

WISKUNDE

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

50e jaargang

1974/1975

no 6/7

februari/maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 25,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers f 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Prijs nummer 4/5 f 9,50.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 225,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 120,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 67,50.

Verzamelingenleer, moderne wiskunde en modern wiskundeonderwijs

FRED GOFFREE

Den Dolder

In Duitsland is een heftige discussie gaande over de verzamelingenleer in het basisonderwijs. Daarnaast zijn er berichten over het mislukken van New Math-projekten in de Verenigde Staten. Op verzoek van enige lezers worden deze beide zaken, het wiskundeonderwijs betreffende, bekeken tegen de achtergrond van de leerplanontwikkeling in Nederland.

Enkele momentopnamen uit de klassen 1, 3, 4 en 5 van de ontwerpschool van Wiskobas betreffen *wel* het wiskundeonderwijs, maar *niet* de verzamelingenleer. Voor Wiskobas is modern wiskundeonderwijs dan ook niet hetzelfde als verzamelingenleer. De mislukking van Amerikaanse wiskundeprojekten is een gevolg van vele, samenhangende, factoren. De konklusie dat 'moderne wiskunde' ongeschikt is voor het onderwijs, kan niet getrokken worden.

Op het I.O.W.O. tracht men wel lering te trekken uit de Amerikaanse activiteiten. Men denkt vooral te kunnen leren met betrekking tot het eksplisiteren van de filosofie, het betrekken van het veld in de ontwikkelingen, het heroriënteren, de opleiding en de begeleiding. Uitgangspunt kan steeds zijn een uitgeprobeerd stukje wiskundeonderwijs.

Iedereen, die zich betrokken gevoelt, kan daarop reageren en bijdragen tot de ontwikkeling van wiskundeonderwijs over het hele gebied van kleuterschool tot universiteit.

Een desbetreffende instap voor de lezer is mogelijk gemaakt door het formuleren van vier mathematisch didaktische problemen. De redactie van Euclides is verlangend om reacties van lezers in volgende nummers te publiceren.

1 Een basisschool in Arnhem

1.1 Vlak bij Presikhaaf, een moderne woonwijk in Arnhem, staat de Dr. Willem Dreesschool. Sinds 1971 heet deze 14 klassige openbare school 'ontwerpschool' van Wiskobas. Wat dit betekent zal in het volgende, en niet in 't minst tussen de regels door, duidelijk kunnen worden.

Wiskobas is die afdeling van het I.O.W.O., die zich richt op de leeftijdsgroep van (4)6 tot 12 jaar. Hield men zich in de cursusjaren 1970-71 en 1971-72 bezig met het ontwerpen van een heroriënteringscursus voor onderwijzers,

vanaf augustus 1973 staat het ontwikkelen van een schoolwerkplan wiskunde voor deze basisschool centraal.

De ontwikkelingen betreffen teksten voor de leerlingen, begeleiding van de onderwijsgeevenden, mathematisch didactische analyses van de leerstofgebieden, het eksplisiteren van de uitgangspunten van wiskundeonderwijs, het formuleren van de (goede) bedoelingen van het ontworpen materiaal, de opleiding van (a.s.) onderwijzers en de heroriëntering, de samenwerking met verzorgingsstructuren als schoolbegeleidingsdiensten, pedagogische centra, toetsontwikkelaars, en meer van dergelijke zaken.

Op deze plaats beperken we ons tot dat deel van het werk, waarvan al het overige is afgeleid: *de konstruktie van onderwijs*

Dit schooljaar (1973–1974) liggen de ontwerpactiviteiten in de klassen 1, 3 en 5. In het Wiskobas-Bulletin¹ wordt hiervan regelmatig verslag uitgebracht. Een kijkje in de ontwerpkeuken van Wiskobas is hierdoor mogelijk geworden. De groep van ontwikkelaars hoopt evenwel dat het niet bij kijken alleen blijft. Steeds wordt aangedrongen op actieve medewerking van de lezers (een breed veld van werkers voor het basisonderwijs). In een speciaal gereserveerd deel van het Wiskobas Bulletin, het responsblok, komen zodoende kritische en vaak konstruktieve opmerkingen van leerkrachten, die een en ander in hun klassen hebben uitgetoetst en van theoretici, die aan het bureau de zaken doordacht hebben.

Laten we beginnen om ook een kijkje in de ontwerpschool te nemen. Hierbij gaan we er van uit dat lezers van een maandblad voor de didactiek van de wiskunde dit slechts *aktief* en kritisch konstruktief kunnen doen.

1.2 Klas 5 op reis

Voor de klas staat een globe van flink formaat.

De kinderen uit deze vijfde klas kennen hem al vanuit diverse activiteiten in vorige lessen. Het ging daarbij om meetkundige zaken als tegenvoetersproblemen en koördinaten, om wiskundig-aardrijkskundige als het verband tussen schaduwlengthe en de baan van de zon, gezien vanaf aarde en om rekentechnische problemen bij het bepalen van de snelheid op een zekere parallelcirkel. Nu vertelt de onderwijzer een onwaarschijnlijk verhaal. Het sluit aan op het werken met de tijdzones op aarde. Een activiteit die zijn aanleiding vond in een 25 uren programma op de radio, ter gelegenheid van het regeringsjubileum van koningin Juliana.

Stel dat we op de nulmeridiaan (bijvoorbeeld in Londen) beginnen met een reis om de wereld. De ene helft van de klas reist naar het oosten, de andere helft naar 't westen. Laten we maar aannemen dat we rechtstreeks, zonder omwegen kunnen reizen. En, net als de zon, laten we ons onderweg niet ophouden!

