

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

50e jaargang

1974/1975

no 9

mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Prijs nummer 4/5 f 9,50.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 225,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 120,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 67,50.

Monotonie, continuïteit en primitiveerbaarheid i.v.m. integreerbaarheid*

A. MAASSEN

Arnhem

Het ziet er naar uit dat in het VWO aan de analyse van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ een steviger fundament wordt gegeven dan in het VHMO; de integraalrekening zal daarvan profiteren. Ik stel mij voor, dat velen van ons over de keuze van een onderwijsstrategie voor de integraalrekening opnieuw zullen gaan nadenken.

Er zijn verschillende strategieën mogelijk; bij een keuze uit die mogelijke strategieën kan de wens, de toegang tot hogere generalisatieniveaus open te houden, een rol spelen. Wie die wens koestert, doet er goed aan te rade te gaan bij de wiskunde zelf.

Het volgende moge daartoe een bijdrage zijn.

Duidelijkheidshalve wil ik allereerst twee opmerkingen maken:

a Ik beperk mij tot de eigenlijke Riemann-integraal.

Er zijn wiskundigen, naar ik meen ook onder leraren, die in het (universitaire) onderwijs de Cauchy-integraal prefereren boven de Riemann-integraal:

een functie van een segment S naar $\mathbb{R}$ heet Cauchy-integreerbaar, als hij uniforme limiet is van een rij van trapfuncties van S naar $\mathbb{R}$;

de integraal van een trapfunctie wordt op voor de hand liggende wijze gedefinieerd;

als de functie f uniforme limiet is zowel van de rij trapfuncties $n \rightarrow g_n$ als van de rij trapfuncties $n \rightarrow h_n$, dan bestaan de limieten van de bijbehorende rijen van integralen en die limieten zijn gelijk;

die limiet is nu per definitie de Cauchy-integraal van f .

Hun voorkeur berust op een betere aansluiting bij de Lebesgue-integraal van de Cauchy-integraal, dan van de Riemann-integraal.

Naar mijn smaak is de Riemann-integraal intuïtief zo veel duidelijker en meer voor de hand liggend dan de Cauchy-integraal, dat ik het er op waag, in deze voordracht verder over de Cauchy-integraal te zwijgen.

* Voordracht gehouden tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars op 16 oktober 1971.

b Ik wil in deze voordracht geen onderwijsstrategie voor de Riemann-integraal ontwikkelen, of zelfs maar aanbevelen of noemen; in deze voordracht worden enkele stellingen genoemd betreffende het verband tussen monotonie, continuïteit, primitiveerbaarheid en integreerbaarheid, die een gezonde basis vormen voor wie de Riemann-integraal in het VWO moet behandelen.

c Bij de verwerking van deze voordracht tot een tijdschriftartikel rezen moeilijkheden betreffende de leesbaarheid.

De inhoud van de volgende mededeling (tezamen met het feit dat die mededeling gedaan wordt) moge die leesbaarheid verhogen:

Op maar een paar definities wordt nader ingegaan: het zijn die definities waarvan ik meen ze niet te hoeven rekenen tot gemeengoed van de lezers van dit tijdschrift.

Van maar een paar stellingen worden de bewijzen in het verhaal zelf gegeven: voor de bewijzen van andere stellingen wordt bij deze verwezen naar de Appendix.

De grote lijn van het verhaal ziet er zo uit:

- 1 Afspraken; definities.
 - 2 Definitie van 'doorlopendheid van functies'.
 - 3 Enkele stellingen (zonder bewijzen); enkele vragen; één van die vragen blijft onbeantwoord.
 - 4 Een primitiveerbare functie die niet begrensd en dus niet (eigenlijk Riemann-)integreerbaar is.
 - 5 Een noodzakelijke (en voldoende) voorwaarde voor integreerbaarheid; de noodzakelijkheid van die voorwaarde, van belang zijnde voor het vervolg, wordt bewezen.
 - 6 Een andere formulering van de opengebleven vraag.
 - 7 Een Cantor-verzameling.
 - 8 Een primitiveerbare, begrensde maar niet-integreerbare functie.
- Appendix.

- 1 AFSPRAAK: $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; a < b; [a; b] \stackrel{\text{D}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$
 $\langle a; b \rangle \stackrel{\text{D}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$

$B \stackrel{\text{D}}{=}$ de verzameling van de BEGRENSEDE functies vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$.

$I \stackrel{\text{D}}{=}$ de verzameling van de RIEMANN-INTEGREERBARE functies uit B .

$P \stackrel{\text{D}}{=}$ de verzameling van de PRIMITIVEERBARE functies uit B .

$M \stackrel{\text{D}}{=}$ de verzameling van de MONOTONE functies uit B .

$C \stackrel{\text{D}}{=}$ de verzameling van de CONTINUE functies uit B .

- 1.1 $f \in B \stackrel{\text{D}}{=}$ f is een functie van $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$ met de eigenschap:
er zijn reële getallen r_1, r_2 zó dat voor alle $x \in [a; b]$ geldt:

$$r_1 \leq f(x) \leq r_2.$$
- 1.2 $f \in P \stackrel{\text{D}}{=}$ er is een functie $F \in B$ zó dat $F' = f$.

1.3 $f \in M \bar{D}$ f is een functie uit B met de eigenschap:

voor alle $x, y \in [a; b]$: als $x < y$, dan $f(x) \leq f(y)$

òf voor alle $x, y \in [a; b]$: als $x < y$, dan $f(x) \geq f(y)$.

1.4 $f \in C \bar{D}$ f is een functie uit B met de eigenschap:

voor alle $x \in [a; b]$: f is continu te x .

f is continu te $x \bar{D}$ bij elk open interval V dat $f(x)$ bevat, is er een open interval U dat x bevat met de eigenschap:
voor alle $u \in U$: $f(u) \in V$.

1.5 Als $f \in B$:

de onderintegraal van $f \bar{D}$ het supremum van de verzameling van onder-sommen van f bij alle verdelingen van $[a; b]$;

de bovenintegraal van $f \bar{D}$ het infimum van de verzameling van bovensommen van f bij alle verdelingen van $[a; b]$.

1.6 $f \in I \bar{D}$ $f \in B$ en de onderintegraal van f = de bovenintegraal van f .

1.7 Als $f \in I$:

$\int_a^b f \bar{D} \int_a^b f \bar{D}$ de onderintegraal van f (= de bovenintegraal van f);

voor elke $p \in [a; b]$: $\int_p^p f \bar{D} 0$.

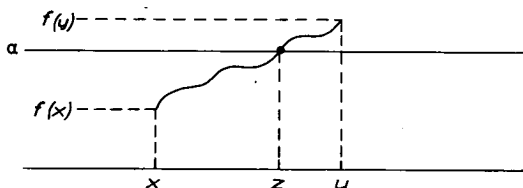
2 Nog een definitie:

Als $f \in B$:

f is doorlopend $\bar{D}$ voor alle $x, y \in [a; b]$ met $x < y$ geldt:

bij alle α met $f(x) < \alpha < f(y)$ of $f(y) < \alpha < f(x)$

er is een $z \in [a; b]$ met $x < z < y$ en $f(z) = \alpha$.



Opmerkingen.

- i Een stelling uit de analyse van functies vanuit $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zegt dat elke continue functie doorlopend is (de zgn. tussenwaardestelling); die stelling berust essentieel op de volledigheid van $\mathbb{R}$, zeg: op de supremumstelling die in het domein van de functie geldt;

merk op, dat de functie $\xi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow x^2$ wel continu maar niet doorlopend is:

$$0 = \xi(0) < 2 < \xi(2) = 4, \text{ maar: er is geen } z \text{ met } \xi(z) = 2.$$

- ii Als $f \in B; c \in [a; b]; \lim_{x \uparrow c} f(x) \neq \lim_{x \downarrow c} f(x)$ (terwijl beide limieten bestaan),

dan: f is *niet* doorlopend.

- iii Een functie die niet continu en wel doorlopend is:

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0, \\ x \rightarrow \sin \frac{1}{x} \text{ als } x \in [-1; 1] \text{ en } x \neq 0. \end{cases}$$

3 Enkele stellingen; enkele vragen.

- 3.1 ALS en ALLEEN als: er is bij elke $\epsilon > 0$ een verdeling V van $[a; b]$ zó dat: (bovensom van f bij V) – (ondersom van f bij V) $< \epsilon$,
DAN: f is integreerbaar over $[a; b]$.

↓ Dus:

↓ Dus:

↓ Dus:

3.2

$$C \subset I$$

3.3

$$M \subset I$$

3.4

ALS: f is integreerbaar over $[a; b]$ en $x \in [a; b]$,
DAN: f is integreerbaar over $[a; x]$ en over $[x; b]$,

en

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f.$$

Op grond van stelling 3.4 kunnen we nu bij elke $f \in I$ definiëren:

$$R_f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} : R_f(x) = \int_a^x f.$$

Voor deze R_f geldt:

3.5

ALS: $f \in I$ en f is continu te $c \in [a; b]$,

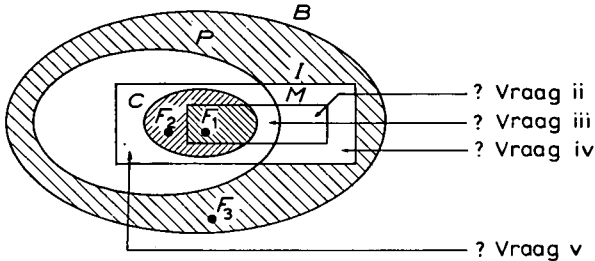
DAN: $R'_f(c) = f(c)$.

Uit 3.5 volgt:

3.6

$C \subset P$

Op grond van deze stellingen kunnen we het volgende diagram tekenen:



De gearceerde stukken van de kaart duiden niet-lege deelverzamelingen van B aan; neem voor $[a; b]: [-1; 1]$; en voor F_1, F_2, F_3 :

$$F_1: x \rightarrow x;$$

$$F_2: x \rightarrow |x|;$$

$$F_3: \begin{cases} x \rightarrow 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q}, \\ x \rightarrow 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

F_3 is duidelijk niet integreerbaar omdat elke van zijn ondersommen 0 is en elke van zijn bovensommen 2;

F_3 buiten P plaatsen is wat voorbarig.

Vraag i Is F_3 primitieveerbaar?

Vraag ii Is er een functie die $\left\{ \begin{array}{l} \text{niet primitieveerbaar} \\ \text{wel monotoon} \end{array} \right\}$ is?

Vraag iii Is er een functie die $\left\{ \begin{array}{l} \text{niet continu} \\ \text{wel monotoon} \\ \text{wel primitieveerbaar} \end{array} \right\}$ is?

Vraag iv Is er een functie die $\left\{ \begin{array}{l} \text{niet primitieveerbaar} \\ \text{niet monotoon} \\ \text{wel integreerbaar} \end{array} \right\}$ is?

Vraag v Is er een functie die $\left\{ \begin{array}{l} \text{niet continu} \\ \text{niet monotoon} \\ \text{wel primitieveerbaar} \\ \text{wel integreerbaar} \end{array} \right\}$ is?

Bij het beantwoorden van deze vragen zijn de volgende stellingen nuttig:

3.7

ALS: f is primitieverbaar.

DAN: f is doorlopend.

3.8 ALS: f is monotoon en doorlopend,

DAN: f is continu.

↘ ↙
Dus:

3.9 $P \cap M \subset C$

3.10

ALS: $f \in B$ en f heeft slechts eindig veel discontinuïteiten,

DAN: f is integreerbaar.

Antwoord op vraag i:

F_3 is niet doorlopend en dus (3.7): niet primitieverbaar.

Antwoord op vraag ii:

JA: neem $F_4: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x + [x]$;

deze functie is monotoon, niet doorlopend.

Antwoord op vraag iii:

NEEN (Stelling 3.9).

Antwoord op vraag iv:

JA: neem $F_5: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x - [x]$;

deze functie is niet doorlopend, niet monotoon, heeft slechts eindig veel discontinuïteiten.

Antwoord op vraag v:

Zo'n functie is niet continu, wel doorlopend; voor zo'n functie moeten we de afdeling pathologie van de analyse in; we vinden:

de afgeleide van de functie vanuit $[-1; 1]$:
$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0, \\ x \rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ als } x \neq 0; \end{cases}$$

t.w. $F_6: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} 0 \rightarrow 0, \\ x \rightarrow 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ als } x \neq 0; \end{cases}$

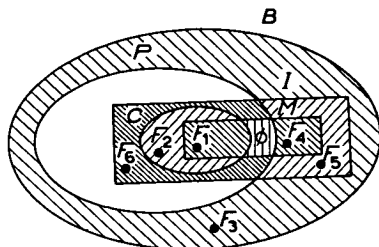
merk op: F_6 is niet continu, n.l. niet te 0;

F_6 is niet monotoon: $F_6(-2\pi^{-1}) > F_6(0) < F_6(2\pi^{-1})$;

F_6 is primitieverbaar;

F_6 is integreerbaar op grond van 3.10

We hebben nu:



Er is nog één witte plek op de kaart overgebleven.

De hoofdstelling van de Analyse luidt:

3.11 ALS: $f, F \in B$; f is integreerbaar; F is een primitieve van f ,

$$\text{DAN: } \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Er is een eenvoudig bewijs van deze stelling.

Laat $\langle a = x_0, x_1, \dots, x_n = b \rangle$ een verdeling zijn van $[a; b]$; dan:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

voor goed gekozen $y_0, \dots, y_{n-1} \in [a; b]$.

Dus: voor elke verdeling A van $[a; b]$ geldt:

ondersom van f bij $A \leq F(b) - F(a) \leq$ bovensom van f bij A .

Omdat f integreerbaar is, geldt nu:

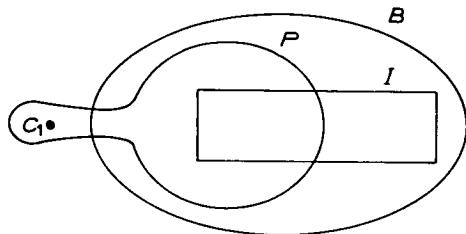
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f.$$

De integreerbaarheid van f wordt in dit bewijs duidelijk gebruikt.

