

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

51e jaargang

1975/1976

no 1

aug./sept.

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 28,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Prijs nummer 4/5 f 9,50.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 225,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 120,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 67,50.

Voorrede tot een wetenschap van het wiskunde-onderwijs*

VOORREDE TOT DE VOORREDE



Een merkwaardige titel! Toch heeft elke wetenschap eens in haar prenataal stadium zulke geschriften gekend. Alleen heetten ze niet 'Voorrede', maar bij voorbeeld 'Prolegomena', wat hetzelfde betekent, maar minder voorlopig klinkt. Ook waren ze langer, wel tien keer zo lang als dit boek. Voordat een wetenschap bestaat, laat zich ontzaglijk veel meer over haar zeggen dan wanneer ze er eindelijk is; dan wordt men bescheidener.

Dit is de voorrede tot een boek, dat nooit geschreven zal worden – door mij noch door anderen. Tot een wetenschap van het wiskunde-onderwijs zal men, als ze er een keer is, de gepaste voorrede schrijven. Toch moet deze Voorrede – hetgeen ik eerlijkheidshalve één voorrede noem – een functie vervullen: de functie, de geboorte van een wetenschap van het wiskunde-onderwijs te bespoedigen. Die wordt namelijk vertraagd door de ongegronde mening dat zij er al was. Tegenover deze mening kies ik positie. De mening berust op een foutieve inschatting van wat in 't algemeen als zo'n wetenschap wordt beschouwd – onder- en overschatting tegelijk. Dit verklaart het eerste hoofdstuk van deze

voorrede 'Wat is wetenschap?', waar de wetenschap tegen andere activiteiten wordt afgegrensd, tegen vormen van onwetenschap, van pseudo-wetenschap, tegen techniek, tegen geloof. Wat ik in dit hoofdstuk uiteenzet – zeer controversieel uit een behoefte aan duidelijkheid – geldt voor vele wetenschappen, in 't bijzonder in de maatschappelijke sector. Het is overal toepasselijk waar tussen een hoog ontwikkelde techniek en een rationeel gemotiveerd geloof nog nauwelijks aanlopen tot wetenschap waarneembaar zijn. Van deze gebieden is het onderwijs het voornaamste, en de vraag in de titel van het tweede hoofdstuk 'Wat is onderwijs?' doelt op de rol van het onderwijs tussen techniek en geloof.

Evenzeer als op een wetenschap van het Wiskunde-onderwijs wacht men op een van het onderwijs in 't algemeen. We zijn er nog verder van verwijderd. Een wetenschap van het onderwijs is niet voorwaarde voor een wetenschap van het wiskunde-onderwijs, maar omgekeerd: wetenschap van vakonderwijs gaat aan wetenschap van onderwijs zonder meer vooraf, evenals wiskunde vroeger dan wetenschap is, mechanica vroeger dan natuurkunde, natuurkunde vroeger dan natuurwetenschap, wetenschap van talen vroeger dan taalwetenschap. Zodoende wordt het begrijpelijk dat op de weg van het derde hoofdstuk over 'Wetenschap van het Onderwijs' naar het vierde 'Wetenschap van het wiskunde-onderwijs' de toon geleidelijk verandert, van kritiek op hetgeen zich als wetenschap voordoet, naar het turen naar hoopgevende schemering aan de horizon. Meer is het niet, niet eens aanloopjes tot een wetenschap van het wiskunde-onderwijs, maar op zijn hoogst het aanwijzen van plaatsen waar dergelijke aanlopen te vinden zouden kunnen zijn. Ik beloof niets en zal alles gestand doen, maar niet om me het gestand doen te vergemakkelijken, vermijd ik beloften, maar om mij en anderen de verheffing tot wetenschap te bemoeilijken van iets dat geen wetenschap is.

Iemand noemde mijn 'Wiskunde als opvoedkundige taak'** een 'Summa contra mathematicos'. Overeenkomstig zou deze Voorrede een 'Summa contra didacticos' kunnen heten. Ze zouden dus complementen van elkaar kunnen zijn. Het is billijk – elk 't zijne.

Al naar de titel is deze Voorrede tot een niet-existent boek op een toekomst gericht, die nog in de maak is. Droeg ik dat boek aan vrienden van mijn eigen generatie op, dan is het billijk dat ik deze Voorrede wijd aan wat gaat komen: Aan mijn lieve medewerkers van drie tot dertien.

* Onder deze titel zal een boek van plm. 300 blz. van Prof. dr. H. Freudenthal in verschillende talen verschijnen. Van dit boek wordt hier het begin in 't Nederlands afgedrukt.

** Mathematik als pädagogische Aufgabe; Mathematics as an educational task.

Professor Freudenthal zeventig jaar

Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ

Bilthoven

Toen de redactie van Euclides mij vroeg iets te schrijven naar aanleiding van de zeventigste verjaardag van professor Freudenthal (17 september 1975 heb ik natuurlijk direct ja gezegd. Pas later ga je dan denken, wat te schrijven. Eén raad wilde ik ter harte nemen: 'Men moet een man niet in zijn aangezicht loven'. Ik zal proberen mij hieraan te houden. De redactie zei nog dat het speciaal over het wetenschappelijk werk van de jarige moest gaan. Daarom verviel ook de mogelijkheid Freudenthals artikel gepubliceerd bij de vijfenzeventigste verjaardag van Einstein (de Groene Amsterdammer 13 maart 1954) als voorbeeld te kiezen. Meer het werk, dan de man, ze zullen heus wel niet te scheiden zijn. Wilt U zoiets goed begrijpen dan moet U Freudenthals verhaal over Vrijtijdsbesteding in Wetenschap & Samenleving 14 (1960), 77-85 maar eens lezen.

Goed, we beginnen in 1931, Freudenthal begint te publiceren over topologische vraagstukken. Het gaat over compactificaties. Niet iedere rij reële getallen heeft een limiet, sommige rijen hebben geen limiet omdat ze schommelen; andere zoals 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... zijn fraai monotoon, maar hebben toch geen limiet. Is daar niets aan te doen? Natuurlijk, we voegen een symbool ∞ toe aan de reële getallen spreken af $\lim(2n+1) = \infty$. Om $-2, -4, -6, -8, -10, \dots$ ook een limiet te geven voeren we ook nog $-\infty$ in. De met twee punten aangevulde verzameling reële getallen is compact geworden. (Iedere oneindige rij heeft een convergente deelrij; de stelling van Bolzano-Weierstrasz geldt). Hadden we dit ook met één punt kunnen doen? Dan was 1, -2 , 3, -4 , 5 convergent geworden, de reële rechte was een slang geworden, die in zijn eigen staart bijt.

Wanneer ik in plaats van de getallenlijn het vlak bezie, liggen verschillende compactificaties voor de hand. Bijvoorbeeld met één punt, het vlak wordt dan een bol, denkt U maar aan stereografische projectie (de projectie van het boloppervlak vanuit de Noordpool op het raakvlak in de Zuidpool). Maar door evenwijdige lijnen een snijpunt te geven, een 'oneigenlijk' punt vinden we een andere compactificatie, die met een lijn, waarbij het resultaat het projectieve vlak wordt. Maar ook door aan ieder stel evenwijdig gerichte halfrechten een oneindig ver punt toe te voegen kunnen we het vlak compactificeren. Het wordt moeilijker als we beginnen met de rationale getallen, dan zijn er heel wat rijen

zonder limiet; hoeveel punten moeten we nu toevoegen? De door Freudenthal ontwikkelde theorie van 'Enden und Primenden' gaat over dit soort vragen. Een ander onderwerp uit de topologie dat we moeten noemen is de rol van groepen in de beschrijving van topologische objecten. Noemen we twee, door een vast punt P , gaande gesloten krommen op een oppervlak equivalent als ze continu in elkaar overgevoerd kunnen worden, dan zijn de equivalentie-klassen tot een groep samen te voegen, de homotopiegroep. Op een bol kan iedere gesloten kromme tot een punt (het neutrale element van de groep) worden samengetrokken. Op een torus kan dit duidelijk niet. Op een bol met één gat lukt het wel, op een bol met twee gaten lukt het niet. Zijn er hoger dimensionale analogieën? In zijn openbare les als privaat docent wijst Freudenthal op de interactie van analyse, meetkunde en combinatoriek (groepentheorie e.d.). Homologie en homotopie groepen zijn centrale onderwerpen van de topologie geworden, ontstaan door samenwerking van topologen en algebraïci. Freudenthals vele bijdragen aan de opbouw van deze theorie zijn bij de kenners van de topologie goed bekend. Zijn 'suspensie', het inhangen van topologische ruimten in ruimten van (hogere) dimensie noemde hij zelf eens een grote vis, gevangen in de stroom van wiskundige ontdekkingen (de Groene Amsterdammer, 23 dec. '61, Viskunde). Als hulpmiddel worden in de topologie stukken analyse (o.a. bijna periodieke functies) en stukken uit de algebra (groepen, later ook modulen etc.) benut. De meetkundige Freudenthal doceerde in Amsterdam dan ook analyse en in Utrecht algebra.

Freudenthal kwam naar Nederland, of moeten we zeggen Freudenthal kwam naar Amsterdam, of zelfs Freudenthal kwam naar L. E. J. Brouwer. Alle drie de uitspraken zijn juist. Brouwer's belangstelling ligt dan bij de topologie en de grondslagen van de wiskunde. We moeten dit niet helemaal los van elkaar zien. De dissertatie van Brouwer (uit 1907) heeft als titel 'Over de grondslagen van de wiskunde'. Dit werk past in een lange rij verhandelingen, veelal over de grondslagen van de meetkunde, soms van de getallen (Was sind und was sollen die Zahlen?). Ik noem enkele titels uit deze rij:

B. Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, 1854 (gepubliceerd in 1867).

H. Helmholtz: Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, 1868.

S. Lie: Über die Grundlagen der Geometrie, 1890.

H. Poincaré: Des Fondaments de la Géometrie, 1899.

D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 1899.

De lezing van een artikel van Freudenthal in het Nieuw Archief voor Wiskunde 5 (1957), 105–142, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie (naar aanleiding van een boekbespreking van een heruitgave van het boek van Hilbert) kan ik U warm aanbevelen.

In het kader van al deze grondslagen van de meetkunde past het ruimte-probleem. Is onze ruimte gekenmerkt door het bestaan van beweegbare vaste lichamen, of alleen van invariante maatlatten? Of is differentiaal meetkunde met $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ de eigenlijke grondslag? Hoe is de verhouding van meetkundige axioma's en analytische (differentiaal meetkundige) en(of) algebraïsche structuren? In de grondslagen van de projectieve meetkunde blijken algebraïsche eigenschappen zoals commutativiteit en associativiteit van

het betreffende getallichaam te corresponderen met meetkundige configuraties zoals Pappus-Pascal en Desargues. Hoe is dat met analytische eigenschappen, zoals continuïteit?

Het is niet goed mogelijk hier precies het, of liever één of meer van de ruimte problemen scherp te formuleren*. Ik kan verwijzen naar de inleidingen van verschillende artikelen van de hand van Freudenthal over de ruimte problemen. Ik noem er twee:

Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems (Math. Zeitschrift 63 (1956), 374–405).

Lie Groups in the Foundations of Geometry (Advances in Mathematics, vol. 1 (1965), 145–190).

Uit het laatste citeer ik grof een resultaat. Laten we van een topologische ruimte veronderstellen dat hij een transitieve groep van homeomorfismen bezit, verder lokaal compact, star, volledig, samenhangend is en aan nog een goed gedefinieerde topologische eis voldoet. Dan is af te leiden, dat deze groep een Lie-groep is. Voor Lie-groepen kunnen we de klassificatie van E. Cartan, gebruikmakende van de differentieerbaarheidsstructuur, benutten.

De compacte, enkelvoudige, enkelvoudig samenhangende Lie-groepen over de complexe getallen zijn òf lid van een oneindige familie (speciale lineaire, orthogonale, symplectische groepen) A_n , B_n , C_n , D_n of behoren tot de vijf exceptionele groepen E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , G_2 .

Al deze groepen hebben een meetkundige betekenis, alleen moeten we meetkunde over reële getallen, over complexe getallen, over kwaternionen en over octaven beschouwen. Octaven zijn zoiets als kwaternionen, maar dan 8-dimensionaal i.p.v. 4-dimensionaal. Ze zijn maar 'net zo iets' want ze zijn niet associatief, in plaats daarvan is een zwakkere vorm van haakjes weg werken geldig. In plaats van de stelling van Desargues geldt nu, zoals Ruth Moufang opmerkte, een zwakkere meetkundige stelling, namelijk één over harmonische viertallen.

Misschien kunt U alleen maar bij mondelinge overlevering iets proeven van de spanning en de verwondering bij de interpretatie van het magische vierkant van vier soorten meetkunde over vier soorten getallen. In het door Freudenthal in Utrecht in 1959 georganiseerde colloquium over: Algebraical and Topological Foundations of Geometry (1962) lieten de dimensie getallen 14, 52, 78, 133, 248 de harten van de liefhebbers sneller kloppen. Tegenwoordig is duidelijk geworden dat de bovengegeven klassificatie A t/m G niet alleen voor het ruimteprobleem, voor de meetkunde, maar evenzo voor de algebra, de getaltheorie in verschillende moderne probleemstellingen van bijzonder belang is. C. Chevalley gaf de start voor een nieuwe aanpak de theorie van de algebraïsche groepen, de analyse staat dan niet meer centraal. Maar Freudenthals bijdrage verraadt de hand van de meetkundige, we noemen zijn lange reeks artikelen over het verband van E_7 en E_8 met het octavenvlak.

Eén speciaal facet van het ruimte vraagstuk wil ik nog even apart vermelden: de oriëntatie van de ruimte, of te wel het verschil tussen links en rechts draai-

* Freudenthals promotor, H. Hopf, schreef in 1925 Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Ann. 95 (1925), 313–339.

ende schroeven, wenteltrappen, kurketrekkers, schelpen, wijnranken, cobalt kernen enzovoorts. Kunt U iemand per telefoon duidelijk maken wat een linkse kurketrekker is? Natuurlijk kunt U naar biologische objecten verwijzen, misschien naar rechterhandregels uit de theorie van het electromagnetisme, misschien zelfs naar het β -radioactieve verval van cobalt (onderzoekingen van Lee en Yang). Maar als U niet kunt verwijzen naar dode of levende natuur, omdat U bijvoorbeeld radioacontact hebt met 'bewoners' van planeten buiten ons zonnestelsel wat dan? Misschien zijn de schelpen daar net andersom, misschien zijn de kernen van de atomen daar negatief en de trabanten van deze kernen positief. U kunt het allemaal heel uitvoerig beschreven vinden in Freudenthals diesrede (bijna was ik mijn spreuk van de eerste pagina vergeten en had ik geschreven magistrale diesrede): 'De wereld in de spiegel' (Jaarboek Rijksuniversiteit Utrecht, 1964).