Als we naar het westen en naar het oosten even snel reizen, dan ontmoeten we

1 Uitgave van I.O.W.O. abonnementen Stichting IVIO, Postbus 37, Lelystad.

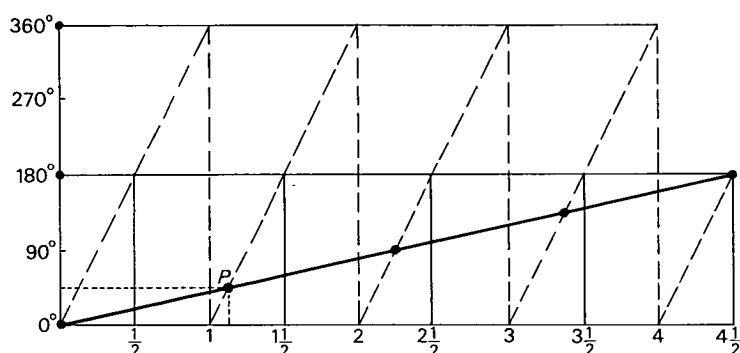
elkaar 'achter' op de aardbol, . . . , op 180° (O.L. of W.L.).
Maar . . .

De geïnteresseerde lezer begrijpt waar de twijfel bij de leerling naar boven komt. De helft van de klas heeft een hele dag over, en wat moeten we daarmee aanvangen?

De onderwijzer stelt voor om het probleem van de reizigers grafisch aan te pakken. Dag en nacht hebben te maken met opkomst en ondergang van de zon. Het aantal dagen dat je reist heeft te maken met het aantal keren dat je de zon ziet opkomen en ondergaan . . .

Laten we beginnen in Londen, op 1 april, als de zon om 12.00 precies in het zuiden staat. Degenen, die naar het westen reizen, gaan als het ware met de zon mee, . . .

Langzamerhand ontstaat in onderlinge samenwerking, met veel gezwoeg een grafiek:



Punt P in de grafiek geeft aan, waar en wanneer de reizigers de zon weer in het zuiden (op z'n hoogst) zien staan.

In de klas wordt zo nauwkeurig mogelijk gemeten (in de grafiek), en de 'dag-lengte' blijkt ongeveer 12% groter te zijn dan verwacht. Op deze manier maak je van $4\frac{1}{2}$ dagen er 4, dat is in de grafiek zichtbaar geworden. Dat wordt nog duidelijker als een van de reizigers op het moment P zijn horloge gelijk wil zetten met de plaatselijke tijd. Deze is natuurlijk 12 uur, tenslotte staat de zon op z'n hoogst. Maar de reis heeft – volgens het horloge – 24 uur + ca. 12% van 24 uur geduurd. Het horloge moet dus 'teruggezet' worden . . .

Waar blijft de tijd, een verzuchting die onderwijzer en leerlingen ook zullen slaken na alle denk- en cijferwerk, dat met dit werk gepaard gaat.

- Een mathematisch didactische probleemstelling voor de lezer:

Op welke nivo's kunnen kinderen hier meetkundige activiteiten ontplooiën?

1.3 Met klas 4 naar oma

Er staat een kort verhaaltje op het bord. Een van de kinderen heeft het zelf gemaakt naar aanleiding van de vraag: 'vertel eens hoe jij naar je oma gaat'.

De onderwijzer heeft dit gekozen uit de verschillende opstelletjes en strip-verhalen, die met veel élan werden geproduceerd.
Ze mogen het allemaal eerst rustig doorlezen:

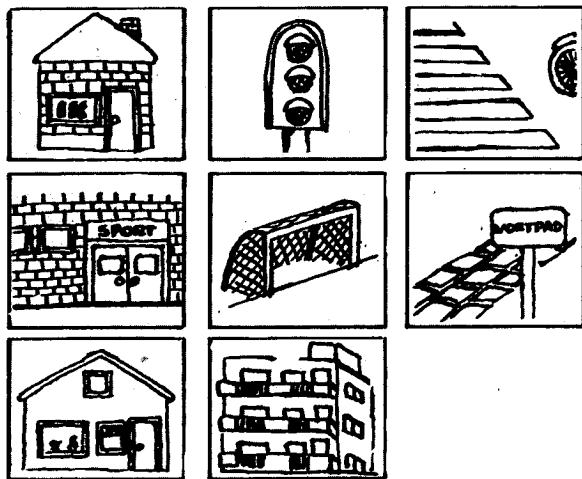
Mijn oma woont niet ver weg. Soms vindt moeder het goed dat ik er alleen naar toe ga. Ze zegt dat ik goed moet uitkijken bij het oversteken.

Ik kom eerst bij een kruispunt met stoplichten. Daar steek ik over. Dan kom je bij de sporthal en het zwembad. Achter de sporthal zijn voetbalvelden. Je kunt daar langs. Er is een voetpad. Maar meestal loop ik door tot de hoge flat met 13 verdiepingen. Daar ga ik de hoek om en loop langs het afgebrande hotel.

Dan pas kom ik bij oma.

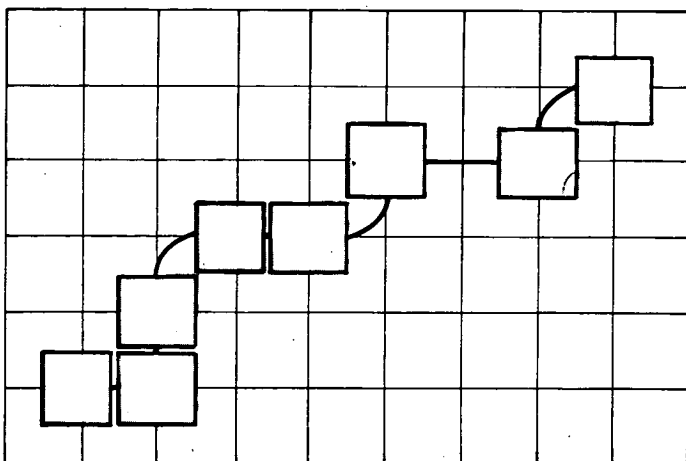
In een nu volgend gesprek komen de belangrijke oriëntatiepunten nog eens naar voren:

kruispunt met stoplichten, zebra, sporthal, zwembad, voetbalvelden, (voetpad), hoge flat, het afgebrande hotel.