Als die ene witte plek in het laatste diagram een lege deelverzameling aanduidt, dan is elke begrensde, primitieveerbare functie integreerbaar; de hoofdstelling van de Analyse kan dan zuiniger geformuleerd worden dan onder 3.11 is gebeurd.

Vraag: Is er een primitieveerbare functie die niet integreerbaar is?

4 Voor degenen onder u die er spijt van hebben gekregen niet de alternatieve voordracht te hebben gekozen, wil ik even uit de band springen:



ik neem de volgende functie:

$$G : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} G(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{als } x \neq 0, \\ G(0) = 0; \end{cases}$$

Deze functie is de afgeleide van:
$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0, \\ x \rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{als } x \in [-1; 1] \setminus \{0\} \end{cases}$$

Deze functie demonstreert dat primitiviteit niet integreerbaarheid impliceert, G gaat n.l. alle perken te buiten:

$G \notin B$, en dus: $G \notin I$.

5 De rest van deze voordracht is gewijd aan de constructie van een functie die
begrensd is op een segment,
primitiviteit is op dat segment,
niet integreerbaar is op dat segment.

Volgens stelling 3.10 is een begrensde functie op een segment die ten hoogste eindig veel discontinuïteiten heeft, integreerbaar.

Er zijn zelfs functies die integreerbaar zijn en oneindig veel discontinuïteiten hebben; de volgende is er zo een:

$$H : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} : H(0) = 0; H(x) = [x^{-1}]^{-1} \text{ als } x \neq 0;$$

voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: H is niet continu te n^{-1} ;

H is monotoon en dus integreerbaar.

Voor elke $f \in B$ definiëren we:

$$D(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in [a; b] : f \text{ is niet continu te } p\};$$

nu geldt de volgende stelling:

$$5.1 \quad \boxed{\text{Voor alle } f \in B: f \in I \Leftrightarrow D(f) \text{ heeft maat } 0}$$

Wat verstaan we onder: ' $D(f)$ heeft maat 0'?

Zij A een indexverzameling; U_α , voor elke $\alpha \in A$, een eindig interval van $\mathbb{R}$.

Elke U_α heeft een lengte;

bij elk eindig aantal der U_α 's behoort een reëel getal t.w. desom van de lengten van die U_α 's; al die reële getallen stoppen we in één verzameling: L ;

onder 'de lengtesom der U_α ' verstaan we: $\sup L$.

Welnu:

$D(f)$ heeft maat 0 $\bar{D}$ bij elke $\epsilon > 0$ zijn er *af telbaar* veel segmenten S_k zó dat:

$$\text{lengtesom der } S_k < \epsilon \text{ en } D(f) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

(= bij elke $\epsilon > 0$ zijn er open intervallen U_α zó dat lengtesom der

$$U_\alpha < \epsilon \text{ en } D(f) \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha).$$

Voor ons doel hebben we maar één helft van stelling 5.1 nodig; die helft zal ik bewijzen.

Daartoe dienen de volgende definities:

Zij $f \in B$; $x \in [a; b]$; $V_x \bar{D}$ de verzameling van open intervallen die x bevatten.

Voor elk interval $U \in V_x$:

$$\sup (f; U) \bar{D} \sup \{f(y) : y \in U \cap [a; b]\};$$

$$\inf (f; U) \bar{D} \inf \{f(y) : y \in U \cap [a; b]\}.$$

We definiëren nu de discontinuïteitsgrootte van f te $x \bar{D}$

$$\epsilon(f; x) \bar{D} \inf_{U \in V_x} \{\sup (f; U) - \inf (f; U)\}.$$

Merk op:

$$5.2 \quad \boxed{\text{Voor alle } f \in B, x \in [a; b] : \epsilon(f; x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ is continu te } x}$$

We definiëren nog voor elke $n \in \mathbb{N}$:

$$E(f; n) \bar{D} \{z \in [a; b] : \epsilon(f; z) > \frac{1}{n}\},$$

en merken op:

$$5.3 \quad \boxed{\text{Voor elke } f \in B: D(f) = \{z \in [a; b] : \epsilon(f; z) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(f; n).}$$

Het beloofde bewijs van de ene helft van stelling 5.1 kan nu in een leesbare vorm worden gegoten;

bedoeld is de helft:

$$5.4 \quad \boxed{\text{Voor alle } f \in B: f \in I \Rightarrow D(f) \text{ heeft maat } 0.}$$

Noem mij een element van I : f ;

noem mij een positief reëel getal: ϵ .

Ik moet laten zien dat er *af telbaar* veel segmenten bestaan die gezamenlijk $D(f)$

overdekken en waarvan de lengtensom kleiner is dan ϵ .

Bedenk: $D(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(f; n)$.

Ik ga laten zien dat er bij elke $n \in \mathbb{N}$ een overdekking van $E(f; n)$ bestaat gevormd door eindig veel segmenten met een lengtensom die kleiner is dan $2^{-n} \cdot \epsilon$.

Noem mij maar een natuurlijk getal: p .

Omdat $f \in I$, is er een verdeling A van $[a; b]$ zó dat

bovensom van f bij A — ondersom van f bij $A < p^{-1} \cdot \epsilon \cdot 2^{-p}$:



Ik ga nu voor elk element c van $E(f; p)$ als volgt te werk:

Is c een van de deelpunten r_i van A ?

Ja? Dan neem ik $[c; c]$ als segment op;

van zulke segmenten neem ik er dus ten hoogste $q + 1$; hun lengtensom is 0.

Nee? Dan is c inwendig punt van een van de segmenten van A ; zeg van: $[r_k; r_{k+1}]$; dan neem ik $[r_k; r_{k+1}]$ als segment op; van zulke segmenten neem ik er dus ten hoogste q . Merk nu op:

Als $[r_i; r_{i+1}]$ een opgenomen segment is (omdat het een inwendig punt van $E(f; p)$ bevat), dan:

de schommeling van f in $[r_i; r_{i+1}] \geq$ de schommeling van f in $[r_i; r_{i+1}] \gg p^{-1}$.

Dus: de bijdrage van de segmenten $[r_i; r_{i+1}]$ die punten van $E(f; p)$ als inwendige punten bevatten, tot

bovensom van f bij A — ondersom van f bij A ,

is groter dan $p^{-1} \cdot$ lengtensom van alle opgenomen segmenten.

Welnu: die bijdrage is kleiner dan $p^{-1} \cdot \epsilon \cdot 2^{-p}$.

Dus zeker: lengtensom van alle opgenomen segmenten $< \epsilon \cdot 2^{-p}$.

Bovendien: de opgenomen segmenten overdekken tezamen $E(f; p)$.

Dus:

Er zijn aftelbaar veel segmenten die gezamenlijk $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(f; n)$ overdekken (bij elke $n \in \mathbb{N}$ eindig veel die $E(f; n)$ overdekken);

hun lengtensom is kleiner dan $\sum_n \epsilon \cdot 2^{-n}$, dus kleiner dan ϵ .

Dus: $D(f)$ heeft maat 0.

6 We zoeken een begrensde functie die wel primitiveerbaar, maar niet integreerbaar is;

op grond van 5.4 kunnen we dat ook zó zeggen:

We zoeken een functie F die differentieerbaar is en die afgeleide F' heeft waarvoor geldt: F' is begrensd en $D(F')$ heeft niet maat 0.

In 1881 heeft V. Volterra zo'n functie gepubliceerd;

de Nijmeegse wiskundige J. Smit heeft de constructie van zo'n functie aanmerkelijk vereenvoudigd.

Zowel Volterra als Smit maken gebruik van een zgn. Cantorverzameling.

7 We maken de volgende Cantorverzameling :

neem het segment $[0; 1]$; neem daarvan deelintervallen op de volgende manier:

J_1 heeft als midden: $\frac{1}{2}$; als lengte: $\frac{1}{4}$; we zeggen: J_1 is van het eerste niveau;

het aantal deelintervallen van het eerste niveau is: 1.

J_2 en J_3 hebben als midden: $\frac{3}{16}$ resp. $\frac{13}{16}$; als lengte: 4^{-2} ;

we zeggen: J_2 en J_3 zijn van het tweede niveau; het aantal intervallen van het tweede niveau is: 2.

$[0; 1] \setminus (J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ is de vereniging van 2^2 segmenten; de middens van die segmenten zijn $\frac{5}{64}$; $\frac{19}{64}$; $\frac{45}{64}$; $\frac{59}{64}$; die nemen we als middens van resp. J_4, J_5, J_6, J_7 ;

de lengte van elk van die intervallen is: 4^{-3} ;

we zeggen: J_4, J_5, J_6, J_7 zijn van het derde niveau.

Zo gaan we door:

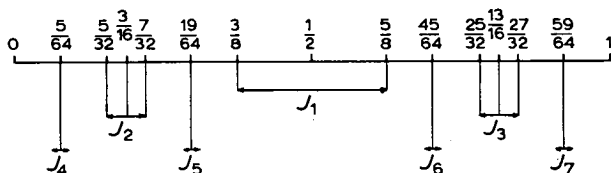
er zijn 2^{n-1} intervallen van het n^e niveau:

$$J_{2^{n-1}}, J_{2^{n-1}+1}, \dots, J_{2^n-1};$$

hun middens zijn tevens middens van de 2^{n-1} (onderling disjuncte) segmenten waarvan de vereniging juist

$$[0; 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}-1} J_i \text{ is;}$$

de lengte van elk van deze intervallen is 4^{-n} .



Merk op:

$$7.1 \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \text{ wordt overdekt door intervallen met lengtensom } \frac{1}{2}$$

Die intervallen zijn n.l. precies J_1, J_2, J_3 , enz;

$$\text{hun lengtensom} = 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} + 2^2 \cdot 4^{-3} + \dots + 2^{n-1} \cdot 4^{-n} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Uit 7.1 volgt:

$$7.2 \quad [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \text{ heeft niet maat 0.}$$

Merk op:

- 7.3 $[0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_k$ is de vereniging van 2^n onderling disjuncte segmenten die alle dezelfde lengte hebben; de lengte van elk van die segmenten = $2^{-n-1} + 2^{-2n-1}$

Bovendien:

- 7.4 ALS: $a \in [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$,
DAN: in elke omgeving van a liggen oneindig veel J_k 's.

Kies een element van $[0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k : a$;

Kies een ϵ -omgeving van $a : E$;

Kies een natuurlijk getal n zó groot dat $2^{-n} < \epsilon$;

Merk op:

$$a \notin \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_k;$$

dus: a is element van een van de 2^n segmenten waarvan de vereniging is:

$$[0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_k;$$

dàt segment is geheel bevat in E ;

dat segment bevat oneindig veel J_k 's.

Tenslotte :

- 7.5 De afsluiting van $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ in $[0; 1]$ is $[0; 1]$.

8 Definitie van een gezochte functie F die differentieerbaar is en wel zó dat F' begrensd is en $D(F')$ niet maat 0 heeft.

- 8.1 Op elke J_k definiëren we een functie f_k als volgt:

Laat J_k van het n^e niveau zijn;

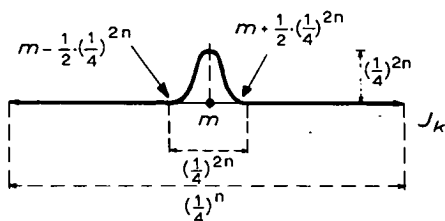
dan: lengte van $J_k = 4^{-n}$;

noem het midden van $J_k : m_k$; definieer:

$f_k : J_k \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_k(x) = 4^{-2n} \cdot (\cos 4^{2n} \cdot \pi \cdot (x - m_k)^2) \text{ als } x \in [m - \frac{1}{2} \cdot 4^{-2n}; m + \frac{1}{2} \cdot 4^{-2n}],$$

$$f_k(x) = 0 \text{ als } x \in J_k \text{ en } |x - m_k| > \frac{1}{2} \cdot 4^{-2n}.$$



Merk op:

- 8.1. Voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt:
 f_k is differentieerbaar;
er is $y \in J_k$ met $f'_k(y) = \pi$ (of $f'_k(y) = -\pi$);
 f_k is continu op J_k .

Bovendien:

De hoogte van het 'bergje' op J_k wordt bij toenemende k klein t.o.v. de lengte van J_k ;

dat feit levert de differentieerbaarheid van de in 8.2 gedefinieerde functie F in elk punt dat verdichtingspunt is van J_k 's, d.w.z. in elk element van $[0; 1]$ dat tot geen der J_k 's behoort; voor zo'n element $a : F'(a) = 0$.

$$8.2 \quad \text{Definieer: } F : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} F(a) = 0 \text{ als } a \in [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k, \\ F(a) = f_k(a) \text{ als } a \in J_k. \end{cases}$$

Stelling 8.2:

Deze functie F is differentieerbaar;
zijn afgeleide F' is begrensd en niet integreerbaar.

Bewijs:

- a. Duidelijk is: Voor alle $a \in \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$: F is differentieerbaar te a en F' is continu te a .

Neem nu element van $[0; 1]$ dat niet tot een der J_k 's behoort: a ;

$$\text{bewering: } \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \right| = 0.$$

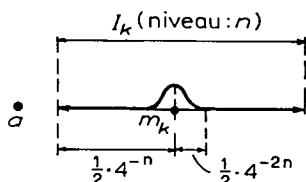
Laat een positief getal gegeven zijn: ϵ ;

Kies een natuurlijk getal p zó dat $4^{-p+1} < \epsilon$;

noem $4^{p-1} : \delta$; bekijk $\langle a - \delta; a + \delta \rangle$;
 kies element, niet a , van $\langle a - \delta; a + \delta \rangle : x$.

Als $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, dan: $F(x) = F(a) = 0$; dan: $\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \right| = 0 < \epsilon$.

Als $x \in J_k$ en $n = \text{het niveau van } J_k$ en $n < p$, dan:



$$|x - a| < 4^{p-1} < 4^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-n} - \frac{1}{4} \cdot 4^{-n} < \frac{1}{2} \cdot 4^{-n} - \frac{1}{2} \cdot 4^{-2n},$$

dan: $F(x) = 0$; dan: $\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \right| = 0 < \epsilon$.