Van de oriëntatie van de ruimte naar Kant en Leibniz is een duidelijke weg. Dat ook axiomatic een onderwerp van studie, vooral ook in de relatie met onderwijs, van Freudenthal is geworden, is ook in deze lijn te begrijpen. En van axiomatic naar logica (denkt U maar aan het in vele talen vertaalde boekje 'Exacte logica') enzovoort, enzovoorts. Maar waarom zouden we zo moeten verklaren, mag iemand zich niet zo maar voor iets interesseren, omdat hij ergens een probleem tegenkomt, dat hem niet loslaat, dat vreugde geeft als een stukje opgelost kan worden. Zo is veel wetenschappelijk onderzoek (en zeker ook van Freudenthal) ontstaan. Over uiteenlopende onderwerpen, als maten voor damesconfectie (J. Sittig en H. Freudenthal: de Juiste Maat, Leiden, 1951), en operatoren rekening, over decibels en electromagnetisme. Ook Freudenthals publicaties over de genetische code zijn zo ontstaan. Wilt U het verhaal lezen? Eén versie heet 's Levens ABC, en is opgenomen in de in wel acht talen verschenen bundel: Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven. Als U zich haast kunt U misschien de nederlandse versie nog vinden, niet alleen om dit verhaal is de bundel het kopen en lezen waard! In dezelfde lijn liggen wellicht de publicaties in de Groene Amsterdammer (15 december 1951) over De Godsbewijzen in het licht van de moderne natuurwetenschappen en in Synthese (IX (1955), 454-464) over Nieuwentijt und der teleologische Gottesbeweis. Een wat stormachtige belangstelling was er voor de publicatie van Lincos, design of a language for cosmic intercourse. Toen het boek verscheen (in 1960) zagen de publiciteitsmedia er brood in, zelfs Time wilde het naadje van de kous weten. Ik zinspeelde boven al op de inhoud; hoe kom je in radiocontact met intelligente wezen op andere hemellichamen, aangenomen dat deze wezens bestaan. Een uiteenrafelen van wiskunde, tijd, gedrag, ruimte, beweging en maat in een van de grond af op te bouwen eigen taal, Lincos. Een wel zeer verfijnde variant van het in de vorige eeuw gelanceerde plan om via een figuur van de stelling van Pythagoras, uitgelegd in de Sahara met eventuele Marsbewoners in contact te komen. En ook een veel fijnzinniger aanpak dan degene die onlangs werd besproken in Scientific American (May 1975), waar tweedimensionale beelden gebruikt worden. H. Brandt Corstius kenmerkte Lincos als de definitie van de mens. (vid. Raoul Chapkis: Ik sta op mijn hoofd, p. 14). Een intelligent wezen dat via deze taal met ons in communicatie zou treden, zouden we een 'medemens' i.p.v. een 'intelligent wezen' kunnen noemen.

Maar ik moet de lezer waarschuwen dat Lincos een doodserieus (wat een ellendig woord, het boek is zeer levendig en daarom juist zo serieus) en zelfs vrij technisch boek is. Niet voor niets werd het uitgegeven in de reeks *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*.

We hebben enkele facetten uit het wetenschapsterrein dat Freudenthal boeit en hem tot actief meedoen prikkelt genoemd. Andere bleven ongenoemd, artikelen over analyse, over waarschijnlijkheidsrekening en statistiek over rekenmachines en numerieke wiskunde enzovoorts lieten we ongenoemd. Moeten we daarop terugkomen bij de vijfenzeventigste verjaardag? We wensen hem voor de komende jaren in ieder geval nog een flink aantal boeiende problemen zowel van direct wiskundige als van afgeleid wiskundige aard toe. Vernuftige oplossingen en kritische ontrafelingen van deze mogen we gerust aan de jarige overlaten!

P.S. Hoeveel lezers van Euclides zijn ook op 17 september jarig? Leest U 'Samen Jarig' in Euclides (1970–71), 177–180, er maar eens op na. Maar wel oppassen! Is het toeval dat ik een tweede wiskundige ken, die ook op 17 september jarig is?

Freudenthal en de didaktiek der wiskunde

Dr. P. M. VAN HIELE

Voorburg

Het is stellig geen toeval, dat bij de meeste ontmoetingen die ik met Freudenthal had, de didaktiek een belangrijke rol speelde. Hierbij moet onder 'didaktiek' worden verstaan: een theorie over het lesgeven, waarbij de relatie met de praktijk voor het lesgeven voorop staat. De eerste kolleges die ik in het begin der dertiger jaren bij Freudenthal volgde – hij was toen privaat-docent en assistent van L. E. J. Brouwer – handelden over verzamelingsleer en logika. Ofschoon hij toen vanzelfsprekend nogal wat moeite had met de nederlandse taal en ook niet altijd de draad kon vasthouden, waren deze kolleges een meer dan voldoende basis voor wat ik later van deze vakken moest weten.

Al heel spoedig volgde er een colloquium met als onderwerp de didaktiek der wiskunde en men kan zich voorstellen, dat het er daarbij soms heel levendig toeging. Eerst werden wij studenten uitgenodigd stukken universitaire leerstof uit te leggen en Freudenthal koos daarbij heel listig leerstof uit waarin we vrij slecht kollege hadden gehad. Zo sneed het mes aan twee kanten: je leerde wat van het lesgeven, en, doordat je je veel beter in de juiste samenhang van de stellingen had moeten verdiepen, kreeg je zelf en kregen ook de toehoorders de kans de stof beter te leren begrijpen. Hier werd een belangrijke regel van de didaktiek in toepassing gebracht: Het best leert men de leerstof begrijpen, als men deze zelf moet doceren.

Juist in deze tijd kwam de Uebungensammlung van T. Ehrenfest-Afanassjewa uit. Freudenthal was daar weg van en wij studenten kregen allemaal het boekje een paar dagen mee naar huis om het te bestuderen. Het was bijzonder boeiend om de oorspronkelijke gedachten die erin ontwikkeld werden en je behoefde er niet geheel mee eens te zijn, om er toch nog veel van te leren. Dat de denkrichting van mevrouw Ehrenfest veel verschilde van die van Freudenthal, blijkt wel uit de bundel van 1951 (Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen) waarin ze hun wederzijdse standpunten uiteenzetten. Ik kan de lezing van deze brochure nog steeds aanbevelen, in de eerste plaats om de waardevolle zaken die de beide auteurs aandragen, maar ook vooral, omdat men er uit kan zien, hoe grote denkers langs elkaar heen kunnen praten, omdat zij verzuimd hebben hun begrippenvelden zo te ordenen, dat de woordsymbolen die zij gebruiken, dezelfde betekenis hebben. Ik vrees, dat dit soort kommunikatiestoornissen zéér veel voorkomt: dikwijls is de ruis even groot als het sinjaal.

Intussen ben ik nu met mijn herinneringen aan de andere kant van Wereldoorlog II gekomen. Het was toen al meteen, dat Freudenthal zich druk ging bezighouden met de didaktiek der wiskunde in Nederland. Van de in 1946 weer tot leven geroepen Werkgroep der Wiskunde van de W.V.O. werd Freudenthal al spoedig de voorzitter en een periode van ongekennde bloei volgde. In de bijeenkomsten werden meningsverschillen zeer openhartig besproken en het Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep was een gezellig blad, waarin je er fel tegenaan kon gaan en waarin je niet lang op het antwoord behoefde te wachten. Kortom, het was een heerlijke tijd, waarin didaktiek gemaakt werd. Al heel in het begin bleek de behoefte eens een blinke opruiming te houden onder de eksamenuitwassen in de wiskunde. Begonnen moest natuurlijk worden met de herziening van de leerboeken waarin de leerstof was opgenomen die voor deze eksamenopgaven de voorbereiding moest geven. Zowel Freudenthal als Minnaert toonden zich bijzonder bekwaam in het schrappen van waardeloze leerstof. Van de besprekingen heb ik er een groot aantal bijgewoond en soms schrok ik van de vergaande voorstellen tot schrapping. Maar als je er goed over nadacht, kwam je toch ook tot de konklusie: het was waar, de te schrappen leerstof wás waardeloos. Deze moeizame arbeid, die jaren in beslag nam, heeft tenslotte aanleiding gegeven tot programmawijziging van 1958. Wel staat deze op naam van de lerarenverenigingen Wimecos en Liwenagel, maar het is even waar, dat de Wiskunde Werkgroep het langdurige voorbereidende werk heeft verricht. Al was de overstap later naar de moderne wiskunde een nog veel belangrijker stap, waarschijnlijk zou deze veel meer moeite hebben gekost dan nu, als niet eerst de uitwassen waaraan toch veel docenten zeer gehecht waren, in de herziening van 1958 waren weggesnoeid. Het is te betreuren, dat de overstap naar de moderne wiskunde zo veel minder zorgvuldig heeft plaats gevonden dan de hiervoor genoemde besnoeiing. Waarschijnlijk heeft men de wijzigingen in het leerplan voornamelijk gezien als een wiskundige en een onderwijstechnische kwestie en heeft men niet gezien, dat er een minstens even belangrijk didaktisch aspekt aan de zaak was. Er is nu wel gebleken, dat de gekozen splitting in Wiskunde I en Wiskunde II een misgreep is geweest en bovendien, dat de methodische en didaktische basis van de meeste wiskundeleerboeken van nu beduidend achterligt bij die van de leerboeken van vóór 1968. Freudenthal heeft in de laatste jaren nogal wat kritiek geleverd op de nieuw verschenen wiskundeleerboeken voor het voortgezet onderwijs. Men kan het de auteurs moeilijk kwalijk nemen, dat deze kritiek vrijwel steeds gegrond was: het schrijven van een inleiding in de moderne wiskunde voor het voortgezet onderwijs is een herschepping en men mag niet verwachten, dat de auteurs altijd naar het juiste middel zullen grijpen. De fout waarin haast iedere auteur dreigt te vervallen, is, dat hij tracht exakt te zijn op een tijdstip waarop dit voor de leerlingen nog niet kan worden begrepen. Freudenthal heeft herhaaldelijk gewezen op de schijnexaktheden die zo ontstaan. Helaas is een discussie over de didaktische eisen waaraan een methode van moderne wiskunde voor het voortgezet onderwijs moet voldoen, nooit op gang gezet.

In 1973 heeft Freudenthal ons verrast en verheugd met een didaktisch handboek *Mathematics as an educational task*, of, zo men de duitse uitgave refereert: 1974, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Ik kan de lezing ervan bijzonder

aanbevelen: het boek leest lekker, je wordt erdoor aan het denken gezet en vooral: heel veel gevestigde meningen worden door zijn kritiek aan het wankelen gebracht. Ik betreur het, dat het boek toch nog wel heel sterk van de stof en veel minder van het kind uitgaat. Dit blijkt ook uit het uitstekende aanhangsel van deel I, waarin Freudenthal laat zien, op wat voor vrijmoedige wijze Piaget met de wiskunde omspringt. Maar terecht merkt Fr. ook op, dat het de vraag is, of door dit onjuiste gebruik van wiskunde de theorieën van Piaget aan het wankelen worden gebracht: in plaats dat deze theorieën op de wiskunde berusten, zoals Piaget zelf min of meer veronderstelt, is het meer zo, dat de wiskunde een slechte illustratie van de denkbeelden van Piaget is. Ondanks het slordige taalgebruik en het verkeerd toepassen van begrippen, zijn de theorieën van Piaget tot een imposant geheel geworden en als Piaget zijn boodschap in een wat begrijpelijker vorm had kunnen brengen, zouden de didactici van nu daar zeer van kunnen profiteren. Deze positieve kant heb ik in het aanhangsel gemist.

Ook bij de publikaties van het I.O.W.O., waarbij Freudenthal sterk betrokken is, is naar mijn smaak nog te veel van de stof en te weinig van het kind uitgegaan. Als men het in de taal van Piaget zou willen uitspreken: er wordt onvoldoende rekening gehouden met de zeer lange tijd die er nodig is om een kind van fase I tot fase 3b te brengen. Men kan het ook in mijn taal zo uitspreken: met denknivo's wordt nauwelijks rekening gehouden.

Ik heb bij het ophalen van deze herinneringen mijn kritiek niet achterwege willen laten: onder vrienden is kritiek altijd welkom. Ik weet, dat de zeventigste verjaardag van Hans Freudenthal niet meer is dan een mijlpaal en ik wens hem toe, dat hij ons nog vele malen zal doen schrikken door onze neus op onverwachte waarheden te drukken.

Wat hebben zes jaar vernieuwing ons gebracht?

De eerste ronde is volbracht. Laten we voorzichtig de balans eens opmaken*.

1 Waarom was vernieuwing van het wiskunde-onderwijs noodzakelijk?

De inhoud van het wiskunde-programma kwam overeen met de wiskunde van 1850. Alles wat sindsdien in de wiskunde gebeurd is, en dat is heel wat, heeft de school onberoerd gelaten. Welke fundamentele wijzigingen die voor het voortgezet onderwijs relevant kunnen zijn, hebben zich voltrokken?

a De ontwikkeling van de mathematische logica heeft grote invloed gehad op de wiskundige denkvorm.

b Vroeger bestond de wiskunde uit afzonderlijke gebieden. Ze werden los van elkaar ontwikkeld. Later kwam men tot de ontdekking dat bepaalde structuren zich herhalen in gebieden van de wiskunde die vroeger los van elkaar gedacht werden: Om er enkele te noemen: ring, lichaam, groep, lineaire ruimte. De studie van deze structuren werd primair. Herkende men ergens een bepaalde structuur, dan voelde men zich meteen thuis. Men wist dan dat alle eigenschappen van deze structuur geldig waren. Tevens vervaagden hierdoor de grenzen tussen de afzonderlijke delen van de wiskunde.

c De mogelijkheden wiskunde in de praktijk toe te passen zijn enorm verruimd. Vroeger sloot de wiskundige zich op in een ivoren toren. Hij beoefende wiskunde ter wille van de wiskunde. Deze kon toegepast worden in techniek, zeevaartkunde, landmeetkunde, maar dat was veelal geen reden voor hem zich om deze toepassingen te bekommeren. Hij was van mening dat dit tot het werk van de betrokken vaklieden behoorde. Dit standpunt is niet meer houdbaar. De wiskunde speelt zo'n fundamentele rol in de huidige samenleving, dat de wiskundige wel verplicht is daar oog voor te hebben.

2 Welke invloed hebben deze drie punten gehad op de inhoud van het nieuwe programma?

a De mathematische logica heeft de middelen verschaft ons scherper uit te drukken. Daar maken we in het huidige onderwijs een dankbaar gebruik van.

* Dit artikel heeft in essentie betrekking op het vwo; bij het havo en het mavo doen zich veel analoge situaties voor. Een artikel over het mavo volgt.

De symbolen $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ zijn in het onderwijs gemeengoed geworden. Met name een consequent gebruik van de symbolen $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ voorkomt veel vaagheden in de uitdrukkingwijze. De conclusie is de bouwsteen waarop het hele wiskundige denken berust en het is essentieel dat deze op de juiste wijze gehanteerd wordt.

Door gebruik te maken van verzamelingen, relaties en afbeeldingen (functies) hebben we de beschikking gekregen over een mathematische taal waarin we onze gedachten scherper dan vroeger kunnen formuleren. Met klem willen we opmerken, dat het hierbij niet gaat om het toevoegen van nieuwe onderwerpen aan de oude, maar alleen om het presenteren ervan op een betere wijze. De taal die we spreken, is correcter; dat is alles. Door sommigen, met name in het buitenland, is dit verkeerd begrepen. Ze hebben verzamelingenleer gepromoveerd tot een nieuwe discipline waar men allerlei gecompliceerde opgaven over construeren kan. Of ze hebben de kinderziel er al op abstracte wijze in een zeer vroegtijdig stadium mee willen doordringen. Dergelijke misvattingen hebben de vernieuwing wel eens in discrediet gebracht.

b Het behandelen van structuren heeft alleen zin, als men deze meermalen tegenkomt en dan als zodanig herkent. Het heeft geen enkele zin de structuur van de gehele getallen ring te noemen en dan verder nooit over ringen te praten en het voorkomen van ringen elders niet te merken. Ons voortgezet onderwijs is te beperkt van omvang om structuren herhaald tegen te kunnen komen. Vandaar dat een expliciet behandelen van structuren geen zin heeft.

