgende hoofdstukken staan vaak los van elkaar, hoofdstukken uit een vorig deel worden voortgezet.

Zo vinden we in de eerste drie hoofdstukken resp.: rijen, beschrijvende statistiek en voortzetting van het hoofdstuk vectoren. Daarna voortzetting van het hoofdstuk over goniometrische functies en kwadratische functies. Ik vond weinig schokkends in deze hoofdstukken. Er waren geen principiële verschillen met de bij ons gebruikelijke methoden. Ik was vooral nieuwsgierig naar de vectoren, maar in een 40-tal bladzijden vond ik een normale behandeling van lijn en vlak in drie dimensies, inwendig produkt, loodrechte stand, hoeken en afstanden. Dus wel wat vlotter dan bij ons.

De differentiaalrekening begint vruchten af te werpen. Met behulp van de afgeleide wordt een formule opgesteld voor lineaire approximatie. Op de bekende manier wordt door middel hiervan een methode uiteengezet voor het approximeren van wortels van een vergelijking. En dan volgt zelfs approximatie van hogere graad. Als volgt:

$$\begin{aligned} \text{voor kleine } a \text{ geldt } (p + a)^3 &\approx p^3 + 3p^2a + 3pa^2 \\ (p + a)^4 &\approx p^4 + 4p^3a + 6p^2a^2 \end{aligned}$$

Dus in deze gevallen:

$$\text{voor kleine } a \text{ geldt } f(p + a) \approx f(p) + f'(p)a + \frac{1}{2}f''(p)a^2$$

Dit geeft aanleiding tot de volgende gedachte. Om  $f(x)$  in een omgeving van  $p$  te approximeren zoeken we een functie

$$g: x \rightarrow A + B(x - p) + C(x - p)^2$$

waarvoor geldt

$$g(p) = f(p), \quad g'(p) = f'(p), \quad g''(p) = f''(p)$$

Hetgeen direct leidt tot

$$g: x \rightarrow f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{f''(p)}{2}(x - p)^2$$

Approximaties van hogere orde liggen meteen voor het grijpen.

Hierna volgt de techniek van het differentiëren. Zoals men wel zal verwachten, wordt niet van differentiaal gebruik gemaakt, maar spelen wel aangroeiingen

$\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta u$  e.d. een belangrijke rol. Men komt zo op een weliswaar niet al te strenge, maar wel handige manier tot de bekende formules.

Oppervlakte wordt als functie ingevoerd. En vanuit de theorie van de oppervlakte komen we vrij gemakkelijk tot de bepaalde integraal. Waarna integreren een bewerking blijkt te zijn die de inverse is van differentiëren.

Goede aandacht wordt besteed aan het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen (drie vergelijkingen met drie veranderlijken). Hierbij wordt gebruik gemaakt van matrixvermenigvuldiging, echter niet van determinanten.

Zoals ook in de volgende delen wordt veel gedaan aan verwante vakken. Men vindt in dit deel hoofdstukken over beschrijvende statistiek, kansrekening, kinematica, een inleiding in de dynamica en een over dimensies van grootheden.

Book 3. Uit de inhoud: de binomiale verdeling, programmering, elektriciteitsleer, relatieve beweging, moment en impuls en ook:

exponentiële en logaritmische functies, complexe getallen, gehele rationale vergelijkingen (inclusief een aardige schets van het bewijs van de hoofdstelling van de algebra), inleiding in de differentiaalvergelijkingen met praktische toepassingen.

Ik heb het laatste onderwerp gekozen om iets meer van te vertellen. De theoretische benadering is min of meer met de losse hand. Geen differentiaal, in de vergelijkingen komen dan ook niet  $dx$  en  $dy$  voor maar in plaats daarvan steeds  $\frac{dy}{dx}$ ,

of de integraalkrommen. functies of alleen maar relaties voorstellen vormt geen probleem, evenmin vormen verticale raaklijnen een probleem. De oplossingstechniek verschilt niet van de onze. Inzicht in de praktische betekenis van een differentiaalvergelijking is van fundamenteel belang.

Eerste probleem. Een jachthond zit een haas achterna. Hij loopt steeds in de richting van de haas. Schets de baan van de hond. Laat hem daarbij steeds een klein eindje rechtuit lopen en dan zijn snelheid corrigeren (fig. 3).

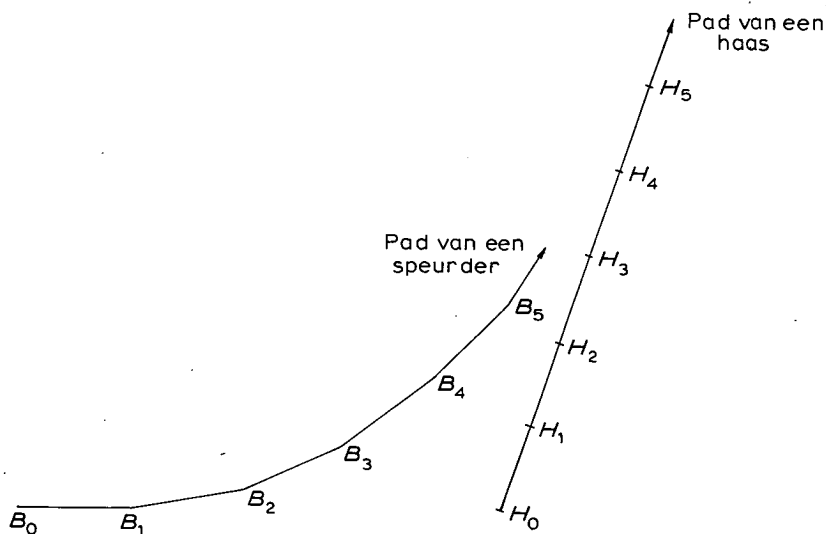


Fig. 3

Tweede probleem. De versnelling van een ruimteraket is gegeven door de volgende tabel:

|                                   |    |    |    |    |     |     |
|-----------------------------------|----|----|----|----|-----|-----|
| tijd (sec)                        | 0  | 2  | 4  | 6  | 8   | 10  |
| versnelling (m/sec <sup>2</sup> ) | 10 | 20 | 40 | 90 | 170 | 260 |

Maak op analoge manier, dus weer volgens de stap-voor-stap-methode, een grafiek van de snelheid als functie van de tijd.

Duidelijk is de bedoeling van deze twee voorbeelden. Het is een inleiding tot het stap-voor-stap oplossen van een differentiaalvergelijking, zoals een computer dat doet.

Nu ter voorbereiding een heel ander probleem. Gegeven is een verzameling krommen, b.v.  $y = kx$  of  $x^2 + y^2 = r^2$ . Vind het verband tussen  $x$ ,  $y$  en  $\frac{dy}{dx}$  in elk punt. De eerste verzameling levert  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  (mits  $x \neq 0$ ) en de tweede  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ . Afleiding van de laatste formule:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x + \frac{d}{dy}(y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$$

We gaan weer een stap verder. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Schets het bijbehorende lijnelementenveld (fig. 4).

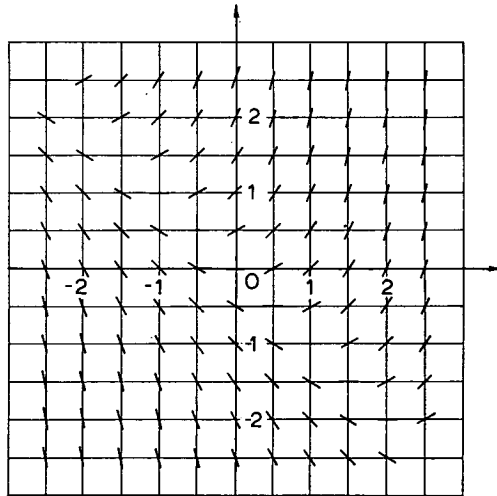


Fig. 4

Waar is de afgeleide 0? We ontdekken dat de lijn  $x + y = 0$  aan de vergelijking voldoet. Waar is  $\frac{dy}{dx}$  positief en waar negatief? Schets de integraalkrommen (fig. 5).

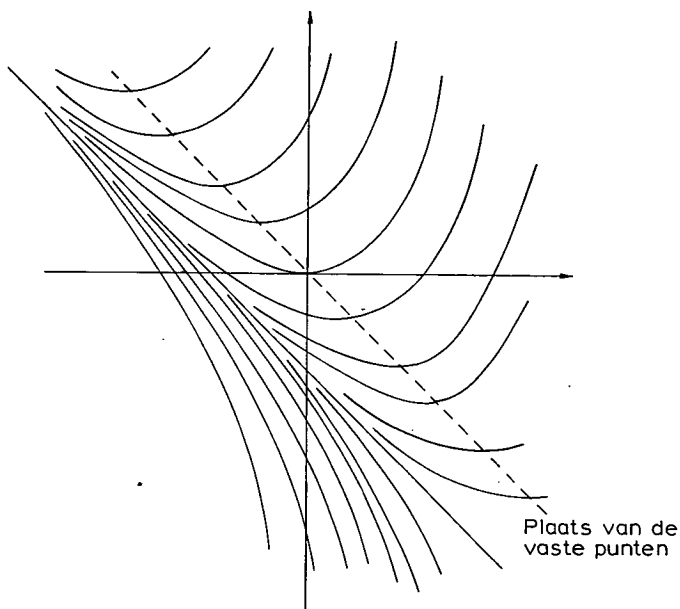


Fig. 5

Hier voelt de Nederlandse lezer zich wel heerlijk op bekend terrein.

Het volgende voorbeeld is iets ingewikkelder:

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

We gaan tewerk als in het vorige voorbeeld, maar bekijken nu ook de tweede afgeleide. We vinden daarvoor:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - 2x = y - x^2 - 2x$$

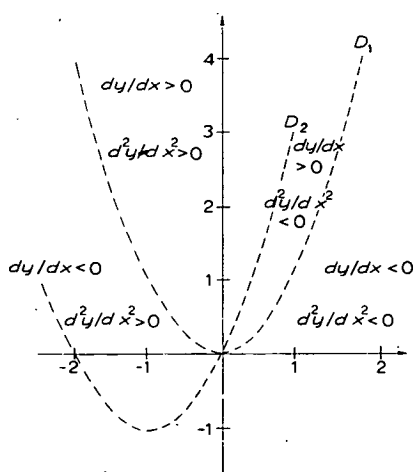


Fig. 6

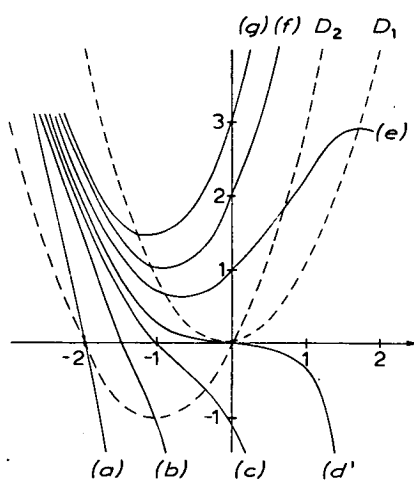


Fig. 7

We tekenen nu niet alleen de delen van het vlak waar  $\frac{dy}{dx}$  gelijk aan 0, positief resp. negatief is, maar ook de delen waar  $\frac{d^2y}{dx^2}$  gelijk aan 0, positief resp. negatief is. We vinden daaruit de buigpunten van de integraalkrommen en kunnen nagaan waar ze opwaarts resp. benedenwaarts concaaf zijn. Daarna tekenen we de integraalkrommen. Zie fig. 6 en 7.

Enkele voorbeelden van problemen die aanleiding geven tot oplossing door middel van differentiaalvergelijkingen:

1 Uit een conische trechter stroomt vloeistof. We nemen aan dat de uitstromings-snelheid evenredig is met de vloeistofdruk. Gevraagd de tijd die nodig is om de trechter leeg te laten lopen. Uiteraard bij voldoende numerieke gegevens.

2 Een vloeistoftank heeft een inhoud van 500 l. Hij bevat zuur met een concentratie van 10%. Er wordt zuur ingepompt met een concentratie van 5% en tegelijk loopt er evenveel vloeistof uit. De hoeveelheid bijgepompte vloeistof bedraagt 10 l per min. Na hoeveel tijd is de concentratie van de vloeistof 8% geworden? (Aangenomen wordt dat de vloeistof elk moment homogeen van concentratie is.)

3 Als een cricketbal vrij valt, is zijn eindsnelheid (ten gevolge van de luchtweerstand) 30 m/sec. Hij wordt opgeworpen met een beginsnelheid van 20 m/sec. Bereken de grootste hoogte. Neem daarbij aan dat de luchtweerstand evenredig is met het kwadraat van de snelheid.

4 Tijd nodig om een batterij een condensator te laten opladen. De snelheid waarmee de condensator opgeladen wordt is elk moment evenredig met het potentiaalverschil. En zo komt men weer tot een differentiaalvergelijking.