Als $x \in J_k$ en $n = \text{het niveau van } J_k$ en $n \geq p$ en $F(x) \neq 0$,

dan:

$$\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \right| \leq \frac{4^{-2n}}{|x - a|} < \frac{4^{-2n}}{\frac{1}{2} \cdot 4^{-n} - \frac{1}{2} \cdot 4^{-2n}} \leq 4^{-n+1} \leq 4^{p-1} < \epsilon.$$

Dus: F is differentieerbaar in elke $a \in [0; 1]$

$$F'(a) = 0 \text{ voor elke } a \in [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

b Bewering: $D(F') = [0; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$.

Kies element van $[0; 1]$ dat tot geen der J_k 's behoort: a .

In elke omgeving van a liggen J_k 's (zie 7.4);

dus: in elke omgeving van a zijn er x met $F'(x) = \pi$ of $F'(x) = -\pi$;

bovendien: $F'(a) = 0$;

dus: F' is niet continu te a .

Bovendien: voor elke $a \in \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$: F' is continu te a .

- c Deze F' is primitieverbaar en begrensd;
 deze F' is niet integreerbaar wegens 8.2.b, 7.2 en 5.4.

Dus: $\text{Deze } F' \in P \setminus I.$

Appendix

ad 3.1 Dat de genoemde voorwaarde voldoende is voor de integreerbaarheid, is triviaal:
 uit het feit dat voor ieder positief getal ϵ geldt:

$$0 \leq \text{bovenintegraal} - \text{onderintegraal} < \epsilon,$$

volgt: bovenintegraal = onderintegraal.

Bij het bewijs van de noodzakelijkheid van de voorwaarde:

Als A' een verfijning is van de verdeling A van $[a; b]$, dan:

ondersom bij $A \leq$ ondersom bij $A' \leq$ bovensom bij $A' \leq$ bovensom bij A .

ad 3.2 Als f continu is op $[a; b]$, dan is f uniform continu op $[a; b]$;

bij elke $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in [a; b]$;

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a};$$

bij gegeven ϵ is er verdeling van $[a; b]$ waarvan het grootste segment een lengte heeft die kleiner is dan een δ die bij die ϵ behoort; voor die verdeling geldt:

$$\text{bovensom van } f - \text{ondersom } f < \frac{\epsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \epsilon.$$

ad 3.3 Laat f monotoon stijgend zijn op $[a; b]$; zij $f(a) \neq f(b)$.

Bij gegeven $\epsilon > 0$ is er een verdeling

$$\langle a = x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, x_q = b \rangle$$

van $[a; b]$ waarvan het grootste segment een lengte heeft die kleiner is dan

$$\epsilon \cdot (f(b) - f(a))^{-1};$$

voor zo'n verdeling geldt:

$$\text{bovensom van } f - \text{ondersom van } f < \epsilon \cdot (f(b) - f(a))^{-1} \cdot \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \epsilon.$$

ad 3.4 Bij elke verdeling A van $[a; b] : \langle a = r_0, r_1, \dots, r_{q-1}, r_q = b \rangle$,

is er een verdeling B_1 van $[a; x]$ n.l. $\langle a = r_0, r_1, \dots, r_{i-1}, x \rangle$

en een verdeling B_2 van $[x; b]$ n.l. $\langle x, r_i, \dots, r_q = b \rangle$;

dan: ondersom van f bij $A \leq$ ondersom van f bij B_1 + ondersom van f bij B_2 ;

dan: ondersom van f bij $A \leq$ onderintegraal van f over $[a; x]$ + integraal van f over $[x; b]$.

dan: onderint. van f over $[a; b] \leq$ onderintegr. van f over $[a; x] +$ onderint. van f over $[x; b]$.

We hebben nu:

onderint. over $[a; b] \leq$ onderint. over $[a; x] +$ onderint. over $[x; b]$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ = & \leq & \leq \\ | & | & | \end{array}$$

bovenint. over $[a; b] \geq$ bovenint. over $[a; x] +$ bovenint. over $[x; b]$.

Hieruit volgt: f is integreerbaar over $[a; x]$ en over $[x; b]$.

ad 3.5 $R'_f(c) \stackrel{\text{D}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f$; welnu

$$\inf_{t \in [c-|h|; c+|h|]} f(t) \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f \leq \sup_{t \in [c-|h|; c+|h|]} f(t);$$

dus: $R'_f(c) = f(c)$.

ad 3.7 Laat F een primitieve zijn van f :

Stel $a \leq p < q \leq b$; stel $f(p) < \alpha < f(q)$.

Maak $G: x \rightarrow F(x) - \alpha x$;

dan: $G': x \rightarrow f(x) - \alpha$;

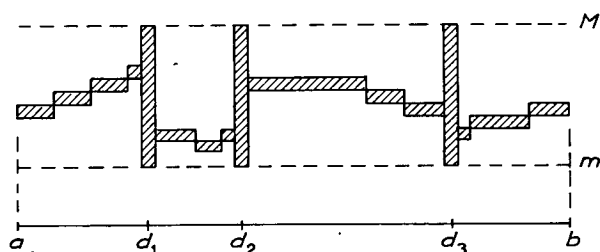
dan: $G'(p) < 0$ en $G'(q) > 0$;

dan: $G(p)$ en $G(q)$ zijn niet minimum van G op $[p; q]$;

dan: er is $r \in]p; q[$ met $G'(r) = 0$, d.w.z. met $f(r) = \alpha$.

ad 3.8 Het bewijs is triviaal

ad 3.10 Het bewijs ligt in het volgende plaatje:



We willen een verdeling maken van $[a; b]$ zó dat het verschil V tussen bovensom en ondersom van f bij die verdeling erg klein is; zeg: kleiner dan het positieve getal ϵ ;

f heeft eindig veel discontinuïteiten; noem die: $d_1, \dots, d_n$;

we maken nu een verdeling van $[a; b]$ als volgt:

we zorgen er voor dat de gezamenlijke bijdrage tot V van de (ten hoogste n) segmenten die

$d_1, \dots, d_n$ als inwendige punten bevatten, kleiner is dan $\frac{1}{2}\epsilon$ door elk van die segmenten niet groter te maken dan:

$$(2n)^{-1} \cdot \epsilon \cdot (M - m)^{-1}$$

(hierin is M een bovengrens en m een ondergrens van de verzameling van de f -beelden; we zorgen er voor dat de gezamenlijke bijdrage tot V van de overige segmenten ook kleiner is dan $\frac{1}{2}\epsilon$; we kunnen dat wegens 3.2

ad 5 Bewijs van: Voor alle $f \in B : f \in I \Leftrightarrow D(f)$ heeft maat 0.

Kies positief getal: ϵ .

Kies een bovengrens van de verzameling van de f -beelden: M ;

en een ondergrens van die verzameling: m ; $m < M$.

Er is een overdekking van $D(f)$ bestaande uit intervallen met lengtensom

$$< 2^{-1} \cdot \epsilon \cdot (M - m)^{-1};$$

noem de verzameling van die intervallen: O_1 .

Bij elke

$$x \in [a; b] \setminus D(f)$$

is er een omgeving I_x zó dat

$$\sup \{f(y) : y \in I_x \cap [a; b]\} - \inf \{f(y) : y \in I_x \cap [a; b]\} < 2^{-1} \cdot \epsilon \cdot (b - a)^{-1};$$

neem bij elke

$$x \in [a; b] \setminus D(f)$$

zo'n omgeving; noem de verzameling van die intervallen: O_2 .

Dan: $O_1 \cup O_2$ is een (open) overdekking van $[a; b]$;

dan: $O_1 \cup O_2$ bevat een eindige deelooverdekking; neem zo'n eindige deelooverdekking; noem die: O .

Maak nu een verdeling van $[a; b]$ zó dat elk segment van die verdeling bevat is in een van de intervallen van O .

Statistische dag 1975

Op dinsdag 29 april 1975 houdt de Vereniging voor Statistiek haar jaarlijkse lezingendag, waaraan een tentoonstelling van boeken, rekenapparatuur en andere statistische hulpmiddelen verbonden is, in het hoofdgebouw van de Vrije Universiteit te Amsterdam.

De Statistische Dag zal worden geopend door de rector-magnificus van de VU, Prof. Mr. I. A. Diepenhorst.

In de ochtendzitting spreekt Prof. Dr. F. van der Blij over 'Wiskundige Patroonherkenning: kruissteek of radeerpatroon'.

In de middagzitting zijn er vier stromen met ieder 3 lezingen, welke onder meer handelen over onderwerpen uit de mathematische statistiek, operationele research en het economisch-statistisch onderzoek. O.a. komen aan de orde: autobezit in Nederland, milieuprofielen en mobiliteit, computer en statistische informatie.

Nadere informatie verleent de Vereniging voor Statistiek, Weena 700 te Rotterdam, eventueel telefonisch via 010-116181 (tst. 2126).

Beschrijvende statistiek voor mavo

P. C. SCHNETZ

Wateringen

1. Inleiding

De beschrijvende statistiek is tot op heden het enige onderdeel van het leerplan wiskunde voor het mavo, waarvoor geen toelichting is verschenen. Het betekent, dat geen enkele mavo-docent weet, of er te weinig of zelfs te veel tijd aan dat onderdeel door hem/haar wordt besteed.

De bedoeling van dit artikel is een discussie op gang te brengen die er wellicht toe leidt, dat genoemde toelichting binnen afzienbare tijd verschijnt.

2. Historisch overzicht

De statistiek werd voor het eerst in het interimrapport van de C.M.L.W. van mei 1967 genoemd en aanbevolen als toepassing van wiskundige methoden (blz. 19, 23 en 24).

In oktober 1968 verscheen het 3e rapport van de C.M.L.W. over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van statistiek in het onderwijs voor mavo, havo en vwo. Op blz. 13 van dit rapport wordt de beschrijvende statistiek mogelijk en verantwoord geacht voor het mavo met keuzevak wiskunde. Het 4e rapport van de C.M.L.W. van mei 1969 is dan voor wat betreft de beschrijvende statistiek een teleurstelling. Op blz. 13 staat: Een toelichting bij dit onderwerp zal later volgen.

Het is nu 1974 en deze toelichting is nog steeds niet verschenen.

3. Terminologie

Door het hanteren van verschillende benamingen wordt de duidelijkheid niet bevorderd. Zo vinden we:

- a. inleiding tot de beschrijvende statistiek (4e rapport C.M.L.W., blz. 45, 46);
 - b. uitbreiding van de beschrijvende statistiek (4e rapport C.M.L.W., blz. 45);
 - c. eenvoudige beschrijvende statistiek (definitieve programma's eindexamens, blz. 32);
 - d. beschrijvende statistiek (definitieve programma's eindexamens, blz. 33).
- Het al eerder genoemde interimrapport spreekt over 'een eenvoudige inleiding in de beschrijvende statistiek' (blz. 23) en het 3e rapport van de C.M.L.W. spreekt over 'beschrijvende statistiek'.

4. Inhoud

Wat is de inhoudelijke betekenis van begrippen zoals 'inleiding', 'uitbreiding', enz.?

Een mogelijkheid om tot een enigszins verantwoorde omschrijving te komen, lijkt dan een inventarisatie te maken van hetgeen tot nu toe gepubliceerd is.

De eerste twee bronnen die ons enige opheldering kunnen verschaffen, zijn het interimrapport van 1967 en het 3e rapport van 1968. Twee andere bronnen zijn de brieven van de Rijksinspectie van 26 januari 1971 en 26 januari 1972. Tabel I laat zien welke trefwoorden in de vier genoemde bronnen worden vermeld.

5. Examens mavo 4

In aansluiting op de laatstgenoemde bronnen geven de opgaven van de examens en herexamens mavo 4 een beeld van wat er ongeveer van de beschrijvende statistiek wordt gevraagd van de leerlingen.

In tabel II is een overzicht gegeven van de gebruikte trefwoorden en hun frequentie in de mavo-4-examens van 1972, 1973 en 1974.

6. Examens mavo 3

De mavo-3-examens geven ongeveer hetzelfde beeld. Alleen kwam 'afwijking van het gemiddelde' niet voor en ontbrak bij de open opgaven in het examen van 1973 en bij de open opgaven in de herexamens van 1972 en 1973 een opgave over beschrijvende statistiek.

7. Samenvatting

Door het ontbreken van een toelichting blijven vele vragen over onderdelen van de beschrijvende statistiek onbeantwoord. Enkele van deze vragen zijn:

- Moet men zich bij het staafdiagram beperken tot een enkelvoudig staafdiagram of kunnen in de toekomstige examens ook samengestelde staafdiagrammen en staafdiagrammen met procentuële weergave verwacht worden?
- Moet bij lijndiagrammen gewerkt worden met termen zoals enkelvoudig, samengesteld, scheurlijn, interpoleren, extrapoleren?
- Wat moeten de examenkandidaten weten over verdeling in klassen?
- Moet het frequentiepolygoon behandeld worden?

Deze en andere vragen keren ieder jaar weer terug bij de mavo-docenten. Daarom is het dringend gewenst, dat de C.M.L.W. de beloofde toelichting op de beschrijvende statistiek binnenkort publiceert.

8. Reactie

In *Eùclides* (49e jrg., blz. 252) stond het artikel 'Waarom statistiek in het mavo?' van de heer E. H. Schmidt.

Enkele opmerkingen naar aanleiding van dat artikel volgen hieronder.

- a. Ook de heer Schmidt vestigt de aandacht op het feit, dat de toelichting bij het leerplan voor de beschrijvende statistiek nog niet is verschenen. (Blz. 253.)
- b. Op blz. 254 staat: 'Ik vind het begrijpelijk wanneer men datgene wat nu in het mavo aan statistiek wordt onderwezen, en dat bepaald wordt door wat op het examen wordt gevraagd, onbevredigend acht.'

Het onbevredigende zit m.i. vooral in het hier gesignaleerde feit, dat het examen bepaalt wat in het mavo aan statistiek wordt onderwezen.

c. Omdat het mavo-leerplan al zo overladen is, is uitbreiding en verdieping beslist onmogelijk, tenzij andere onderdelen van het programma worden geschrapt.

d. Om dezelfde reden is toevoeging zonder meer van het onderdeel kansexperimenten niet te realiseren. Bovendien gaat dit in tegen de conclusies van het 3e rapport van de C.M.L.W. Als men nog bedenkt, dat in de bovenbouw van het havo eenvoudige kansberekeningen aan de orde komen, dan vraagt men zich af, waarom dat dan ook in het mavo moet gebeuren; temeer, als men denkt aan de doorstroming van mavo-leerlingen naar het havo.