In het wiskunde I programma komen structuren officieel maar één keer voor. Dat is bij de transformatiegroepen in de meetkunde. In de praktijk is gebleken, dat de opstellers van het programma hier te hoog gegrepen hebben. In het definitieve programma, dat zich op dit moment nog in de la van de staatssecretaris bevindt, is dit onderwerp dan ook geschrapt.

In wiskunde II is de situatie iets anders. Daar wordt een bepaalde structuur onderzocht: de lineaire ruimte. Maar zelfs hier beperkt men zich tot slechts één realisatie van deze structuur: de meetkunde (in twee en drie dimensies). Het onderwerp heet dan ook niet lineaire algebra, maar meetkunde met vectoren. Ook hier komen we dus aan het essentiële van het denken in structuren niet toe. Toch heeft het denken in structuren het onderwijs niet onberoerd gelaten. Zoals reeds vermeld, wordt de hokjesgeest erdoor doorbroken. De meetkunde was vanouds een apart terrein met een eigen axiomatische opbouw, die al uit het griekse tijdperk dateerde. Ze is dit lange tijd gebleven. Het enige wat veranderde, was de aard van de fundering. Hilbert slaagde er in 1899 in een zodanige axiomatiek van de meetkunde op te stellen, dat elk beroep op de aanschouwing in meetkundige redeneringen overbodig werd. Dit was de vervolmaking van de euclidische stelling-bewijs-opbouw. Sinds het denken in structuren de overhand heeft gekregen in de officiële wiskunde, is het belang van deze stelling-bewijs-opbouw van de meetkunde teruggedrongen. Het ligt voor de hand dat dit zijn invloed heeft op het onderwijs. Vandaar dat transformaties (thans afbeeldingen genoemd) en vectoren een belangrijke rol zijn gaan spelen in de opbouw van de meetkunde. Hoewel algebra en meetkunde in ons onderwijs wel naast elkaar zijn blijven voortleven, wordt het spreken van

een gemeenschappelijke taal in de algebra en in de meetkunde hierdoor bevorderd.

c In het verleden is verschillende keren gepoogd de toepassingen een rol te doen spelen in het onderwijs. Denk maar aan de boldriehoeksmeting, de samengestelde intrest, de toepassingen van de trigonometrie (probleem van Snellius) en de ingeklede vergelijkingen. Veel succes is er niet mee geboekt. De onderwerpen waren vervelend en het was telkens weer een opluchting als ze van het programma afgevoerd werden. Heel lang geleden verdween de boldriehoeksmeting, in 1935 de samengestelde intrest, in 1958 de toepassingen van de trigonometrie. De ingeklede vergelijkingen zijn nooit officieel verdwenen, maar ze waren vaak dermate weltschijnlijk, dat ze geen belangstelling konden stimuleren. Al deze mislukkingen mogen echter geen reden zijn het hoofd in de schoot te leggen. De CMLW achtte het noodzakelijk dat in elk geval één onderwerp in het curriculum zou worden opgenomen waarin de wiskunde op de realiteit wordt toegepast. Voor dit onderwerp is waarschijnlijkheidsrekening en statistiek gekozen.

Dit is een begin om de wiskundeleraar uit zijn ivoren toren naar buiten te doen treden. Dat hier nog meer werk verricht moet worden, is duidelijk. De CMLW heeft hier een open oog voor.

2 Faciliteiten en moeilijkheden voor de leraren.

Laten we optimistisch zijn en met de faciliteiten beginnen. De leraren hebben ruimschoots gelegenheid gehad zich met de moderne denkwijzen in de wiskunde vertrouwd te maken. En ook toen het nieuwe programma eenmaal ingevoerd was, zijn ze niet aan hun lot overgelaten. Voordat het programma in werking trad, zijn voor vwo-leraren heroriënteringscursussen gehouden die elk een week duurden. Elk jaar werd een dergelijke cursus gegeven, in totaal vijf keer. Soms bestond de gelegenheid tot het vormen van groepen om de onderwerpen nog eens te bestuderen. Men kon daarbij de hulp van een instructeur inroepen. Ook nadat het programma van start was gegaan, zijn nog talrijke cursussen gehouden. Zeer veel leraren hebben hieraan deelgenomen. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars heeft het hare bijgedragen door in een serie didactiekcursussen de didactische problemen die zich in het vernieuwde onderwijs voordeden, te bespreken. Al met al kan men rustig zeggen, dat kosten noch moeite gespaard zijn om de leraren een behoorlijke kans te bieden zich op hun nieuwe taak voor te bereiden. En niet alleen dat deze kans geboden is, ze is aangegrepen ook. De belangstelling was steeds overweldigend. Nu de moeilijkheden. Toen bekend werd dat in 1968 de mammoetwet van kracht zou worden, was het raadzaam tegelijk daarmee met een nieuw wiskundeprogramma te starten. Het kort na elkaar uitvoeren van twee essentiële veranderingen is ongewenst. Vandaar dat de CMLW zichzelf als eis gesteld heeft ingaan van het nieuwe programma in 1968 mogelijk te maken. Dit bracht met zich mee dat de voorbereidingstijd kort werd. In september 1966 werd een begin gemaakt met het ontwerpen van een nieuw leerplan. Laten we eerlijk zijn en vaststellen, dat de CMLW daarmee een jaar te laat was. Er had een jaar eerder begonnen kunnen en moeten worden. Gedane zaken nemen geen keer, maar het is beter tekortkomingen niet te verbloemen. Het opstellen van het

leerplan is toen zeer snel gegaan, maar beslist niet overhaast. Er was te voren reeds zoveel over gedacht, ook naar aanleiding van experimenten, dat snel spijkers met koppen geslagen konden worden. Het opstellen van een nieuw leerplan brengt echter nog niet met zich mee, dat de wijze waarop het uitgevoerd kan worden voor ieder duidelijk is. Wie daardoor ernstig in moeilijkheden geraakten, waren de schrijvers van schoolboeken. De CMLW heeft het onjuist geacht zelf boeken samen te stellen. 'Staatspedagogie' wordt in Nederland, althans werd toen, verworpen. Bovendien wilde de CMLW niet in een commerciële concurrentiepositie geraken. Het schrijven van boeken werd dus overgelaten aan anderen. Deze kwamen in de netelige positie te verkeren, dat ze in korte tijd boeken moesten schrijven, niet alleen op een andere leest geschoeid dan voorheen, maar ook bestemd voor een andere onderwijsstructuur. De brugklas was principieel anders dan de oude eerste klas hbs of mulo. Daarna kwan de drievoudige taak boeken te schrijven voor vwo, havo en mavo. Dat dit voor de boekenschrijvers een haast onmenselijke opgave was, mag men niet uit het oog verliezen.

De schrijvers waren onvoldoende op de hoogte van de intenties die de CMLW met het nieuwe leerplan had. Noodzakelijk was dan ook, dat door de CMLW een toelichting op het programma geschreven werd. Dit is dan ook gebeurd en met grote voortvarendheid. Toch verscheen deze toelichting te laat, mede als gevolg van tijdverlies bij het drukken. Ten dele kwam de toelichting daardoor als mosterd na de maaltijd. De schrijvers konden er, althans in de begindelen, geen of niet voldoende rekening meer mee houden.

De gevolgen zijn niet uitgebleven. Eigenlijk is er nog geen enkele uitgave waar we ons als leraar met een gerust hart aan kunnen toevertrouwen. Sommige boeken houden hardnekkig vast aan verouderde tradities, andere weten geen weg met de mathematische logica en bevatten slordige formuleringen en onjuist gebruikte symboliek. Ook komt voor dat het enthousiast inslaan van nieuwe paden als gevolg heeft, dat men te veel van het oude overboord zet. Anders gezegd: het komt voor dat de vernieuwing gaat ten koste van de noodzakelijke technische training. De leraren krijgen daardoor de moeilijke taak de boeken kritisch te hanteren en de tekortkomingen door zelf ingrijpen onschadelijk te maken. En dat is geen gemakkelijke taak.

Een andere moeilijkheid is geweest dat de leraren de eerste keer moesten werken met deel I zonder te weten wat er in de volgende delen zou staan. Ze verkeerden daardoor in het ongewisse wat essentieel en wat bijkomstig was en bij tijdgebrek overgeslagen zou kunnen worden. Een dergelijke onzekerheid brengt noodzakelijk tijdverlies met zich mee.

Ten slotte is er nog de teruggang 34-32-30 geweest. Het programma is opgesteld in de 34-periode. Er is toen zorgvuldig rekening gehouden met het aantal toen beschikbaar gestelde uren. Er was voldoende speling om de teruggang 34-32 te kunnen opvangen. Maar de teruggang 32-30 levert haast onoverkomelijke moeilijkheden. Op veel scholen is het niet mogelijk voor vwo in de onderbouw meer dan 13 uren te claimen, omdat men anders roofofbouw op andere vakken pleegt. In de voorbeeldtabellen (ongedeeld vwo) wordt van overheidswege aanbevolen 4 + 4 uur wiskunde I in de bovenbouw te geven. Dat is wel mogelijk en met de meeste klem moeten we erop aandringen, dat dit gebeurt ook. Alleen

dan is het programma in een redelijk tempo af te werken.

We kunnen ons voorstellen dat verscheidene collega's zich de afgelopen jaren vaak doodongelukkig gevoeld hebben. En niet zonder reden. Alle begin is moeilijk en dit begin is hun niet makkelijk gemaakt.

3 Slotopmerkingen.

a Technische vaardigheid. Deze is essentieel. De bedoeling is door middel van de nieuwe leerstof het inzicht te verdiepen en dat is zonder twijfel nuttig. Aan inzicht zonder voldoende vaardigheid heeft men echter weinig. De training moet blijven en de inhoud van het eerste eindexamen maakt duidelijk, dat dit ook in de bedoeling ligt. Wel dient men zich er steeds weer op te bezinnen of men vaardigheden traint uit traditie of omdat er nog steeds behoefte aan bestaat. Bijsturen, het wegnemen van overbodige uitwassen en het eventueel toevoegen van nieuwe vaardigheden blijft nodig. Wie de eerste keer een boek blindelings gevolgd heeft waarin aan bepaalde vaardigheden te weinig aandacht geschonken is, zal een volgende keer zelf voor de nodige aanvulling zorg moeten dragen.

b De stereometrie. In wiskunde I komt deze vrijwel niet voor. In het wiskunde II programma is voor klasse 4 een inleiding in de stereometrie opgenomen als voorbereiding voor de vectoriële behandeling van de meetkunde in R_3 . Niet aan alle scholen worden lessen wiskunde II in klasse 4 gegeven, onder andere niet aan de meeste scholen die ongedeeld vwo hebben. In het programma dat in de la van de staatssecretaris ligt, is wiskunde II als verplichte leerstof voor klasse 4B geschrapt. Daarentegen is voor alle leerlingen in klasse 4 een inleiding in de differentiaalrekening verplicht gesteld. Het gevolg zal zijn, dat elke leerling die geen wiskunde II kiest, verstoken blijft van vrijwel elk onderwijs in stereometrie.

Nu heeft de oude stereometrie het er wel naar gemaakt de nek omgedraaid te worden. Wie de vroegere examenopgaven nog eens naleest, begrijpt dat een dergelijke leerstof in het huidige programma niet ingepast kan worden. Bovendien zou het erg onlogisch zijn na het verlaten van de stelling-bewijs-methode in de planimetrie een inleiding in de stereometrie te geven die wel volgens deze methode te werk gaat.

Toch blijft het een tekortkoming van het huidige programma dat een leerling wiskunde eindexamen kan afleggen zonder dat zijn ruimteinzicht enigszins getraind is en zonder dat hij bijv. weet wat kruisende lijnen zijn. Hoe deze moeilijkheid opgelost kan worden, is nog niet duidelijk. Misschien door enig ruimteinzicht aan te kweken in de onderbouw door stereometrie te incorporeren in het meetkunde-onderwijs. In elk geval zal aan dit probleem nog aandacht geschonken moeten worden.

c Aansluiting bij het vervolgonderwijs. Hier spelen twee dingen door elkaar heen. Enerzijds zijn er wensen van het vervolgonderwijs, dat een leerling bij het voortgezet onderwijs bepaalde leerstof gehad heeft. Zo is momenteel de vraag in onderzoek welke leerstof gewenst is voor leerlingen die sociale wetenschappen gaan studeren. Natuurlijk is dat niet de enige urgente kwestie. Goed overleg is gewenst. Hier ligt een taak voor het IOWO en men is daar stellig bereid deze taak op zich te nemen. Programma's zijn niet voor de eeuwigheid

geschreven, zoals dat vroeger wel eens leek. Maar ze mogen elkaar niet te snel opvolgen. We vertrouwen erop dat het eerstvolgende programma een evolutie te zien zal geven in de richting van de toepassingen van de wiskunde.

Anderzijds is voor het vervolgonderwijs een gegeven, dat het leerlingen toegespeeld krijgt die in het voorgaande onderwijs bepaalde kennis en vaardigheden verworven hebben. Wat de leerling niet weet en wat hij niet kan, moet hem door het vervolgonderwijs bijgebracht worden, voorzover het althans dingen betreft die niet tot de leerstof van de voorgaande school behoren.

d En tot slot: we zijn er nog lang niet. Er is nog veel werk te verzetten voordat we met de nieuwe situatie vertrouwd zijn. Laten we de handen ineen slaan en elkaar helpen.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

Dit artikel moet U lezen, als het goed is

A. LAGERWERF

Zeist

Dit stuk gaat over vragen die bij mij rijzen bij opdrachten zoals deze:

1 Gegeven is:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $a = 8$, $b = 10$ en $c = 12$. Bereken de zijden d , e en f van ΔDEF als de omtrek van ΔDEF gelijk aan 75 is. (Getal en Ruimte, 4M2, De Bruin e.a.)

Ik heb er nog wat andere illustraties bij gezocht.

2 Wat zijn bij deze afbeelding de coördinaten van het beeldpunt, als het origineel het punt (x, y) is?

(Van A tot Z, M⁴-3, Boormeester e.a.)

3 m en n zijn . . . ; als de afstand tussen m en n gelijk is aan a , hoe groot is dan . . . ?

(Idem)

(Wat op de plaats van . . . staat doet nu niet ter zake)

4 Wat weet je van een rotatie, als deze een symmetrische afbeelding is?

(Idem)

5 Als de zijvlakken rechthoeken zijn, heeft men een speciaal soort blok, namelijk een

(Idem)

6 In ΔABC is $\angle C = 90^\circ$ en $\angle A = 45^\circ$. Bereken:

1) a en c , als $b = 5$. 2) a en b , als $c = 10\sqrt{2}$. 3) a en b , als $c = 6$.

(Wiskunde voor HAVO, 2H, Alders e.a.)

7 Hoeveel (in lengte) verschillende vlak-diagonalen heeft een rechthoekig blok? En hoeveel lichaamsdiagonalen? Bereken ze, als de ribben van het blok opvolgend 6, 8 en 10 zijn.

(Idem)

8 In ΔABC is $\angle C = 90^\circ$. We trekken CD zo, dat $\angle DCA = \angle A$. Als D op AB ligt, bewijst dan dat CD een zwaartelijn van ΔABC is. (Afbeeldingsmeetkunde voor MAVO, 1M, Van Dop e.a.).