Andere voorbeelden gaan over inductie en over snelheid van een chemische reactie. Ik ben zo betrekkelijk uitvoerig op de behandelingswijze van de differentiaalvergelijkingen ingegaan, omdat ze voor ons de moeite van het overdenken stellig waard is.

Ten slotte kort nog iets over book 4. De eerste 160 bladzijden zijn in hoofdzaak gewijd aan praktische problemen: toepassingen van de integraalrekening, normale verdeling, steekproeven, arbeid en energie, dimensies van grootheden (uitgebreider dan vroeger).

Daarna volgen nog een drietal zuiver wiskundige hoofdstukken. Het eerste gaat over het splitsen van een rationale vorm in partiële breuken.

Het tweede is aardiger. Het gaat over afhankelijkheid en strijdigheid van stelsels van (maximaal drie) eerstegraadsvergelijkingen en over afhankelijkheid van vectoren. De voorwaarde voor afhankelijkheid van twee eerstegraadsvergelijkingen met twee veranderlijken wordt in determinantvorm geschreven. Vanzelf komen we dan, als we het aantal vergelijkingen en veranderlijken tot drie uitbreiden, tot de determinant van de derde orde. Het enige belang aan deze determinanten is, dat het 0 zijn ervan afhankelijkheid of strijdigheid van de vergelijkingen resp. afhankelijkheid van vectoren oplevert. De regel van Cramer wordt niet gebruikt. Ten slotte een hoofdstuk over convergentie van reeksen. Hier worden nog enkele belangrijke resultaten verkregen. In speciale gevallen wordt bewezen, dat de taylorreeks die bij een bepaalde functie behoort, convergeert en dat de som gelijk is aan deze functie. Zo zien we tevoorschijn komen reeksontwikkelingen voor  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ .

In totaal beslaan de vier delen 1382 bladzijden. Het aantal hoofdstukken bedraagt 44. De totale prijs £7.-.

Het verschil in niveau tussen de O level en de A level is enorm groot; veel groter nog dan men uit het voorgaande zou vermoeden. Geen wonder, als men bedenkt dat zij die zich op het A level examen voorbereiden, twee jaar lang zo'n acht uur per week wiskundeles krijgen.

Het examen bestaat uit twee zittingen, elk van drie uur. De opgaven bestonden (in 1970) uit een serie van 27 kleinere opgaven, waaruit de kandidaten er maximaal 10 moesten kiezen, en verder uit een serie van 10, waaruit er maximaal 7 gekozen moesten worden. Het publiceren van beide series zou wat te veel plaatsruimte in beslag nemen. Ik volsta daarom met de serie van 10. Men ziet daaruit welk een grote plaats ingeruimd is voor de toepassingen en welk een enorm verschil er bestaat tussen de zuiver wiskundige vragen vergeleken met wat we in ons land gewoon zijn.

Hier volgen de opgaven.

1 Discuss the existence of the derivative at  $x = 0$  of the function

$$f: x \rightarrow x |x|,$$

showing that you have considered both positive and negative values as  $x$  tends to 0.

State with reasons which of the following are true and which are false:

- (i)  $f$  is an even function;
- (ii)  $f$  is continuous at  $x = 0$ ;
- (iii)  $f$  is differentiable at  $x = 0$ .

Sketch a graph of the function  $f$  and find the derived function  $f'$ .

Is  $f'$  differentiable at  $x = 0$ ?

2 Compile operation tables for

- (i)  $\{1, 2\}$  under multiplication modulo 3;
- (ii)  $\{0, 1\}$  under addition modulo 2.

Write down all possible ordered pairs whose first element belongs to the set  $\{1, 2\}$  and whose second element belongs to the set  $\{0, 1\}$ .

Compile an operation table for these ordered pairs under the operation defined by

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2),$$

where the multiplication and addition are as defined in (i) and (ii).

State the identity element and give a general proof of the associativity of the operation  $*$ . (Multiplication and addition in (i) and (ii) may be assumed to be associative.)

3 In a joint honours degree two departments  $A$  and  $B$  grade 32 candidates on a 7 point scale. The number of candidates in each grade is given by the frequency functions  $f$  and  $g$  as follows:

| Grade     | $x_i$    | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6 | 7 |
|-----------|----------|---|---|---|----|----|---|---|
| Subject A | $f(x_i)$ | 0 | 1 | 2 | 13 | 12 | 4 | 0 |
| Subject B | $g(x_i)$ | 1 | 2 | 9 | 8  | 8  | 4 | 0 |

Find the mean and variance of  $x_i$  in both cases. It is required that the variance of the two frequency functions should be approximately the same. Calculate a possible redistribution of the candidates in subject A between the grades in such a way that the new variance is approximately that of subject B but that the mean grade is the

same as before. (Assume that the frequency function approximates to Normal form.)  
 Why would this kind of procedure be likely to be adopted?

4 Solve the equations:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= a, \\ -2x + 5y + 3z &= b, \\ -x + 3y + 2z &= c \end{aligned}$$

for  $x, y$  and  $z$ . Use your solution to write down the inverse of

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

and check that it is the inverse matrix.

Find  $k$  such that the three equations

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1, \\ -2x + 5y + 3z &= b, \\ 3x + 7y + kz &= 4, \end{aligned}$$

are satisfied by the same values of  $x, y, z$  as the original three equations, with  $a = 1, c = 0$  and  $b \neq -\frac{1}{4}$ .

5

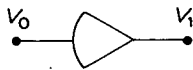


Fig. 1

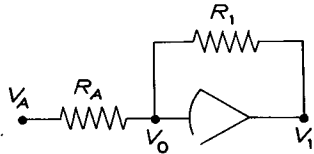


Fig. 2

Figure 1 represents a ‘high gain’ amplifier in which the input and output voltages  $V_0$  and  $V_1$  are related by  $V_1 = -kV_0$  where  $k$  is of the order of  $10^6$ , though not known precisely, and the current through the amplifier is assumed to be negligible. Explain why

$$\frac{V_A - V_0}{R_A} = \frac{V_0 - V_1}{R_1},$$

where the voltages and resistances are shown in Figure 2. Hence deduce the equation

$$\frac{V_1}{V_A} = -R_1 / \left( R_A + \frac{R_A}{k} + \frac{R_1}{k} \right).$$

Explain why, with suitable values assigned to  $R_1$  and  $R_A$ , the configuration in Figure 2 can be used to multiply a given voltage  $V_A$  by a negative factor  $h$ , small compared with  $k$ , to a reasonable degree of approximation. Suggest suitable values for the resistances if  $h = -10$ .

6 The expression  $e^x(a \sin x + b \cos x)$  may be represented by the constant vector  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Find a  $2 \times 2$  matrix which pre-multiplies this vector to give the vector representing the derivative of  $e^x(a \sin x + b \cos x)$  with respect to  $x$ . Use this matrix to find

- (i) the second derivative of  $e^x(a \sin x + b \cos x)$ ,  
 (ii)  $\int e^x(a \sin x + b \cos x)dx$ .

Write down the corresponding matrix for the derivative of  $e^x(a \sin kx + b \cos kx)$ , where  $k$  is a constant.

7 A probability density function  $p(\theta)$  is a linear function of  $\theta$  over the interval  $0 \leq \theta \leq 1$ ;  $p(\theta) = 0$  outside this interval and when  $\theta = 1$ . Show that  $p(\theta) = 2 - 2\theta$ . A particle of mass 2 kg is initially at rest and constrained to move along line  $l$ . It is then bombarded continuously by particles each of mass  $10^{-7}$  g at the rate of 1000 per second. The particles are travelling in a plane containing the line  $l$  at a speed of  $10^9$  m/s and at angles to  $l$  which vary according to the probability density function  $p(\theta)$ ,  $\theta = 0$  being in the direction of  $l$ .

Given that the 'average' value of  $\cos \theta$  is  $\int_0^1 p(\theta) \cos \theta d\theta$  show that after 1 second the 2 kg particle has achieved a velocity of approximately 46 m/s. (Assume that resistances to motion are negligible and that the momentum of each small particle is completely destroyed at impact.)

8 Tabulate a numerical solution of the differential equation  $dx/dt = \sin x$  with initial conditions  $x = 1$  when  $t = 0$ , taking intervals of 1 for  $t$  from 0 to 4. (Work to 2 places of decimals throughout.)

Suggest the limit of  $x$  as  $t$  tends to  $\infty$ . Justify your answer by reference to the differential equation. What other values than 1 could we assign to  $x$  at  $t = 0$  without affecting this limit? Determine a family of parallel lines which are solutions of the equation.

9 An object of unit mass is moving in a plane and its position vector from  $O$  is  $\mathbf{r}$  and its coordinates  $(r, \theta)$ . If

$$\mathbf{r} = \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} \mathbf{i} + \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} \mathbf{j}$$

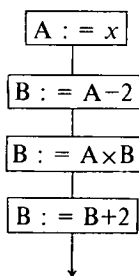
obtain an expression for  $r$  in terms of  $\theta$ .

By differentiating find  $\dot{\mathbf{r}}$  in terms of  $\theta, \dot{\theta}, \mathbf{i}$  and  $\mathbf{j}$ , and if  $r^2 \dot{\theta} = a$ , where  $a$  is a constant, prove that

$$\dot{\mathbf{r}} = -2a \sin \theta \mathbf{i} + a(2 \cos \theta + 1) \mathbf{j}.$$

Hence, by differentiating again, prove that the resultant force acting on the object is of magnitude  $2a^2/r^2$  and directed towards  $O$ .

10



What polynomial in  $x$  is the flow diagram designed to evaluate for any given value of  $x$ ?

Construct a flow diagram along similar lines for evaluating the rational form  $1/(1+y^2)$

for any value of  $y$  beginning with the instruction  $B := y$  and using only one more store,  $C$ , leaving  $y$  untouched in  $B$  and using three more instruction boxes. Explain by drawing a complete flow diagram how these flow diagrams may be used in sequence (the illustrated one first), along with a decision box containing the question  $|A - C| < 0.05$ ? and a loop, to solve simultaneously the equations

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad \text{and} \quad x = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Use the programme, starting with  $A := 0$ , to find values of  $x$  and  $y$ , correct to one place of decimals, which satisfy these equations.

## NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

### *Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1974–31 juli 1975*

Het bestuur was als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, (sinds zijn toetreding in het bestuur in januari), secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. van Beek, L. Bozua, M. Kindt, L. A. G. M. Muskens, die in november opgevolgd werd door F. J. Mahieu en dr. P. G. J. Vredenduin, die tot januari voorzitter was.

Forumbijeenkomsten over de wiskunde eindexamens 1974 werden gehouden op 7 september te Utrecht voor m.a.v.o., h.a.v.o. en v.w.o. en op 13 september te Dordrecht, Haarlem, Roermond en Zwolle voor m.a.v.o.

De jaarvergadering is gehouden in het Jaarbeursgebouw te Utrecht op 2 november 1974. Deze vergadering had als centraal thema 'bewijzen'.

Op 28 mei 1975 werden in Alkmaar, Amsterdam, Apeldoorn, Bergen op Zoom, Eindhoven, Emmen, Den Haag, Haarlem, Hengelo, Hoogezand, Leerdam, Leeuwarden, Naarden, Nijmegen, Rotterdam, Sittard en Tilburg bijeenkomsten ter bespreking van het open werk m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3 examens wiskunde 1975 gehouden. In Heerenveen vond een soortgelijke bijeenkomst plaats op 29 mei 1975.

De didactiekcommissie heeft weer verscheidene meerdaagse cursussen voor docenten georganiseerd.

In twaalf regionale werkgroepen hebben een hondertal wiskundeleraren zich verdiept in didactische problemen. Deze werkgroepen zijn gestart op basis van programma's, die door de didactiekcommissie voorbereid waren en met de gespreksleiders doorgewerkt werden.

Dit jaar verscheen de in opdracht van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren samengestelde bundel 'Opgaven wiskunde h.a.v.o.', onder eindredactie van M. Kindt en H. Steur.

Het bestuur vergaderde acht maal.

# S.M.P. Cards

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Met bewonderingswaardige ijver wordt door de S.M.P. materiaal samengesteld om het mogelijk te maken, dat ieder van de beginselen van de wiskunde op de hoogte gebracht wordt. Omdat de methode ook gebruikt wordt op comprehensive schools, is aanpassing aan het bevattingsvermogen van de leerlingen op deze scholen een vereiste.

De boeken A-H zijn daar het gevolg van geweest. Ik heb gemeend, dat deze boeken toch wel aan zeer hoge eisen van begrijpbaarheid voldeden. Tot mijn verbazing lees ik echter: 'Thus, while Books A-H were intended for about the upper 65 percent of the ability range and have been used successfully in mixed-ability classes covering this range, their demands on reading ability have been too great for some pupils in the ability range below this.'