Tabel 1

trefwoord	C.M.L.W. 1967	C.M.L.W. 1968	Insp. 1971	Insp. 1972
afwijking van het gemiddelde			x	x
beeldstatistiek	x			
cirkeldiagram	x			
eenvoudige kansexperimenten	x			
frequentie			x	x
frequentietabel			x	x
frequentieverdeling	x			
gemiddelde		x	x	x
grafiek van een tijdreeks		x		
histogram	x	x	x	x
klassemiddens			x	
klassen van waarnemingsgetallen			x	
mediaan	x		x	x
modus	x		x	x
rekenkundig gemiddelde	x			
spreidingsmaat	x			
staafdiagram	x	x	x	
standaardafwijking		x		
tabel		x		

Tabel 2 Mavo-4-examens

trefwoord	ex. 1972 o m ¹	her. 1972 o m	ex. 1973 o m	her. 1973 o m	ex. 1974 o m	fr.
afwijking van het gemiddelde	x			x		2
frequenties			x			1
frequentietabel	x	x		x		3
gemiddelde	x	x	x	x	x	5
histogram	x				x	1
mediaan			x	x		2
modus	x	x	x	x		6
staafdiagram			x			1
waarnemingsgetal			x	x		3

1 o staat voor open opgave

m staat voor meerkeuzeopgave

Wacht Mijnheer van Dalen nog steeds op antwoord?

Drs. D. de BOER
Nieuw Roden

Op de lagere school werd ons geleerd: "Mijnheer van Dalen wacht op antwoord". Onze kennis van deze regel (die feitelijk luidt: eerst machtsverheffen, dan vermenigvuldigen, daarna delen, vervolgens worteltrekken en uiteindelijk optellen en aftrekken; alle bewerkingen van links naar rechts) werd getoetst d.m.v. vraagstukken als:

Reken uit: $3 + 5 - 18 : 2 \times 3$.

Op de middelbare school blijkt dat optellen en aftrekken feitelijk dezelfde bewerkingen zijn, evenals vermenigvuldigen en delen of machtsverheffen en worteltrekken. Maar wat doet mijnheer van Dalen? Optellen heeft géén prioriteit boven aftrekken, vermenigvuldigen wél boven delen, machtsverheffen ook boven worteltrekken, maar dan staan er nog twee bewerkingen tussen. Dat wil dus zeggen, dat in een formule $\sqrt{2}$ niet precies hetzelfde hoeft te betekenen als $2^{\frac{1}{2}}$. Kijkt u maar:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ volgens mijnheer van Dalen. De gewoonte is overigens hiervoor $3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ te lezen, waarbij mijnheer van Dalen dus overboord gegooid wordt (een juiste notatie zou $(\sqrt{3})\sqrt{2}$ zijn).

De heer van Dalen geeft geen uitsluitsel over de plaats die het berekenen van functies inneemt (de schrijver realiseert zich dat in de hogere wiskunde het gestelde irrelevant is. De leerling ziet het berekenen van functies waarschijnlijk wél als een "bewerking"). Bij normale functies, waarbij het argument tussen haakjes staat, is dat geen bezwaar, maar bij bv. de logaritmische, goniometrische en cyclometrische functies (verder lgc-functies genoemd) is het verwarrend. Bij de vorm $\sin 2k\pi$ denkt niemand aan $k\pi \sin 2$, wat, als de functieberekening vóór het vermenigvuldigen kwam, juist zou zijn. Komt de functieberekening ná het vermenigvuldigen? Nee, met $\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$ wordt bedoeld $(\sin(\frac{1}{2}x))(\cos(\frac{1}{2}x))$ en niet $\sin(\frac{1}{2}x \cos(\frac{1}{2}x))$.

Hoewel het na deze voorbeelden wellicht lijkt of er een chaos heerst is het niet zó erg. De : voor het delen wordt na de onderbouw niet meer gebruikt. Een horizontale breukstreep neemt de betekenis van haakjes over evenals de wortelbalk (zetters hebben hiermee echter grote problemen). Het lijkt verder alsof de Nederlander zich houdt aan de volgende tot nu toe ongeschreven "regels":

- 1 Als argument van de lgc-functies wordt beschouwd
 - a de gehele term die erachter staat, tenzij
 - b in die term weer een lgc-functie voorkomt, in dat geval wordt als ar-

gument beschouwd de term tot aan die nieuwe lgc-functie; tenzij

- c de term achter een goniometrische functie een cyclometrische functie bevat of andersom, in dat geval neemt men toch de gehele term (weer met inachtneming van b).

bv.: $\sin 2k\pi = \sin (2k\pi)$

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin (\alpha) \sin (\beta)$$

$$\sin 2 \arccos \frac{1}{2} = \sin (2 \cdot \arccos \frac{1}{2}).$$

- 2 Men trekt de wortel uit de gehele term achter het wortelteken, tenzij daarin weer een wortelteken voorkomt. In dat geval trekt men slechts de wortel uit alles tot aan het tweede wortelteken.

bv.: $\sqrt{2a} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{2\sqrt{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}.$$

(Schrijver dezes heeft overigens veel bedenkingen bij deze "regels". Tenslotte wordt met $\sqrt{2a}$ soms bedoeld $2^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ en met $\sqrt{2A}$ soms $2^{\frac{1}{2}} \cdot A$. Dit laatste niet volgens "regel" 2). De pretentie van de wiskundige dat zijn formules internationaal leesbaar zijn wordt overigens ook geweld aangedaan, doordat de regel Machtsverheffen, Vermenigvuldigen, Delen, Worteltrekken, Optellen en Aftrekken slechts in Indonesië en Nederland onderwezen wordt. In sommige andere landen wordt de "Algoritme" aangehouden: Machtsverheffen, Vermenigvuldigen en Delen, Optellen en Aftrekken. (Wat er met het worteltrekken en funktieberekenen gebeurt is de schrijver niet bekend). Maar dat is niet alles. In Engeland worden de volgende formules niet als gelijk beschouwd: a/bc en $a/b \cdot c$.

Blijkbaar wordt bij het ontbreken van de vermenigvuldigingspunt het vermenigvuldigen van a en b niet als een bewerking beschouwd.

Bovenstaande overwegingen zijn de schrijver aanleiding te pleiten voor een formulering van de uitwerkingsregels. Zou de nomenclatuurcommissie in deze zaak een initiatief kunnen nemen?

Bijeenkomsten

Op veler verzoek organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op woensdag 28 mei a.s. (in Heerenveen op donderdag 29 mei a.s.) in elke m.a.v.o.-inspectie een bijeenkomst ter bespreking van de normen openwerk wiskunde m.a.v.o.-4 en m.a.v.o.-3.

Tijdens deze bijeenkomsten zullen bovendien de opgaven besproken worden. De gemaakte op- en aanmerkingen worden opgenomen in een verslag, dat de Commissie Vaststelling Opgaven zal worden aangeboden.

De leden van de Vereniging hebben inmiddels uitvoerige informatie omtrent e.e.a. ontvangen.

Over het aantal afbeeldingen van V op W , II

P. W. H. LEMMENS

Utrecht

In het februari-nummer van *Euclides* (jrg. 49 (1973/1974), pag. 214–220) is een artikel verschenen van de hand van Dr. W. Burgers, waarin formules voor de in de titel bedoelde aantallen worden afgeleid.

Hier wil ik laten zien dat deze formules ook kunnen worden afgeleid met combinatorische methoden. Voor het gemak neem ik de terminologie van Dr. Burgers over.

Zij $V = \{1, 2, \dots, n\}$ en $W = \{1, 2, \dots, k\}$; dan geeft A_k^n het aantal surjectieve afbeeldingen van V op W aan. Vanzelfsprekend is $A_k^n = 0$ als $k > n$.

Laat S de verzameling van alle surjecties van V op W aanduiden. We kunnen S opsplitsen in disjuncte deelverzamelingen $S_1, \dots, S_k$, waarbij S_i bestaat uit die surjecties die $1 \in V$ overvoeren in $i \in W$. Door de elementen van W anders te nummeren, zien we direct in dat alle S_i evenveel elementen bevatten. We kunnen ons dus beperken tot S_1 . In S_1 kunnen we twee complementaire deelverzamelingen onderscheiden, S'_1 en S''_1 . Hierbij wordt S'_1 gevormd door de afbeeldingen uit S_1 die $V \setminus \{1\}$ afbeelden op $W \setminus \{1\}$, en S''_1 door de afbeeldingen uit S_1 die $V \setminus \{1\}$ afbeelden op W . S'_1 bestaat dus uit die surjecties van V op W die alleen $1 \in V$ overvoeren in $1 \in W$, terwijl de surjecties uit S''_1 behalve 1 nog tenminste een ander element van V in $1 \in W$ overvoeren.

Elementen van S'_1 zijn te identificeren met surjecties van $\{2, \dots, n\}$ op $\{2, \dots, k\}$ en elementen van S''_1 zijn te identificeren met surjecties van $\{2, \dots, n\}$ op $\{1, 2, \dots, k\}$. Bijgevolg stellen we vast

$$S'_1 = A_{k-1}^{n-1}, \quad S''_1 = A_k^{n-1} \text{ en } S_1 = A_{k-1}^{n-1} + A_k^{n-1}.$$

Bovendien weten we uit het voorgaande dat S in feite bestaat uit k kopieën van S_1 . Hieruit volgt onmiddellijk de recurrente betrekking

$$(1) \quad A_k^n = k(A_{k-1}^{n-1} + A_k^{n-1}) \text{ voor } k, n \geq 2,$$

welke formule we ook vinden bovenaan pag. 219 in het artikel van Dr. Burgers. We kunnen nu de getallen A_k^n in een matrix plaatsen, waarbij A_k^n verschijnt op het snijpunt van de n -de rij met de k -de kolom. Daar we de eerste rij en de eerste kolom kennen (immers $A_1^1 = 1$ en $A_k^1 = 0$ voor $k > 1$), kunnen we de gehele matrix rij voor rij invullen met behulp van betrekking (1).

Ook andere formules voor A_k^n kunnen combinatorisch afgeleid worden. Beschouw bijvoorbeeld de partitie van S die ontstaat door te kijken naar het aantal originelen van $1 \in W$. Dit aantal moet minstens 1 en kan maximaal $n - k + 1$ zijn (anders houden we niet genoeg andere elementen van V over om een surjectie op W te maken). Op C_i^n manieren kan men i originelen van

$1 \in W$ in V kiezen. Bij iedere keuze kan men de surjecties die hieraan voldoen interpreteren als surjecties van een $(n-i)$ -tallige verzameling op $\{2, \dots, k\}$. Hun aantal is dus A_{k-1}^{n-i} . Als resultaat van deze beschouwing krijgen we de formule

$$(2) \quad A_k^n = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_i^n A_{k-1}^{n-i}$$

In wezen staat deze formule, voor het speciale geval $k = 4$, ook op pag. 216 van Dr. Burgers' artikel.

Nog een andere formule kunnen we verkrijgen door te kijken naar *alle* afbeeldingen van V naar W (dus niet alleen de surjectieve). Hun aantal is k^n . Deze collectie afbeeldingen kan men indelen naar de grootte van het beeld van V in W . Als $k \leq n$ is, komt iedere deelverzameling P van W voor als beeld van een aantal afbeeldingen. In feite zijn dit juist de afbeeldingen van V op P . Als P bestaat uit i elementen, is hun aantal dus A_i^n . Bovendien kunnen we op C_i^k manieren een verzameling van i elementen uit W kiezen. Er ontstaat de volgende formule

$$(3) \quad k^n = \sum_{i=1}^k C_i^k A_i^n \quad (\text{als } k \leq n) \quad k$$

Als $k > n$ is, dan kunnen uiteraard hoogstens n -tallige deelverzamelingen van W in aanmerking komen. In dit geval krijgen we

$$(3') \quad k^n = \sum_{i=1}^n C_i^k A_i^n \quad (\text{als } k \geq n). \quad n$$

Ook de 'algemene' formule

$$A_k^n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_i^k (k-i)^n$$

(zie pag. 218 van Dr. Burgers' artikel) is af te leiden met combinatorische methoden. Daar deze afleiding echter subtieler en abstracter is dan bovenstaande beschouwingen, wil ik er hier niet verder op ingaan.

Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
Utrecht

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

XCIII *Ingeschreven driehoeken*

1 *Inleiding.* Twee driehoeken $A = A_1 A_2 A_3$ en $B = B_1 B_2 B_3$ zijn gegeven; beide met genummerde hoekpunten. Kan men B zo plaatsen dat B_1 op de rechte $A_2 A_3$, B_2 op $A_3 A_1$ en B_3 op $A_1 A_2$ ligt? Wij zullen dan zeggen dat B in A is *ingeschreven*.

Het is duidelijk dat het antwoord niet altijd bevestigend is. Zijn de zijden van B elk klein ten opzichte van die van A dan zal zo'n stand niet mogelijk zijn. Het omgekeerde lijkt minder ongunstig: van een 'kleine' driehoek kunnen ingeschreven driehoeken heel wel 'groot' zijn. Het klinkt paradoxaal, maar men kan blijkbaar beter een grote driehoek in een kleine plaatsen dan een kleine in een grote.

Wij zullen trachten een criterium te vinden — en wel een *noodzakelijke en voldoende voorwaarde* — dat over de mogelijkheid der gevraagde positie beslist.

In de verzameling der in A beschreven driehoeken komen er voor met oppervlakte nul (naaldvormige, B_1 op A_2 , B_2 en B_3 in A_1) alsmede zulke met willekeurig grote oppervlakte.

Een vergelijking tussen de oppervlakten F_a en F_b van A en B zal dus geen volledig uitsluitel kunnen geven. (Wij zullen later zien dat men er wel een *voldoende voorwaarde* mee kan redigeren.)