Bij 1 begin ik met me af te vragen of de omtrek van ΔDEF misschien gelijk is aan 75. Als dat namelijk het geval is, dan moet ik de zijden d , e en f berekenen. Uit de gegevens kan ik echter niet opmaken of die omtrek gelijk is aan 75, en ik weet dus niet of ik nu de zijden moet berekenen of niet.

Natuurlijk is dat niet de bedoeling van de steller van de opdracht. Voor het woordje *als* moet hier kennelijk gelezen worden *voor het geval dat*, en dat is

vreemd. Ik meen dat we dit soort opdrachten moeten vermijden.

Met de woorden van 3 wordt de vraag in 1:

1a Hoe groot zijn de zijden d , e en f van ΔDEF als de omtrek van ΔDEF gelijk aan 75 is?

Maar ook deze formulering is niet zonder bezwaar. Ik hoef hier niet te gaan uitwijden over de centrale plaats van de implicatie in de wiskunde. Willen we de leerlingen daar iets van leren en laten ervaren, dan moeten we dat zorgvuldig vorm geven. Beter is:

1b Gegeven is:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $a = 8$, $b = 10$ en $c = 12$. Als de omtrek van ΔDEF gelijk is aan 75, hoe groot zijn dan de zijden d , e en f van ΔDEF ?

Meer in overeenkomst met 3

Maar waarom wordt hier überhaupt een voorwaardelijke vorm gebruikt? Het *Als de omtrek gelijk is aan 75* lijkt meerdere mogelijkheden te willen suggereren, en een vervolg op de opgave zoals bijvoorbeeld:

En als de omtrek gelijk is aan 100?

Zie 6 (Lees daar voor *Bereken maar Hoe groot zijn*).

Ook dit is niet de bedoeling. Waarom dan niet gewoon:

1c De omtrek van ΔDEF is gelijk aan 75; bereken de zijden d , e en f van ΔDEF .

Hierbij blijkt nu dat om de een of andere reden, het gegeven *De omtrek is 75* bewaard is om het in de vraagstelling te verstoppert. Ik kan de zin daarvan niet inzien.

1b doet mij denken aan stellingen van de vorm

9 $p \Rightarrow [q \Leftrightarrow r]$

Hier is het 'gegeven' p functioneel gescheiden van de rest.

1b komt zelf echter overeen met

10 $p \Rightarrow [q \Rightarrow r]$

Hierin is de afscheiding van p niet functioneel, want dit is gelijkwaardig met

11 $p \wedge q \Rightarrow r$

1 zal dus moeten luiden:

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$; $a = 8$, $b = 10$ en $c = 12$; de omtrek van ΔDEF is gelijk aan 75. Bereken de zijden d , e en f van ΔDEF .

CONCLUSIES

De duidelijkheid wordt in de schoolwiskunde gediend door een zuinig gebruik van de voorwaardelijke vorm.

Als de voorwaardelijke vorm in een opdracht nodig is, dan zo, dat de gestelde voorwaarde bij de opdracht 'past', en met gebruikmaking van de als-dan-vorm.

Toepassing

Twee alternatieven voor 2.

Neem nu als origineel het punt (x, y) ; wat zijn bij deze afbeeldingen de coördinaten van het beeldpunt?

Als het origineel het punt (x, y) is, wat zijn dan bij deze afbeelding de coördinaten van het beeldpunt?

Idem voor 4.

Wat weet je van een rotatie, die een symmetrische afbeelding is?

Als een of andere rotatie een symmetrische afbeelding is, wat weet je dan van die rotatie?

5 wordt:

Als de zijvlakken rechthoeken zijn, *dan* heeft men een speciaal soort blok, namelijk een . . .

Wat dunkt U van 6, 7 en 8?

VERANTWOORDING

Dit artikel komt tot hier toe niet ver boven het ik-*vind*-dit-beter-niveau uit, terwijl het dit-*is*-beter-omdat-niveau haalbaar is. Ik wil daarom tenslotte een en ander toetsen aan de vier criteria voor leerstofkeuze die Van Dormolen noemt in 'Didaktiek van de Wiskunde' (Oosthoek, 1974). Daarbij moet ik er op wijzen dat Van Dormolen het begrip leerstof ruim hanteert. Als bijvoorbeeld in de eerste klas *het produkt van twee negatieve getallen* aan de orde is, moet U op de een of andere manier duidelijk maken dat dat een positief getal is; het materiaal dat en de voorbeelden die U daarbij gebruikt, zijn dan ook leerstof.

Ik acht daarom de criteria die hij noemt hier van toepassing.

Dit zijn de criteria:

De leerstof moet

- 1 mathematisch korrekt zijn
- 2 doelgericht zijn
- 3 aansluiten bij relevante bestaande kennis
- 4 voorbereiden op latere uitbreidingen van dit kennisgebied.

Ik onderscheid nu deze te toetsen punten:

- a Het gebruik van *als* in de zin van *voor het geval dat*.
- b Het gebruik van: Hoe groot zijn de zijden, als de omtrek gelijk is aan 75? versus: Als de omtrek gelijk is aan 75, hoe groot zijn dan de zijden?
- c. Het onnodig gebruik van de voorwaardelijke vorm.

Als na te streven lange termijn doel gebruik ik:

De leerling kan de implicatie toepassen; hij begrijpt de belangrijke plaats ervan in de wiskunde; hij ervaart het gebruik ervan als zinvol. (kennis-, vaardigheids- en houdings-aspekt)

ad. a

- 1 Dit gebruik is mathematisch niet korrekt.
- 2 Het doet afbreuk aan het te bereiken doel.
- 3 Het sluit niet aan bij bestaande kennis, noch bij het spraakgebruik, noch bij wat van de implicatie bekend is.
- 4 Het bereidt niet voor op latere uitbreidingen, integendeel.

ad b

- 1 Beide vormen zijn mathematisch korrekt.

- 2 Het konsekwent gebruik van de als-dan-vorm is doeltreffender dan het gebruik van allerlei varianten waarin het woord 'dan' zelfs kan ontbreken.
 - 3 Beide vormen vinden hun aansluiting bij het taalgebruik.
Wat krijg je als je 16 bent?
Als je 16 bent wat krijg je dan?
 - 4 De als-dan-vorm bereidt beter voor op latere uitbreidingen zoals 9.
- ad c** Onnodig gebruik sluit mathematische korrektheid niet uit.
- 1 Onnodig gebruik sluit mathematische korrektheid niet uit.
 - 2 In het spraakgebruik wordt het als-*p*-dan-*q*-schema met verschillende betekenissen gehanteerd.
- 'Als' staat voor 'indien'; echte voorwaarde.
'Als' staat voor 'telkens wanneer', (Als ik naar school ga dan kom ik langs de bakker.); meer het karakter van een mededeling.
Vaak is niet zonder meer duidelijk welke van deze twee betekenissen de boven-
toon voert.
- In de wiskunde kennen we alleen het echte voorwaardelijke karakter. Wiskundeonderwijs is hier doelgericht als het zich er op richt, dit verschil tussen spraakgebruik en wiskundetaal, de verwarrende kracht te ontnemen. De leerlingen moeten het verschil kennen en er mee kunnen leven.
- Voor zover dus in het wiskundeonderwijs Nederlands wordt 'gesproken' kan de dubbelzinnigheid blijven. In wiskundige formuleringen echter alleen de voorwaardelijke vorm als er een echte voorwaarde is.
- 3 Aansluiting bij het spraakgebruik vereist de nodige zorgvuldigheid, zoals gezegd.
 - 4 Uitbreidingen naar 10 en 9 en dergelijke kunnen pas plaats vinden, als de eenvoudige implicatie voldoende betekenis heeft.
- 1b is een vooruitgrijpen op, in plaats van een voorbereiden op 10.

SLOT

Ik heb nu het gevoel dat ik van een mug een olifant gemaakt heb; dat is op zich zelf geen prestatie zonder betekenis. Op weg naar meer rationeel onderwijs, is het een vingeroefening die naar ik hoop, een bijdrage levert.

Die bijdrage ligt mijns inziens vooral in de verantwoording. Het gebruik van de 4 criteria voor leerstofkeuze gaf vorm aan mijn denken. Ik werd gedwongen beter te formuleren wat ik wilde toetsen en mijn doelstelling expliciet te maken. De toetsing zelf vergrootte mijn inzicht in het probleem. Tenslotte maakt pas de verantwoording het mogelijk, echt over het onderwerp te discussiëren.

Het was niet mijn bedoeling in de verantwoording volledig te zijn; de wiskunde-didaktiek omvat meer dan die vier criteria.

Pedagogisch-Didactisch Instituut
voor de Leraarsopleiding
Budapestlaan 6
Utrecht

januari 1974

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

XCIV Een tuitje ballistiek

De beweging van een massapunt in het homogene zwaarteveld is een belangrijk onderwerp der elementaire mechanica. In elk leerboek wordt de volgende vraag behandeld: een punt P wordt uit O weggeschoten onder de elevatiehoek α en met een gegeven beginsnelheid v ; het treft het horizontale vlak door O in S . Hoe moet men α nemen opdat OS zo groot mogelijk is? Het bekende antwoord luidt: $\alpha = \pi/4$.

Wij bespreken de volgende variant (fig. 1). Het projectiel treft bij zijn neergaande beweging het horizontale vlak AB , op de hoogte h boven O , in S . Voor welke α is OS' maximaal? Dus: hoe werpt men P , bij gegeven beginsnelheid, zo ver mogelijk op een hoger gelegen terras; of wel – want h mag ook negatief zijn – hoe werpt men P uit de zolderverdieping zo ver mogelijk op de straat? Als P verticaal naar boven wordt geworpen bereikt het de hoogte $h_m = v^2/2g$, als g de versnelling van de zwaartekracht voorstelt. Onze vraag heeft dus alleen zin als $p = h/h_m = 2gh/v^2 < 1$.

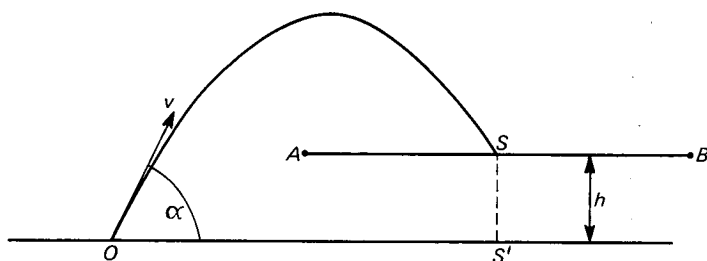


Fig. 1.

De horizontale component van de snelheid van P heeft de constante waarde $v \cos \alpha$; de verticale component van de beweging is eenparig veranderlijk met versnelling $-g$. Op het tijdstip t is dus P in het punt (x, y) waarvoor geldt

$$x = vt \cos \alpha, y = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1)$$

Het vlak AB wordt getroffen als $y = h$, dus als

$$t^2 - 2 \frac{v}{g} t \sin \alpha + 2 \frac{h}{g} = 0. \quad (2)$$

Voor $\sin^2 \alpha > p$ zijn de wortels van (2) reëel en verschillend. Als $h < 0$ is één wortel positief, de andere negatief. Als $h > 0$ zijn ze beide positief. Wij nemen

voorlopig aan dat A zo ver naar rechts ligt dat P bij zijn opgaande beweging het vlak niet treft. Wij moeten dan steeds de grootste wortel nemen. Het tijdstip waarop S wordt bereikt is dus

$$t = \frac{v}{g} (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha - p}), \quad (3)$$

en voor OS' krijgen wij

$$x = \frac{v^2}{g} f(\alpha), \quad (4)$$

met

$$f(\alpha) = \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha - p}). \quad (5)$$

De opgave is nu: het maximum van $f(\alpha)$ te bepalen. Voor $f'(\alpha) = 0$ krijgen wij de vergelijking

$$-\sin \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha - p}) + \cos \alpha \{ \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - p)^{-\frac{1}{2}} \} = 0, \quad (6)$$

die er ingewikkeld uitziet, maar met $\sin^2 \alpha = u$ en na vermenigvuldiging met $(u-p)^{\frac{1}{2}}$ luidt

$$(1-2u)(u-p)^{\frac{1}{2}} + (1+p-2u)u^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (7)$$

wat na kwadrateren verschrompelt tot

$$(2-p)u = 1. \quad (8)$$

Voor de optimale hoek α krijgen wij derhalve

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= (2-p)^{-1} = h_m(2h_m-h)^{-1}, \quad \cos^2 \alpha = (h_m-h)(2h_m-h)^{-1}, \\ \cos 2\alpha &= -h(2h_m-h)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Wegens $h \leq h_m$ is α een reële hoek. Uit de meetkundige betekenis van $f(\alpha)$ blijkt dat het extreem een maximum is. Voor $h = 0$ is inderdaad $\alpha = \pi/4$; voor $h > 0$ geldt $\pi/4 < \alpha < \pi/2$; voor $h < 0$ is $0 < \alpha < \pi/4$. Bij het speerwerpen is h een weinig negatief en dus $\alpha < \pi/4$.

Uit (9) volgt met (3) de benodigde tijd en dan met (4) de maximale waarde van OS' :

$$t = \frac{v}{g} (2-p)^{\frac{1}{2}}, \quad OS' = \frac{v^2}{g} (1-h/h_m)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Voor $h = 0$ krijgt men het bekende antwoord $OS' = 2h_m$; voor $h > 0$ is $OS' < 2h_m$, voor $h < 0$ geldt $OS' > 2h_m$.

De maximale waarde van $f(\alpha)$ kan ook wel zonder differentiaalrekening worden bepaald; $f(\alpha) = z$ geeft na kwadrateren de vergelijking

$$z^2 - 2z \sin \alpha \cos \alpha + p \cos^2 \alpha = 0,$$

of wel

$$2z \sin 2\alpha - p \cos 2\alpha = 2z^2 + p, \quad (11)$$

die volgens een bekende eigenschap alleen dan een waarde voor α geeft als

$$(2z)^2 + p^2 \geq (2z^2 + p)^2. \quad (12)$$

Daaruit volgt voor de maximale waarde van z inderdaad $\sqrt{1-p}$ en voor de bijbehorende hoek $\cos 2\alpha = -p/(2-p)$, een en ander in overeenstemming met (10) en (9).

Wij geven nu na de voorgaande formele oplossingen een beschouwing die meer inzicht geeft in de situatie. Daarbij gaan wij uit van de bekende vraag welke punten (x, y) van het schootsveld voor een uit O met snelheid v vertrekkend punt bereikbaar zijn. Elimineert men t uit (1) dan krijgt men

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v^2} (\tan^2 \alpha + 1),$$

of

$$x^2 \tan^2 \alpha - 4h_m x \tan \alpha + x^2 + 4h_m y = 0, \quad (13)$$

de vergelijking waaraan α moet voldoen opdat P het punt (x, y) zal passeren. Deze vierkantsvergelijking voor $\tan \alpha$ heeft alleen reële wortels als haar discriminant niet-negatief is, dus als (x, y) ligt op of onder de parabool k met de vergelijking

$$y = -\frac{x^2}{4h_m} + h_m. \quad (14)$$

k is de bekende *veiligheidskromme*, de grens van het voor het geschut bereikbare gebied. De parabool heeft OY als symmetrie-as, haar top T in $(0, h_m)$ en de snijpunten $x = \pm 2h_m$ met de X -as. (fig. 2). Alle baanparabolen raken aan k ;

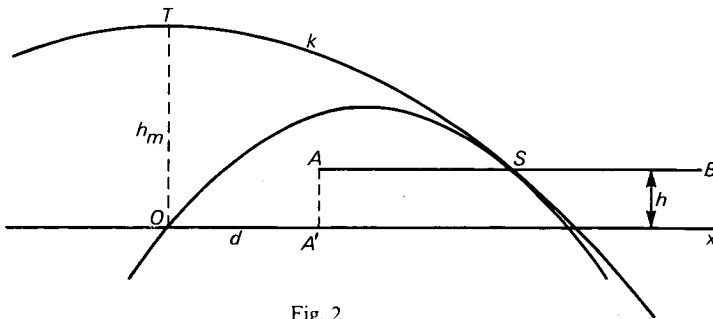


Fig. 2.

deze is de *omhullende* der banen. De oplossing van ons vraagstuk volgt nu onmiddellijk uit de figuur: *het verste punt op AB dat bereikbaar is zal het snijpunt zijn van k met de rechte y = h*. Uit (14) blijkt dat $OS = 2h_m(1 - h/h_m)^{\frac{1}{2}}$, in overeenstemming met (10). Vergelijking (13) heeft nu twee gelijke wortels: $\tan \alpha = 2h_m/x = (1 - h/h_m)^{-\frac{1}{2}}$, zoals ook volgt uit (9).