Een nog meer aangepaste manier van stofpresentatie bleek noodzakelijk en met het oog daarop zijn de S.M.P. Cards ontworpen.

Van de uitgever, Cambridge University Press, ontving ik ter recensie:

SMP Cards I, Main Pack, £5.50

SMP Cards I, Supplementary Pack, £1.50

SMP Cards I, Preliminary Pack, £1.50

De stof die op deze kaarten behandeld wordt, loopt vrijwel parallel met de inhoud van de boeken A en B. De kaarten dienen ter vervanging van de boeken.

Hieronder volgt een overzicht van de indeling van de kaarten uit het Main Pack.

Toelichting. Het hoofdstuk coördinaten wordt behandeld op twee series kaarten: coordinates A en coordinates B. Men ziet een pijl van arrow diagrams A naar coordinates B. Deze pijl geeft aan, dat men verplicht is arrow diagrams A door te nemen, voordat men aan coordinates B begint. Maps A en B staat los onderaan, hetgeen wil zeggen, dat er geen speciale voorkennis voor vereist is, maar dat men eerst in een later stadium deze kaarten ter hand kan nemen.

De series kaarten bestaan gemiddeld uit vijf stuks. Na elke serie volgt een check

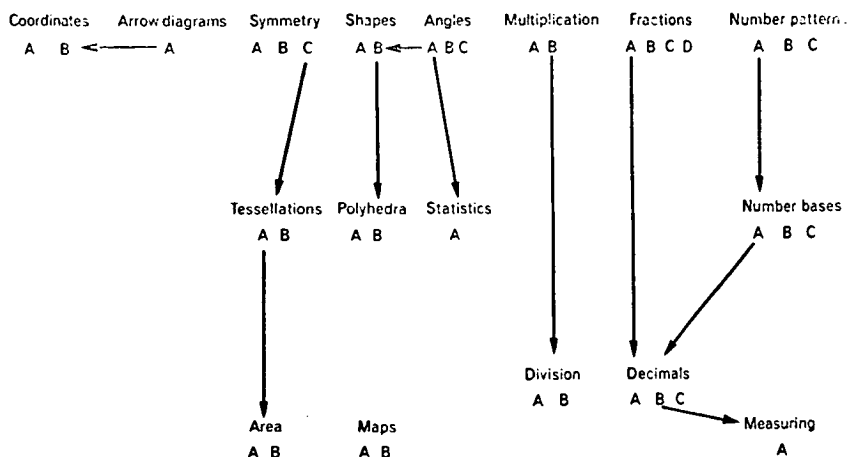


fig. 1

card. De leerling kan toetsen door de vragen op deze kaart te beantwoorden, of hij het voorgaande voldoende begrepen heeft. Is dit het geval, dan volgt een laatste meer officiële toets door beantwoording van de vragen op de daaropvolgende test card.

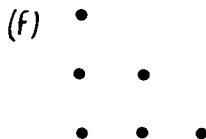
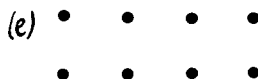
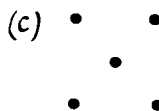
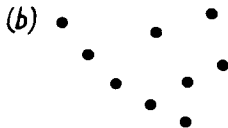
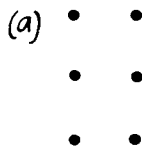
Bekijkt men het overzicht nog eens, dan ziet men, dat men op acht manieren zijn eerste kaart kan kiezen. Dat is een gelukkige omstandigheid, want de kaarten zijn duur en het zou erg kostbaar zijn voor elke leerling een volledig pak aan te schaffen. Men kan nu volstaan met per acht leerlingen één pak ter beschikking te hebben. Hetgeen wel met zich meebrengt, dat door de leerlingen simultaan aan acht verschillende onderwerpen gewerkt wordt.

Naast de kaarten moeten de leerlingen de beschikking hebben over een grote hoeveelheid materiaal waarmee zij kunnen manipuleren om de opdrachten uit te voeren die op de kaarten vermeld zijn.

Om enig idee te krijgen over de methode heb ik één van de acht beginseries gekozen (willekeurig) en die hieronder afgedrukt. Het is de serie number patterns A. Men ziet achtereenvolgens voorkant en achterkant van kaart A1, voorkant en achterkant van kaart A2 en daarna de kaarten A3 en A4, die alleen aan de voorkant bedrukt zijn.

De sterretjes op de kaarten betekenen: laat hier eerst de antwoorden controleren.

1. How many dots are there in each pattern ?

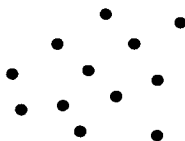


Did you find some easier to work out than others ?

If so, which were easier ?

2. Here is a jumble of dots :

Count how many there are.



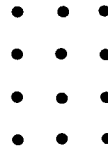
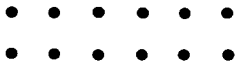
Make a better pattern of dots for this number.



fig. 2a

You will need a sheet of spotty paper.

Here are some simple ways in which we can arrange twelve dots to form a pattern:



These are  
RECTANGLE  
patterns for the number twelve.

3. On your spotty paper make rectangle patterns for these numbers:

(a) 6

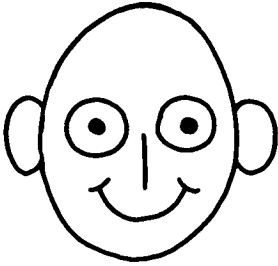
(b) 8

(c) 10

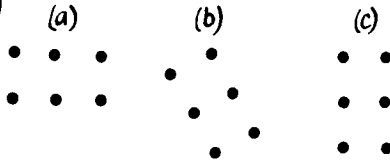
(d) 15

(e) 21

fig. 2b



1. Basil Brayne said that he had made three different rectangle patterns for the number six :



His friend Penny Dropper said that these patterns were really the same. Why did she say that ?

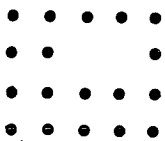
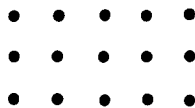
2. Basil made this pattern  for eighteen. He claimed that it was a rectangle pattern. Penny said that it was not. Why did she say that ?
3. Make two different rectangle patterns for 18
4. Basil said that rectangle patterns cannot be made with odd numbers. Was he right ? If you think he was wrong, make a rectangle pattern for an odd number.
5. Try to make a rectangle pattern for 7. ➔

fig. 3a

Here are the answers to questions 4 and 5:

4. Basil Brayne was wrong when he said that rectangle patterns cannot be made with odd numbers. For example, there is a rectangle pattern for 15:



5. It is not possible to make a rectangle pattern for 7. You could make a straight line pattern



but this is not counted as a rectangle.

Some of the numbers below make rectangle patterns, some do not.

Make rectangle patterns for them if you can.

Remember: straight line patterns do not count as rectangles.

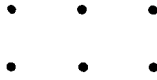
(a) 14      (b) 3      (c) 20      (d) 11

(e) 16      (f) 9

\*

fig. 3b

Here is a rectangle pattern for six :



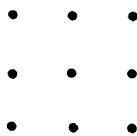
Since there are 2 rows of 3 dots  
this shows that  $2 \times 3 = 6$

1. Find how many dots there are in each of the following patterns. You need not draw the dot patterns if the answers are obvious.
  - (a) 3 rows of 4
  - (b) 3 rows of 7
  - (c) 4 rows of 5
  - (d) 5 rows of 5
  - (e) 6 rows of 4
  - (f) 7 rows of 8
  - (g) 9 rows of 9
  - (h) 10 rows of 7
2. Draw as many different rectangle patterns as you can for 20.
3. Find a number which has three different rectangle patterns.

\*

fig. 4

Here is a rectangle pattern for 9



It is a special type of rectangle  
called a SQUARE

1. How many rows are there?

How many dots in each row?

$$9 = 3 \times 3$$

2. Make a square pattern with 4 dots.

How many rows?

How many dots in each row?

This shows that  $4 = 2 \times \dots$

3. Make a square pattern with 16 dots.  $16 = 4 \times \dots$

4. Do the same with 25 dots.  $25 = \dots \times \dots$

5. Write down the next two square numbers.



fig. 5

We zien uit deze kaarten, evenals uit alle andere, dat de explicerende tekst tot een minimum beperkt is. De taal is zeer eenvoudig gehouden. Men leert wiskunde door te doen. Men moet vragen beantwoorden, opdrachten uitvoeren. Iets in zich opnemen wat door een ander uitgelegd wordt, hoeft niet meer. En mochten we het toch nodig hebben, dat een ander ons iets uitlegt, dan geschiedt die uitleg zo min mogelijk verbaal, maar liever door een of andere demonstratie.

Wordt nu voor elk kind de stof toegankelijk gemaakt? De boeken A-H waren slechts geschikt voor de bovenste 65% van de ability range. Met de kaarten bereikt men de bovenste 80 à 85%.

'Below this range, some of the material is still suitable but reading difficulties become more common.'

In de instructie lees ik: als vraag 1 van kaart A4 door de leerling alleen beantwoord kan worden door de patronen werkelijk te tekenen, bewijst dit, dat hij nog onvoldoende inzicht heeft in de operatie vermenigvuldigen. Het is dan gewenst dat hij zich deze kennis eerst eigen maakt door gebruik te maken van de kaarten uit het Preliminary Pack.

Dit Preliminary Pack bevat een aantal kaarten, die als functie hebben de leerling vertrouwd te maken met de elementaire rekenoperaties. Een elftal kaarten dient ertoe de leerling de techniek van het vermenigvuldigen bij te brengen. Het is de moeite waard er een uit te lichten; ik kies de vijfde. Hier wordt verzocht tien kaarten uit te knippen uit karton. Op de voorkant van deze kaarten zet men  $1 \times 2$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 2$ ,  $\dots$ ,  $10 \times 2$  en op de achterkant resp. 2, 4, 6,  $\dots$ , 20. Nu krijgt men de opdracht de kaarten te schudden.

Neem de bovenste kaart. Lees de voorkant. Hierop staat bijv.  $7 \times 2$ . Zeg wat eruit komt. Keer de kaart om. Heb je het goed, dan leg je de kaart weg; anders leg je hem onder op de stapel. Neem de volgende kaart, enz.

Het Supplementary Pack ten slotte dient, zoals de naam al aangeeft, ter aanvulling van het Main Pack. Het bevat opgaven die soms iets moeilijker zijn, maar ook wel een uitbreiding van de stof op gelijk niveau geven.

Men kan volstaan met één Preliminary Pack en één Supplementary Pack voor ongeveer 16 leerlingen.

De opgaven zijn eerst uitgetest. Momenteel is men bezig een tweede serie kaarten uit te testen, waarvan de inhoud parallel loopt met de boeken C. en D.

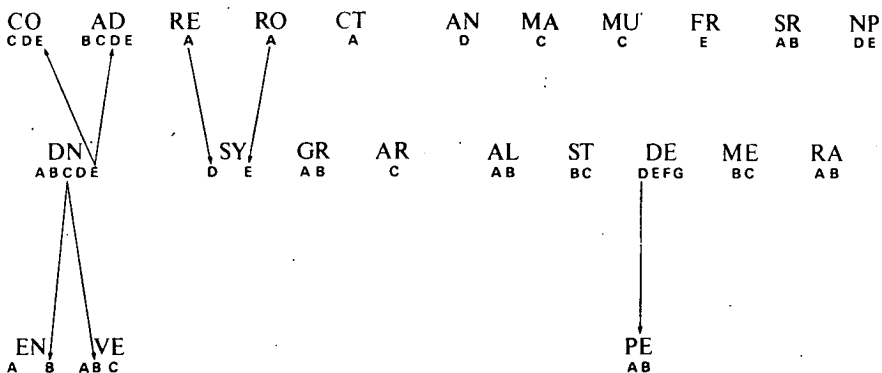
Ik heb groot respect voor het werk, dat in deze door de S.M.P. verricht is en wordt. Toch wil ik niet nalaten er enkele conclusies uit te trekken die voor de ontwikkeling van het onderwijs in ons land van belang kunnen zijn. Zoals bekend zijn door de S.M.P. eerst een vijftal boeken geschreven die opleiden voor het examen op O-level. Deze bleken te moeilijk te zijn voor gebruik op comprehensive schools. Daarom is een nieuwe, eenvoudiger uitgave verschenen bestaande uit de boeken A-H om een groter aantal leerlingen te kunnen bereiken. Deze waren niet voldoende voor de voorbereiding op het O-level examen, vandaar dat een drietal boeken X, Y en Z verschenen is (Z is nog in voorbereiding) om de kloof te overbruggen. Wie mijn bespreking van de boeken A-H in Euclides 48, afl. 6, gelezen heeft, zal weten, dat ik buitengewoon enthousiast ben over deze serie. Men bereikt meer leerlingen door een vereenvoudiging waarbij men de goeden

natuurlijk wel misschien iets tekort doet, maar overbrugging van het tekort is mogelijk. Vergelijk ik A-H met de Cards, dan moet ik tot mijn grote spijt toch wel een anti-climax constateren. Een groot deel van de charme van de boeken A-H is verloren gegaan. Dat de leerling niet meer in de gelegenheid gesteld wordt teksten te lezen, heel eenvoudig geschreven teksten, maar volstaan moet met het uitvoeren van een grote serie soms zeer tijdrovende opdrachten waarvan het niveau veelal duidelijk achter zal blijven bij zijn capaciteiten, vind ik een betreuenswaardige achteruitgang. Hier wordt een m.i. ontoelaatbaar offer gebracht om 15 à 20% meer leerlingen in het gehomogeniseerde leerproces te betrekken. En als men dan beseft, dat onder deze er blijkbaar zijn die nog met vrucht de tafel van 2 kunnen bestuderen, dan rijzen de haren je wel te berge.