Met de *omtrek* van een in A beschreven driehoek ligt het anders; die heeft een minimum waarde en de omtrek van B moet dus minstens gelijk zijn aan dat minimum, wat althans een *noodzakelijke* conditie oplevert. Voor een driehoek A waarvan geen der hoeken groter is dan $\frac{2}{3}\pi$ wordt, zoals bekend, het minimum aangenomen door de voetpuntdriehoek van zijn hoogtepunt. Het is duidelijk dat een driehoek B met een omtrek die een weinig groter is alleen dan in A zal passen als zijn gedaante weinig van die van de voetpuntdriehoek verschilt. Uit alleen de omtrek van B zal men dus geen voldoende voorwaarde kunnen afleiden.

Na deze voorlopige overwegingen lijkt het wel duidelijk dat wij ons niet zul-

len kunnen beperken tot zulke globale begrippen als de oppervlakte of de omtrek, maar dat ook de gedaante van A en B van belang is. Het criterium dat wij gaan afleiden zal dan ook een betrekking blijken waarin de zijden a_i en b_i van A en B alle zes voorkomen. Zij kan het eenvoudigst geformuleerd worden met behulp van een begrip dat wij, om het latere betoog niet te onderbreken, in de volgende paragraaf behandelen.

2 De *gemengde oppervlakte*. Voor de oppervlakte F van een driehoek met zijden p_i geldt

$$16F^2 = -p_1^4 - p_2^4 - p_3^4 + 2p_2^2 p_3^2 + 2p_3^2 p_1^2 + 2p_1^2 p_2^2. \quad (2.1)$$

Wij voeren voor de driehoeken A en B de uitdrukking F_{ab} in, gedefinieerd door

$$16F_{ab}^2 = -a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 + (a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2) + (a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2), \quad (2.2)$$

waarvan de gedaante door (2.1) geïnspireerd is: het is de polaire uitdrukking van a_i^2 en b_i^2 ten opzichte van (2.1) opgevat als een kwadratische vorm in de variabelen p_i^2 .

Men heeft ten duidelijkste $F_{ab} = F_{ba}$, $F_{aa} = F_a$, $F_{bb} = F_b$.

Uit (2.2) volgt

$$\begin{aligned} 16F_{ab}^2 &= 2a_2^2 b_3^2 + 2a_3^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - a_2^2 b_3^2 - a_3^2 b_2^2 + \\ &+ a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= 2a_2^2 b_3^2 + 2a_3^2 b_2^2 - (-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= 2(a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Daar $|\cos \alpha_1 \cos \beta_1| < 1$ volgt daaruit $F_{ab}^2 > 0$, zodat F_{ab} een reëel getal is; het (positieve) getal F_{ab} zullen wij de *gemengde oppervlakte van A en B* noemen. Het is in deze rubriek al eerder aan de orde geweest.¹

Uit (2.3) volgt

$$\begin{aligned} 8(F_{ab}^2 - F_a F_b) &= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \\ &- 2a_2 a_3 b_2 b_3 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 = a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 \cos(\alpha_1 - \beta_1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

zodat

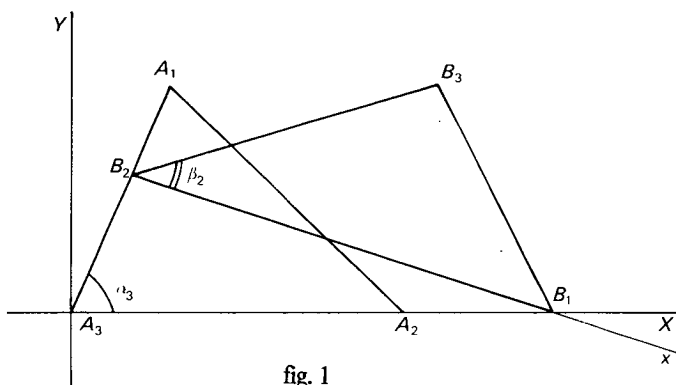
$$F_{ab}^2 \geq F_a F_b, \quad (2.5)$$

waarbij het gelijkteken alleen geldt als $a_1 = \beta_1$ en $a_2 b_3 = a_3 b_2$, dus als

$A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$ gelijkvormig zijn; (2.5) drukt uit dat de gemengde oppervlakte van A en B minstens gelijk is aan het meetkundig gemiddelde van de oppervlakten van A en van B .

3 De gevraagde conditie. De meest direkte methode om onze voorwaarde af te leiden lijkt de volgende. Wij plaatsen B_1 op A_2A_3 en B_2 op A_3A_1 , uiteraard zo dat $B_1B_2 = b_3$. De rechte B_1B_2 is dan nog veranderlijk en het met B_1B_2 verbonden vlak voert een beweging uit waarbij twee punten op gegeven rechten blijven. Dat is een bekende toestand: elk punt van het bewegende vlak beschrijft dan in het vlak van A een (al of niet ontaarde) *ellips*. De door B_3 doorlopen ellips heeft twee snijpunten met A_1A_2 ; zijn zij reëel dan is het *wèl* (en op twee manieren) en zijn zij imaginair dan is het *niet* mogelijk om B in A te plaatsen.

Wij gaan deze gang der gedachten in analytische termen vertalen.



In het vlak van A wordt (fig. 1) het rechthoekig assenstelsel OXY met O in A_3 en OX langs A_3A_2 aangenomen; de vergelijkingen van A_3A_1 en van A_1A_2 zijn dan respectievelijk $X \sin a_3 - Y \cos a_3 = 0$, $Xa_2 \sin a_3 + Ya_3 \cos a_2 - a_1a_2 \sin a_3 = 0$. (3.1)

In het vlak van B voeren wij het assenstelsel oxy in met o in B_2 en ox langs B_2B_1 ; dan is $B_1 = (b_3, 0)$ en $B_3 = (b_1 \cos \beta_2, b_1 \sin \beta_2)$.

Het verband tussen OXY en oxy wordt weergegeven door

$$X = x \cos \varrho - y \sin \varrho + p, Y = x \sin \varrho + y \cos \varrho + q, \quad (3.2)$$

Als B_1 op A_3A_2 moet blijven en B_2 op A_3A_1 , dan volgt daaruit

$$b_3 \sin \varrho + q = 0, p \sin a_3 - q \cos a_3 = 0, \quad (3.3)$$

zodat (3.2) wordt

$$X = x \cos \varrho - (y + b_3 \cot a_3) \sin \varrho, Y = (x - b_3) \sin \varrho + y \cos \varrho, \quad (3.4)$$

wat dus met q als parameter de voorstelling is van de door het punt (x, y) beschreven ellips. De door B_3 gevolgde baan is derhalve

$$\begin{aligned} X &= b_1 \cos \beta_2 \cos q - (b_1 \sin \beta_2 + b_3 \cot \alpha_3) \sin q, \\ Y &= -b_2 \cot \beta_1 \sin q + b_1 \sin \beta_2 \cos q. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De snijpunten met $A_1 A_2$ voldoen aan de volgende vergelijking voor q :

$$P_1 \cos q + P_2 \sin q + P_3 = 0, \quad (3.6)$$

waarbij

$$\begin{aligned} P_1 &= b_1 (a_2 \sin \alpha_3 \cos \beta_2 + a_3 \cos \alpha_2 \sin \beta_2), \\ P_2 &= b_1 (-a_2 \sin \alpha_3 \sin \beta_2 + a_3 \cos \alpha_2 \cos \beta_2) - a_1 b_3, \\ P_3 &= -a_1 a_2 \sin \alpha_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Deze vergelijking heeft alleen dan reële wortels als

$$P_1^2 + P_2^2 - P_3^2 \geq 0, \quad (3.8)$$

dus als

$$\begin{aligned} &b_1^2 (a_2^2 \sin^2 \alpha_3 + a_3^2 \cos^2 \alpha_2) + 2a_1 b_1 b_3 (a_2 \sin \alpha_3 \sin \beta_2 - a_3 \cos \alpha_2 \cos \beta_2) \\ &+ a_1^2 b_3^2 - a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 \geq 0, \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} &a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + 2a_1 a_2 \sin \alpha_3 \cdot b_1 b_3 \sin \beta_2 - \\ &- a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

zodat wij na toepassing van (2.3) het volgende resultaat hebben bereikt: *de driehoek $B_1 B_2 B_3$ kan dan en slechts dan in de driehoek $A_1 A_2 A_3$ worden beschreven als*

$$2F_{ab}^2 + 2F_a F_b - F_a^2 \geq 0; \quad (3.10)$$

hierin stellen F_a en F_b de oppervlakten van A en B voor en F_{ab} hun door (2.2) gedefiniëerde gemengde oppervlakte.

4 Enige voorbeelden. Als $F_b \geq F_a$ is altijd aan (3.10) voldaan: elke driehoek kan geplaatst worden in elke andere met een kleinere oppervlakte.

Volgens 2.5 is het linkerlid van 3.10 minstens gelijk aan F_a ($4 F_b - F_a$); de conclusie (die de vorige verscherpt) luidt: opdat B in A beschreven kan wor-

den is het voldoende dat $F_b \geq \frac{1}{4} F_a$.

Als A en B gelijkvormig zijn is $F_{ab}^2 = F_a F_b$; dus, opdat B beschreven kan worden in de gelijkvormige driehoek A is nodig en voldoende dat $F_b \geq \frac{1}{4} F_a$.

Bij onze afleiding is ondersteld dat de zijlijnen van A verschillend zijn; zij geldt echter ook nog wel als B ontaard is. Is $\beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \pi/2, b_1 = 0, b_2 = b_3 = d$, dan is $2F_{ab}^2 = \frac{1}{4} a_1^2 d^2$ en (3.10) eist $a_1^2 d^2 \geq 4F_a^2$ wat ook rechtstreeks blijkt. Voor B met $\beta_1 = \pi, \beta_2 = \beta_3 = 0, b_1 = b_2 + b_3$ is de conditie wat minder doorzichtig. Een ander speciaal geval is dat waarbij A ontaard is in drie rechten door één punt; het antwoord kan door een limietovergang uit 3.7 volgen ($a_i = k a'_i, a'_i$ vast, $k \rightarrow 0$) en er zijn altijd twee oplossingen. Dit blijkt ook uit de meetkundige redenering: de door B_3 beschreven ellips moet nu gesneden worden met een rechte door zijn middelpunt. De conclusie luidt: een driehoek B kan altijd zo worden geplaatst dat elk hoekpunt op een aangewezen van drie gegeven concurrente rechten ligt. Een nog verder gaande specialisatie is die waarbij de door B_3 beschreven ellips ontaard is (wat zich voordoet als $\beta_3 = a_3$ en als $\beta_3 = \pi - a_3$); dan is er één oplossing of er zijn oneindig veel mogelijke standen.

5 Een andere methode. Om B in A te plaatsen hebben wij boven een, men zou kunnen zeggen primitieve methode gevolgd: B_1 en B_2 op hun rails plaatsen en dan met $B_1 B_2$ zo manoeuvreren dat ook B_3 goed valt. Eleganter, meer symmetrisch maar ook meer voorkennis vergend, is de volgende procedure, hier slechts schetsmatig gegeven. Is B in A beschreven dan gaan de cirkels $A_1 B_2 B_3, A_2 B_3 B_1$ en $A_3 B_1 B_2$ door één punt P . Van dit punt uit ziet men $A_2 A_3, A_3 A_1$ en $A_1 A_2$ respectievelijk onder de hoeken $a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2, a_3 + \beta_3$ en deze eigenschap stelt in staat om op unieke wijze P te bepalen als de hoeken van B gegeven zijn. (Zijn één of twee hoeken $a_i + \beta_i$ groter dan π dan ligt P buiten A). Bij alle onderling gelijkvormige driehoeken B vindt men hetzelfde punt P en dit punt is gelijkvormigheidscentrum voor het stelsel S van in A beschreven driehoeken van gegeven vorm. Elke driehoek uit S kan uit elke andere worden verkregen door een rotatie om P gepaard met een bepaalde strekking van P uit. Is P bekend dan moet men een voorlopige driehoek uit S nog zo vergroten dat zijn oppervlakte de waarde F_b heeft. In S is echter één driehoek met minimale oppervlakte: de voetpuntdriehoek van P . Daaruit volgt dat een oplossing niet altijd mogelijk is, F_b kan te klein blijken. Onze conditie kan dus ook als volgt worden geredigeerd: F_b moet minstens gelijk zijn aan de oppervlakte F_m van de voetpuntdriehoek van het door de hoeken van B vastgelegde punt P . Is $F_b > F_m$ dan zijn twee standen mogelijk.

1) *Verscheidenheden* LXXV: De gemengde oppervlakte van twee driehoeken, Euclides 44 (1968-69), 304-310.

Mogelijkheden voor vaksecties

H. G. B. BROEKMAN

Utrecht

Naar aanleiding van een bezoek aan een aantal Middle en High Schools in New York en New Jersey ben ik mij wat meer gaan verdiepen in de mogelijkheden voor vaksecties (vakgroepen) om het onderwijs van binnenuit te verbeteren. De onderliggende filosofie daarbij is, dat we de grootste kans op verbetering van het onderwijs hebben, daar waar door de leraren zelf de verbetering aangepakt wordt.

Dat daartoe eventueel de structuur van het onderwijssysteem gewijzigd dient te worden en de leraren deskundige hulp van buiten zo nu en dan nodig zullen hebben, doet hieraan niets af.

Als voorbeelden van zo'n vernieuwing van binnenuit wil ik noemen de 'individualized algebra course' en de rol van de 'sectievoorzitter' aan de Lake Wood High School en de Lake Wood Middle School te Lake Wood, New Jersey.

Individualized Algebra Course

Streaming en setting (groepering van leerlingen volgens veronderstelde kwaliteiten) geeft een homogeniteit in de groepen, die vaak slechts schijn is, zeker als het aantal leerlingen van een bepaald jaar niet erg groot is.¹

Ook aan de Lake Wood High School en Middle School was men tot deze conclusie gekomen.

Men liet het echter niet bij de erkenning dat effectief klassikaal lesgeven aan leerlingen met zeer uiteenlopende capaciteiten en interesses (d.w.z. in één groep, in hetzelfde tempo en met dezelfde leerstof) niet goed mogelijk is, maar men zocht naar andere instructie- en groeperingsvormen.