Het is duidelijk dat onze oplossing alleen geldt als het randpunt *A* van het te treffen vlak aan bepaalde voorwaarden voldoet. Is $OA' = d$ dan moet $d \leq 2h_m(1 - p)^{\frac{1}{2}}$, anders ligt *A* in het veilige gebied en is het vlak onbereikbaar. Voor $h < 0$ is deze conditie ook voldoende. Is echter $h > 0$ dan mag *d* niet te klein zijn daar anders *P* bij de opgaande beweging van onderen tegen het vlak botst. Bij de optimale worp bereikt *P* de hoogte *h* voor de eerste keer als *t* de kleinste wortel van (2) is, d.w.z.

$$t = \frac{v}{g} p(2-p)^{-\frac{1}{2}}; \text{ op dat ogenblik is } x = \frac{v^2}{g} p(1-p)^{\frac{1}{2}}(2-p)^{-1}$$

en de conclusie is dat *d* niet kleiner mag zijn dan deze uitdrukking d_m . De randpunten *A* die de optimale worp belemmeren liggen in een gebied rechts van *OY*, begrensd door een boog *b* van een kromme (van de vierde graad), die door *O* gaat (en daar aan de bissectrice van *XOY* raakt) en door de top *T* (en aldaar een horizontale raaklijn heeft). De minimum waarde van *d* is maximaal voor $p = 3 - \sqrt{5} \sim 0.8$ en de maximale waarde $2h_m(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{5} - 1)^{-1}$ is ongeveer $0.3 h_m$. De grens *b* is in fig. 3 geschetst. Ligt *A* links van *b* dan kan de boven gevonden optimale worp niet geëffectueerd worden. Men gaat gemakkelijk na dat het verste punt op *AB* dan bereikt zal worden als *P* opgaand door *A* gaat; het maximum hangt dan van *d* af.

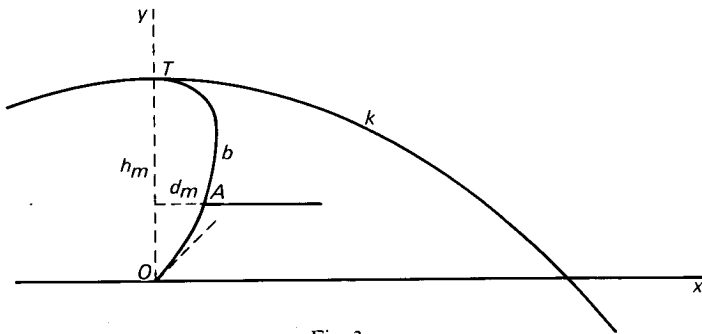


Fig. 3.

Wij gaan niet in op de vele mogelijke generalisaties van het probleem. Het lijkt interessant om na te gaan welke punten binnen *k* door de aanwezigheid van *AB* veilig zijn geworden. Daarbij kan ook het geval worden beschouwd waarbij *AB* zich niet naar rechts onbegrensd uitstrekt maar ook *B* binnen *k* ligt. Verder kan men het horizontale vlak *AB* ook wel door een hellend vlak vervangen.

Reactie op de rapportage vanuit de subcommissie bovenbouw van de CMLW

H. STEUR

Ellecom

Met veel belangstelling heb ik het artikel van J. van Lint gelezen. Dat er in de toekomst iets moet veranderen aan het wiskunde-programma van de bovenbouw vwo lijkt mij een redelijk uitgangspunt. Hopelijk brengt de rapportage van de subcommissie een vruchtbare discussie op gang. Hieronder volgen puntsgewijs enkele opmerkingen van mijn kant.

1 Het feit dat wiskunde II niet verplicht gesteld is voor toelating tot één of andere studierichting is géén indicatie voor een onbevredigende situatie.

De wiskunde II bevindt zich in het gezelschap van de vakken engels, Duits, aardrijkskunde, geschiedenis, economie I, economie II en biologie, die ook voor geen enkele studierichting verplicht zijn.

Alleen de vakken wiskunde I, natuurkunde, scheikunde, Frans, Latijn en Grieks komen op de lijst van de geëiste vakken voor, waarbij aangetekend kan worden dat de laatste drie slechts voor een zeer beperkt aantal studierichtingen gelden. Belangrijke deficiënties van het vakkenpakket zijn alleen het ontbreken van één of meer van de vakken wiskunde I, natuurkunde en scheikunde.

We zijn trouwens blij met het feit dat slechts weinig vakken per studierichting verplicht zijn gesteld, omdat anders de pakketkeuze in de vierde klas bijzonder moeilijk geworden zou zijn (nog moeilijker dan hij nu al is). Leerlingen die in de vierde klas al kiezen voor de technische kant of voor een richting uit de faculteit van de wiskunde en de natuurwetenschappen, nemen nu wiskunde II in het pakket.

Leerlingen die pas later tot deze keuze komen, zien zich de pas niet afgesneden. Zij krijgen het wel moeilijker in het eerste studiejaar, omdat hun aansluiting veel minder goed is. Zij zullen veel stof in weinig tijd moeten verwerken, zij zullen een minder goede concurrentiepositie hebben, omdat verreweg de meeste van hun studiegenoten wel wiskunde II in het pakket hebben, maar in ieder geval hebben zij de mogelijkheid om zonder voortentamen, dus zonder obstakel, te gaan studeren wat zij willen.

2 In het rapport staat dat de leerstof voor de vierde klas de niet-lege doorsnede van de leerstof van wiskunde A en wiskunde B moet bevatten.

Ik krijg de indruk dat men zich voorstelt in de vierde klas een basis te kunnen

leggen waarop twee vakken gebouwd kunnen worden die geen of bijna geen gemeenschappelijke elementen hebben. Dit maak ik ook op uit de opmerking 4, dat het mogelijk moet zijn voor B-leerlingen ook het A-programma te volgen, dat de leerlingen dus beide vakken in het pakket kunnen nemen.

Dit is echter niet te realiseren. We hoeven alleen maar aan het onderwerp differentiaal- en integraalrekening te denken, dat samen met het tekenen van grafieken en alles wat daaraan vast zit in de vijfde en zesde klas ongetwijfeld een belangrijke plaats zou gaan innemen in beider programma's.

Het lijkt me onmogelijk om elkaar niet-overlappende examenprogramma's te ontwerpen. Zo'n opzet zou zeker één van beide groepen te kort doen.

3 Ik wil nu wat nader ingaan op de voorgestelde leerstofverdeling.

Dat voor de vierde klas integraal- en differentiaalrekening, beschrijvende statistiek en kansrekening genoemd worden, is acceptabel.

Waarom echter wel stereometrie en geen planimetrie genoemd wordt, is niet duidelijk. We zullen dit hoofdstuk toch willen opzetten met vectoren en ons daarbij niet willen beperken tot de R^3 . Ik mis verder de goniometrie en de logaritmen, die nodig zijn voor de natuur- en scheikunde.

Het programma dat de subcommissie voor de vierde klas voorstelt is overigens voor de vwo-A-leerlingen (of de leerlingen met een A-achtig pakket) een stuk zwaarder dan het huidige programma en het gevolg kan zijn dat het probleem van de vwo-A-leerlingen die de wiskunde niet aankunnen, 'in de kiem gesmoord' wordt. Dit kan echter de bedoeling niet zijn.

Verder moeten we ons realiseren dat een programma voor de vijfde klas met statistiek, kansrekening, computerkunde en lineaire algebra voor vwo-A-leerlingen erg moeilijk zal zijn. Er zullen er maar weinig zijn, die het aankunnen. Daarnaast is het een duidelijke tekortkoming dat leerlingen die alleen wiskunde B in het pakket kiezen, geen statistiek en kansrekening krijgen. Dit onderdeel is ook voor hen van groot belang.

4 De subcommissie stelt zich voor 4 uur wiskunde in de vierde klas te geven. Dat aantal is voor vele scholen groter dan het aantal dat momenteel gegeven wordt, zeker voor de vwo-A-leerlingen. Het is alleszins de vraag of het mogelijk zal zijn de lessentabellen aan te passen; immers andere vakken zullen veren moeten laten.

5 Ik wil vooropstellen dat ik in geen geval tegen verandering ben. Een verandering zoals die door de subcommissie wordt voorgesteld, lijkt mij echter een middel dat erger is dan de kwaal.

We moeten bedenken dat een dergelijke verandering een zeer grote onrust zal brengen in de wiskunde-sector: alle boeken vanaf 4 vwo zullen vervangen moeten worden. Er moet weer ervaring met het nieuwe programma opgedaan worden, terwijl dat stadium voor het huidige programma nog niet of nauwelijks voorbij is. Het examenniveau moet opnieuw gevonden worden. De bewering dat de leraren nu duidelijk de voor- en de nadelen van het programma hebben ervaren, zou ik nog niet durven onderschrijven.

6 Lossen we door de invoering van wiskunde A en wiskunde B problemen op? We hebben al eerder opgemerkt dat het probleem van de vwo-A-leerlingen, die de wiskunde niet aankunnen, waarschijnlijk zal blijven bestaan. Misschien wordt dit probleem nog wel nijpender.

Oorzaken:

1 de geringe wiskundige begaafdheid van de meeste vwo-A-leerlingen,

2 het voorgestelde programma met o.m. toegepaste wiskunde.

Aan een betere aansluiting op de studie in de Sociale Wetenschappen komen we dan nauwelijks toe.

Daarbij komt dat de problemen wat betreft de eis wiskunde I voor Sociale Wetenschappen duidelijk verminderd zijn nu het mogelijk is geworden via een beperkt voortentamen aan de voorwaarde te voldoen. Er zijn of worden verschillende opleidingen voor dit voortentamen op stapel gezet. Wellicht worden deze opleidingen op den duur in de vorm gegoten zoals de Universiteit van Amsterdam dat gedaan heeft voor de opleiding voor het voortentamen voor de Economiestudie. Deze opleiding wordt namelijk gegeven in het eerste semester aan de universiteit zelf.

Er is nog een onzekerheid: de toelatingseisen voor de diverse universitaire studierichtingen zijn gegrond op de huidige programma's van wiskunde I en II (de misverstanden die daarbij optraden daargelaten). Als wij wiskunde A en B invoeren zullen deze eisen opnieuw bekeken moeten worden. Dan rijzen talloze vragen zoals:

Kun je met wiskunde B ook Sociale Wetenschappen gaan studeren?

Kun je met wiskunde A naar de TH?

Heeft Sociale Wetenschappen dan inmiddels niet ingezien dat de eis 'wiskunde in het pakket' niet nodig is?

Samenvattend kan ik stellen dat ik met het voorstel van de subcommissie niet gelukkig ben. Wellicht zijn er op korte termijn wel mogelijkheden voor een experiment met een vak wiskunde III, dat niet te zwaar is voor vwo-A-leerlingen en dat toch een goede voorbereiding geeft voor studierichtingen waarbij wiskunde wel gebruikt wordt maar geen hoofdvak is. Het programma zou bijv. de volgende onderdelen kunnen bevatten:

a eenvoudige differentiaal- en integraalrekening;

b eenvoudige differentiaalvergelijkingen of computerkunde;

c eenvoudige statistiek en waarschijnlijkheidsrekening;

d eenvoudige matrixrekening.

De vakken wiskunde I en wiskunde III kunnen dan niet tegelijk gekozen worden.

Didaktische begeleiding wiskunde

De Stuurgroep Didaktische Begeleiding Wiskunde (SDBW) zal in augustus 1975 nieuwe werk- en studiegroepen vormen, die zich gaan bezighouden met de didaktiek van het wiskunde-onderwijs. Elke groep zal uit ongeveer 20 deelnemers en twee of drie leiders bestaan. In overeenstemming met de opdracht van de SDBW moeten de deelnemers leraren in wiskunde en/of rekenen zijn, die werkzaam zijn in *lbo* of *mavo*.

Het leidersteam wordt samengesteld uit wiskunde-leraren bij het voortgezet onderwijs in het algemeen.

Naar alle *lbo*- en *mavo*-scholen is een afschrift van dit artikel gestuurd en ook enkele formulieren, waarmee men zich als deelnemer of als leider van een werk- en studiegroep kan aanmelden. Extra formulieren kunnen aangevraagd worden bij het secretariaat van de SDBW, Postbus 7888, Amsterdam, telefoon 020-441815, toestel 117 of 118.

De SDBW nodigt u uit het volgende artikel aandachtig te lezen en daarna te overwegen, of u als deelnemer of als leider aan een werk- en studiegroep mee wilt doen.

Taak en samenstelling van de SDBW.

De SDBW kan gezien worden als de voortzetting van de Centrale Commissie Begeleiding Mavo-Wiskunde (CCBMW). In juli 1973 ging het Ministerie – ermee akkoord dat het bestaande projekt ‘begeleiding mavo-wiskunde’ wordt omgezet in een projekt ‘begeleiding en didaktische heroriëntering docenten wiskunde *lbo*/*mavo*’, waarbij een afbouw van de begeleiding der *mavo*-docenten wordt gekoppeld aan opbouw en intensivering van de begeleiding der *lbo*-docenten.

Deze goedkeuring werd verleend voor de jaren 1974 t/m 1978, onder voorbehoud

– dat de begrotingswetgever telkenjare de daartoe vereiste middelen te mijner beschikking zal stellen.

Gedurende het nu verstreken deel van deze opdrachtperiode heeft de SDBW zich uitsluitend gericht tot *lbo*-leraren, omdat de bijzonder snelle ontwikkelingen binnen het *lbo* dat naar haar mening dringend nodig maakten. Inmiddels zullen er in de *mavo*-scholen docenten gekomen zijn die geen kennis hebben

kunnen nemen van de door de CCBMW verrichte activiteiten. Speciaal (maar niet uitsluitend) voor hen wendt de SDBW zich nu voort het eerst ook tot de mavo-scholen.

De SDBW beschouwt het als haar taak waar mogelijk coördinerend op te treden bij de begeleidingsactiviteiten, die ten behoeve van de wiskundeleraren binnen het voortgezet onderwijs plaats vinden. Daartoe werken binnen de SDBW op het ogenblik samen de Landelijke Pedagogische Centra, het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO), de lerarenorganisaties en de inspectie.

Doelstelling van de begeleiding.