Er zijn hier twee tegenstrijdige factoren in het spel: een groter aantal leerlingen simultaan bereiken en voldoende kansen geven om zonder tijdverknoeien het aanwezige intellect zich te laten ontplooiën. Zoals altijd is er ergens bij het afwegen van het belang van deze factoren een optimum. Hoe dit optimum te bereiken en welke criteria aan te leggen, wil ik hier niet trachten te bespreken, om de eenvoudige reden dat ik daar helemaal niet toe in staat ben. Men heeft echter geen criteria en geleerde beschouwingen nodig, maar kan volstaan met enig gezond verstand, om in te zien dat bij het samenstellen van deze Cards het optimum overschreden is. Blijkbaar maakt de structuur van de comprehensive school het nodig het optimum te overschrijden. Ik zou ieder in overweging willen geven daaruit de noodzakelijke conclusies te trekken, voordat hij tracht in ons land analoge ontwikkelingen te bevorderen.

Inmiddels is, voordat bovenstaand artikel afgedrukt is, de tweede en laatste serie van de S.M.P. Cards verschenen. Deze lopen parallel met de boeken C en D. Alleen het delen van rationale getalen is niet behandeld, omdat deze stof te moeilijk gevonden wordt.

De uitgave bestaat uit twee pakketten: een Main Pack en een Supplementary Pack. Prijs resp. £9.00 en £4.00. Een Preliminary Pack is uiteraard niet nodig. Het volgende schema geeft de volgorde aan waarin de onderwerpen bestudeerd kunnen worden.



Betekenis van de afkortingen:

|    |                    |    |                  |
|----|--------------------|----|------------------|
| AD | Arrow Diagrams     | AL | Algebra          |
| AN | Angles             | DE | Decimals         |
| AR | Area               | DN | Directed Numbers |
| CO | Coordinates        | FR | Fractions        |
| CT | Combination Tables | ME | Measuring        |
| EN | Enlargement        | MU | Multiplication   |
| GR | Graphs             | NP | Number Patterns  |
| MA | Maps               | PE | Percentages      |
| RE | Reflection         | RA | Ratio            |
| RO | Rotation           | SR | Slide Rule       |
| SY | Symmetry           | ST | Statistics       |
| VE | Vectors            |    |                  |

De rekenkundige onderwerpen zijn op gele kaarten gedrukt, de andere op blauwe.

Toelichting. Men kan met CO serie C beginnen, als men uit het eerste Main Pack de series Coordinates A en B heeft doorgewerkt. Daarna kan men D bestuderen, maar E eerst nadat men Directed Numbers af heeft. Er is een vrij grote mate van onafhankelijkheid tussen de onderwerpen. Men kan daardoor ook soms onderwerpen uit Main Pack II entameren, voordat men alle onderwerpen uit Main Pack I bestudeerd heeft.

Wie zich als doel stelt het examen op O-level te behalen, moet de stof uit Pack I en II in twee jaar af hebben. Sommigen zullen eerder klaar zijn; zij kunnen dan de resterende tijd besteden met het maken van de opgaven die op de kaarten van het Supplementary Pack staan. Anderen zullen niet in staat zijn het examen op O-level te behalen, maar wel het CSE (school-eindexamen). Zij zullen waarschijnlijk een  $2\frac{1}{2}$  jaar nodig hebben. Weer anderen zijn nog minder begaafd en hebben het derde jaar geheel nodig. In het derde jaar zal men dus te maken hebben met in principe drie soorten leerlingen, waarvan het beste soort meteen zal kunnen starten met book E. En dan zijn er, zoals hierboven al vermeld, nog 15 à 20% voor wie ook deze kaarten nog te moeilijk zijn. Ik heb respect voor de wijze waarop de kaarten aangepast zijn aan de intelligentie van de zwaksten onder degenen voor wie ze bestemd zijn.

# Verslag besprekingen mavo-examens wiskunde 1974

L. BOZUWA

Dordrecht

Op uitnodiging van de Ned. Ver. voor Wiskundeleraren zijn op 7 en 13 september 1974 weer vele mavo- en lto-T leraren op verschillende plaatsen bijeen geweest, om de examens mavo-3 en mavo-4 te bespreken.

Het doel van deze bijeenkomsten is tweeledig:

De met het samenstellen der opgaven belaste personen krijgen een indruk hoe de opgaven door de leraren beoordeeld zijn. Zij kunnen daar in volgende jaren rekening mee houden. Wie de verslagen van vorige jaren van deze besprekingen bestudeert, kan zich er van overtuigen dat dit inderdaad gebeurt. Aan de andere kant worden de leraren geïnformeerd over de bedoelingen van de opstellers der opgaven wat tot een beter begrip kan leiden. Bovendien kunnen zij door onderling contact hun visie op de wiskundeleerstof, zoals die in de examens aan de orde komt, verruimen. Zo wordt de leemte die ontstaan is door het verdwijnen der oude ulo-examens, waarbij tijdens het mondelinge gedeelte nauwe contacten werden gelegd en vele ervaringen werden uitgewisseld over het vak, enigszins gevuld.

Gezien de ervaringen op de laatste vergaderingen en gehoor gevend aan de wens van vele leden, streeft het bestuur der N.V.v.W.L. naar een iets andere opzet van deze bijeenkomsten in het volgende jaar. Het plan is om op 28 mei 1975, direct na het bekend worden van de bindende normen, op een groot aantal plaatsen besprekingen te organiseren. Het voornaamste doel blijft het hierboven vermelde, maar daarnaast kan dan ook de normering besproken worden, teneinde tot gemakkelijker overeenstemming tussen leraar en gecommitteerde te komen. Het bestuur hoopt dat zo vlak na de examens een groot aantal collega's de vergaderingen zal bijwonen, zodat deze nog beter aan hun oorspronkelijk doel kunnen beantwoorden. In september zal dan nog één landelijke bespreking volgen waarbij vooral de meerkeuzetoetsen aan de orde kunnen komen.

## Niveau

De overgrote meerderheid der aanwezige collega's vond het gehalte der vraagstukken goed. Er wordt gesteld dat vooral het natuurkundeonderwijs veel profijt kan hebben van de moderne wiskunde, met name het functiebegrip biedt vele mogelijkheden. Het herexamen werd hier en daar wat moeilijk

gevonden. De veronderstelling, als zou het herexamen een tweede keus zijn uit de aanwezige opgaven, wordt met klem tegengesproken. De verschillende examens worden bijna gelijktijdig samengesteld. Er wordt getracht ze een ongeveer gelijk moeilijkheidsgraad te geven.

Er blijkt soms een grote discrepantie te bestaan tussen de resultaten van het S.O. en die van het S.E. Eén collega had als gecommiteerde 61 werkstukken nagekeken van leerlingen die voor het S.O. allen voldoende hadden. Van deze leerlingen had er bij het S.E. slechts één een voldoende. Het strekke ons tot troost dat deze gevallen uitzondering zijn.

De aansluiting van mavo-abituriënten met wiskunde in hun examenpakket tot de mts schijnt soms niet zo soepel te verlopen als gehoopt wordt. De meningen over de oorzaken zijn verdeeld. Sommigen vinden dat daarom in het wiskunde-onderwijs wat meer aandacht aan technieken zoals b.v. het ontbinden in factoren moet worden gegeven.

### **Normering**

Alle leraren die de bijeenkomsten bezochten, waren tevreden over de normering. Er vond zowel bij mavo-3 als bij mavo-4 dit jaar een voorcorrectie plaats. Bij mavo-3 bleef de voorgestelde norm gehandhaafd, bij mavo-4 werd hier en daar een kleine wijziging aangebracht.

De normering heeft dit jaar bij het meerkeuzewerk van het herexamen voor enige opschudding gezorgd. Door de grote haast waarmee men bij het Cito de normen de deur uit wilde hebben, werd de cijferschaal van een 40-item toets verzonden, terwijl de toets maar 30-items had. Daardoor ontvingen enkele leerlingen een te hoog cijfer en anderen een te laag. De leraar had deze fout meteen kunnen opmerken, maar dat is niet overal gebeurd. Vandaar een noodmaatregel: voor de onvoldoende scores bleef de 40-schaal gehandhaafd, voor de anderen werd alsnog de 30-schaal toegepast.

### **Correctie**

Evenals vorige jaren rezen er bij de correctie nog al eens moeilijkheden tussen leraren en gecommiteerden.

Een praktijkvoorbeeldje van verschillend beoordelen: De ene corrector trekt één punt af voor het vergeten van het normteken bij de vectorsom, de andere rekent dat gedeelte als volledig fout. Een preciezer omschreven normering is veelal niet mogelijk i.v.m. alternatieve oplossingen die niet altijd voorzien kunnen worden. Misschien dat door de voor het volgende jaar voorgestelde aanpak van examenbesprekingen moeilijkheden als deze wat kleiner zullen worden.

### **Nomenclatuur en redactie**

Blijkens de reacties over dit punt zijn nog niet alle collega's op de hoogte met de te gebruiken nomenclatuur in de examenopgaven. Deze is met ingang van 1974 vrijwel in overeenstemming met het bekende nomenclatuurrapport. In Euclides (jrg 48 no. 8) staat dat in extenso beschreven. Dit nummer is indertijd aan alle scholen toegezonden door de N.V.W.L.. In het tiende nummer van jaargang 49 is op blz. 389 e.v. een speciaal voor m.avo-leraren

geschreven artikel over de nomenclatuur opgenomen. Het is voor iedere leraar noodzakelijk van deze artikelen kennis te nemen, daar de boeken nog niet alle aan dit rapport zijn aangepast.

Wat is het verschil tussen 'toon aan' en 'bewijs', vragen enkelen zich af. Men vindt dat b.v. in opgave 2 van de open vraagstukken mavo-4 de opdracht: 'bewijs' misplaatst is, beter zou zijn: 'toon aan door berekening'.

In hoeverre moeten wortels in antwoorden vereenvoudigd worden?  $\sqrt{80}$  is goed, maar  $\sqrt{64}$  ook? En  $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ? Het is gewenst de leerlingen er aan te wennen wortelvormen te vereenvoudigen.

### Cito

Er wordt nogal eens kritiek gehoord op de vermeende langzame gang van zaken bij het Cito. De suggestie wordt gedaan de leraren het meerkeuzewerk eerst zelf te laten corrigeren en daarna het werk op te sturen naar het Cito ter controle. Als echter op het resultaat hiervan toch nog gewacht moet worden, zal dit weinig soulaas bieden.

De uitkomsten van de statistische verwerking der meerkeuzetoetsen door het Cito kunnen voor de leraren heel waardevol zijn. Deze resultaten zijn op aanvraag bij het Cito verkrijgbaar.

### Examen M.A.V.O.-3

#### a Meerkeuzewerk.

Dit is in het algemeen heel goed ontvangen. Voor de p-waarden en de rit-waarden en hun betekenis, wordt verwezen naar de bij het Cito verkrijgbare gegevens.

#### b Open vraagstukken.

opgave 2: Het domein kan ook genoteerd worden als  $[-1, 4]$ . Zie nomenclatuurrapport.

opgave 4: Onderdeel c had naar het oordeel van sommigen gesplitst moeten worden i.v.m. de 11 punten die het opleverde.

### Examen M.A.V.O.-4

#### a Meerkeuzewerk.

Dit is zeer goed ontvangen. Men was van mening dat het iets gemakkelijker leek dan vorig jaar.

Enige kritiek op opgave 19. Er had moeten staan: '... dan ligt  $x$  in 'inplaats van: '... dan geldt'. Zo ook opgave 29. Bij berekening kwam er maar één waarde uit. Goede leerlingen raken daardoor in de war.