Op een plattegrond (een kaart) zouden we al deze punten kunnen opzoeken. De onderwijzer maakt een schetsje, waarop de wandeling uitgezet kan worden.

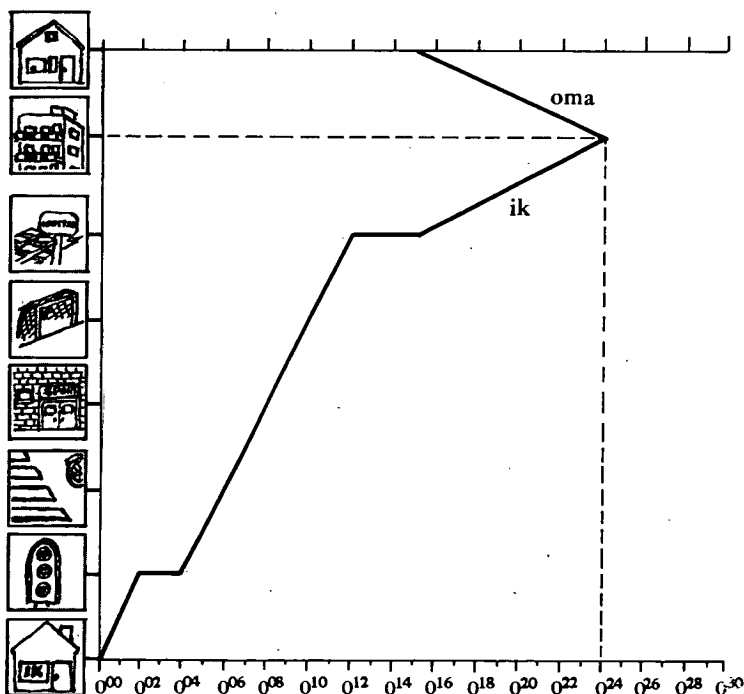
Dan komt er een (nieuw) probleem naar voren. Stel nu eens dat oma je een



2

stukje tegemoet wandelt, waar zou je haar dan ontmoeten? Kan het zijn dat je haar op het voetpad (het hoge flatgebouw) juist net misloopt?

Na deze discussie besluit men een grafiek te maken, waarop je ook de tijd kunt aflezen. De oriëntatiepunten worden nog eens op een rijtje gezet. Het plattegrondje doet dienst bij het schatten van de onderlinge afstanden; hetzelfde plattegrondje blijkt evenzeer een psychologisch blok aan het been te zijn bij het begrijpen van de te maken grafiek. Wandelroute en grafiek worden moeilijk onderscheiden.



3

- Heeft u een mening over de mate van abstractie van beschrijvingsmiddelen als landkaart, topologische kaart, plaats/tijd grafiek, afstand/tijd grafiek, temperatuur/tijd grafiek e.d.?

1.4 Groeitijd in klas 3

In de klas hangen 5 grote platen van vrouwen uit verschillende tijdperken. Je kunt aan de kostuums en situaties zien dat het ongeveer de jaren 1870, 1900, 1930, 1950 en 1973 betreft. (Wat ook nog opvalt is de brede armband, die ze alle vijf dragen). In voorgaande lessen is verteld dat deze platen gemaakt zijn van vrouwen, die familie van elkaar zijn. Het gaat over het kleinkind van nu (1973), haar moeder (1950), haar grootmoeder (1930), overgrootmoeder (1900) en betovergrootmoeder (1870). Ze zijn ongeveer van dezelfde leeftijd en slechts de historische sfeertekening doet dan ook het tijdsverschil tot uitdrukking komen. Nadat de discussie over de eerste opdracht – leg ze in de goede volgorde, de oudste voorop – geluwd is, wordt de tijdlijn geïntroduceerd. De ordening kan nu zichtbaar gemaakt worden; de verschraling van historische sfeer naar mathematische kwantificering wordt voorlopig nog uitgesteld. De gegeven tijdstippen en tussenliggende intervallen worden vooreerst historisch gekleurd. Een aantal penseelstreken worden o.a. gezet vanuit het volgende werkblad.

Moeder belde de school op om te zeggen dat Jan ziek was en die dag niet naar school zou komen.

Het was jammer dat de T.V. kapot was, want nu konden de kinderen niet naar het kinderprogramma kijken.

Moeder gaf aan Gijsje vijf cent mee, zodat ze met de paardetram naar tante Margareta zou kunnen gaan. Ze hoefde dan niet het hele eind te lopen.

Karel keek nog even naar de lantaarnopsteker, die het gas in de straatlantaarn aanstak. Toen ging hij naar binnen.

Moeder had de hele morgen hard gewerkt. Ze was blij dat ze nu even rustig kon zitten om een kopje koffie te drinken.

Die avond was vader erg laat thuis. Hij had pech met de auto gehad. Gelukkig had hij even opgebeld zodat we niet ongerust hoefden te worden.

Zaterdag is altijd een fijne dag. Dan hoeft vader maar tot 4 uur op de fabriek te werken. Meestal brengt hij dan ook iets lekkers mee; soms een zuurstok, maar ook weleens een anijshal.

Nog meer gekleurd, maar nu vanuit de eigen ervaring, worden de tijdlijnen, die met de laatste 10 jaar en de eigen, persoonlijke omstandigheden te maken hebben . . .

En op dit moment wordt een transparant geprojecteerd met de overhead projector: het gewicht van JanWillem van Slooten, zoals dat door de liefhebbende ouders in 't familiealbum is bijgehouden.

De kinderen kunnen zien hoe JanWillem eerst wat in gewicht verminderde, later weer aankwam en tenslotte na drie jaar ruim drie keer zó zwaar was als bij zijn geboorte.

Deze gewichten-geschiedenis wordt ook op de tijdlijn beschreven.