Van oudsher treft men binnen het onderwijs situaties aan, waarin zich in een leergroep of klas leerlingen bevinden die op grond van verschillen in aanleg of capaciteiten voorbestemd zijn verschillende leerwegen te zullen volgen, verschillende leerdoelen te zullen bereiken. In het algemeen waren en zijn dat nu juist de knelpunten bij het onderwijs. Een oud voorbeeld hiervan wordt gevormd door de derde klas HBS, vóór de splitsing in de A- en de B-richting. Na de invoering van de mammoetwet bleek de brugklas zo'n knelpunt te zijn, zodat er al snel pleidooien voor een verlengde brugperiode gehouden werden. Dezelfde moeilijkheden ervaart men als leraar echter ook in die klassen aan het eind waarvan de examenpakketten gekozen worden; daar geeft men aan sommige leerlingen eindonderwijs en tegelijk aan anderen onderwijs dat voorbereidt op een nog volgende uitbreiding en verdieping. En zo zijn er meer voorbeelden te geven.

Wij geloven niet, dat het genoemde verschijnsel tegenwoordig meer of minder aandacht krijgt dan vroeger. Maar er is wel een verandering gekomen in de manier, waarop men er over denkt.

Vroeger streefde men naar homogenisering van de klassen en daarom zocht men naar verfijnde selectiemiddelen.

Tegenwoordig accepteert men de heterogeniteit en vraagt men naar gedifferentieerd onderwijs. Daarbij moet met nadruk gesteld worden, dat die vraag in allerlei toonaarden gesteld wordt.

Sommigen zien differentiatie als een praktische oplossing van een praktisch probleem, anderen zien differentiatie op grond van ideologische overwegingen als een doel op zichzelf. Allen samen wensen echter, dat het volgende didactische probleem wordt opgelost:

- Wat moet een leraar doen met een groep leerlingen als hij elk van hen binnen het bestaande schoolsysteem tot optimale ontplooiing van zijn mogelijkheden wil brengen, rekening houdende met individuele verschillen in aanleg, belangstelling, motivatie en zo verder?

Met enige voorzichtigheid zij nu gesteld, dat de SDBW steun biedt bij het zoeken naar oplossingen van dat probleem, binnen het kader van het vak wiskunde. Die voorzichtigheid is nodig omdat de didactiek van gedifferentieerd onderwijs nog in de kinderschoenen staat. Men mag dus niet van de SDBW verwachten dat zij een pakket oplossingen van het gestelde probleem in voorraad heeft en nu een cursus aanbiedt, waarin men kan leren hoe gedifferentieerd onderwijs gegeven kan worden. De laatste zin verdient enige toelichting. Er zijn natuurlijk

wel oplossingen voorhanden, want er zijn in binnen- en buitenland experimenten geweest waarin ze geconstrueerd werden. Zo is er bijvoorbeeld al geruime tijd een aanzienlijke hoeveelheid informatie gepubliceerd over het zogenaamde Roncalli-systeem. En kort geleden heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op ruime schaal het rapport van een experiment aan het Ignatius-college in Amsterdam verspreid. Het zou echter een misvatting zijn, wanneer men veronderstelde dat die kant-en-klare oplossingen zonder meer overgeplant zouden kunnen worden naar de eigen werksituatie. In de eerste plaats is er namelijk voor het werken met zo'n differentiatie-model een bepaalde instelling nodig bij de leraren, net zoals er bijvoorbeeld ook alleen maar Montessori-onderwijs gegeven kan worden vanuit een daarbij passende instelling. In de tweede plaats moeten er, zelfs als die instelling aanwezig is, eerst nog een stel randvoorwaarden vervuld worden, onder andere in materiële zin.

Op grond van het bovenstaande wil de SDBW het gedifferentieerde onderwijs van de nabije toekomst wel aanvaarden als richtingbepaler van de activiteiten van de te vormen groepen, maar anderzijds wil zij die activiteiten zo sterk mogelijk binden aan de onderwijssituatie van vandaag. Iets concreter gezegd: er wordt van de deelnemers verwacht dat zij

- bereid zijn kritisch na te denken over eigen ervaringen en die van anderen in de actuele onderwijssituatie, binnen het kader van de probleemstelling hierboven;
 - bereid zijn om te proberen de daarbij bereikte conclusies te vertalen naar hun eigen optreden in de klas en daarover dan weer verslag uit te brengen.
- Zo wordt een proces op gang gebracht, waarin bezinning en handelen in wisselwerking elkaar beïnvloeden. Aan dat proces meent de SDBW richting en inhoud te kunnen geven.

Inhoud van de begeleiding

In de vorige paragraaf is terloops sprake geweest van de bijzondere instelling, die voor gedifferentieerd onderwijs nodig zou zijn en van de eerst te vervullen randvoorwaarden. Dit willen we nu eerst aan enkele voorbeelden toelichten, zonder daarbij volledig te willen zijn:

- In het traditionele onderwijs ligt de 'te behandelen' leerstof per traditie vast. Accepteren van verschillende leerdoelen voor verschillende leerlingen impliceert echter dat ze niet allemaal dezelfde leerstof behoeven te verwerken. De leerstof zal dus gekozen moeten worden en wel in samenhang met die doelstellingen.
- De ordening van de wiskundeleerstof was altijd een logische ordening. Rekening houden met individuele verschillen van de leerlingen kan inhouden dat ook hun leerwegen verschillend worden. In de plaats van de logische ordening behoort dus een psychologische ordening te komen.
- Optimale ontplooiing van leerlingen vereist meer dan ophogen van hun kennisniveau. In het bijzonder komen leerdoelen binnen de horizon die betrekking hebben op het verwerven van attitudes, bijvoorbeeld in culturele of sociale zin. Onder de laatste zijn belangrijk die attitudes die een duidelijke rol spelen in samenwerkingsverbanden.
- Gedifferentieerd onderwijs is slechts mogelijk indien er effectief gebruik

- gemaakt kan worden van technologische voorzieningen. In het bijzonder heeft de leraar vaardigheid in het hanteren van audiovisuele leermiddelen.
- In gedifferentieerd onderwijs wordt van de leraar, naast aandacht voor de kwaliteit van het af te leveren produkt, ook veel aandacht gevraagd voor de kwaliteit van het (leer)proces dat tot dit produkt leidt. Dit houdt in dat die leraar een behoorlijke greep dient te hebben op motivatieproblemen. Er is al gesteld dat de SDBW de activiteiten van de werk- en studiegroepen zo sterk mogelijk wil binden aan de onderwijssituatie van vandaag. Dit betekent, dat binnen een lijst van onderwerpen zoals de hierboven genoemde, gezocht moet worden naar zaken die ook nu al aandacht kunnen krijgen, zonder dat daarvoor reeds speciaal geconstrueerde leerboeken of andere leermiddelen nodig zijn.
- Aanvankelijk zullen de werk- en studiegroepen zich daarom bezig houden met problemen rond de leerstofordening, met de samenhang tussen leerdoelen en leerstofkeuze en met didactische werkvormen waaronder vooral het samenwerken in kleine groepjes.

Vorm van de begeleiding

De werk- en studiegroepen zullen elk ongeveer 20 deelnemers tellen en in het eerste jaar vier of vijf keer bijeenkomen. De SDBW hoopt erop te kunnen rekenen dat er scholen zullen zijn die daarvoor ruimte ter beschikking zullen stellen. De groepen worden regionaal samengesteld en de deelnemers ontvangen een reiskostenvergoeding. Voor elke bijeenkomst wordt een programmagroep gevormd. Hierin hebben enkele leden van de SDBW zitting en verder worden er enige deskundigen voor uitgenodigd, plus het leidersteam van één van de werk- en studiegroepen. De eerste taak van die programmagroep is het ontwerpen van een raamprogramma voor één bijeenkomst van de werk- en studiegroepen. Daarna wordt er een werkvergadering (themadag) belegd, waarin alle leidersteams onder leiding van de programmagroep dat raamplan bespreken en, na eventuele wijzigingen, aanvaarden. Bovendien ontvangen de leidersteams op die themadag instructies en materiaal voor het leiden van de bijeenkomst met hun werk- en studiegroep. Zo'n themadag neemt of een ochtend en een middag of een middag en een avond in beslag (in het eerste geval vindt hij op een zaterdag plaats).

De leden van een leidersteam en die van de programmagroep ontvangen voor elke bijeenkomst een honorarium van f 50,- per halve dag en een reiskostenvergoeding.

Deelnemers en leiders

Voor de leraren in wiskunde en/of rekenen bij het lbo die geen specifieke wiskundebevoegdheid bezitten, geldt:

- iemand, die de heroriënteringscursus volgt, die door het IOWO georganiseerd wordt, besteedt daar zo veel tijd aan dat het niet nuttig geacht wordt, dat hij zich ook nog eens meldt als deelnemer aan een SDBW-groep;
- volgt iemand de heroriënteringscursus niet, dan is hij welkom bij de SDBW op voorwaarde dat hij komende cursus wel wiskundelessen geeft.

Misschien is er enige schroom te overwinnen voor men zich bereid verklaart mee te willen werken als lid van een leidersteam. Daarom wijzen wij er nog op dat er van de groepsleiders geen kwalificatie op didactisch gebied gevraagd wordt (want die bestaat immers niet). Het gaat om belangstelling voor didactiek en voor het helpen leiden van een werk- en studiegroep.

Stuurgroep Didactische Begeleiding Wiskunde

Over de conferentie wis- en natuurkunde

In het kader van de coördinatie tussen de vakken wiskunde en natuurkunde in het v.w.o.-h.a.v.o. beleggen de CMLN en de CMLW een conferentie voor wiskunde- en natuurkundeleraars op 20, 21 en 22 oktober 1975 in het Leeuwenhorst Congrescentrum te Noordwijkerhout. (Deze conferentie is een herhaling van de conferentie van 28, 29 en 30 oktober 1974.)

De conferentie bevat o.m. de volgende aspecten:

1. *Wederzijdse informatie over de veranderingen in de inhoud, doelstellingen en methodieken van beide vakken.*
De wiskundeleraars zullen dit ondervinden door zelf te werken aan een natuurkundepraktikum. In een nabespreking wordt de moderne visie expliciet aan de orde gesteld.
De natuurkundeleraars krijgen de gelegenheid zich in te werken in tegenwoordig gebruikelijke wiskundeformalismen. De achtergronden hiervan zullen worden toegelicht.
2. *Eenzijds toepassing van de huidige wiskundige begrippen in de natuurkunde en anderzijds het gebruik van natuurkundevoorbeelden voor een betere begripsvorming in de wiskunde.*
In het bijzonder zal de aandacht gericht worden op het gebruik in de natuurkunde van benaderingen, functies, differentiaalrekening, transformatiemeetkunde en vektoren.
3. *Samenwerking tussen de wis- en natuurkundecollegae op de scholen. Is het mogelijk en gewenst de deur tussen de hokjes wiskunde en natuurkunde verder open te zetten?*
Op de conferentie zal o.a. een praktikum worden aangeboden in een gezamenlijk wis- en natuurkundeproject voor de vierde klas.
4. *Verbeteringen in de afstemming van toekomstige leerplannen op elkaar.*
Op het eind van de conferentie is een forumdiscussie gepland met o.a. forumleden uit de CMLN en de CMLW.

Inschrijving voor de conferentie is alleen mogelijk voor combinaties van een wiskunde- met een natuurkundeleraar(es) aan dezelfde school.

Aan deelname aan de conferentie zijn geen kosten verbonden; reiskosten openbaar vervoer tweede klas worden vergoed.

Port betaald
Groningen

09 MNHD41003
MSR NIHOM
STEVINSTRAT 241
DEN HAAG

2017

Ned. Ver. v. Wiskundeleraren
Lange Voort 207, Oegstgeest

Mededelingen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

1 Jaarvergadering

Deze zal gehouden worden op zaterdag 1 november 1975 van 10.00 - 16.00 uur in het gebouw van de Stichting Opleiding Leraren, Aïdadreef 4, Utrecht (vlak bij het station Utrecht Overvecht). Behalve aan de normale huishoudelijke zaken zal deze dag gewijd zijn aan het thema wiskundige vaardigheden. De agenda zal in een van de eerstvolgende nummers van Euclides verschijnen.

Wie aan de gemeenschappelijke lunch wil deelnemen wordt verzocht zich zo spoedig mogelijk, maar in elk geval vóór 19 oktober a.s. aan te melden door overschrijving van f 7.50 op giro 143917 t.n.v. de Ned. Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam onder vermelding: Jaarvergadering.

2 Besprekingen eindexamens 1975

a Voor het **mavo-multiplechoice** werk: zaterdag 6 september 1975 van 9.45-12.45 uur in de grote zaal van het Transitorium II, Heidelberglaan 2, Universiteitscentrum De Uithof, Utrecht.

Er vertrekt om 9.20 uur een lijnbus van C.N. nummer 62 van het Centraal Station Utrecht. Terug om 12.57 van de Heidelberglaan.

b Voor **havo** en **vwo**: zaterdag 6 september 1975 van 13.45-16.45 uur in de blauwe zaal van het Transitorium I, ingang achterzijde aan de Heidelberglaan, Universiteitscentrum De Uithof, Utrecht.

Er vertrekt om 13.20 uur een lijnbus van C.N. nummer 62 van het Centraal Station Utrecht. Terug om 16.57 vanaf de Heidelberglaan.

68 79 98

De secretaris

J. W. Maassen

Traviatastraat 132, Den Haag

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Agenda van de jaarvergadering op zaterdag 1 november 1975 in het gebouw van de Sol, Aïdadreef 4 te Utrecht (nabij N.S. station Utrecht-Overvecht).

Aanvang 10 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
2. Notulen van de algemene vergadering 1974.
3. Jaarverslagen.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing in verband met periodiek aftreden van L. van Beek en drs. J. W. Maassen.
Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Vaststelling van de contributie 1976/1977.
In verband met gestegen kosten, o.a. voor Euclides, stelt het bestuur voor de contributie te verhogen tot f 35,—.
7. Inleiding en discussiegroepen over: '(Gebrek aan) wiskundige vaardigheden'.
8. Rondvraag.
9. Sluiting.

Wie aan de gemeenschappelijke lunch deel wil nemen wordt verzocht zich zo spoedig mogelijk, maar in elk geval vóór 19 oktober a.s. aan te melden door overschrijving van f 7,50 op giro 143917 t.n.v. de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam onder vermelding: 'Jaarvergadering'.

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 2 november 1974 in de Koninklijke Nederlandse Jaarbeurs te Utrecht

Om 10.20 uur opent de voorzitter, dr. P. G. J. Vredenduin de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de vertegenwoordiger van de Belgische vereniging van wiskundeleraren, dr. C. De Munter, de inspecteurs drs. W. E. de Jong, E. H. Schmidt en N. J. Zimmerman, de vertegenwoordiger van Wolters Noordhoff, D. W. Soeteman, de vertegenwoordiger van Euclides, G. Krooshof en de ereleden drs. A. J. S. van Dam en dr. Joh. H. Wansink.

De voorzitter herdenkt hierna de in mei overleden voorzitter dr. J. K. van den Briel.

Vervolgens spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit; deze is gepubliceerd in Euclides.

De notulen van de algemene vergadering van 27 oktober 1973, de jaarverslagen en de begroting 1974/75 worden goedgekeurd. De penningmeester drs. J. van Dormolen vermeldt de accuratesse waarmee de heer Verdouw de ledenadministratie voert en zal de dank van de vergadering voor dit werk aan de heer Verdouw overbrengen. De penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd de heren C. Ploeger en J. C. M. Tolenaar. De voorzitter spreekt een woord van dank tot de heer L. G. J. M. Muskens, die als eerste mavo-docent tot het bestuur van de vereniging heeft behoord en zich niet meer herkiesbaar stelt. In zijn plaats wordt in het bestuur gekozen de heer F. J. Mahieu. Dr. P. G. J. Vredenduin wordt als bestuurslid herkozen. Daar voor de bestuursvacature, ontstaan door het overlijden van dr. J. K. van den Briel, nog geen kandidaat is gesteld, machtigt de vergadering het bestuur een nieuw bestuurslid te benoemen.