#### b Open vraagstukken.

opgave 1: a.  $\sqrt{80}$  of  $4\sqrt{5}$  moet het antwoord zijn. Als er staat 'bereken' mag het antwoord niet benaderd worden.

opgave 2: a/b bezwaren tegen 'bewijs'.

c. 'toon aan' en 'bewijs'; leerlingen zoeken hier wat achter.

d. Door de meeste kandidaten te simpel opgelost. Bewijzen doet hier bijna niemand. Liever een aparte vraag daarnaar.

opgave 3: Vooral onderdeel c. oogste veel kritiek. De bewijsvoering vond men te moeilijk.

d. Te moeilijk voor wat betreft berekening; tussenvraag naar vergelijking loodlijn uit A op de lijn PQ had dit probleem opgelost.

Veel collega's zijn van mening dat zo iets moeilijks er best bij mag staan.

Deze opgave had echter beter als opgave 4 geplaatst kunnen worden.

opgave 4: De oude vraag doet zich telkens weer voor: in hoeverre mag er uit de tekening worden afgelezen?

Antwoord: Alleen als dit in de opgave vermeld staat.

Deze opgave viel wel zeer in de smaak.

Welke normen moet men bij het tekenen van een parabool aanleggen?

Velen vonden het jammer dat er in dit examen zo weinig over statistiek gevraagd werd.

### **Slotopmerkingen**

Tijdens alle bijeenkomsten in het kader van de examenbesprekingen werd er van tijd tot tijd uitvoerig gediscussieerd over niveau, normering, correctie, enz.. Uiteenlopende meningen werden geponeerd en ervaringen werden uitgewisseld. Dit onderstreept nog eens de noodzaak van onderling contact, mede waarom deze bijeenkomsten worden georganiseerd. Men kan zijn eigen mening vergelijken met die van anderen en aldus krijgt men een meer eensluidend oordeel over de eisen, waaraan de mavo-leerlingen voor het vak wiskunde moeten voldoen.

## **GENOOTSCHAP VOOR GESCHIEDENIS DER GENEESKUNDE, WISKUNDE EN NATUURWETENSCHAPPEN.**

Najaarsvergadering van het Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek.

Deze zal gehouden worden op zaterdag 25 en zondag 26 oktober 1975 te Utrecht. Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en toezending van het programma wenden tot de secretaris Mevr. M. Houben-Fournier Helmhof 36, Alphen a.d. Rijn.

# Examenverslag 1974

Staatsexamen H.B.S.-A en -B Staatsexamen H.A.V.O. en V.W.O.

**H.B.S.-A**

**Wiskunde**

*Schriftelijk*

Bij dit onderdeel van het examen heeft een vrij groot aantal kandidaten behoorlijk werk geleverd; het resultaat daarentegen van de overigen moet veelal bedroevend worden genoemd.

*Mondeling*

Gezien de resultaten van het schriftelijk examen van die kandidaten die het mondeling moesten afleggen, was het niet te verwonderen dat in het algemeen de kennis van de stof beneden peil was. Bij het mondeling gedeelte kon dan ook maar bij enkele kandidaten een voldoende gegeven worden.

**H.B.S.-B**

**Algebra**

*Schriftelijk*

De vraagstukken waren zodanig dat de kandidaten die de stof redelijk beheersten in staat moesten worden geacht een voldoende te scoren. Het viel op dat de werkelijke score vaak verband hield met het gedeelte van het land waar de kandidaat vandaan kwam. Er werden nog veel diepe onvoldoendes gehaald.

*Mondeling*

Opmerkelijk is, dat bij diverse kandidaten de voorbereidingstijd te kort was (minder dan een jaar), waardoor hele hoofdstukken, zoals de integraalrekening, niet bestudeerd konden worden.

Slechts weinigen waren in staat de extreme waarden van een functie op een juiste wijze te bepalen. Randextremen werden veelal vergeten. Bij de logaritmische ongelijkheden bleek men in het algemeen niet bekend met het feit dat het stijgend of dalend zijn van de logaritmische functie afhankelijk is van de grootte van het grondtal.

Behalve dat men te kort schoot in wezenlijke kennis, waren de kandidaten zeer slordig met het formuleren. Een vergelijking werd een functie genoemd en omgekeerd, een afgeleide een raaklijn, een grafiek een functie, een top een maximum enz..

Het is moeilijk om na vele aldus voorbereide kandidaten geëxamineerd te hebben een redelijke norm te blijven hanteren.

## **Stereometrie.**

### *Schriftelijk*

De opgaven, die dit laatste jaar aan de kandidaten werden voorgelegd, leverden velen zoveel problemen op, dat aan niet meer dan een derde gedeelte van hen, die zich aan het schriftelijk gedeelte van het examen onderwierpen, een voldoende cijfer kon worden toegekend. Aan slechts ongeveer één op de tien kandidaten kon op grond van de prestaties, geleverd bij het schriftelijk examen, een vrijstelling voor het mondelinge gedeelte worden toegekend. Aan enkele moest het cijfer 1 worden gegeven op grond van het feit, dat zij een vel, uitsluitend voorzien van hun naam en hun examennummer inleverden of zich ertoe beperkten, de opgaven over te schrijven. Door welke motieven dezulken zich gedreven voelen, zich aan het examen te onderwerpen, laat zich slechts gissen. De totaal onvoldoende voorbereiding voor het examen kwam onder meer tot uiting in het onvermogen tot het tekenen van een duidelijke stereometrische figuur.

### *Mondeling*

Dat de resultaten van de mondelinge examens eveneens uitermate slecht zouden zijn, was te verwachten.

Menige kandidaat bleek onbekend met eenvoudige groundbegrippen, zoals middenloodvlak, bissectrice-loodvlak, standhoek, afstand tussen twee kruisende lijnen e.d.. Diegenen, aan wie deze begrippen niet geheel onbekend bleken, waren vaak niet in staat hun gedachten in enigszins redelijk nederlands onder woorden te brengen. Het valt dan ook niet te verwonderen, dat men niet of nauwelijks toekwam aan het oplossen van eenvoudige vraagstukken.

Eens te meer bleek een ontstellend begrip te bestaan aan routine in het maken van vraagstukken, vooral bij diegenen, die zeiden via een schriftelijke cursus zich op het examen voorbereid te hebben. Het lijkt trouwens gewettigd te veronderstellen, dat het volgen van uitsluitend schriftelijk onderwijs voor verreweg de meesten een totaal onvoldoende voorbereiding geeft voor een examen in enig onderdeel van het vak wiskunde.

## **Goniometrie en Analytische Meetkunde**

De subcommissie heeft in grote lijnen dezelfde ervaringen opgedaan als in vorige jaren; hetgeen o.a. betekent, dat weer geconstateerd moest worden, dat blijkbaar door veel kandidaten (en opleiders?) weinig of geen profijt is getrokken van de wenken, die in vorige examenverslagen zijn gegeven. Het opnieuw opsommen van veelvoorkomende fouten heeft geen zin, daar dit de laatste keer is, dat de H.B.S.-B.-examens werden afgenomen. Daarom als illustratie van het bovenstaande slechts voorbeelden, die op het mondeling gedeelte van het examen betrekking hebben.

### **Goniometrie**

Het tekenen van grafieken van eenvoudige goniometrische functies ging dikwijls zeer moeizaam. Veel kandidaten wisten niet hoe ze bij het tekenen van zo'n grafiek de eenheden op X- en Y-as moesten vastleggen. Bovendien meende men nog maar al te vaak, dat het nul-zijn van de eerste afgeleide voldoende is voor het bepalen van de eventuele extremen van de functie.

### **Analytische Meetkunde**

Te veel kandidaten herkenden het type kegelsnede niet – òf pas na veel aanwijzingen – als de vergelijking van de kegelsnede gegeven werd. Het opstellen van de vergelijking van een verzameling van punten, die aan bepaalde voorwaarden voldoen was voor het overgrote deel van de kandidaten een te moeilijke opgave.

De subcommissie kan zich niet aan de indruk onttrekken, dat meer kandidaten dan voorheen niet-voldoende voorbereid aan het examen deelnamen en óók, dat zij verplicht was vaker mondeling examen af te nemen van kandidaten, die voor het schriftelijk werk een zeer laag cijfer hadden behaald. Waarschijnlijk hangen beide feiten samen met de verwachting, dat de subcommissie nu het de laatste kans was om 'n H.B.S.-diploma te behalen, haar eisen veel lager zou stellen dan voorheen. Ondanks de mildheid waarmee de prestaties van de kandidaten beoordeeld werden moesten toch enige eisen gesteld worden, waaraan helaas vele kandidaten niet voldeden.

## **H.A.V.O.**

### **Wiskunde**

De subcommissie moet ook dit jaar constateren, dat het niveau beslist te laag ligt. Zij wil enkele punten onder de aandacht van a.s. kandidaten brengen.

1. De behandeling van een functie met de bijbehorende grafiek dient op de juiste wijze te geschieden: snijpunten assen, tekenbepaling, gebruik maken van de afgeleide van de functie.
2. Kennis van de elementaire goniometrische functies dient aanwezig te zijn; zonder dit is het onmogelijk eenvoudige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden op te lossen.
3. Kennis van de in het programma voorgeschreven Meetkunde is noodzakelijk.
4. Het is wel zaak, dat de kandidaten de wiskundige begrippen op de juiste wijze interpreteren; zij dienen de samenhang te begrijpen om dit in vraagstukken te kunnen toepassen.
5. De kandidaten wordt aangeraden te zorgen op de hoogte te zijn van het programma; dit kan het verloop van de examens gunstig beïnvloeden.

## **V.W.O.**

### **Wiskunde I**

#### *Schriftelijk*

Bij het schriftelijk viel het op dat de eerste opgave beter gemaakt was dan de opgave over de functie gegeven door een parametervoorstelling en ook dan de opgave over de differentiaal-vergelijking.

De enkele kandidaten die de opgave over kansberekening gemaakt hadden kwamen daar slecht uit. Velen waren met het opzetje van 25 punten erg gebaat.

#### *Mondeling*

Bij het mondeling viel het op dat er een groep kandidaten was die erg goed op het mondeling was voorbereid en een andere groep, die erg slecht op het mondeling was voorbereid en zich dientengevolge zeer slecht uitdrukte, waardoor het mondeling examen wel eens in een privéles ontaardde.

In het kort: De stof van de 'oude' wiskunde (diff. int. grafieken, etc.) kwam in doorsnede beter uit de bus dan de stof van de 'moderne' wiskunde (e-machten, In., diff. vergelijkingen).

### **Wiskunde II**

#### *Schriftelijk*

Bij veel kandidaten ontbrak de kennis van de meest elementaire onderdelen. Vraagstuk 1, waarin de begrippen afstand van 2 lijnen en loodrechte projectie ter sprake kwamen, werd door slechts weinigen goed gemaakt. Vraagstuk 2, onderdeel a en b, waarin het begrip bol getest werd, werd door velen gelukkig

goed gemaakt; de onderdelen c en d, waarin rotatie en spiegeling aan de orde kwamen, werden door de meeste kandidaten overgeslagen.

Wat som 3 betreft, vele kandidaten lieten het hier ook afweten, alhoewel bekend is dat afbeeldingen een grote, zo niet grootste, plaats zouden innemen op het eindexamen.

Al met al: een niet opwekkend beeld.

### *Mondeling*

Tijdens het mondeling gedeelte van het examen bleek overduidelijk, dat verscheidene kandidaten slechts over een zeer beperkt inzicht in de materie beschikken.

Grondbegrippen waren nauwelijks bekend. Begrippen als inproduct, rang van een matrix, lineaire afbeelding e.d. bleken slechts bekend als ze in een of andere formule of eigenschap voorkwamen.

Uitspraken als: 'een hoek bereken je met behulp van het product van twee vectoren' getuigen van een slordigheid die niet toelaatbaar geacht kan worden op een examen van dit niveau.

Het lijkt de commissie zeer raadzaam dat alle kandidaten zich bewust zijn van het feit, dat de wiskunde II-stof niet onderschat dient te worden.