Eén nieuwe dimensie is hiervoor voldoende, het gewicht van JanWillem wordt tegen de tijd afgezet . . .

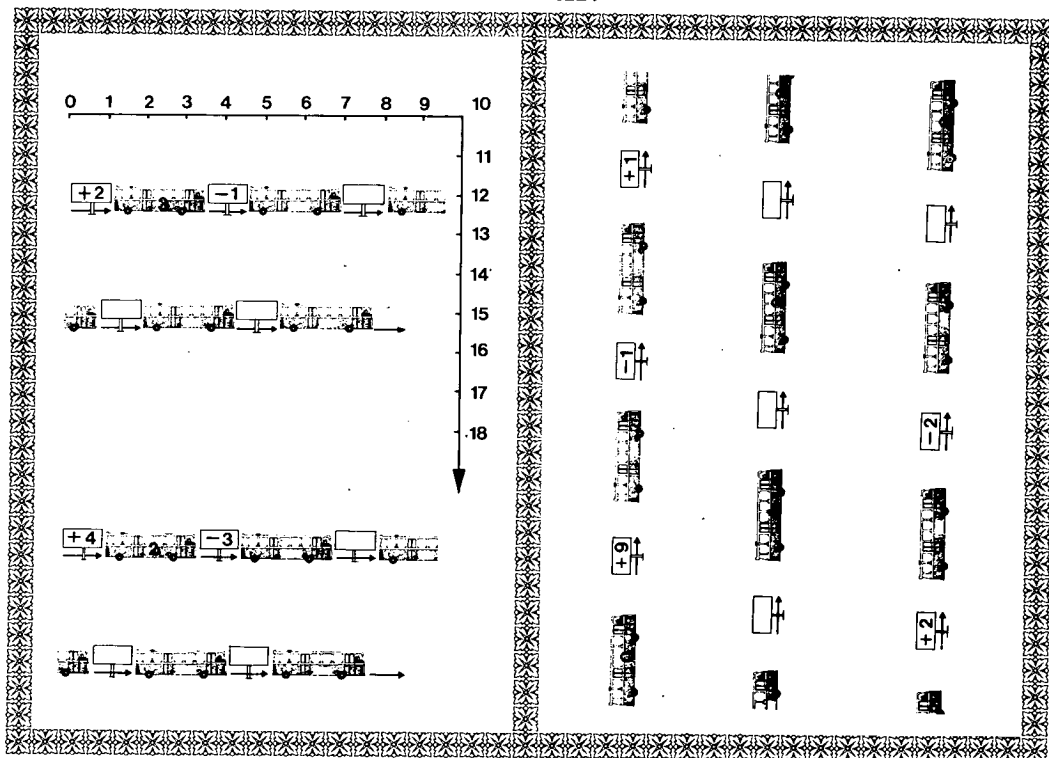
- De begrippen 'tijd balk' en 'tijd as' lopen in dit stukje onderwijs zonder meer in elkaar over. Is dit mathematisch juist?

1.5 Klas 1 en het openbaar vervoer

Juf heeft een plaatje van de stadsbus meegebracht. Voorin zit de chauffeur, en achter hem kunnen heel wat mensen zitten (en staan, als het moet). Natuur-

WERKBLAD 1

WERKBLAD 3



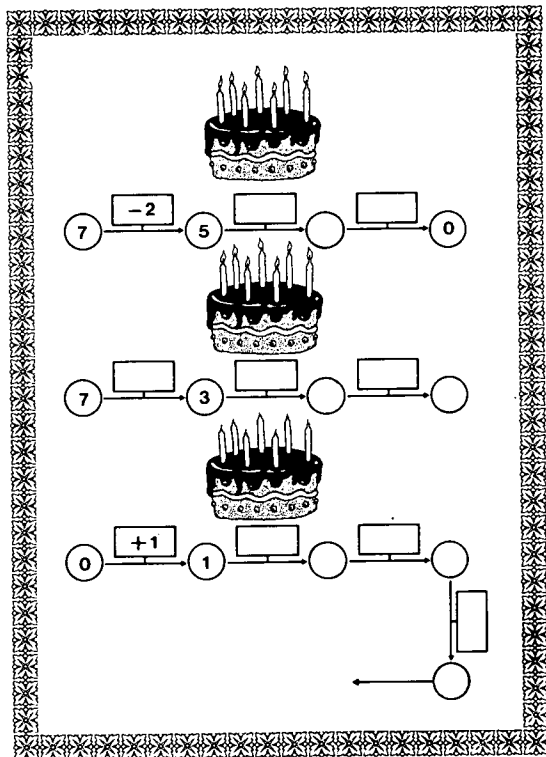
lijk zit de bus niet altijd helemaal vol. Soms staan er veel mensen bij de bushalte, soms ook niet. Het komt ook wel eens voor dat er niemand staat. Toch rijdt de bus dan niet altijd door . . .

Men besluit eens een ritje met de bus te maken. De kinderen mogen het aantal mensen, dat de chauffeur in de bus heeft, bijhouden. Dat blijkt op heel wat manieren te kunnen gebeuren. Daar de kinderen 't zelf moeten bedenken komen de verschillende aanpakken bijna allemaal naar voren:

- enkelen tellen op de vingers – onder tafel – mee,
 - anderen gebruiken de plastic fiches op de bank.
 - een paar kinderen springen met de punt van hun potlood over de getallenlijn heen en weer,
 - en een groot aantal werkt met getalletjes, pijltjes en plus- of mintekens.
- Dit laatste wordt duidelijk door het beschikbare materiaal – werkbladen – geïnduceerd.