Hierbij werd als belangrijkste uitgangspunt genomen dat alle kinderen tot hun 11e schooljaar wiskundeles 'genoten' dienen te hebben (volgens een federale wet tot hun 10e schooljaar) en dat alle leerlingen het basisprogramma moeten kunnen doorwerken als ze daarvoor voldoende tijd krijgen en de juiste begeleiding hebben.

Dit laatste houdt in een juiste keuze van instructiemateriaal en instructiemethode.

Ten behoeve hiervan werd – als eerste stap – door een aantal leraren (onder leiding van de sectievoorzitter) de algebraleerstof van de eerste twee jaren van de High School ingedeeld in eenheden die door de leerlingen al dan niet zelfstandig doorgewerkt kunnen worden.

Het bijzondere van deze indeling bestaat hierin dat bij elke leerstofeenheid aangegeven werd uit welke leerboeken het betreffende onderdeel bestudeerd kon worden.

De leerlingen kunnen zelf kiezen uit een geprogrammeerde instructie, een werkboek, een boek met veel tekst en uitleg, een theorieboek met daarnaast een opgavenboek en een boek met in hoofdzaak opgaven.

De meeste leerlingen werken elke dag een uur individueel en/of in kleine groepjes aan hun taak in een groot bibliotheek-achtig lokaal waarvan een deel – enigszins afgeschat door losse, lage kasten – benut kan worden voor groepsinstructie (leergesprek) indien daar behoefte aan is. Zowel tussentijds als aan het eind van elke leerstofeenheid kunnen leerlingen zichzelf toetsen met behulp van de klaar liggende tests, die op verzoek (van een leerling) na afloop samen met de verantwoordelijke leraar doorgepraat wordt.

Voorbeeld:

6.9 More About Products of Positive and Negative Numbers

Dolciani (Part I): Pgs. 286–289

Schaum's: Pg. 60 Section 6.4

Amsco: Pg. 127–Case 4

Pgs. 128–132

Pre Algebra: Pgs. 256–259

SRA Kit: Integers–Card 12a

Singer Kit: Block 3 can be used for sections 8–12

6.10 Products of Negative Numbers

Dolciani (Part I): Pg. 28–293

Amsco: Pg. 127 (Case 4) Pg. 128

Manheimer: Pg. 50–53

Schaum's: Pgs. 255–256 (Up to Properties of Mult.)

SRA Kit: Integers–Cards 10a, 11a

Singer Kit: Block 3 can be used for sections 8–12

De wiskundeleraren aan deze school hebben niet de verwachting dat zij door wijziging van een deel van de didactiek (doelstellingen, inhoud, methodiek, veranderde toetsingsmethoden, etc.) een gemakkelijkere baan hebben, wel dat zij een bijdrage leveren aan het wiskundig denken van hun leerlingen. Dit laatste wordt tegengewerkt door de inhoud van de leerboeken en de wijze van examineren. Dat ontgaat hen beslist niet, maar het is eerder een stimulans om op de ingeslagen weg verder te gaan, dan een reden om maar te stoppen met hun pogingen om van het wiskunde-onderwijs voor leerlingen én leraren een zinvolle en prettige bezigheid te maken.

Ge signaleerde problemen die nog slechts gedeeltelijk opgelost zijn

- a de gebruikte leerboeken bevorderen vaak het produktgericht werken van de leerlingen en te weinig het procesgericht werken².
- b het resultaat blijkt ook nu sterk afhankelijk van de man/vrouw voor (in?) de klas.
- c de verschillen tussen de leerlingen zijn erg groot door het verschil in studievaardigheid als zij de High School binnenkomen.

Sectievoorzitter³

In het voorgaande is gesteld dat de sectievoorzitter de leiding had bij het uitzoeken van de leerstofeenheden en het vervaardigen van de leerlingen – ‘reisgids’ (dit alles gebeurde door een groepje enthousiaste leraren in de vakantiemaanden tegen extra betaling door het schoolbestuur). Dit is beslist niet zijn enige taak: Verder moet deze – door de gezamenlijke wiskundeleraren van de Middle School en de High School gekozen – man zorgen voor:

- a eenheid in de wiskundesecties van de Middle en de High School.
- b rust in de wiskundesecties van de Middle en de High School.
- c rust bij het uitvoeren van de diverse proefnemingen (dit betekent onder meer dat leraren inbrengen datgene wat ze kunnen en willen, en daardoor niet het gevoel krijgen boven hun macht te werken).
- d didaktische begeleiding van collega's.
- e aanschaffen van de benodigde schoolboeken en van studieboeken voor leraren.
- f contacten met de toeleverende basisscholen.

Samen met de sectievoorzitters van de andere secties (die door het goed draaien van de wiskundesectie ook enthousiast werden) werd ervoor gezorgd dat de zaken op school zo georganiseerd waren, dat er niet alleen een veilig klimaat voor de leerlingen bestaat^{4, 5}, maar door de pedagogisch didaktische begeleiding van de leraren ook voor deze laatsten.

Van belang hierbij is misschien wel het feit dat voor de bijscholing zelf, binnen de school gezorgd wordt, eventueel met incidentele hulp van buiten⁶.

Opmerkingen

1 Ik wil er nogmaals op wijzen, dat het niet mijn bedoeling is het Amerikaanse onderwijs als systeem te verheerlijken, maar een positief geluid te laten horen t.a.v. een aantal punten die m.i. binnen het Nederlandse onderwijs-systeem goed denkbaar zouden zijn.

2 Het lijkt mij zeer wel mogelijk dat in Nederland de hiervoor genoemde punten reeds in praktijk gebracht worden, maar dat dit nog niet gepubliceerd is. In dat geval lijkt publicatie mij zeer gewenst.

Noten

1 Zie o.a. Drs. P. de Koning ‘Interne differentiatie’, Muusses, Purmerend 1973 en/of Drs. P. de Koning ‘Interne differentiatie’, Pedagogische Studiën, jrg. 51, nr. 3 (maart 1974).

2 Zie in verband hiermee het hoofdstuk Doelstellingen bij J. van Dormolen ‘Didactiek van de Wiskunde’, Oosthoek 1974.

3 Zie in verband hiermee o.a. de aanbevelingen 2 en 6 in ‘De Amerikaanse High School, impressies van vijf Nederlandse schoolleiders’, Wolters-Noordhoff n.v., Groningen 1969.

4 Zie (3) aanbevelingen 17 en 18.

5 Zie een opmerking hierover op pag. 5 van ‘De eed in de kaatsbaan; alsnog . . . Hoe krijgt men een greep op het onderwijsbeleid’, door Ton Elias, COCMA publ. nr. 17.

6 Als verheugend verschijnsel werd geconstateerd bij de inschrijving voor de regionale werkgroepen van de Didactiek Cie. van de NVvWL dat van een aantal scholen de gehele wiskundesectie zich aanmeldde.

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Praxis der Mathematik XVI¹⁻⁶, januari 1974-juni 1974.

Kl. Wigand, Bewusste Übertreibung als nützliche Denkhilfe;
Kl. Wigand, Aufgaben der 1. Runde im IV. Bundeswettbewerb Mathematik;
G. Schostack, Computerübungen.

H. Lorenz, Die Eikurve;
G. Hoyer, Binomial-Koeffizienten;
R. Rose, Singularstellen elementarer Funktionen.

H. Klement, Erarbeitung des Stetigkeitsbegriffs in endlicher Mengen?
H. Gorenflo, Warum einfach, wenn 's auch schwierig geht?
G. Meystre, Die Unabhängigkeit der Verbandsaxiome;
H. Rössler, Klasseneinteilungen einer endlichen Menge.

Auli's Förderpreis Mathematik 1974;
H. Gorenflo, Untergeordnete Gleichheitszeichen;
J. E. Hoffmann†, Nullhaltige Zahlentripel;
J. E. Hoffmann†, Rösselsprünge in Quadraten mit 6^2 Zellen;
W. Köhnen, Riemann-Integrierbarkeit und Stetigkeit;
L. Kienle, Die Eins-Stelle des natürlichen Logarithmus;
D. Rempis, Zur Einführung des Wurzelbegriffes.

W. Janke, Iterationsverfahren zur Berechnung höherer Wurzeln;
R. Domine, Eine Verallgemeinerung der regulären Matrizen;
Bundeswettbewerb Mathematik, 1973-1974; 2. Runde;
M. Folkerts, 18. Mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach.

G. Schostack, Elementare Maschinenprogramme;
Fr. Haeberlen, Integralfassung der Quotientenregel;
Fr. Hohenberg, Axonometrische Bilder ohne Konstruktionslinien;
Fördervereinstagung in Kiel, Ostern 1974.

School Science and Mathematics; 647-653, juni 1973-maart 1974.

R. M. DiVincenzo, Measurement science;
B. H. Litwiller e.a., The two-divisor problem;
J. O. Schnur e.a., Knowledge of certain geometric concepts by students on leaving elementary school;
R. Willcutt, New challenges using Cuisenaire rods.

J. Niman e.a., Teaching mathematical concepts through artistic forms;
G. Kulm, Pi, polygons and probability;
L. G. Callahom e.a., Task-analysis procedures in mathematics instruction of achievers and underachievers;
J. M. Macey, Drill? deadly? never!

G. W. Bright, The metric system: a master of disguise;
D. C. Blumenthal, Science, politics and social change.

F. D. Stekel, Plus and minus: a means of examining personal viewpoints;

D. S. Balka, Early experiences in teaching secondary school mathematics;
 R. F. Wardrop, Mathematics in everyday life;
 P. Schoecraft, The foot, quart and pound collide with computation, U.S. goes metric;
 M. D. Piburn, The content and structure of 'time, space and matter'.

E. Sowell, Another look at materials in elementary school mathematics;
 L. W. Bahe, Finding logarithms and antilogarithms with a single calculator;
 B. H. Littwiller e.a., Diagonal sums: practice, discovery and proof;
 E. Carlisle, Non-decimal bases circa 1890.

Mathematical Gazette, 401–403; oktober 1973–maart 1974.

C. T. Daltry, Difficulties: a voice from the past;
 C. A. R. Bailey e.a., Mathematics for social science students;
 R. H. Fox, Statistics projects outside the classroom;
 J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns;
 J. B. Morgan, The international baccalaureate;
 R. Watson, Semi-regular tessellations;
 E. A. Maxwell, Thomas Arthur Alan Broadbent, 1903–1973.

D. A. Quadling, The perennial problem of geometry;
 A. G. Howson, Milestone or millstone?
 J. V. Armitage, The place of geometry in a mathematical education;
 G. Pickert, Affine planes, an example of research on geometric structures;
 S. N. Collings e.a., Reflections on a triangle;
 E. R. Baylis, Knots: a practical application of group theory;
 F. W. Flisher, Main mathematics in colleges of education.

W. J. Langford, The sieve again;
 K. R. McLean, Divisibility properties of binomial coefficients;
 S. N. Collings, Magic cubes and hypercubes;
 P. Shiu, A new construction of the real number.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht; XXVI⁵–XXVII³; juli 1973–april 1974.

K. Steinbuch, Auf dem Weg zu einer kybernetischen Anthropologie;
 G. Walther, Zur Axiomatik der natürlichen Zahlen;
 K. Greger, Einige mathematische Modelle biologischen Wachstums;
 K. H. Hürten, Didaktische Analyse des Satzes von Stone.

Chr. Schlier, Computer in die Schule, aber wie?
 H.-J. Rein, Ein Iterationsverfahren dritter Ordnung zur numerischen Berechnung der n -ten Wurzel;
 J. Schwarze, Elastizitäten von Funktionen;
 W. Streb, Spatinhalte im 2- und 3-dimensionalen metrischen Raum.

M. Wagenschein, Der Vorrang des Verstehens;
 H. Hering, Zur Mathematisierung des 'Turm von Hanoi'-Spiels;
 W. Kosswig, Der Satz von Bayes als Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten;
 D. Denneberg, Elementare Behandlung der Ziffersysteme und der Restklassenringe $\mathbb{Z}_n$ in der Schule.

W. Kuhn, Kopernikus- ein Revolutionair?
 G. Becker-Bender e.a., Die mathematische Theorie der Spiele;
 H. Lindner, Zehn Jahre Programmierte Instruktion;
 I. Weidig, Zahlbereichserweiterungen in didaktischer Sicht;
 K. Kress, Digitale Elektronik.

D. Laugwitz, Geometrie in der heutigen Mathematik;
K. Greger, Zufallssiebe und Primzahlen;
M. Buth, Konstruktive Einführung in die formale Logik;
Fr. Kubli, Die Bedeutung der Psychologie Piagets für den Physikunterricht.

W. Werner, Über eine algebraische Darstellung des Aussage- und Quantorenkalküls der zweiwertigen Logik;

Fr. Padberg, Teilbarkeitsregeln in b -adische Stellenwertsysteme und die Kongruenzrelation;
H. Koch, Anmerkungen zum Homologiebegriff;

W. G. Felmy, Zur Einführung des Zahlbegriffs in Klasse 5 des Gymnasiums.

H. J. Burscheid, Zur Behandlung der Primzahlzerlegung;

Kl. Dormanns, Operationen mit Relationen;

K. Schwalbe, Zum Mathematikunterricht in den Grundschulen in Schweden.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU)

27. Jahrg., Heft 5 (15. Juli 1974)

De inhoud van dit nummer van MNU is onder meer gewijd aan de 65e jaarvergadering van de Duitse vereniging tot bevordering van het wiskundige en natuurwetenschappelijke onderwijs. In 1974 werd deze jaarvergadering gehouden te Kiel.

In het openingswoord van de voorzitter (OStD Dr. Erwin Baumann) wordt onder meer aandacht geschonken aan de onrust die er in Duitsland ontstaan was door het onderwijs in verzamelingenleer in de basisschool. Conclusie: overdrijvingen afremmen, maar niet het kind met het badwater weggooien. Verder komen in dit openingswoord nog aan de orde: de toelating tot de universiteiten (Numerus Clausus) en de lerarenopleiding. Erg optimistisch is de voorzitter niet, getuige zijn verzuchting 'Überhaupt scheint Entwertung das Motto unserer Gegenwart zu sein'.

De 'Festvortrag' op dit congres draagt als opschrift: Emanzipation. Leerformel oder pädagogischer Schlüsselbegriff?