## **MEDEDELING**

De Stichting Opleidingen Statistiek (SOS) en het Economisch Instituut Tilburg (EIT) beginnen in september met mondelinge avondcursussen voor de in 1976 te houden examens van de Vereniging voor Statistiek.

|                     |                |
|---------------------|----------------|
| Algemene Statistiek | prijs f 400, — |
|---------------------|----------------|

(Voorburg, Heerlen)

|                           |                |
|---------------------------|----------------|
| Statistisch Assistent-VVS | prijs f 700, — |
|---------------------------|----------------|

(Amsterdam, Rotterdam, Utrecht, Eindhoven)

|                         |                |
|-------------------------|----------------|
| Statistisch Analist-VVS | prijs f 750, — |
|-------------------------|----------------|

(Amsterdam, Rotterdam, Eindhoven)

|          |                |
|----------|----------------|
| Wiskunde | prijs f 700, — |
|----------|----------------|

Utrecht

|                   |                |
|-------------------|----------------|
| Verplichte Capita | prijs f 750, — |
|-------------------|----------------|

Utrecht

Inlichtingen en aanmelding:

Secretariaat SOS, Weena 700, Rotterdam, tel. 010-116181, tst. 2126

Secretariaat EIT, Hogeschoollaan 225, Tilburg, tel. 013-662216-662196

## De leesportefeuille van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op de binnenzijde van de omslag van *Euclides* vindt men steeds het adres voor opgave voor deelname aan de leesportefeuille. Omdat waarschijnlijk de vele nieuwe leden van onze Vereniging niet met de mogelijkheden van die leesportefeuille bekend zijn lijkt het gewenst hier wat meer informatie te geven. De volgende tijdschriften worden momenteel in roulatie gebracht:

- a *Elemente der Mathematik* (Zwitserland), 6 nrs per jaar, 25–30 pag. per nr.; 8 lezers.
- b *The Mathematical Gazette* (Engeland), 4 nrs per jaar, 50–100 pag. per nr.; 7 lezers.
- c *The Mathematics Teacher* (U.S.A.), 8 nrs per jaar, 80–90 pag. per nr.; 14 lezers.
- d *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (B.R.D.), 8 nrs per jaar, 64 pag. per nr.; 3 lezers.
- e *Paedagogische Studiën* (Nederland), 12 nrs per jaar, 40–54 pag. per nr.; 4 lezers.
- f *Mathematische und Physikalische Semesterberichte* (B.R.D.), 2 nrs per jaar, 128 pag. per nr.; 7 lezers.
- g *School Science and Mathematics* (U.S.A.), 9 nrs. per jaar, 80–90 pag. per nr.; 3 lezers.
- h *Mathematica en Paedagogica* (België), zo mogelijk 4 nrs per jaar, 40–50 pag. per nr.; 7 lezers.
- i Uitgaven van het Wiskundig Genootschap (Nederland):
  - (1) *Mededelingen van het Wiskundig Genootschap*, 9 nrs per jaar, 20–40 pag. per nr.,
  - (2) *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3 nrs per jaar, 40–60 pag. per nr.; voor (1) en (2): 4 lezers.
- j *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques* (Frankrijk), 5 nrs per jaar, 140–180 pag. per nr.; 2 lezers.
- k *Praxis der Mathematik* (B.R.D.), 12 nrs per jaar, 32 pag. per nr.; 12 lezers.

De bijdrage voor deelname aan de leesportefeuille is:

bij één tijdschrift: f 2,50 per jaar;

bij meerdere tijdschriften: f 2,00 per tijdschrift per jaar;

i is gratis.

Deze bijdragen zijn vroeger vastgesteld en nooit verhoogd; ze hebben nu nog alleen symbolische betekenis (de gemiddelde abonnementsprijs bedroeg over 1974 f 50, –; voor k alleen al f 65, –). *Wel verplicht men zich om het tijdschrift niet langer dan één week te houden en het daarna door te sturen. Behalve de eerder genoemde bijdrage moet men dus nog wel steeds de portokosten betalen.*

Wie belangstelling heeft handele als volgt:

Stort de verschuldigde bijdrage op postgiro 572855 van Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (post Breda) met vermelding van: leesportefeuille, tijdschrift(en): (aangeven met a t/m k).

U wordt dan op de deelnemerslijst geplaatst en ontvangt na kortere of langere tijd de gevraagde tijdschriften. Daarin bevindt zich een lijst van deelnemers met de volgorde van roulatie.

Het gevolgde systeem hierbij is, dat bij een volgend nummer de deelnemers één plaats naar voren schuiven, waarbij nummer 1 weer achteraan geplaatst wordt. Als ieder zich hieraan houdt ontvangt men dus gedurende enige tijd vrij regelmatig de nummers om dan, als men van eerste laatste geworden is, geruime tijd niets te ontvangen.

(De opmerking 'als ieder zich hieraan houdt' is niet overbodig, integendeel. Dat er met vakanties stagnatie kan komen is begrijpelijk maar helaas moet geconstateerd worden, dat soms deelnemers een nummer een half jaar of langer vasthouden. Bij tijd en wijle ontvang ik hierover klachten; er bestaat echter geen bindend reglement en ik zie het niet als mijn taak reprimandes te sturen).

Het aantal deelnemers is de laatste tijd wat teruggelopen. Mogelijk heeft deze informatie weer nieuwe deelnemers tot gevolg. Voor het tijdschrift c, is er, vanwege het grote aantal deelnemers in het verleden, een dubbelabonnement. Wanneer er voor k weer aanzienlijk meer lezers komen, zal er ook daarvoor een dubbelabonnement genomen worden.

Tenslotte nog het volgende: in het verleden werden in *Euclides* regelmatig korte inhoudsopgaven van de tijdschriften verstrekt. Dit heeft enige jaren stil gestaan maar zal in de toekomst weer gaan gebeuren.

# Boekbespreking

*S.M.P. Book X*, Cambridge University Press, 1972, VI + 200 blz., £0.80.

In Euclides 48 (1972–73), afl. 6, blz. 201–211 zijn de boeken A–H van de S.M.P. (School Mathematics Project) besproken. Deze zijn bestemd voor leerlingen van de comprehensive schools. Omdat dit achttal boeken onvoldoende voorbereidt voor het examen op O-level, zijn een drietal aanvullende boeken geschreven, de boeken X, Y en Z, om gebruikers van de serie A–H in staat te stellen zich alsnog voor te bereiden op dit examen. Ze bestuderen A–G en schakelen dan over op X–Z.

Bij het lezen van boek X valt op, dat vergeleken bij A–H de touwtjes wat strakker zijn aangetrokken. In verschillende hoofdstukken is het contact met de realiteit niet meer zo primair gesteld als in A–H. De betoogtrant blijft duidelijk en eenvoudig gehouden. De leerling wordt op een plezierige manier als het ware toegesproken. Hem wordt geen sluitend betoog voorgeschoteld, maar hij wordt telkens uitgenodigd mee te denken. Opvallend is, dat ook in dit boek van bewijzen geen sprake is.

Een karakteristiek voorbeeld ervan, hoe men dan wel te werk gaat, is het volgende. Op blz. 101 staat: werk van de volgende paren uitdrukkingen uit:

|                                        |                                                       |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $3 \times (5 + ^{-}2)$                 | $(3 \times 5) + (3 \times ^{-}2)$                     |
| $8 \times (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})$ | $(8 \times \frac{1}{4}) + (8 \times \frac{3}{4})$     |
| $^{-}2 \times (^{-}4 + ^{-}1)$         | $(^{-}2 \times ^{-}4) + (^{-}2 \times ^{-}1)$         |
| $\frac{1}{2} \times (^{-}3 + 7)$       | $(\frac{1}{2} \times ^{-}3) + (\frac{1}{2} \times 7)$ |

Vergelijk de uitkomsten.

‘In fact, no matter what values we choose for a, b and c,

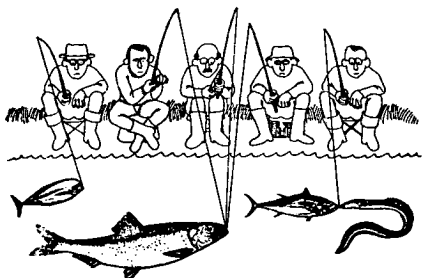
$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).’$$

En daarmee is dan de distributieve eigenschap afgeleid.

Deze methode is niet incidenteel, maar wordt steeds toegepast. Ook bijv. voor het afleiden van de regels bij het rekenen met vectoren. En bij  $(f \circ g)^{inv} = g^{inv} \circ f^{inv}$ . Principieel vinden we de juistheid van een bewering door te laten zien, dat hij in enkele, liefst gevarieerd gekozen, voorbeelden uitkomt, waarna men dient in te zien dat de bewering algemeen juist is.

De in dit deel behandelde onderwerpen zijn: enig inzicht in de ruimte, samenstelling van transformaties, verzamelingen en venn-diagrammen, classificatie van vierhoeken, afronden van getallen, oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad, het hanteren van formules, beginselen van het rekenen met vectoren, beschrijvende statistiek, numeriek berekenen van de oppervlakte van een willekeurige figuur, ponskaarten. Dus veelal onderwerpen die in de vroegere delen ook reeds aangeroerd zijn, maar nu wat steviger herhaald en uitgediept.

Een grapje wil ik de lezer niet onthouden. Hieronder een non-voorbeeld van een functie.



P. G. J. Vredenduin

Zoals te verwachten is, is dit boek iets moeilijker dan boek X. De in A–G ietwat in de watten gelegde leerling wordt langzamerhand in staat geacht redeneringen te volgen die wat meer wiskundig inzicht vergen. Af en toe duiken serieuze bewijzen op. Echter alleen op die plaatsen waar ze onmisbaar zijn. Zo vinden we een bewijs uit het ongerijmde van het irrationaal zijn van  $\sqrt{2}$ . Het wordt gegeven op dezelfde manier als voorkomt in de Elementen van Euclides. Ook wordt bewezen de stelling, dat een omtrekshoek gelijk is aan de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde hoog staat. Merkwaardig is dat de leerling eerst gevraagd wordt door metingen zich van de juistheid van deze stelling te overtuigen en dat dan eerst een bewijs volgt.

Ten slotte wordt nog bewezen dat de inhoud van een viervlak gelijk is aan  $\frac{1}{3}Gh$ . Eerst wordt daartoe aangetoond dat de inhoud van een figuur niet verandert bij een afschuiving (shearing). Dan wordt aangetoond dat een viervlak door afschuiving veranderd kan worden in een orthogonaal viervlak (d.i. een viervlak met drie rechte standhoeken). Daarna wordt een rechthoekig blok met ribben  $a$ ,  $b$  en  $c$  verdeeld in zes orthogonale viervlakken met gelijke inhoud. Hiermee is dan bewezen dat voor elk viervlak geldt  $I = \frac{1}{3}Gh$ .

Het viel mij op dat ook nog in dit boek de negatieve getallen genoteerd worden met een hoogstaand minteken (bijv.  $-3$ ). Maar niet alleen dat  $-3$  niet voorkomt, ook vormen als  $-a+b$  komen nog steeds niet voor. Zo wordt op blz. 152 gevraagd op te lossen het stelsel vergelijkingen

$$3x+2y=9$$

$$-x+2y=7$$

Gelukkig wordt er voor  $x$  een positief getal gevonden. Maar ik begrijp niet, hoe men zich uit de situatie zou redden, als  $x$  negatief zou blijken te zijn.

Enkele grepen uit de inhoud: rates of change (waarbij ook reeds een definitie van snelheid gegeven wordt en zo het differentiëren voorbereid wordt), lineaire programmering, oplossen van stelsels van twee eerstegraadsvergelijkingen met twee veranderlijken (drie manieren waaronder ook met behulp van het inverteren van de matrix), goniometrie, kwadratische functies. Ten slotte een paar praktische onderwerpen: het tekenen van ruimtefiguren, het opsporen van een functie die het verband tussen gevonden series waarnemingsgetallen legt en dimensies. Aan het tekenen van stereometrische figuren (projectiemethoden) is een opgave ontleend die men achter in dit nummer in de rubriek recreatie vindt.

P. G. J. Vredenduin

Alleen de eerste 98 bladzijden van dit boek bevatten nieuwe stof, de overige zijn gewijd aan herhaling en examentraining. Ik zal me tot de nieuwe stof beperken.

Het eerste hoofdstuk gaat weer over vectoren. Ik vond hierin mijn nieuwsgierigheid ten aanzien van het gebruik van het hoge minteken bevredigd. Het tegengestelde van een vector wordt ingevoerd: als notatie voor het tegengestelde van de vector  $a$  wordt gekozen  $-a$ . Even later blijkt dan, dat ook algemeen het tegengestelde van het getal  $x$  genoteerd wordt  $-x$ . Spelenderwijs is dus de betekenis van het hoge minteken uitgebreid van toestandsteken naar teken voor het tegengestelde. Na deze uitbreiding zijn uitdrukkingen als  $-a+2b$  inderdaad overbodig geworden. Hierna volgt een vijftal hoofdstukken over de logaritme (als inverse van de groeifunctie) en het hanteren van de logaritmentafel, het vinden van invariante elementen bij transformaties, snelheid en versnelling, tafels met twee ingangen om resultaten van samenstelling van twee bewerkingen weer te geven en ten slotte de meetkunde op de bol in verband met de coördinaten van een punt op de aarde.