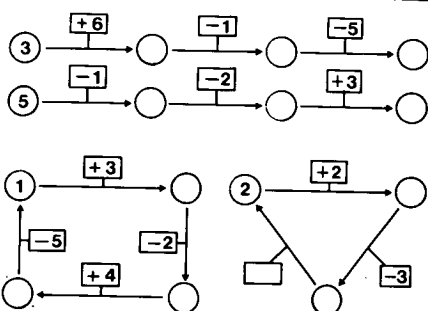
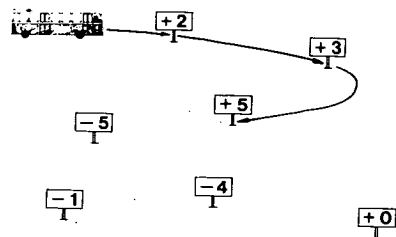
Natuurlijk gaat juf hierop nader in. Het veranderende bussenbestand wordt rekenkundig beschreven. Dat deze werkwijze een wijder toepassingsbereik heeft, blijkt o.a. uit het kaarsjesblazen van werkblad 2.

WERKBLAD 2

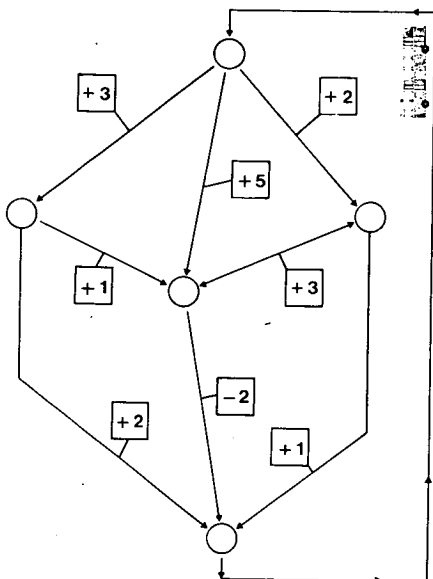


Het veranderlijke karakter van het bussenbestand krijgt een nog duidelijker aksent, als de kinderen zelf 'de bus laten rijden'. (Werkblad 4). Spannender en abstracter wordt het in de volgende opdracht (Werkblad 5).

rially halves of



probeer zoveel mogelijk passagiers in je bus te krijgen



Er zijn heel wat mogelijkheden om de bus te laten rijden. Elke route vereist een berekening, die het liefst uit het hoofd gemaakt moet worden. Al rekenend zie je trouwens snel in dat een bepaalde weg juist niet genomen moet worden, want daar wordt het aantal alleen maar kleiner...

► Tot welke wiskundige activiteiten geven deze werkbladen aanleiding?

1.6 Samenvatting en ordening

De kinderen in de eerste klas beschrijven veranderende aantallen passagiers. Ze maken hierbij gebruik van symbolen voor de getallen en voor de veranderingen. Mathematisch beschouwd zijn met het beoefenen van de geleerde rekenvaardigheden begrippen als variabele en functie onder de aandacht gekomen. Dat het hierbij gaat om een diskrete variabele en een zeer specifieke functie is van ondergeschikt belang.

In de derde klas gaat het ook over veranderingen. Een essentieel aspect komt er nu bij: de tijd. De meeste veranderingen hebben tijd nodig. Vaak is het zo dat het beschrijven van een variabele in de tijd verschijnselen doorzichtiger en beter bespreekbaar maakt.

Het gewicht van een menskenkind in zijn eerste levensjaren wordt tegen de tijd afgezet. De mate van groeisnelheid is daarmee zichtbaar geworden.

Het verband tussen plaats en tijd, dat zich ontwikkelt in een verband tussen afstand en tijd, komt in de vierde klas naar voren.

De ontmoeting met oma, op een bepaalde plaats en een zeker tijdstip, staat op het spel. De betrekkelijke realiteit van de plattegrond wordt gemodelleerd tot de abstractie van een grafiek. Hierin variëren tijd en afstand in onderlinge samenhang, beschreven door een leerling op weg naar zijn grootmoeder. De afstand-tijd grafiek krijgt een vervolg in het beschrijven van o.a. de treinenloop op een bepaald traject.

In klas 5 waagt men de sprong naar een nog lastiger vorm van dit beschrijvingsmiddel. De periodiciteit van het verschijnsel dag en nacht, de konsekwenties daarvan voor het meten van de tijd, de plaatsgebondenheid daarvan en de puur menselijke problematiek die ontstaat als het snel bereizen van moeder aarde mogelijk wordt, leiden tot de schijnbare paradox van de datumgrens. De afstand-tijd grafiek biedt de mogelijkheid om deze paradoxale redenering te ontmaskeren.

Het toepasbare karakter van de wiskunde komt hier op twee fronten naar voren. Zowel bij de 'ontmaskering' als bij de wiskundige activiteiten die nodig zijn om zover te komen, kan dit een duidelijk aksent meekrijgen.

2 Waar blijven de verzamelingen?

2.1 'moderne wiskunde = verzamelingenleer'

De voorgaande paragraaf gaf een samenvatting van enkele momentopnamen in de ontwerpsschool. Deze samenvatting haalt nauwelijks het predikaat van matematicus didactische beschouwing. Met betrekking tot beide aspecten ontbreekt er nog wel 't een en ander.

Wat echter door vele ouders, onderwijzers en misschien ook kollegaleren wiskunde gemist is in het verhaal, moet wel de leer der verzamelingen zijn. Zowel in boeken over moderne wiskunde voor ouders als in vertaalde basisschool leergangen neemt de verzamelingenleer – of iets wat daar op lijkt – een niet onaanzienlijke plaats in.

Laten we eerlijk zijn.

Het voortgezet onderwijs speelt, al sinds augustus 1968, met begrippen en symbolen uit dit gebied. Ook de eerste cursus van de CMLW, die in 1962 werd uitgeschreven voor eerste graadsleraren, handelde over dit onderwerp. Inmiddels zijn vele ouders van brugklasleerlingen geïmponeerd door de schijnbare gewichtigheid van de abstracte symbolen en bijbehorende afspraken. Toch schijnt het te kunnen functioneren in het volgende wiskundeonderwijs. De unificerende mogelijkheden, die de taal van de verzamelingen biedt bij het beschrijven van meetkundige en algebraïsche zaken, kan goed uit de verf komen. De moderne wiskundige leerstof heeft – op dit niveau – echter ook een meer gevarieerde inhoud gekregen. De vraag, of moderne wiskunde hetzelfde is als verzamelingenleer, wordt hier niet meer gehoord.