Spreker was Prof. Dr. Theodor Wilhelm, Kiel.

Het is niet gemakkelijk dit uitvoerige artikel kort samen te vatten. Er spreekt een grote verontusting uit. Hoewel dat natuurlijk niet eerlijk is ten opzichte van de auteur geef ik als karakterisering van het artikel alleen de laatste alinea:

Wer heute in der Bundesrepublik an den neomarxistischen emanzipatorischen Glaubenssätzen Kritik übt, gefährdet seine wissenschaftliche Karriere. Aus diesem Grund ist eine solche Kritik den jüngeren Kollegen in Schule und Hochschule existenziell nicht zuzumuten. Sie gehört zu den Privilegien derjenigen Alten, die nichts mehr zu gewinnen und nichts mehr zu verlieren haben. Ich danke Ihnen, dass Sie einem solchen zugehört haben.

Een interessant artikel in dit tijdschrift is gewijd aan het experiment in Engelse basisscholen op het terrein van de 'science'. Het wordt ontwikkeld aan de School of Education van de universiteit van Bristol. Zowel de Nuffield Foundation als het Scottish Education Department hebben hun aandeel in deze ontwikkeling.

G. Krooshof

Dit nummer is bijzonder prettig leesbaar.

Het eerste artikel van A. Warrinnier: 'Initiale en finale topologieën' richt zich tot lezers die speciaal in de topologie geïnteresseerd zijn. Dit aantal zal onder de wiskunde-docenten wel sterk groeiende zijn.

Het tweede artikel van D. Joye: 'Over nuldelers in de ring der vierkante matrices' zal iedereen interesseren die les geeft in Wiskunde II in vijfde en zesde leerjaren van het V.W.O. Men kan daarin van alles vinden om het onderwijs in matrices levendiger te maken.

Het derde artikel van Dr. A. de Block: 'Taxonomie van doelstellingen voor het onderwijs in de wiskunde' doet bij oppervlakkige beschouwing wat theoretisch aan. Neemt men zich echter de moeite het geheel door te lezen, dan moet men toch tot de konklusie komen, dat hier een belangrijk werk is verricht. De schrijver stelt heel terecht:

'De ondervinding heeft geleerd dat de inventarisatie en de formulering van de doelstellingen van het te verstrekken onderwijs onoverzichtelijk en moeilijk hanteerbaar is, als men ze niet kan onderbrengen in een relatief beperkt aantal categorieën. Aldus is er een nood aan een classificatie ontstaan, waarin alle doelstellingen vrij gemakkelijk kunnen geplaatst en teruggevonden worden door middel van een aangepaste en doelmatige codering'.

De schrijver onderscheidt eerst vier fasen in het leerproces: achtereenvolgens 1 weten, 2 inzien, 3 toepassen en 4 integreren.

De leerstof onderscheidt hij in

1. feiten, 2. begrippen, 3. relaties, 4. structuren, 5. methodes, 6. attitudes. Vervolgens richt hij zich op de transfermogelijkheid en onderscheidt dan: 1. wiskundige vorming, 2. theoretisch wetenschappelijke vorming, 3. algemene culturele vorming.

Op die manier krijgt hij een driedimensionaal systeem. Hierin betekent bijvoorbeeld: 213 het inzien van feiten geplaatst in het raam van de algemene culturele vorming. Bij de toelichting vindt men: 'inzien dat 0 staat voor 'nul' en 'niets'.

Aan het laatste voorbeeld ziet men, dat het eigenlijke werk nog moet beginnen: het invullen van de vakjes is een reeks van studies op zichzelf. Toch acht ik het een feit van grote betekenis, dat men op deze manier in staat is didaktische studies te verrichten die nu direkt in een groot raam geplaatst kunnen worden.

Het vierde artikel van Respes: 'Propositielogica simuleren' laat zien, hoe men logische uitspraken door middel van schakelingen kan realiseren.

Het vijfde en laatste artikel van G. Bosteels: ' $\cos n\varphi$ in functie van $\cos^k \varphi$ ' laat zien, hoe men met behulp van de formule van de Moivre bijvoorbeeld voor $\cos 9x$ kan schrijven: $256 \cos^9 x - 576 \cos^7 x + 432 \cos^5 x - 120 \cos^3 x + 9 \cos x$. Wie een vorm moet integreren waarin $\cos^9 x$ voorkomt, zal misschien met deze formule erg blij zijn.

P. M. van Hiele

Boekbespreking

Overzicht van de wiskunde voor Havo (Getal en ruimte), K. de Bruin c.s., Tj. W. Noorduijn, ISBN 9011 81115 1. f 8,75. Met trefwoordenregister.

In tegenstelling tot de lijvige series boeken, die men heden ten dage aantreft, is dit een boek, dat uitmunt door beknoptheid. Het wordt niet dikker gemaakt door vraagstukken. Deze worden aan 'methode' en aan leraar overgelaten. Gezien de absolute noodzaak voor elke leerling, een naslagwerk in (blijvend?) bezit te hebben, zal dit, door zeven auteurs met bekwame hand geproduceerde werk, zijn weg heus wel vinden..

Bij mijn kritiek wilde ik de kleinigheden, waarvoor de schrijvers zich persoonlijk mochten interesseren, liever weglaten om mij te beperken tot onvolkomenheden, die ook in andere boeken worden aangetroffen. De bladzijden staan er tussen haakjes achter.

Taal- en tekenkwesties. De zes bladzijden 'Tekens en afkortingen' vormen één van de vele propunten van dit boek, maar juist omdat de hoeveelheid zo groot is, kan men de tekens beter in drie klassen indelen. (1, 6)

1. *Begripstekens* zoals $\triangle$ voor driehoek, waarbij één object te pas komt, het hoekteken (waarom bezigt men niet het duidelijker *Franse* hoekteken met het hoekpunt midden boven de letteraanduiding?)

2. *Relatietekens* zoals $\perp$, waarbij twee objecten te pas komen en

3. *Bewerkingstekens* (operatietekens), waarbij drie objecten een rol spelen, zoals $+$ en het doorsnedeteken.

Ik acht df/dx onjuist, onverschillig of met f een voorschrift of een verzameling bedoeld is (5), ook f is positief (63) en Σf (128). Als er een systeem van acht distributiviteiten is, gaat het niet aan, één van hen met het lidwoord *de* aan te geven (12). Zie ook (16). Wat goed, die korte zin: In (niet: van) een evenredigheid zijn de kruisproducten gelijk (15), maar m.i. niet radicaal genoeg, men late het staattotteren weg (14)

Wiskundige kwesties

Is een verhouding een breuk? (14) Een quotiënt is een geordend getallenpaar met opdracht tot deling. Een breuk is een element van de verzameling $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Een verhouding is een verzameling geordende getallenparen... en een evenredigheid is een uit twee elementen bestaande deelverzameling van een verhouding. Men vergelijk de in Frankrijk gebruikelijke onderscheiding tussen *la somme* en *la somme effectuée*. In $a/p = b/q = c/r$ (15) komt niet uit de verf, dat de rij a, b, c evenredig is met de rij p, q, r en zeker niet dat 'is evenredig met' een equivalentierelatie tussen rijen is. De definitie, dat een open bewering met $=$ een vergelijking zou zijn (18) gaat mank op het voorbeeld $2 \dots 2 = 4$. (of heeft die vergelijking soms de wortels plus en maal????). De passage: ... noemen we een functie of afbeelding ... wekt de indruk, dat deze begrippen dezelfde zijn. Niet iedere afbeelding is immers een functie. Voorbeeld? Men kan de verzameling differentieerbare functies (uit de aard der zaak éénduidig) afbeelden op de verzameling van hun afgeleide functies. Dat is beslist geen functie (27). Het berekenen van de afgeleide functie heet differentiëren (69)? Helaas een slordigheid. Als ik $\sin x$ differentieer vind ik $\cos x \, dx$, maar de afgeleide functie is $x \rightarrow \cos x$.

De drie lange definities op (118) kunnen vervangen worden door twee andere: Een piramide is een veelvlak, waarvan alle³ hoekpunten op één na in een plat vlak liggen. Een regelmatige n -zijdige piramide is een piramide met n zelfcongruenties. Als men de eerste dualiseert benadert met de definitie uit het boek. De tweede kan men desgewenst apart specialiseren voor 3 en 4.

Didactische kwesties. Liever $(cb)a = c(ba)$ om het 'van rechts naar links' beter te doen uitkomen (11); dat de wortel uit een negatief getal geen reëel getal is (15), is voor iemand, die tot en met $\mathbb{R}$ gevorderd is, een onbegrijpelijke mededeling. Graag zag ik de S van (18) verklaard als eerste letter van solution. In de definitie van evenwijdige lijnen (35) wordt het bestaan van kruisende genegeerd. Bij gebruik als naslagwerk is het de leerlingen onverschillig, in welke klas ze de te repeteren zaken gehad hebben. Daarom graag (75) en (91) (goniometrie) bijeen, ook (69) en (103) (raaklijn en

differentiaalquotiënt), eveneens (58) en (123) (statistiek). Bij het voorbeeld op (74) is moderner eerst de voorwaarden te noteren, waaraan de wortels van de vergelijking moeten voldoen. De oplossing van $x(x-5) = 0$ kan dan aldus verlopen: Af te lezen is $x \geq 2$, deel dus door x , vind $x-5 = 0$, enz. De overigens rake opmerking over het controleren kan dan beter als *algemene studiewerk* genoteerd worden op het open gedeelte van (6), b.v. in deze vorm: 1 denken, 2 doen, 3 controleren.

Mijn algemene indruk van het werk is positief gunstig en ik wens het team van harte succes ermee en met volgende drukken.

J. K. Timmer

H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie*, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlijn 1974, prijs DM 48.—, 407 blz.

De in 1968 verschenen eerste druk van dit boek werd besproken in *Euclides* 45 (1969/70) blz. 18. De voornaamste wijziging in deze 20 % omvangrijkere en 50 % duurdere tweede druk is de toevoeging van een 200-tal opgaven. Verder is op vele plaatsen de tekst verhelderd en zijn er kleine toevoegingen.

Als geheel levert ook deze tweede druk een prachtige hoeveelheid gereedschap voor studie en onderzoek in de verschillende deelgebieden van de waarschijnlijkheidsrekening. Echter – evenals voor de eerste druk – geldt voor deze tweede druk dat het boek het beste tot zijn recht zal komen als handleiding bij groepsstudie of cursus. Voor zelfstudie lijkt het minder geschikt.

J. Wessels

H. Meschkowski, *Mathematik für Physiker*, deel 1, 2 en 3 1970, resp. 169, 173, 183 blz., per deel DM 12.—.

Mehrsprachenwörterbuch mathematischer Begriffe, Wissenschaftsverlag, Mannheim, 131 blz., DM 38.—.

De drie bovengenoemde deeltjes zijn geschreven voor degenen die de wiskunde als hulpwetenschap beoefenen en op de hoogte willen blijven van de moderne opvattingen. De schrijver is wel bij uitstek degene, die een didactisch verantwoorde methode aanbiedt.

Deel I bespreekt de getallentheorie, gebaseerd op de formele en predikaten logica en de verzamelingsleer. Deel II bespreekt functies, differentiaal- en integraalrekening, cirkel- en hyperbolische functies en functies met complexe argumenten. Deel III tenslotte de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.

Het woordenboek geeft de vertaling van Duits-Engels-Frans-Russisch-Italiaans.

Dr. W. A. M. Burgers

B. L. van der Waerden, *Hamiltons Entdeckung der Quaternionen* Vandenhoeck en Ruprecht, Göttingen, 1973, 14 blz., DM 5.—.

Dit boekje is een verslag van een lezing die de schrijver heeft gehouden in Hamburg voor het Joachim Jungius Gesellschaft der Wissenschaften op 26-6-73.

Het is bijzonder interessant te lezen hoe Hamilton, via een mislukte poging met triplets, stap voor stap zijn ontdekking completeert, waarbij het grootste struikelblok, dat het produkt van de moduli gelijk moet zijn aan de modulus van het produkt, tenslotte werd opgeruimd. In feite kwam dit neer op het ontdekken van de z.g. quaternionengroep, een van de vijf groepen van de orde 8.

Voor belangstellenden aanbevolen.

Dr. W. A. M. Burgers

Martin Kindt en Wim Kremers; *Analyse één, afgeleide en primitieve; Analyse twee, differentiaal en integraal*; 184 resp. 144 blz., f 17.75 resp. f 17.50; Malmberg, 's-Hertogenbosch.

Deze delen zijn bedoeld voor de hoogste klassen V.W.O. en bevatten de stof van het leerplan Wiskunde I.

Ondanks het feit, dat de rijen practisch geheel uit het programma zijn verdwenen, nemen ze in deze boeken een belangrijke plaats in. Nadat namelijk het begrip rij gedefinieerd is, wordt het gebruikt bij de behandeling van limiet en continuïteit. Het is nu tevens mogelijk om naast de theoretische behandeling een computerbenadering te laten zien. Een computerprogramma wordt gegeven en de output wordt afgedrukt. Verrassend zal dan bovendien vaak de rekentijd zijn, die ook wordt vermeld (b.v. het getal e in acht decimalen nauwkeurig binnen één seconde). Bij de invoering van differentiaalrekening wordt een aantal keren gebruik gemaakt van de begrippen snelheid en versnelling. Ook wordt hier gewerkt met richtingsvectoren, zonder dat dit overigens problemen oplevert voor leerlingen, die geen wiskunde II hebben. Na de behandeling van extreme waarden, uitgaande van de middelwaardstelling, en een inleiding op de goniometrische functies komt de kettingregel aan de orde. In het laatste hoofdstuk van *Analyse één* wordt de primitieve functie ingevoerd, zonder vooralsnog het integraalteken te gebruiken, en toegepast bij het berekenen van oppervlakten.