Dan helemaal tot slot een tiental bladzijden over 'Proof'. Hier vinden we uiteengezet dat in de wiskunde soms bewezen wordt. Waarom doen we dit? 'We want to convince someone (ourselves or others) that something is true.' En dat kan belangrijk zijn, want gebrek aan zekerheid in de wiskunde wrekt zich, doordat dan ook de betrouwbaarheid van de met behulp van wiskunde verkregen resultaten op losse schroeven komt te staan. Bij elk bewijs moet men natuurlijk uitgaan van dingen die reeds bekend zijn. 'In mathematics part of the fun lies in taking as little for granted as possible.' De dingen die we 'for granted' moeten nemen, heten axioma's. Deze passages zijn ont-

hullend voor de instelling die de Engelsman ten opzichte van het wiskunde-onderwijs heeft. De toepassing is essentieel. In de wiskunde bewijs je, als het nodig is om jezelf of anderen te overtuigen. Dingen die evident zijn, bewijs je niet. Echte wiskundigen hebben er plezier in dat wel te doen. Het is geenszins mijn bedoeling kritiek te oefenen op deze instelling die zonder twijfel goed verantwoord kan worden. Wel acht ik het nuttig scherp te formuleren welke instelling aan de methode ten grondslag ligt.

Naast de boeken X, Y en Z, evenals trouwens naast de andere boeken van de S.M.P., zijn uitvoerige Teacher's Guides verschenen.

P. G. J. Vredenduin

*S.M.P. Revised Advanced Mathematics*, Book 2, Cambridge University Press, 1973, LX + 355 blz., £2.00.

Ook in dit deel is de tekst vaak volledig herschreven en zijn de onderwerpen op nieuwe wijze gegroepeerd. Het hoofdstuk over algebraïsche structuren, dat ik in deel I node zag verdwijnen, vindt men in deel II terug. Hetzelfde geldt bijv. voor het hoofdstuk Groepen.

Twee nieuwe hoofdstukken zijn toegevoegd. Het ene gaat over inductie. Begonnen wordt met inductieve definities, toegelicht met behulp van flow diagrammen. Daarna een logisch correcte en heldere uiteenzetting over bewijzen met volledige inductie. Gerechtigd wordt in dit hoofdstuk, hetgeen te voren min of meer intuïtief al gebeurd is.

Het eveneens nieuwe hoofdstuk over golven gaat uit, bij wijze van voorbeeld van een zuiger die door een draaiend wiel in beweging gebracht wordt. De hoogte van de zuigerbodem wordt grafisch uitgezet tegen de tijd en zo ontstaat de eerste grafiek van een sinusgolf. Daarna volgt een algemene bespreking van de sinusgolven, samenstelling van twee golven met dezelfde periode en ten slotte van twee golven met verschillende perioden. Als bijzonder geval wordt behandeld het optreden van pulsen, als de perioden slechts weinig verschillen.

Het algemene karakter van het boek is uiteraard ongewijzigd gebleven; er is wel veel verbeterd.

P. G. J. Vredenduin

K. Lovell, *De ontwikkeling van fundamentele wiskundige en natuurkundige begrippen in het kinderlijk denken*, Wiskunde-paperbacks onder redactie van drs. B. van der Krogt, Malmberg/van In, 142 blz., f9,75. ISBN 90 208 54429.

Gezien het uitsluitend lovende voorwoord van prof. Inhelder kan een recensie van dit boekje niet anders zijn dan ingrijpen in het werk van prof. Piaget zelf. Anders zou het voorwoord zelf als recensie fungeren.

Om een eerste indruk van het boek te geven volgen hier een paar markante punten, eventueel aanhalingen.

... een psychologisch werk ... dat zo nauwkeurig en zo wetenschappelijk is (voorwoord, blz. 5)  
... kinderen helpt, helderder te denken over zekere wiskundige en natuurwetenschappelijke begrippen (blz. 9).

De fundamentele bekwaamheid die ten grondslag ligt aan al het wiskundig en logisch (innerlijk consistent) denken is het vermogen van omkeerbaarheid of *reversibiliteit* (M.i. het *absoluut sterkste* punt van Piaget, dat helaas in dit boek van veel te weinig concrete voorbeelden is voorzien), zie blz. 17 en 41.

Kronecker heeft gezegd: 'God schiep de natuurlijke getallen (bedoeld 1, 2, ...); alle andere zijn door de mens gemaakt.'

Experiment, waaruit blijkt dat een kat 2 van 3 weet te onderscheiden (29).

... of er dezelfde hoeveelheid rubber was voor en na het uitrekken van de band (60).

... dat het begrip van behoud van gewicht zich doorgaans later ontwikkelt dan dat van behoud van hoeveelheid (67).

... zoals Piaget beweert, tijd en afstand aanvankelijk niet worden onderscheiden (79).

In deze meetkunde worden twee figuren congruent genoemd, als ze in vorm en grootte gelijk zijn (88)!!

We kunnen nu inzien, dat vaste bewegingen en projectieve transformaties bijzondere gevallen van topologische transformaties zijn (90)!!

Het woord oppervlakte kan gedefinieerd worden als een hoeveelheid vlak (107), volume als een hoeveelheid ruimte (111)!!

... er is wel eens beweerd, dat het grondtal 12 een meer praktisch grondtal is dan 10 (121) M.i. een zeer *rake* opmerking, want onze cultuur heeft zich ten aanzien van grondtal 10 niet weten te bevrijden van het primitieve.

Men zal zien, dat de ontwikkeling van de fundamentele wiskundige en natuurkundige begrippen die besproken zijn, een langzaam en ingewikkeld proces is, dat vooralsnog niet goed begrepen wordt (134). Dat klopt dan wel!!

Men zou eigenlijk in de gehele wiskunde les moeten geven uit het oogpunt van generalisatie ... Dienes heeft beweed dat, als een begrip een aantal variabelen insluit, alle variabelen achtereenvolgens veranderd moeten worden, om het begrip te waarborgen (136). Dat is dan het tweede *zeer sterke* punt, dat ik in dit boek aantref, en wel het *structuurprincipe* van onze didactiek, helaas evenals bij de reversibiliteit een kreet die, hoe ontzettend belangrijk ook, door nagenoeg geen enkel concreet voorbeeld wordt gesteund.

Er kan een beter inzicht in wiskundige begrippen verwacht worden naarmate de wiskundige kennis van onze onderwijzers ... (138). M.i. past hier een zware zucht.

Ongelukkigerwijze bezit de mens het vermogen tot logisch denken in zeer gevarieerde mate; velen schijnen maar een gering vermogen te bezitten (141) ... (allicht, de natuur heeft ook hier voor een normale verdeling gezorgd).

Ongetwijfeld heeft de deskundige lezer aan bovenstaande van schaars commentaar voorziene zaken voldoende om deze recensie als klaar te beschouwen. Het volgende kan ik echter niet weglaten.

Kleinigheden zijn de typografisch slecht afgedrukte slingerformule, die bovendien slechts bij de volgende regel past (80),  $b = -1$  (123) en  $x$  als maaltaken (130).

Ernstiger is de slordigheid, waarmee met de wiskundige taal en de wis- en natuurkundige begrippen wordt omgesprongen, gebrek aan scherpte, ook buiten het exacte. Verwarring tussen vervoer en vervoermiddel (13), gelijkheid en gelijkwaardigheid (54), congruentie en gelijkvormigheid (65), vorm en grootte (88), breuk en verhouding (124), verzameling en element (126) verduistert de bedoeling van de auteur. Dat komt ook door onduidelijke zegswijze (102/103) en ongebruikelijke terminologie: Topologische verhouding (92/94), alle gehele getallen *plus* alle breuken (125), ongemotiveerd 'dus' (90), een voorbeeld oplossen (122) en meer van die aard (90, 113, 125). De dubbelverhouding van fig. 17 is wat zonderling genoteerd.

Bij de uitleg van 'gewicht' (63) heeft de auteur niet bedacht dat een voorwerp 100 m boven zee-niveau ongeveer evenveel weegt als 200 m er beneden, waardoor zijn voorbeeld een onjuiste suggestie geeft. Het modegebruik van 'dikke' woorden bevordert de leesbaarheid niet (12, 50, 73, 98, 140); kinestetisch komt in geen woordenboek voor en wordt hier niet uitgelegd. Maar *tijd* wordt wel gedefinieerd (72).

En nu waag ik mij op psychologisch terrein: Als men in een experiment twee zaken wijzigt, kan men onmogelijk één van deze als enige oorzaak van een andere uitkomst aanwijzen. Bij het eerder genoemde rubberexperiment (60) is slechts de reflexiviteit aan de orde (één object) maar bij het gewichtsexperiment (65) de transitiviteit (drie objecten). De eerder genoemde conclusie (67) zou evengoed kunnen luiden: Transitiviteit is moeilijker dan reflexiviteit.

Over het resultaat van het experiment van figuur 13 (blz. 83) behoeft men zich niet te verbazen, als men bedenkt dat de begrippen snelheid en hoeksnelheid nog niet zijn aangebracht. Zelfs een volwassene kan hier falen. Ik ken het geval van een aardrijkskundeleraar, die op een proefwerk vroeg, met welke snelheid de aarde zich om de zon beweegt, maar hoeksnelheid bedoelde, door welke fout een intelligente leerling juist in het nadeel kwam.

Het denken (dubbelzegging 22, 50) wordt onderscheiden in analytisch en constructief denken, zonder dat de bij het kind historisch groeiende denkwijzen genoemd worden; 1. associatie, 2. analogie, 3. inductie, 4. deductie. Bij 1 komt noch analytisch noch constructief denken voor. Bij 2 denkt men twee maal eerst analytisch, dan constructief, bij 3 constructief en bij 4 voornamelijk analytisch. Als ik analytisch denken definieer als gaande van verzameling naar element en constructief denken andersom, dan kom ik in tegenspraak met (22, 50). De kwestie is, dat de auteur bij de

definitie van analytisch denken het woord opbouwen gebruikt en daardoor in de waan komt, constructief denken te beschrijven.

Na dit alles lijkt mij een eindoordeel over dit boek niet meer nodig. Wel vraag ik mij af, waarom het vertaald is, want we kunnen heus wel Engels lezen. Er is een wet voor beroepsvertalers, die verbiedt, fouten in de tekst te corrigeren. Als de vertaler zich daaraan slaafs heeft gehouden, dan heeft zijn werk, dat ook niet vrij is van anglicismen (133), een averechtse uitwerking.

Wel kunnen we uit dit werk een harde les leren, n.l. dat er internationaal gebrek is aan mensen, die zowel wiskundige als psycholoog zijn en dat, bij gebrek daaraan, *intense* samenwerking tussen de beide disciplines tot stand moet komen, een samenwerking die niet hieruit bestaat, dat de ene partij vluchtig kennis neemt van het terrein van de andere.

Mijn laatste bezwaar richt ik tegen deze recensie zelf. Ze komt alleen uit de mathematische hoek en kan dus op zijn zachtst gezegd onevenwichtig zijn.

J. K. Timmer.

B. Nijdam e.a., *Statistiek en Kansrekening voor het V.W.O.*, 2de geheel herziene druk, 1974, 186 blz.; *Antwoorden*, 90 blz.; *Tabellen*, 32 blz.; *Docentenboek*, 333 blz.: I.O.W.O., Lelystad.

Het zal bekend zijn dat aan de verschijning van dit boek veel studie en voorontwerpen zijn voorafgegaan.

Het resultaat is een bijzonder verzorgd geheel.

Het is verdeeld in zes hoofdstukken, een inleiding (43 blz.); kansregels (35 blz.); kansverdelingen (29 blz.); Het toetsen van hypothesen (26 blz.); Verwachting en standaardafwijking (36 blz.); de normale verdeling (15 blz.).

Een groot aantal vraagstukken begeleidt de tekst, tevens worden discussie-vragen ingelast, die de leerling aan het denken moet zetten. Nu heeft zo'n discussie alleen zin, als die leerling weet waarover hij praat, zodat m.i. niet te vroeg een discussie moet worden uitgelokt.

Let men op de zeer uitvoerige begeleiding die de docent ten deel valt, dan is mijn enige wens, dat ook de leerling met meer begeleiding wordt geholpen, zodat hij niet helemaal afhankelijk is van de docent. Speciaal aan het eind van het boek wordt iets te veel 'gehaast'.

Enkele kleine opmerkingen. Op blz. 30 ontbreekt de definitie van  $0!$ . De leerling mag raden. Akkoord, maar desondanks mag een definitie niet expliciet ontbreken.

Blz. 48. In de tabel ontbreekt: 9 doelpunten. blz. 55, 'onder' de stippellijn kan misverstand veroorzaken. Blz. 168, nr. 4.  $9/29 \rightarrow 9/28$ .

De uitkomsten van de opgaven van 2.5 zijn verkeerd genummerd. Op blz. 64 Antwoorden, moet bij nr. 6  $v(x)$  en  $\sigma(x) \rightarrow v(y)$  en  $\sigma(y)$ . Tenslotte zou ik niet graag de som van  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$  (docentenboek blz. 212) op de aangegeven wijze aan de leerlingen willen voorschotelen. Waarom niet  $(1-x)s_n$  herleid tot  $(1-x^n)/(1-x) - nx^n$ ?