Waar dan wel, vraagt men zich af.

De aanleiding tot dit artikel komt voort uit de genoemde vraagstelling. Een zekere ongerustheid over de waarde van de moderne wiskunde voor het onder-

wijs, geboren in eigen onzekerheid en gevoed vanuit berichten over het mislukken van buitenlandse projecten, stemt de betrokken leraar tot nadenken. Nadenken over het vak, over de didaktiek, over de relevantie, over de waarden. En in Nederland is men dan gewoon om in termen van leerstof te denken. Wiskunde bestaat uit verzamelingenleer, logika, Boolse algebra, lineaire algebra, transformatiemeetkunde, vectormeetkunde, analyse, complexe getallen, projectieve meetkunde, computerkunde, . . .

Wiskundeonderwijs bestaat uit het aanleren van deze wiskunde.

De vraag, die gesteld wordt bij de gedachte aan 'Wiskunde op de basisschool', is dan ook geformuleerd in termen van leerstof: doen jullie verzamelingenleer? In Duitsland is deze vraag enkele jaren geleden (1968) door de Kultus Minister met 'ja' beantwoord. En sinds augustus 1973 doet men 'Mengenlehre' in klas 1 van de lagere school.

2.2 een discussie in West-Duitsland

Onder de titel 'Mengenlehre: $3 + 5 = 5 + 3$ ' verscheen eind maart 1974 in Der Spiegel een schreeuwerig artikel, waarin een chaotisch beeld wordt gegeven van de discussie 'Pro und Contra Mengenlehre', die vele ouders, onderwijzeressen, leraren, artsen, psychiaters, pedagogen, begeleiders, politici, juristen e.a. bezig zou houden. 'Mathematiker und Mediziner unterstützen empörte Eltern im Kampf gegen die Mengenlehre . . .'

Zo begint een beschrijving van de vele argumenten tegen en voor de verzamelingenleer.

De hoofd- en buikpijnklaarten, die de ouders aan het werken met de verzamelingen wijten, komen volgens een met name genoemde kinderpsychiater voort uit het feit, dat de wiskundige abstrakties niet passen in de bestaande hersenstructuur.

Minder hoogdravend, maar wel realistisch, is het bezwaar van anderen, dat de kinderen met hun deel-, produkt-, keuze- en oplossingsverzamelingen zo slecht uit de voeten kunnen als ze om een boodschap zijn bij de slager. Ook het feit dat er veel wordt gespeeld (o.a. logiblokken), leidt tot argwaan. Kinderen moeten toch iets leren. En juist dat leren betreft zulke moeilijke dingen, dat ze vroeger niet eens op het gymnasium werden onderwezen. Hetgeen weer een doorn in het oog is van ouder-oud-gymnasiasten.

Tenslotte laten we enkele duitse hoogleraren (wiskunde) aan 't woord, die ten aanzien van deze ontwikkelingen tot op dit moment weinig belangstelling toonden:

'Mengenlehre sei zwar eine wichtige 'mathematische Disziplin', aber für die Schule kaum geeignet. Dort könne es allenfalls eine 'Gebrauchsmengenlehre' geben, die 'eher eine Sprache als ein eigener 'mathematischer Stoff' sei und deshalb im Zusammenhang mit anderen Stoffen 'allmählich und zwanglos eingeführt werden solle.'

Er zijn, volgens Der Spiegel nog steeds, ook voorstanders in Duitsland. Dit zijn, behalve de uitgevers, vooral degenen, die zich met de didaktiek van de wiskunde bezighouden: de docenten aan de opleidingen van leerkrachten. Het is o.i. zeer begrijpelijk dat in deze kringen *de taal* der verzamelingen als

aantrekkelijke basis voor het getalbegrip werd gezien. Het definiëren van het kardinaalgetal (als een eigenschap van een verzameling van verzamelingen) schijnt immers een didactische aanwijzing te leveren in verband met het verwerven van dit begrip. Het feit dat hierbij veel concreet en aanschouwelijk materiaal functioneel verwerkt kon worden, paste tevens in bestaande ontwikkelingspsychologische denkbeelden.

Daarbij komt natuurlijk, ook naar oud duitse gewoonte, het bekende vormingsideaal naar voren. Een mens moet leren flexibel te denken, initiatieven te nemen, creatief en kritisch te zijn en logisch te kunnen redeneren. Moderne wiskunde geeft hiertoe alle aanleiding, zegt de voorstander.

Tenslotte biedt de leerstof direkt de gelegenheid tot het hanteren van didactische werkvormen, die m.b.t. het oude rekenonderwijs onmogelijk waren. Het werken in groepen wordt met name in 't artikel genoemd.

Voor en tegen de moderne wiskunde, een discussie die zich afspeelt met betrekking tot de verzamelingenleer.

Wat kunnen wij in Nederland van de duitse situatie leren? Weten we nu iets meer over het nut van verzamelingenleer? Geeft de duitse discussie ons aanwijzingen omtrent de relevantie van moderne wiskunde? Welnee.

Afgezien van het feit dat de leerplanontwikkelaars in Nederland reeds sinds geruime tijd de waarde van de verzamelingenleer van de basisschool laag getaxeerd hebben², wordt de discussie in Duitsland bepaald door voornamelijk irrelevante zaken.

Toch hebben we *iets* ervan kunnen leren.