De contributie voor het verenigingsjaar 1975/76 wordt vastgesteld op f 25,—. Vervolgens houdt dr. P. G. J. Vredenduin een inleiding over het thema 'bewijzen' gevolgd door een discussie in werkgroepen.

Hierna wordt de middagpauze gehouden.

Na de middagpauze wordt de vergadering hervat met een tweede inleiding over het thema 'bewijzen' door drs. J. van Dormolen, eveneens gevolgd door een discussie in werkgroepen.

Na een korte theepauze wordt de vergadering hervat met de rondvraag. De heer G. Krooshof vermeldt dat in oktober Euclides 50 jaar bestaat; daarom zal in december een jubileumnummer, gewijd aan de meetkunde, verschijnen. De artikelen van A. Treffers en E. de Moor lopen hierop reeds vooruit.

Van de zijde van het mavo-onderwijs bereiken hem soms klachten over de de moeilijkheidsgraad van Euclides, daarom ontvangt hij gaarne artikelen waarbij ook de mavo-docenten zich thuis voelen. Speciaal artikelen zoals 'zo doe ik het' zal hij gaarne ontvangen. Zijn motto is: 'het tijdschrift is uw tijdschrift'.

Drs. J. van Dormolen wijst hierna op het tijdschrift Pythagoras. Hiervoor ontvangt de redactie ook gaarne artikelen of ideeën voor artikelen.

Drs. W. E. de Jong dankt namens de inspecteurs en oud-inspecteurs voor de uitnodiging voor deze vergadering. De inspecteurs voelen zich weer tussen de werkers in het veld, men is weer één met deze groep en ontvangt waardevolle informatie.

De voorzitter dankt voor de samenwerking tussen vereniging en inspectie.

Drs. A. J. Th. Maassen vraagt de jaarrede zo spoedig mogelijk in Euclides te plaatsen.

De heer drs. T. Goudriaan informeert of de cursussen van het Mathematisch Centrum te Amsterdam meer regionaal kunnen plaats vinden.

De heer E. M. Koerts vraagt om een codering voor de diverse didactiekcur-sussen en regionale gespreksgroepen zodat men van te voren meer op de hoogte is van de inhoud van de verschillende cursussen.

De heer van Dormolen zegt dat de regionale gespreksgroepen en de A-cur-sussen van de didactiekcommissie dezelfde inhoud hebben maar met ver-schillende benadering.

De heer H. Broekman voegt hier nog aan toe dat de weekenden bedoeld zijn als eerste kennismaking en de regionale werkgroepen als reflexie op eigen lesgeven.

De heer C. De Munter brengt een groet uit Vlaanderen; hij vindt het prettig aanwezig te zijn. Hij merkt dat de problemen in Nederland en België dezelfde zijn. De Belgische vereniging van wiskundeleraren zal vermoedelijk in tweeën worden gesplitst voor de beide taalgroepen; mogelijk worden daardoor de Belgisch-Nederlandse contacten eenvoudiger en kunnen misschien meer leden van beide verenigingen elkaars vergaderingen bezoeken.

Hierna sluit de voorzitter te ca. 16.30 uur de vergadering.

Mededelingen van de didactiekcommissie van de Ned. Ver. v. Wiskundeleraren

1 *Landelijke cursussen*

In samenwerking met het I.O.W.O. zullen in het cursusjaar 1975–1976 weer driedaagse cursussen betreffende de didactiek van de wiskunde gehouden worden. De data zijn:

13, 14, 15 november 1975: (A-cursus) Leerstofordening en doelstellingen.

22, 23, 24 januari 1976: (B-cursus) Samenwerken.

26, 27, 28 februari 1976: (C-cursus) Problemen inzake differentiatie binnen klasverband.

Nadere mededelingen hierover zullen in september door het I.O.W.O. rechtstreeks aan de scholen voor a.v.o. en v.w.o. worden verzonden.

2 *Regionale werkgroepen*

In het cursusjaar 1974–1975 hebben een honderdtal wiskundeleraren in twaalf regionale werkgroepen zich verdiept in didactische problemen. Deze werkgroepen zijn daarmee gestart op basis van programma's, die door de didactiekcommissie voorbereid waren en met de gespreksleiders doorgewerkt werden. Het ontbreekt de didactiekcommissie helaas aan voldoende manuren om hiermee door te kunnen gaan. Er wordt gezocht naar mogelijkheden om in samenwerking met andere instanties in meer geïnstitutionaliseerde vorm wiskundeleraren te helpen bij de kwaliteitsverbetering van het onderwijs. Zie in dat verband bij punt 3.

Bestaande regionale werkgroepen, die hun werk willen voortzetten en anderen, die zich bij zo'n werkgroep aan willen sluiten, wil de didactiekcommissie echter graag helpen in de vorm van het leggen van contacten en van programma-suggesties. Men kan zich daarvoor met de secretaris van de didactiekcommissie in verbinding stellen. Het is ook mogelijk dat nieuwe groepen gevormd worden, bijv. wiskundesecties van een of meer scholen, die via het secretariaat (H. G. B. Broekman, Budapestlaan 6, Utrecht; 030-531725 of 030-517711) in contact gebracht worden met een ervaren gespreksleider.

3 *Stuurgroep Didactische Begeleiding Wiskunde*

In deze stuurgroep werken samen de Landelijke Pedagogische Centra, het I.O.W.O., de inspecties en lerarenorganisaties uit het l.b.o. en het mavo. Zij wil zoveel mogelijk arbeid op het gebied van didactische begeleiding coördineren. In 1975–1976 doet zij dat in de vorm van regionale bijeenkomsten. Voor nadere informatie wordt verwezen naar berichten van de S.D.B.W., die naar de scholen voor l.b.o. en mavo zijn verzonden.

In de toekomst, zo hoopt de didactiekcommissie van de N.V.v.W., zal genoemde coördinatie zich ook gaan uitstrekken naar het tweede- en eerstegraadsgebied. Daarop voorbereidend helpt de didactiekcommissie bij het programmeren van de regionale bijeenkomsten. De inhoud ervan zal vanzelfsprekend

gericht zijn op problemen in het l.b.o. en mavo, maar daarbij zal leerstof-
ordening – een belangrijk onderdeel van de A-cursussen – een tamelijk grote
rol spelen.

Leraren met een eerste- of tweedegraadsbevoegdheid kunnen aan de bijeen-
komsten deelnemen, hetzij als *gastdeelnemer* (dat wil zeggen dat zij geen on-
kostenvergoeding kunnen krijgen, maar verder volwaardig mee kunnen doen),
hetzij als *gespreksleider* (waarvoor uiteraard wel onkostenvergoeding mogelijk
is). In het laatste geval zullen zij ook aan voorbereidingen deel kunnen nemen
in de vorm een meerdaagse en meerdere eendaagse voorbereidingsconferenties.
Voor verdere informatie kan men zich wenden tot het secretariaat van de
S.D.B.W., postbus 7888, Amsterdam, tel. 020-441815 toestel 117 of 118.
De didactiekcommissie wil graag op de mogelijkheid wijzen dat de in punt 2
genoemde werkgroepen iemand uit hun midden afvaardigen naar de S.D.B.W.-
bijeenkomsten. Deze kan de daar verkregen informatie dan aan zijn werkgroep
(wiskundesectie) doorgeven.

4 Jaarvergadering

De jaarvergadering van de N.V.v.W., die gehouden wordt op zaterdag 1 no-
vember a.s., zal dit jaar gewijd zijn aan het thema: (Gebrek aan) wiskundige
vaardigheden. De didactiekcommissie bereidt in samenwerking met het
I.O.W.O. daarover een publicatie voor, die (hopelijk) nog vóór de jaarverga-
dering aan alle leden toegezonden zal worden.

Contributie 1975-1976

Een dezer dagen zullen de leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskunde-
leraren een acceptgirokaart ontvangen voor de betaling van hun contributie.
Zoals bekend bedraagt deze f 25, –. Leden die Euclides niet via de vereniging
ontvangen betalen f 10, –.

Wie inmiddels al contributie betaald heeft kan de kaart natuurlijk weggooien.
Om technische redenen is het niet mogelijk diens adres uit te schiften.

Abonnement voor leden van de Belgische Vereniging van wiskundeleraren

Deze collega's, die via hun vereniging een abonnement tegen gereduceerde
prijs (f 15, –) op Euclides hebben zullen ook een acceptgirokaart ontvangen.
Dit in afwijking van de tot nog toe gevolgde betalingswijze.

Wiskobas

Ieder schoolteam zal binnen afzienbare tijd voor beslissingen komen te staan over 'wiskunde op de basisschool': *doen* we mee en zo ja: *hoe* doen we mee? De beslissing zult u uiteraard zelf nemen. Om ze verantwoord te kunnen nemen, dient u echter geïnformeerd te zijn.

Wellicht kan het WISKOBAS-BULLETIN u hierbij tot steun zijn.

Genoemd bulletin zal de meesten uwer niet onbekend zijn. Na een viertal jaargangen heeft het zich een bepaalde plaats verworven in het basisonderwijs. Aanvankelijk bedoeld om betrokkenen bij een eksperiment te begeleiden, werd met ingang van de vierde jaargang (september 1974–augustus 1975) voor iedere school, leerkracht of ouder de mogelijkheid geopend om zich op het bulletin te abonneren. De oplage steeg toen onmiddellijk van 5500 naar 8300.

Nu (zomer 1975) wil de redactie graag onder uw aandacht brengen, dat de komende (vijfde) jaargang een 'sleuteljaargang' zal worden. Niet alleen omdat een totaaloverzicht van het wiskobas-integratieplan hierin gepubliceerd zal worden (dubbelnummer 2/3), maar ook omdat u in enkele volnummers (4 en 5) zult kunnen kennismaken met representatieve, afgeronde stukken wiskundeonderwijs voor alle leerjaren van de basisschool. Nummer 1 zal ter voorbereiding een verantwoording bevatten over de uitgangspunten en doelstellingen van wiskobas, terwijl nummer 6 gewijd zal zijn, hetzij aan bijdragen uit het onderwijsveld, hetzij aan de heroriëntering van onderwijsgeveden. Mocht u geïnteresseerd zijn, dan kunt u een (gratis) kennismakingsexemplaar aanvragen bij IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht (030-611611).

Oproep

In verband met een onderzoek voor het 'Adelaide College of Advanced Education' zou de heer C. de Rijke, Dip. T. Sec., 4 George St., Royal Park S.A. 5014, Australia, graag een zo volledig mogelijk overzicht willen hebben van 'De basis voor en de ontwikkeling van het wiskundig onderwijs in Nederland en eventueel andere Europese landen'. Hij verzoekt leraren wiskunde die genegen zijn met hem hierover te corresponderen met hem contact op te nemen.

Internationale Jaarbeurs van Brussel

Onmiddellijk na een belangrijke vergadering der Afrikaanse Ministers van Nationale Opvoeding te Lagos, zal de 1e Afrikanische Leermiddelenvakbeurs 'Didafrica' plaatsnemen van 7 tot 12 februari 1976 te Dakar.

Een belangrijke vergadering van de Afrikaanse Ministers van Nationale Opvoeding wordt door de Unesco georganiseerd van 2 tot 6 februari 1976 te Lagos; dit is de reden waarom de Internationale Jaarbeurs van Brussel de voorkeur heeft gegeven de Vakbeurs Didafrica een week uit te stellen en ze te laten doorgaan van 7 tot en met 12 februari 1976.

De organisatoren bieden zodoende de mogelijkheid aan de aanwezige Ministers te Lagos, Didafrica te bezoeken; deze kwestie werd overlegd met de verantwoordelijken van de Unesco, waarvan een afgevaardigde deel uitmaakt van het Technisch Komitee van Didafrica.

Talrijke officiële internationale instanties en bedrijven uit verschillende werelddelen hebben al hun instructies overgemaakt aan de organisatoren om de aanwezigheid van hun produkten op deze manifestatie te verzekeren, die een grote weerklank zal hebben in al de Afrikaanse landen.

Herinneren wij er tevens aan dat benevens de invloedrijke internationale steun dat het beschermkomitee aan de Vakbeurs verleent en het organisatorisch werk dat reeds door het Technisch Komitee van Didafrica werd verricht, de uitwerking van het programma der studiedagen die in het kader van de manifestatie zullen plaatshebben, door een derde komitee in handen werd genomen. Dit laatste is samengesteld uit de Heren Adams (Afgevaardigde van de E.E.G.), Brunswic (Afgevaardigde van de Unesco), Bucchini (Afgevaardigde van de E.E.G.), de E. H. Ikwa bis Isal S. J., (Sekretaris-generaal van de Internationale Organisatie van het Katholiek Onderwijs), de Heren N'Dow (Eerste Sekretaris bij de Ambassade van Senegal te Brussel), Tham (Voorzitter van het Europees Verbond van Ondernemingen op Leermiddelengebied 'Eurodidac'), en De Houwer (Internationale Jaarbeurs van Brussel – Dienst Kongressen en Konferenties).

Wanneer het komitee de thema's van de studiedagen definitief zal hebben vastgelegd, zal het programma ervan worden gepubliceerd.

Stichting Mathematisch Centrum

Oriënterend colloquium voor leraren

Onderwerp: Logica, Boole-algebra en modeltheorie

Ook gedurende het cursusjaar 1975–1976 wordt door het Mathematisch Centrum een oriënterend colloquium voor leraren georganiseerd. Het onderwerp, dat behandeld zal worden, is van belang voor het VWO- en HAVO-programma, namelijk: Logica, Boole-algebra en Modeltheorie.

Met name de toepassingen van deze onderwerpen zullen ter sprake komen.

Het colloquium is in de eerste plaats bedoeld voor wiskundeleraren, verbonden aan VWO en HAVO, maar andere belangstellenden zijn van harte welkom.

Aanvangsdatum: woensdag 10 september 1975

Tijd: 19.30 (precies)–21.15 uur

Plaats: Math. Centrum, grote collegezaal 3e étage

Frequentie: wekelijks, in de perioden t/m half november 1975 en half januari tot half maart 1976

Leiding: J. de Vries

Nadere informatie: J. de Vries (Math. Centrum, afd. Zuivere Wiskunde; 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-1005, tel. 020-947272, tst. 76)

Stichting opleidingen statistiek

De Stichting Opleidingen Statistiek en het Economisch Instituut te Tilburg gaan medio september 1975 van start met de mondelinge cursussen voor de in 1976 te houden examens in:

Algemene Statistiek

Statistisch Assistent-VVS

Statistisch Analist-VVS

Statisticus-VVS

tentamen wiskunde

tentamen verplichte capita

Voor nadere informatie of een brochure kunt U zich wenden tot het secretariaat van de Stichting Opleidingen Statistiek, Weena 700 te Rotterdam, telefoon 010-116181 tst. 2126

Vereniging voor statistiek

Tentamens Wiskunde en Verplichte Capita van het examen Statisticus VVS

Onder toezicht van het ministerie van Economische Zaken zal de Vereniging voor Statistiek de tentamens Wiskunde en Verplichte Capita afnemen op de volgende data:

Wiskunde maandag 29 september 1975

Verplichte Capita maandag 6 oktober 1975 het schriftelijk gedeelte en het mondeling gedeelte omstreeks half november

Het schriftelijk (gedeelte van het) tentamen zal worden afgenomen 's-middags van 13.30 tot 16.30 uur in zaal K 100 van het Bouwcentrum te Rotterdam.