W. Burgers

## Ontvangen boeken

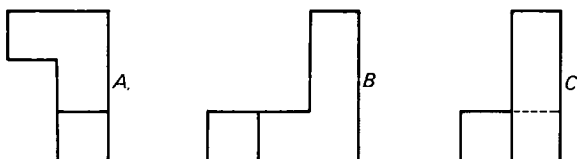
Wolfgang-Franz, *Topologie II*.

Sammlung Götschen 7182, 2e druk, 151 blz., DM 14.80. De Gruyter & Co., Berlijn 1974.

# Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

333. In onderstaande figuur ziet men resp. het bovenaanzicht (A), vooraanzicht (B) en zijaanzicht (C) van een ruimtelijke figuur. Gevraagd wordt deze figuur te vinden. (S.M.P., Book Y)



334. Iemand heeft een stapel kaarten genummerd 1 tot en met  $n$  van boven naar beneden. De eerste  $p$  kaarten gooit hij weg, de volgende kaart legt hij onder op de stapel, de volgende  $p$  kaarten gooit hij weg, de daarop volgende legt hij weer onderop de stapel, enz. Hij herhaalt deze bewerking, totdat het niet meer mogelijk is. Er blijkt dan nog precies één kaart over te zijn. Gevraagd een algoritme te vinden om het getal dat op deze kaart staat, te vinden, als  $n$  en  $p$  gegeven zijn. (B. Kootstra)

## oplossingen

331. De punten  $P$ ,  $Q$  en  $R$  liggen niet op één rechte lijn.  $A$  en  $B$  verbinden beurtelings twee punten door een boog of een punt met zichzelf door een lus en kiezen op deze boog resp. lus een nieuw punt. In geen punt mogen meer dan drie bogen samenkomen. Geen twee bogen mogen elkaar snijden. Winnaar is degeen die de laatste boog aanbrengt.  $A$  begint. Wie wint?

Eerst spelen we het spel in drie dimensies. De drie punten  $P$ ,  $Q$  en  $R$  kunnen in totaal uiteinden zijn van 9 bogen. Breng een boog of lus aan en kies daarop een nieuw punt  $S$ . De vier punten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  en  $S$  zijn nu reeds uiteinde van 4 bogen. Ze kunnen dus nog maar uiteinden zijn van 8 nieuwe bogen. Zo gaat

er elke keer 1 af. In totaal kan dus precies 8 keer een boog of lus aangebracht worden.  $A$  begint. Dus  $B$  wint.

Nu in twee dimensies.  $A$  zal om te winnen moeten bewerkstelligen dat de punten in twee gescheiden verzamelingen verdeeld worden zo, dat ten slotte de laatste boog niet meer getekend kan worden, omdat hij een andere boog zou moeten snijden.  $A$  begint daarom een lus aan te brengen, zoals in fig. 1 getekend is.

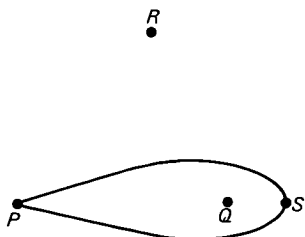


Fig. 1.

Tot slot zal men nu een punt binnen en een punt buiten deze lus overhouden die nog maar van twee bogen uiteinden zijn. Deze kan men niet meer verbinden waardoor het totaal aantal bogen van 8 tot 7 teruggebracht wordt. Daardoor wint  $A$ .

Het vereist nog wel enige inspanning zich ervan te overtuigen, dat er voor  $B$  geen mogelijkheid is aan de moeilijkheid te ontsnappen door een verdeling in drie gebieden te bewerkstelligen.

332. Welk gehele positieve getallen kunnen geschreven worden als som van een aantal consecutieve gehele getallen? Op hoeveel manieren?

Kies een positief geheel getal  $q$ . Tracht  $q$  te schrijven als som van een aantal positieve gehele getallen. Noem het kleinste daarvan  $a$ , het grootste  $l$  en het aantal  $n$ . Dan is

$$q = \frac{1}{2}n(a+l), \quad \text{waarin} \quad n = l - a + 1$$

Dus

$$2q = (l - a + 1)(a + l)$$

Een van beide getallen  $a + l$  en  $l - a + 1$  is oneven. Dus zal  $q$  een oneven factor moeten bevatten.

Onderstel  $2q = q_1 \cdot q_2$ , waarin één van deze twee getallen even en het andere oneven is. Is  $q_1 < q_2$ , dan vinden we  $a$  en  $l$  uit

$$\begin{aligned} l - a + 1 &= q_1 \\ a + l &= q_2 \end{aligned}$$

Het lukt dus als  $q$  een oneven factor bevat en het lukt niet als  $q$  een macht van 2 is.

Op hoeveel manieren lukt het? Op evenveel manieren als  $q$  oneven delers heeft.

Onderstel  $q$  bevat

$n_1$  factoren 3

$n_2$  factoren 5

en algemeen

$n_i$  factoren  $p_i$ , waarin  $p_i$  het  $i^e$  oneven priemgetal is,  
dan is het aantal oneven delers van  $q$

$$\prod (n_i + 1) - 1$$

Dit is dus het gevraagde aantal mogelijkheden.

Aan het bestuur van de  
Nederlandse Vereniging van  
Wiskundeleraren.

Deze jaargang stond in het teken van het 50-jarig bestaan van Euclides. De redactie heeft gepoogd het onderwerp meetkunde in deze jaargang centraal te stellen. In de eerste drie afleveringen werd het aanvankelijk meetkunde-onderwijs belicht. Het dec./jan. nummer was het eigenlijke jubileumnummer. Onze dank gaat uit naar de auteurs die in betrekkelijk korte tijd hun bijdragen schreven. De uitgever verdient alle lof voor de verzorging van dit tot een boekwerkje uitgegroeide meetkundenummer. Gebruik van een ander soort papier, toepassing van kleurendruk heeft het geheel een feestelijk tintje gegeven. In de redactie zijn geen wijzigingen opgetreden. De samenwerking met de uitgever was voortreffelijk.

september 1975

G. Krooshof, voorzitter  
W. Kleijne, secretaris

# redacteur wiskunde

Wolters-Noordhoff bv is een educatieve uitgeverij, die leerpakketten ontwikkelt voornamelijk voor het primair en secundair onderwijs.

Binnen de redactie Wiskunde, die verantwoordelijkheid draagt voor ontwikkeling, productie en verkoop, bestaan plannen voor een aantal ontwikkelingsprojecten.

In deze redactie is plaats voor een redacteur.

## **Werkzaamheden**

In samenwerking met auteurs, docenten en andere in- en externe deskundigen op het gebied van het wiskundeonderwijs worden leerpakketten ontwikkeld en diensten aan het onderwijs verleend.

## **Functie-eisen**

Voor een goede vervulling van deze functie is een eerste-graads bevoegdheid in de wiskunde, het vermogen in een groep onderwijsdeskundigen samen te werken, onderwijservaring, de bereidheid zich in te zetten voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs en een goede

mondelinge en schriftelijke beheersing van het Nederlands gewenst.

Voor verwerving en/of aanvulling van de gevraagde kwaliteiten wordt een ruime inwerkperiode geboden.

De honorering is in overeenstemming met het belang van de functie.

## **Nader contact**

Als u vragen heeft over deze functie kunt u zich wenden tot het hoofd van de redactie, de heer D.W. Soeteman, tel. 050-162120.

## **Sollicitatie**

Schriftelijke sollicitaties aan Wolters-Noordhoff bv, Hoofd Personeelszaken, Postbus 58, Groningen.

---

## **ICU**

Wolters-Noordhoff bv is een werkmaatschappij van de nv ICU, Informatie en Communicatie Unie, waarin o.a. samenwerken Samsom/Alphen aan den Rijn, A.W. Sijthoff/Leiden en Wolters-Noordhoff/Groningen.



**Wolters-Noordhoff bv**

3141-004

# wiskunde docenten

Wolters-Noordhoff bv is een educatieve uitgeverij, die leerpakketten ontwikkelt, voornamelijk voor het primair en secundair onderwijs. Binnen de redactie wiskunde, die de ontwikkeling, produktie en verkoop van wiskunde-uitgaven voor het voortgezet onderwijs tot taak heeft, bestaan plannen voor een project Wiskunde-16+.

Hiertoe wordt contact gezocht met *wiskunde docenten*, werkzaam in het m.b.o., h.b.o. of in de bovenbouw van havo en v.w.o., die belangstelling hebben voor vernieuwingen in het wiskundeonderwijs.

Van deelnemers aan de te vormen werkgroep wordt bereidheid verwacht eigen en anderer didactische, wiskundige en redactionele kwaliteiten te ontwikkelen bij het totstandkomen van een gemeenschappelijke visie.

Aan de oprichting van de werkgroep zullen een aantal studiedagen voorafgaan opdat het de potentiële partners duidelijk wordt waar zij op intekenen.

Belangstellenden die direct of na een inwerkperiode aan de ontwikkeling van Wiskunde-16+ wil-

len bijdragen, worden gaarne uitgenodigd op deze oproep te reageren.

Ook docenten die hiervoor geen belangstelling hebben maar wel willen meewerken op een andere manier, bijvoorbeeld door te reageren op door anderen geschreven kopij nadat die in een eigen klas is beproefd, kunnen reageren.

Voor nadere inlichtingen kunt u zich wenden tot:

Drs. J. van Dormolen, medewerker  
Ped. Did. Inst. Rijksuniversiteit,  
Utrecht

J.H.G. Vaessens, leraar St. Maartenscollege, Maastricht

D.W. Soeteman, hoofd redactie  
wiskunde Wolters-Noordhoff

Uw reacties kunt u richten aan:  
Wolters-Noordhoff bv, t.a.v. de  
heer D.W. Soeteman, Postbus 58,  
Groningen, tel. 050-162120.

---

## ICU

Wolters-Noordhoff bv is een werkmatschappij van de nv ICU, Informatie en Communicatie Unie, waarin o.a. samenwerken Samsom/Alphen aan den Rijn, A.W. Sijthoff/Leiden en Wolters-Noordhoff/Groningen.



**Wolters-Noordhoff bv**



# **Meulenhoff Educatief Amsterdam**

zoekt een

## **Editor**

die speciaal belast zal worden met de  
fondsvorming van de exacte- en economische  
vakken voor het voortgezet onderwijs.

Sollicitanten dienen praktijkervaring in de  
school - bij voorkeur zowel bij het mavo als bij  
het havo/vwo - te hebben opgedaan.

Van hen wordt verwacht dat ze een meer dan  
gemiddelde belangstelling hebben voor het  
onderwijs in al zijn aspecten. Interesse voor  
de toekomstige te verwachten ontwikkelingen  
kan daarbij uiteraard niet ontbreken.

Een goed editor beschikt over een grote mate  
van inventiviteit, zeer goede contactuele  
eigenschappen, een helder zakelijk inzicht en  
een flink doorzettingsvermogen.  
Hij/zij laat die boeken verschijnen die de school  
van nu (en morgen) nodig heeft.

---

*Schriftelijke sollicitaties te richten aan:  
Directie Meulenhoff Educatief,  
Prinsengracht 468, Amsterdam.*

In opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en sterrenkunde  
is uitgegeven de

# STERRENGIDS 1976

Samengesteld door Lic. Jean Meeus

70 pag., ing. geill. f 13,50. ISBN 90 01 81278 3

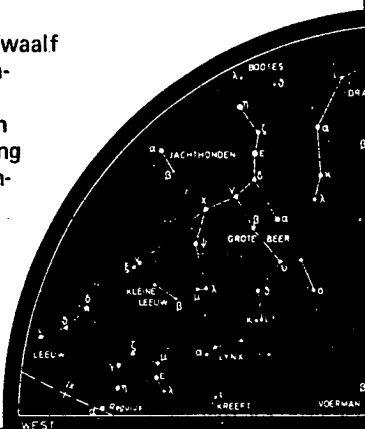
## Inhoud:

Tijdaanwijzing; beknopt jaaroverzicht; Twaalf  
sterrenkaarten-zes paren; Hemelverschijn-  
selen in 1976; De wegen van planeten en  
planetoiden; De zon in 1976; De maan in  
1976; De planeten in 1976; Sterbedekking  
1976; Minima van Algol; Mira; Verklaren-  
de woordenlijst van enkele astrono-  
mische termen; Griekse letters; Enkele  
hemelverschijnselen in 1977.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel.



H.D. Tjeenk Willink Groningen



## INHOUD

P. G. J. Vredenduin: S.M.P. Advanced Mathematics Book 1—4 45

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 56

P. G. J. Vredenduin: S.M.P. Cards 57

L. Bozuwa: Verslag besprekingen mavo-examens wiskunde 1974 68

Genootschap voor geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en  
natuurwetenschappen 71

Examenverslag 1974 72

Mededeling 76

De leesportefeuille 77

Boekbespreking 79

Recreatie 84

Redactieverslag 86