Analyse twee begint met exponentiële en logaritmische functies. Hier wordt tevens het getal e ingevoerd als noodzakelijk grondtal van de logaritmische functie, die naar voren komt bij het bepalen van een primitieve van $f(x) = x^{-1}$. In hoofdstuk 2 worden de goniometrische functies verder uitgewerkt en afgesloten. De differentiaal wordt gedefinieerd als een lineaire functie $df(x): h \rightarrow f'(x) \cdot h$. In het hoofdstuk over de differentiaal wordt ook geleerd uit de vergelijking van een kromme een differentiaalvergelijking af te leiden, die weer gebruikt wordt om raaklijnen te vinden. De rijen komen weer naar voren bij de integraal, waar gebruik wordt gemaakt van Riemannsommen. Meetkundig uitgangspunt zijn de oppervlakten onder de grafiek van een functie f . De differentiaalvergelijkingen worden meetkundig ingeleid. Als oplossingsmethoden worden geleerd: 'scheiding van variabelen' en 'variatie van constante'.

De uitgaven zijn uitstekend verzorgd. Er is een goed gebruik gemaakt van kleuren in de figuren. Met gekleurde rand zijn aangegeven de bladzijden, waarop na ieder hoofdstuk een samenvatting wordt gegeven met daarbij een aantal herhalingsopgaven. Apart vermeld moet ook nog worden het grote aantal opgaven, waarin toegepaste wiskunde aan de orde komt. Ik zou zelf met deze boeken goed kunnen werken.

J. Mahieu

H. Epheser, *Vorlesung über Variationsrechnung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1973, DM 18.—.

In kort bestek geeft de schrijver een overzicht van de klassieke variatierekening. De wijze van behandeling is zakelijk en droog om niet te zeggen ouderwets. Wie met het onderwerp onvoldoende bekend is zal bij lezing niet door een enthousiast auteur meegesleept worden. Wel zal hij alles keurig netjes op een rijtje geplaatst vinden. Toepassingen worden niet of nauwelijks gegeven. Wel wordt, maar meer om historische redenen, aandacht aan de problemen van de theoretische mechanica geschonken. Het is een degelijke inleiding maar het onderwerp blijft teveel in het verleden steken. Het grote belang van de methoden van de variatierekening voor de behandeling van problemen met behulp van de moderne computers mist men hier geheel.

H. A. Lauwerier

Drs. W. L. Zijp, *Handleiding voor statistische toetsen*, 283 blz.; ingen. f 21.—, H. D. Tjeenk Willink bv, Groningen 1974.

Dit boek, geschreven door een wetenschappelijk medewerker van het Reactor Centrum Nederland, bevat een verzameling statistische toetsen, die de experimentator ten dienste staan bij het trekken van conclusies uit reeksen van waarnemingsresultaten.

Het eerste hoofdstuk is een beknopte inleiding, het tweede beschrijft de klassieke toetsen die op grond van berekende verdelingsparameters uitspraken moeten doen omtrent ligging, spreiding en samenhang van verdelingen, waarbij zeer vaak een normaal karakter van de verdeling verondersteld wordt. Het derde hoofdstuk behandelt de χ^2 -toetsen, waarmee de consistentie, de homogeniteit en onafhankelijkheid van verdelingen bekeken kunnen worden. In het vierde hoofdstuk vindt men de verdelingsvrije toetsen, waarmee zonder dat er veronderstellingen gemaakt worden inzake de aard van de verdeling, men de ligging de samenhang, de gelijkvormigheid en de aselechteid van verdelingen kan toetsen. Een volgend hoofdstuk beschrijft de werkwijze van de sequente toetsing, waarbij de waarnemingen na elkaar, na tussentijdse analyse worden verkregen, zodat men de omvang van de steekproef optimaal kan kiezen.

Bij de beschrijving van de toetsen is meer gelet op de toepassing ervan in de praktijk dan op volledigheid en op details van de theorie. De voor de beschreven toetsen benodigde tabellen zijn aan het eind van het boek opgenomen.

Uit bovenstaande omschrijving van de inhoud van het boek, ontleend aan de door de auteur zelf gegeven 'samenvatting', moge blijken dat de behandelde materie buiten de belangstellingssfeer van de gemiddelde wiskundeleraar zal vallen, maar voor hen die in de toetsingsproblematiek wel geïnteresseerd zijn belangrijke informatie bevat.

De typografische uitvoering van het boek voldoet aan hoge eisen.

Joh. H. Wansink

Ontvangen boeken

Dr. P. M. van Hiele e.a. *Van A tot Z*, deel HV-26, tweede geheel herziene druk, 1974, 219 blz., f 13.90.

Drs. Chr. Boormeester e.a. *Van A tot Z*, deel M4-2b, vijfde geheel herziene druk, 1974, 161 blz., f 10.50.

Uitgaven van J. Muuses b.v., Purmerend. ISBN 90 231 3120 resp. 3114.

Drs. H. J. Jacobs e.a. *Moderne wiskunde*, deel 3 voor havo en mavo, derde herziene druk, 1974, 212 blz., f 11.50.

Uitgave van Wolters-Noordhoff, Groningen. ISBN 9001 59 1450.

Internationale post-universitaire cursussen.

Scheikunde - Fysica - Biologie - Wiskunde.

Wetenschappelijk onderzoek en wetenschappelijk onderwijs vormen in alle landen het voorwerp van omvangrijke investeringen en aanzienlijke inspanningen.

Anders is het gesteld met de betrekkingen tussen de wereld van de wetenschap en deze van het onderwijs.

De organisatie van de Internationale post-universitaire cursussen is een van de middelen om de relatie tussen de wereld van de wetenschap en deze van het onderwijs tot stand te brengen.

Voor 1975 werd als thema voor de sectie wiskunde 'de graftheorie' gekozen, terwijl de sectie scheikunde, fysica en biologie 'de energie en al haar aspecten' zal behandelen.

Alle lessen worden gegeven door vooraanstaande universiteitsprofessoren uit verschillende Europese landen. Tevens is er de traditionele reeks van culturele en sociale manifestaties, die steeds op succesvolle wijze bijgedragen heeft tot het scheppen van de geest van samenwerking, internationale contactname en vriendschap.

In 1975 zullen de cursussen doorgaan in de R.U. Luik (Sart-Tilman) van 18 tot 23 augustus.

Alle nodige inlichtingen en het programma kunnen bekomen worden op het secretariaat, postbus 24, 1000 Brussel 29.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

327. De oude Egyptenaren schreven rationale getallen tussen 0 en 1 als som van stambreuken met verschillende noemers. (Stambreuken zijn breuken met teller 1 en noemer een geheel positief getal.) Is dit voor elk rationaal getal tussen 0 en 1 mogelijk? (meegedeeld door Dr. P. Bronkhorst)

328. Een niet-lege verzameling van p elementen kan men op p_1 manieren verdelen in deelverzamelingen die alle een verschillend aantal elementen bevatten en op p_2 manieren in deelverzamelingen die alle een oneven aantal elementen bevatten. Het ongedeeld laten van de verzameling wordt als een verdeling in één deelverzameling beschouwd. Wat is groter p_1 of p_2 ?

Bijv. $p = 4$. Verdelingen in $1+5$, $2+4$, $1+2+3$, 6 elementen, dus $p_1 = 4$.

Ook in $1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+3$, $1+5$, $3+3$ elementen. Dus ook $p_2 = 4$.

(meegedeeld door Dr. P. Bronkhorst)

Oplossingen

325. Gevraagd wordt een kubus in zes congruente viervlakken te verdelen.

Hoewel het niet strikt noodzakelijk is, ligt het voor de hand, dat elk viervlak evenveel hoekpunten en ribben met de kubus gemeen heeft en een even groot deel van de zijvlakken. Omdat de kubus 8 hoekpunten, 12 ribben en 6 zijvlakken heeft, zal elk viervlak met de kubus dus gemeen hebben $1\frac{1}{3}$ hoekpunt, 2 ribben en 1 zijvlak.

Komen in een hoekpunt van de kubus 3 viervlakken samen, dan is voor elk viervlak gerekend, dat het dat hoekpunt $\frac{1}{3}$ maal met de kubus gemeen heeft. Ik zal de redenering niet tot in details vervolgen, maar enig overdenken levert, dat elk viervlak met de kubus gemeen heeft:

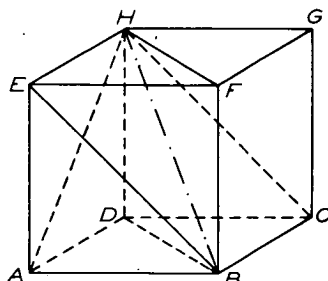
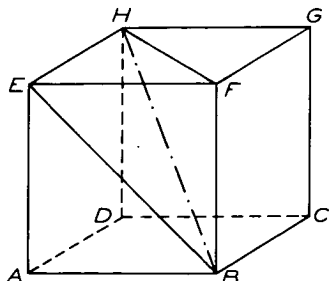
4 hoekpunten en in elk van die hoekpunten komen 3 viervlakken samen,

3 ribben en in 2 van deze 3 ribben komen twee viervlakken samen,

2 halve zijvlakken.

Eén dergelijk viervlak is getekend in fig. 1. Het heeft als ribbe de lichaamsdiagonaal BH .

Projecteer de kubus op een vlak loodrecht op BH ; de projectie is een regelmatige zeshoek. De



projectie van het viervlak $BFHE$ op het vlak is een middelpuntsdriehoek van deze zeshoek. De overige vijf viervlakken hebben de vijf andere middelpuntsdriehoeken als projectie. Ze zijn getekend in fig. 2.

Het zijn de viervlakken: $BHAE$, $BHEF$, $BHFG$, $BHGC$, $BHCD$, $BHDA$.

326. Een rechthoek kan verdeeld worden in rechthoeken die elk een zijde met lengte 1 hebben. Bewijs dat de lengte van minstens een van de zijden van de rechthoek een geheel getal is. (mee-gedeeld door R. Troelstra)

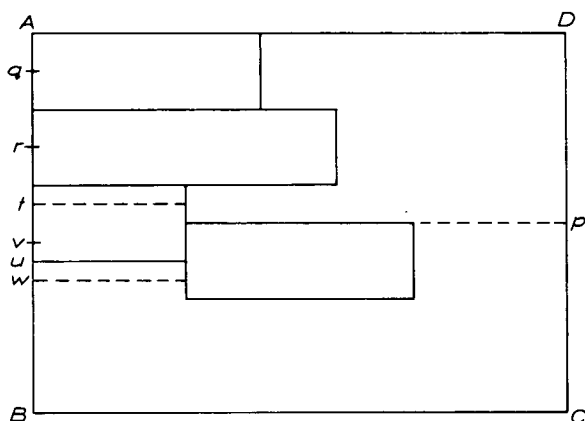
Onderstel dat de lengten a en b van de zijden van de rechthoek beide niet-geheel zijn. In de figuur is de rechthoek $ABCD$ getekend met de zijde AD horizontaal. Neem aan dat $AD = a$.

Trek een horizontale lijn die niet langs de rand van een van de horizontale rechthoeken valt. De afstand van deze lijn tot de lijn AD noemen we d . De som van de lengten van de horizontale rechthoeken die deze lijn snijdt, noemen we $s(d)$. Dan is $s(d) = a \pmod{1}$.

In de figuur zijn de horizontale rechthoeken schematisch weergegeven door ze tegen elkaar aan te schuiven. We krijgen eerst een laag grenzend aan de zijde AD met breedte 1. Daarna een daaronder gelegen laag met breedte 1, enz. Dit kan niet steeds zo doorgaan, omdat b niet geheel is. Noem de afstand van de bovenste rechthoeksbegrenzing tot de zijde AD die niet geheel is, p . Dan is (zie de figuur)

$s(q) = a \pmod{1}$, $s(r) = a \pmod{1}$, $s(t) = a \pmod{1}$ (t is iets kleiner dan p), $s(v) = a \pmod{1}$ en $s(w) = a \pmod{1}$ (v is iets kleiner dan u en w iets groter dan u).

Nu gaat het mis, want $s(v) - s(w) = s(t)$ en dus kunnen ze niet alle drie gelijk aan $a \pmod{1}$ zijn. De zijden van de rechthoek kunnen dus niet alle niet-geheel zijn.



INSTITUUT VOOR LERARENOPLEIDING VRIJE LEERGANGEN - VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM

Bovengenoemd Instituut verzorgt de lerarenopleiding voor akten van bekwaamheid van de derde en de tweede graad.

Per 1 augustus 1975 kan worden benoemd een

ONDERWIJSKUNDIGE

die bereid is in de sectie **wiskunde** in samenwerking met de vakdidactici een deel van de beroepsopleiding te verzorgen.

Instemming met de grondslag en doelstelling van het Instituut V.L.-V.U. is noodzakelijk.

Salariëring volgens het wetenschappelijk rangenstelsel.

Inlichtingen bij Dr. R. Turksma, tel. 020-727809 (instituut) of 02502-8032.

Sollicitatiebrieven met opgave van referenties te richten aan Dr. O. Kooi, Marquette 8, Amsterdam-Buitenveldert.



GEEFT U EEN EIGEN HUIS ZONDER ZORGEN

Totale financiering van uw eigen huis (oud of nieuw), met **alle** bijkomende kosten. Normale rente over gehele lening, geen afsluitprovisie. Adviezen na bestudering van uw koopakte.

Vraag budget-schema aan:

**Het Voorlichtingsbureau voor
Academici, hogere ambtenaren,
staffunctionarissen, leraren etc.**

**Mallebaan 98, Utrecht, tel. 030-
31 97 47***

sigma

deel 3 verschijnt



Het complete leerpakket wiskunde voor mavo en onderbouw havo/vwo
door K.H. Cohen, dr. A. van Dop, dr. ir. B. Groeneveld, drs. L.W. van der Horst,
F.D.A. van der Houven, W. Naber, K.J.L. Rogier, dr. P.G.J. Vredenduin,
N.B. Walters, drs. A.J. Westermann.

WNI

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
Groningen 050-162314

INHOUD

A. Maassen: Monotonie, continuïteit en primitiviteitsbaarheid i.v.m. integreerbaarheid	339
Statistische dag	355
P. C. Schnetz: Beschrijvende statistiek voor mavo	356
Drs. D. de Boer: Wacht Mijnheer van Dalen nog steeds op antwoord?	359
Bijeenkomsten	360
P. W. H. Lemmens: Over het aantal afbeeldingen van V op W , II	361
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	363
H. G. B. Broekman: Mogelijkheden voor vaksecties	368
Didactische literatuur	371
Boekbespreking	375
Cursussen	378
Recreatie	379