Degenen, die aan de tentamens wensen deel te nemen, dienen zich vóór 15 september 1975 aan te melden bij de secretaris van de examencommissie, de heer R. Tillemans, Bolthagen 4 Zevenaar.

Aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij het secretariaat van de VVS, mevrouw M. den Ouden, Weena 700 Rotterdam, telefoon 010-116181, tst. 2126.

Boekbespreking

K. Böhmer, *Spline-Funktionen*, Teubner Studienbücher. Stuttgart 1974.

Ellecom

Zoals bekend bestaat er bij iedere, over een zeker segment $[a, b]$ gedefinieerde functie f , en ieder k -tal argumenten $x_1, \dots, x_k$ in $[a, b]$ een polynoom p met graad kleiner dan k zodat $p(x_i) = f(x_i)$. De ervaring leert echter dat, hoe handig men ook probeert (afhankelijk van k) de steunpunten x_i te kiezen, niet voor iedere continue functie f de op deze wijze geconstrueerde rij polynomen een goede rij benaderingen van f wordt. Integendeel. Voor sommige onschuldige uitziende continue of zelfs reëel-analytische functies hebben de fouten de neiging willekeurig groot te worden.

Aangezien benaderingen van functies van cruciaal belang zijn voor o.a. de numerieke analyse en het praktisch uitvoeren van berekeningen op rekenmachines met eindige precisie, heeft men gezocht naar andere types van benaderingsfuncties. Spline-functies vormen een dergelijk type.

De naam 'spline' is ontleend aan een technisch hulpmiddel uit de scheepsbouw (de strooklat). Met behulp van dit (analoge) hulpmiddel kan een twee keer continu differentieerbare benadering worden geconstrueerd die bovendien op de intervallen (x_i, x_{i+1}) overeenstemt met een derde-grads polynoom.

De hedendaagse numerieke praktijk maakt uiteraard geen gebruik meer van dit analoge hulpmiddel. De hierdoor gegenereerde functie is echter een representatief voorbeeld voor de klasse functies die onder de naam spline-functies een belangrijke toepassing zijn gaan vinden op terreinen als numerieke integratie en het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Een inleidende verhandeling over dit klassieke voorbeeld (de kubische spline-functie) kan gevonden worden in hoofdstuk 1. De rest van het boek is geschoeid op de leest der hedendaagse functionaalanalyse en vereist de nodige voorkennis op dit terrein; het benodigde materiaal is verzameld in de hoofdstukken 2 en 3. Tenslotte bevat het boek ten behoeve van lezers die praktisch gebruik willen maken van deze theorie en die beschikken over een Computerinstallatie waarop ALGOL 60 programma's verwerkt kunnen worden een aantal expliciete programma's.

P. van Emde Boas

A. V. Pogorelov: *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Israel program for scientific translations, Jerusalem 1973. £ 19.35.

Het boek houdt zich bezig met problemen, die voortgekomen zijn uit de bestudering van starheidseigenschappen van convexe oppervlakken.

Laten O_1 en O_2 oppervlakken zijn in de ruimte. Een 1-1 correspondentie tussen de punten van O_1 en O_2 heet een *isometrie* of *verbuiging* als corresponderende bogen op O_1 en O_2 altijd dezelfde lengte hebben. Het is duidelijk, dat, wanneer O_2 uit O_1 verkregen is door een isometrie van de totale ruimte (dus door translatie, draaiing, spiegeling of een combinatie van deze), daardoor vanzelf een isometrisch verband tussen O_1 en O_2 is tot stand gebracht. Maar wanneer O_1 bijv. een vlakke rechthoek is, en O_2 ontstaat door O_1 rond te buigen, is er ook nog sprake van een isometrie tussen O_1 en O_2 zonder dat dit een congruentie is. O_1 heet nu *star* of *onverbuigbaar* als iedere daarmee isometrische O_2 er tevens mee congruent is. Het eerst is de starheidseigenschap bewezen voor het boloppervlak (Liebmann 1900), en later is algemener de starheid aangetoond van gesloten convexe 'gladde' oppervlakken (Cohn-Vossen 1927). Bij deze bewijzen is essentieel gebruik gemaakt van differentieerbaarheid, en als zodanig vormt dit een hoofdstuk van de differentiaalmeetkunde. De 'intuïtie' suggereert echter dat in het algemeen gesloten convexe oppervlakken met eventueel scherpe kanten en punten eveneens star zullen zijn. Maar om dit zo algemeen mogelijk te formuleren en te bewijzen moet men van meet af aan een andere weg in slaan waarbij afgezien wordt van differentieerbaarheidseisen. Dit leidt tot een uitvoerige studie van de intrinsieke meetkunde van convexe oppervlakken - d.i. de meetkunde op het oppervlak zoals die zich aan

een bewoner van het oppervlak zou voordoen – en het verband tussen de intrinsieke meetkunde en de ligging van het oppervlak in de ruimte. Een belangrijke eigenschap van de intrinsieke meetkunde van een convex oppervlak is dat de kromming positief is, hetgeen betekent dat de som van de hoeken van een driehoek in de meetkunde altijd groter dan 180° is. De mate van kromming wordt uitgedrukt door een puntfunctie de zgn. *specifieke kromming*. De eigenschappen van de specifieke kromming zijn in belangrijke mate bepalend voor de ligging van het oppervlak in de ruimte.

In ieder geval komt men tenslotte langs deze weg tot een bewijs van de starheid van een zeer algemene klasse van gesloten convexe oppervlakken. Het boek bevat een uitvoerige uiteenzetting van al deze zaken en behandelt tal van verwante problemen. De gebruikte methoden zijn elementair meetkundig maar niet altijd gemakkelijk.

Bovendien zijn de bewijzen niet altijd in detail uitgevoerd. Het geheel is duidelijk bedoeld als een exposé voor de specialistisch gerichte onderzoeker, alhoewel een aantal hoofdstukken ook heel goed te lezen zijn door de geïnteresseerde leek.

W. T. van Est

P. Hilton en Yel-Chiang Wu, *A Course in Modern Algebra*, John Wiley and Sons, New York–London–Sydney–Toronto, 249 blz., £9. –.

Uit de inhoud (1. Groups, 2. Abelian Groups, 3. Categories and Functors, 4. Modules, 5. Integral domains, 6. Semisimple Rings, 7. The Functors Ext and Tor) blijkt duidelijk dat hier geen sprake is van een inleiding in de algebra in de klassieke zin, maar van de beschrijving van een apparaat dat in verschillende takken van de wiskunde wordt gebruikt, zoals algebraïsche topologie, algebraïsche meetkunde en algebraïsche getallentheorie.

Derhalve niet aanbevolen voor hen die in de algebra om haarszelfs wille geïnteresseerd zijn, maar bruikbaar voor diegenen die een algebraïsche inleiding tot een der genoemde onderdelen van de wiskunde behoeven.

Nuttig zijn de exercises aan het eind van elk hoofdstuk. De uitvoering is verzorgd, de prijs voor een boek dat de schrijvers (misschien niet terecht) in de eerste plaats beschouwen als een undergraduate text aan de hoge kant.

A. Menalda.

A. I. Kokorin en V. M. Kopytov, *Fully ordered groups* (vertaald uit het Russisch), John Wiley and Sons, New York – Toronto, 1974, X + 147 blz., £8.90.

Dit, niet in leerboekvorm geschreven, boekje behandelt de theorie van de lineair geordende groepen, een onderdeel van de uitgebreidere theorie der partieel geordende groepen. Het is een vertaling van een in het Russisch geschreven boek uit 1972; de bibliografie bevat echter slechts weinig opgaven van na 1965. De inhoud is zuiver algebraïsch; de verbanden tussen de theorie der geordende groepen (en ringen) en de functionaalanalyse worden niet genoemd.

A. C. Zaanen.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

331. Gegeven zijn drie niet collineaire punten. A en B spelen het volgende spel. Om beurten mogen ze twee punten door een boog verbinden en op deze boog een nieuw punt kiezen of een punt met zichzelf door een lus verbinden en op deze lus een nieuw punt kiezen.

Daarbij gelden de volgende spelregels:

- in geen enkel punt mogen meer dan drie bogen samenkomen;
- geen twee bogen elkaar snijden.

Voorbeelden. De drie punten zijn P , Q en R . A verbindt P met R en kiest op boog PR een nieuw punt S . In S komen nu dus al twee bogen samen. Fig. 1. A verbindt P met zichzelf door een lus en kiest daarop een nieuw punt S . Zowel in P als in S komen nu al twee bogen samen. Fig. 2.

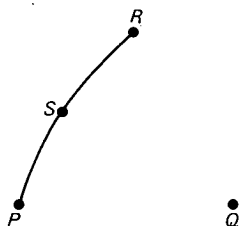


Fig. 1

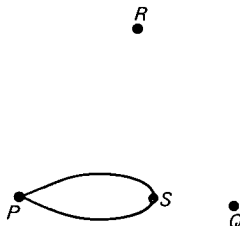


Fig. 2

A begint. Degeen die de laatste boog aanbrengt, is winnaar.

Wie wint?

Speel het spel eerst in drie dimensies.

Daarna in twee dimensies.

(Het spel komt voor in The Mathematics Teacher van februari 1975.)

332. Sommige positieve gehele getallen kunnen geschreven worden als som van een aantal consecutieve positieve gehele getallen. Zo is $12 = 3 + 4 + 5$. Het getal 15 kan zelfs op drie manieren geschreven worden als een dergelijke som: $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 4 + 5 + 6 = 7 + 8$. En met 4 lukt het op geen manier. Gevraagd wordt: met welke getallen lukt het wel en op hoeveel manieren? (ontleend aan een artikel in The Mathematics Teacher, jan. 1975)

Oplossingen

329. A neemt een getal van vier verschillende cijfers in gedachten. B raadt: 1234. A zegt: 2 goed. D.w.z. twee van de cijfers 1234 komen in het getal van A voor, maar beide niet op dezelfde plaats als in het getal van B . Gevraagd een strategie voor B te ontwerpen in een minimaal aantal keren raden te vinden welke twee cijfers in het getal van A voorkomen en op welke plaatsen.

B raadt: 312. (dus eerste cijfer 3, tweede 1, derde 2 en over vierde cijfer zegt hij niets).

a. Antwoord: 2 goed.

B raadt: .3.1

Is het antwoord weer: 2 goed, dan heeft A : .13

Is het antwoord: 1 goed, 1 raak, dan heeft A : .31.

Is het antwoord: 2 raak, dan uiteraard: .3.1

Is het antwoord: 1 goed, dan kan A hebben

2..3

2.1.

..12

en zal de slotvraag 21... uitkomst geven.

Is het antwoord: 1 raak, dan kan A hebben

23..

.3.2

2..1

met als slotvraag 23..

b. Antwoord: 1 goed, 1 raak.

B vraagt: 3..1

en vindt weer in maximaal drie keer vragen het resultaat.

c. Antwoord: 2 raak.

Beslissende vraag: 21..

d. Antwoord: 1 goed.

B vraagt: .413

Is het antwoord nu: 2 goed, dan kan A hebben

..41

4..1

.34.

43..

Beslissende vraag: ..41

De antwoorden: 1 goed, 1 raak; 2 raak; 1 goed; 1 raak bieden geen nieuwe moeilijkheden. Steeds zijn drie vragen voldoende.

(Beslissende vragen resp. 4.1.; -; 2...; 4..2)

e. Antwoord: 1 raak.

B vraagt: 34.1 en heeft daarna nog hoogstens één vraag nodig.

Kan het in minder dan drie vragen? Men ziet gemakkelijk, dat het antwoord: 2 goed op B 's vraag: 1234 voor het getal van A 42 mogelijkheden open laat. Op een vraag van B kunnen hoogstens vijf verschillende antwoorden volgen. En dus is het niet mogelijk, dat twee vragen gegarandeerd uitsluitel bieden.

330. De uitspraken

$$A \Rightarrow B \vee C \text{ en } (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$$

blijken gelijkwaardig te zijn, hetgeen men ziet door de waarheidstabellen uit te schrijven.

Toch is $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ waar en $(ab = 0 \Rightarrow a = 0) \vee (ab = 0 \Rightarrow b = 0)$ niet waar.

Het enige dat hieruit blijkt is de onmogelijkheid zonder kwantoren te gebruiken zich adequaat uit te drukken.

$\forall a, b: ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ is een ware uitspraak.

$\forall a, b: ab = 0 \Rightarrow a = 0$ en $\forall a, b: ab = 0 \Rightarrow b = 0$ zijn beide onware uitspraken.

Echter is wel

$$\forall a, b: (ab = 0 \Rightarrow a = 0) \vee (ab = 0 \Rightarrow b = 0)$$

een ware uitspraak. Immers welke getallen men voor a en b ook substitueert, altijd als $ab = 0$ overgaat in een ware uitspraak, gaat minstens één van de uitspraken $a = 0$ en $b = 0$ in een ware uitspraak over. In het eerste geval gaat $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ over in een ware uitspraak en in het tweede geval $ab = 0 \Rightarrow b = 0$.

De Nederlandse Onderwijscommissie
van het Wiskundig Genootschap
vraagt een

redacteur voor Pythagoras

het wiskunde-tijdschrift voor Jongeren

De heer A. F. van Tooren, die meer dan 10 jaar als redacteur aan Pythagoras heeft meegewerkt, heeft besloten zich terug te trekken wegens drukke werkzaamheden aan andere projecten. Wij zouden het zeer op prijs stellen als wiskundeleraren, die weten, dat zij in staat zijn artikelen te schrijven in de geest van het tijdschrift Pythagoras, zich zouden melden.

De financiële vergoeding is gering, maar wellicht vindt U een compensatie in de zekerheid, dat Uw werk vruchtbaar kan zijn voor meer dan 20.000 leerlingen.

Gegadigden wordt verzocht zich te melden bij de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, Drs. J. van Dormolen, Wiskunde-gebouw, 4e verd. Budapestlaan 6, Utrecht, telefoon 030-531725.

Lh Wageningen

Met ingang van september 1975 bestaat bij de Afdeling Wiskunde van de Landbouwhogeschool gelegenheid tot het vervullen van

12 à 14 lesuren wiskunde

In de vorm van **studiebegeleiding** voor **eerstejaarsstudenten** in de vakken **analyse** en **lineaire algebra**.
Onderwijservaring gewenst.

Informaties omtrent deze functie kunnen worden ingewonnen bij de vakgroep wiskunde, sectie zuivere en toegepaste wiskunde, De Dreijen 8, Wageningen (tel. 08370-82389).

Sollicitaties onder nr. 75-94 te richten aan het Hoofd van de afdeling Personeelszaken, Salverdaplein 10, Wageningen.

INHOUD

Voorrede tot een wetenschap van het wiskunde-onderwijs	1
Prof. Dr. F. van der Blij: Professor Freudenthal zeventig jaar	3
Dr. P. M. van Hiele: Freudenthal en de didaktiek der wiskunde	8
Wat hebben zes jaar vernieuwing ons gebracht?	11
A. Lagerwerf: Dit artikel moet U lezen, als het goed is	17
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden XCIV	21
H. Steur: Reactie op de rapportage vanuit de subcommissie bovenbouw van de CMLW	25
Didaktische begeleiding wiskunde	28
Over de conferentie wis- en natuurkunde	32
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	33
Mededelingen	38
Boekbespreking	41
Recreatie	43