Slechts een deel van de werkelijk bij wiskundeonderwijs betrokkenen kwam in Duitsland pas in actie toen de moderne wiskunde de school al had bereikt. Wij, in Nederland, mogen deze fout niet maken. Datgene, wat hier te lande onder moderne wiskundeonderwijs voor de basisschool wordt verstaan, dient ruim van te voren door alle betrokkenen doordacht te kunnen worden. Betrokken is, naar onze mening, ten minste iedereen, die met wiskundeonderwijs te maken heeft.

2.3 Amerikaanse projecten faalden?

De ontwikkelingen, die door de Wiskobasgroep van het I.O.W.O. ten bate van het basisonderwijs in gang zijn gebracht en worden onderhouden, leiden niet tot verzamelingenleer op de basisschool.

Laat dat duidelijk gezegd zijn.

Het is jammer te moeten melden dat er op de nederlandse schoolboekenmarkt enkele buitenlandse methoden (vertaald, soms enigszins bewerkt) beschikbaar zijn gekomen, die in geen opzicht gelijken op het ontwikkelde Wiskobas-materiaal.

Hoewel van franse, duitse en scandinavische origine is de Amerikaanse invloed hierbinnen vaak duidelijk merkbaar. Twee leergangen zijn overigens rechtstreeks uit de V.S. overgenomen. Het ligt voor de hand dat de berichten over het falen van Amerikaanse projecten³ in ons land tot enig gevoel van

² Wiskobas Bulletin, jrg. 1. 2 en 3.

³ Zie o.a. Leeuwarder Courant 10-11-1973.

ongerustheid kunnen leiden. Ook enkele lezers van dit blad wezen hierop en vroegen om commentaar. Daar het nu meer betreft dan de verzamelingenleer alleen, willen we in deze paragraaf hierop nader ingaan.

Als men de uitspraak: 'amerikaanse projecten faalden' hoort, is vanzelfsprekend de eerste gedachte die opkomt: hé, die moderne wiskunde is blijkbaar toch niet zo goed als we dachten! Of misschien wel: ik heb altijd al getwijfeld aan die moderne wiskunde!

Het falen van een vernieuwingsproject betekent, dat moeten we ons allereerst goed realiseren, dat het onderwijs niet vernieuwd is door de projectwerkzaamheden. In concreto betekent het dat men na jaren van inspanning in en buiten de klas weer op het oude onderwijs programma is terugggevallen.

De vernieuwingspoging is mislukt. De nieuwe ideeën bleken niet vatbaar voor de werkers in de scholen.

De oorzaken hiervan kunnen velerlei zijn.

In het algemeen werden voorheen mislukte vernieuwingspogingen toegeschreven aan de leerkrachten, die op een of meer punten niet capabel zouden zijn geweest. Ze zouden bepaalde didactische werkvormen niet kunnen hanteren, ze zouden de nieuwe leerstof niet begrijpen, ze zouden niet de goede onderwijsfilosofie hebben, ze hadden te grote klassen of ze kregen te weinig faciliteiten. De laatste tijd zijn er nogal wat studies gemaakt van vernieuwingspogingen in het onderwijs. Diverse theorieën over 'de strategie van de innovatie' zijn naar voren gebracht, bijgestuurd en soms verworpen. Duidelijk blijkt uit de meest recente beschouwingen dat het verbeteren van onderwijs een zaak dient te zijn van velen.

Van meet af aan moeten zoveel mogelijk van de betrokkenen in de gelegenheid zijn met de ontwikkelingen mee te denken en liefst daarin actief te participeren. Hierbij moet het 'waarom' en het 'hoe' van de veranderingen voor iedereen langzamerhand evident worden. En dan nog blijft het invoeren van de veranderingen een zaak van voorzichtig en geleidelijk inpassen van het nieuwe in het zo goed bekende traditionele patroon.

Hoe zat dat nu in de Verenigde Staten?

In de vijftiger jaren gevoelde men aldaar een geestelijke achterstand ten opzichte van de russische geleerden, die zojuist de Sputnik hadden gelanceerd. De gelegenheid bleek gunstig om in Amerika de 'New Math' te lanceren. Rondom diverse universiteiten werden 'New Math-projecten' gekreëerd, die vooral ook het basisonderwijs betroffen. Vaak werden de leerlingenteksten geschreven door een groot aantal deskundigen uit de universiteit – soms aangevuld met praktijkmensen – die gedurende een zestal weken in de grote vakantie bijeenkwamen. Daarna werden de boeken in scholen uitgetprobeerd. Zoals bekend ging het hierbij om toentertijd volkomen nieuwe leerstof: verzamelingen, propositiologica, relaties, matrices, topologie, blokschema's, waarschijnlijkheidsrekening e.d.

In het begin van de zestiger jaren wordt hierin enige lijn gebracht. In een bijeenkomst van vele prominente wiskundigen in Cambridge (V.S. 1962), wordt een standpunt bepaald.

Met het oog gericht op de toekomst en een flinke bries in de rug spreekt men zich uit over de te doceren leerstof. (Goals for School Mathematics (1963)).

Ook de didactische doordenking beperkt zich veelal tot het punt van de leerstof: in welke (psycho-)logische volgorde kan men de gegeven leerstof 't beste aanbieden?

Het ligt voor de hand dat ook de begeleiding van de leerkrachten van 't basis-onderwijs zich hiertoe beperkte. Naast de antwoorden van de opgaven werden nog wat verrijkingsmogelijkheden aangereikt. Ook uit de later veelvuldig voorkomende lijsten met les- en leerdoelen kan de man (of vrouw) voor de klas weinig leren over het hoe en waarom van deze nieuwe stof. Terwijl op ontwikkelniveau de onderwijskundige inbreng – theoretisch vooral – groter wordt, blijft de New Math beperkt tot een weerstand wekkende leerstofvernieuwing. Daaraan vermogen psychologische gegevens (o.a. Gagné, Piaget, Dienes), onderwijsmodellen, onderwijstheorieën (o.a. Bruner en Ausubel), doelstellingenonderzoek (o.a. I.P.I.), taxonomieën (o.a. Bloom) en toetskonstrukties niets te verbeteren.

Het nadenken over het 'wiskunde-onderwijzen' in groter verband heeft tot nog toe ontbroken.

En daarop komt dan ook de eerste fundamentele kritiek vanuit het wiskunde-kamp zelf. Ze wordt toegevoegd aan de negatieve benaderingen van de New Math, die geschiedden op basis van de te grote kosten, de onmacht van ouders om kinderen te helpen, het niet zien van het nuttig effect door de leerkrachten, het signaleren van een gebrek aan rekenvaardigheid van de kinderen e.d. Wiskundeonderwijs is meer dan het overdragen van een pakket wiskundig feitenmateriaal. Kennis op het nivo van het 'weetje' heeft voor het wiskunde-bedrijven een zeer ondergeschikte betekenis. Zo is het leren van termen en symbolen uit de verzamelingenleer *zonder méér*, waardeloos. Dit soort feiten-kennis staat op het nivo van het uit 't hoofd kennen van de sommen $1+1$, $2+2$, . . . $10+10$, ware het niet dat het laatste in het vóórkomende rekenwerk veelvuldig kan functioneren.

Wiskundeonderwijs zou ook méér moeten zijn dan het aanleren van een zeker algoritmisch gedrag, dat de leerling in de gelegenheid stelt standaardoplossingen te geven van standaardopgaven.

In feite is de kritiek vernietigend, en niet alleen voor de tot leerstof verschaalde Amerikaanse projecten. Een totaal nieuwe doordenking van wiskunde-onderwijzen wordt noodzakelijk. Vragen als:

Wat is wiskunde?

Hoe gebruiken mensen wiskunde?

Hoe leert een mens wiskunde?

Welke wiskunde kun je gebruiken?

Op welke niveaus kun je wiskunde doen?

dienen beantwoord te worden om dan tot een echt vernieuwd wiskundeonderwijs te komen.

Ook in de V.S. tracht men in enkele projecten in dit opzicht verder te komen. (bijv. C.S.M.P.-Cemrel Carbondale)⁴.

Het falen van enkele Amerikaanse projecten moet dus in het juiste licht gezien worden.

Alleen maar andere leerstof aanbieden in de plaats van het bestaande,

4 Wiskobas Bulletin, jrg. 3, nr. 2, Leerplanologie, Van Bruggen en Treffers.

niet de mogelijkheid verschaffen voor de leerkrachten om te participeren in de ontwikkelingen van meet af aan.
 geen uitspraken doen over het hoe en waarom,
 in korte tijd leerlingenteksten aan het bureau schrijven,
 dit alles kan na niet al te lange tijd leiden tot een terugval op het oude onderwijs. Een kritische analyse hiervan kan ook leiden tot een fundamentele doordenking van wiskunde-onderwijs en belangrijke aanwijzingen over de aanpak van een vernieuwingsproject⁵.
 En met deze laatste benadering van buitenlandse wiskunde vernieuwingsprojecten zijn we terug bij het I.O.W.O. en Wiskobas.

2 Wiskunde onderwijs van 4 tot 18

3.1 Het I.O.W.O. anno 1974

Het accent van de ontwikkelingsactiviteiten ligt momenteel bij het basis-onderwijs. Dit feit kan bij de leraren wiskunde van het voortgezet onderwijs vreemd overkomen. Immers, sinds 1961 organiseert de CMLW cursussen voor leraren, schrijft nieuwe programma's voor het v.o. en publiceert wat 'blokken' voor Pedagogische Akademies. Voor het basisonderwijs is, inhoudelijk gezien, nauwelijks van enige feitelijke berichtgeving sprake.⁶ Alleen diegenen, die regelmatig inzage hebben in het Wiskobasbulletin (sinds 1971) kunnen zich momenteel een mening gevormd hebben over het werk op basisschoolniveau. In het kader van de vorige paragraaf mag dit ontbreken van publikaties voor een breder publiek als een fout in het vernieuwingswerk signaleerd worden. We moeten evenwel stellen dat de gekozen werkwijze noch voortkomt uit een onbekendheid met de strategieën van innovatie, noch uit een valse bescheidenheid.

De ontwerpactiviteiten voor de basisschoolklassen 1, 3 en 5 zijn pas sinds augustus 1973 in volle omvang gestart. Dit betekent, met de door Wiskobas gekozen ontwikkelprocedure, dat er in juli 1974 een eerste versie van een plan voor wiskunde-onderwijs voor deze klassen klaar kan liggen. Het jaar daarop kan een eerste versie voor alle klassen in ruwe vorm aanwezig zijn. Men hoopt in september 1975 een soort voorbeeld van een wiskunde schoolwerkplan in concept gereed te hebben.

Dat wil zeggen: zowel in de dr. Dreesschool in Arnhem als op het I.O.W.O. in Utrecht staat een kast met dezelfde inhoud: leerlingenteksten, materialen, onderwijzersbegeleiding, toetsjes, e.d.

Inmiddels zijn in het onderwijsveld de Pedagogische Akademies over inhoud en achtergronden geïnformeerd. Meer nog: de wiskunde en didaktiekleraren hebben in hoge mate actief deelgenomen in de ontwerpfasen van het materiaal. Bovendien hebben ze via hun 'opleidingswerk' en 'heroriënteringscursussen voor onderwijzers' een noodzakelijk fundamentele doordenking voortdurend eksplisiet moeten maken.

5 Wiskobas Bulletin, jrg. 2, nr. 1 e.v., Leerplanologie, Treffers en Wijdeveld.

6 Zie Euclides, jrg. 46, nr. 8 e.v.

In diverse konferenties (Egmond 1969, 1971, 1972, Noordwijkerhout 1973, 1974, Vierhouten 1970, Lochem 1972, 1973, Harderwijk 1972, Putten 1974) hebben anderen, direkt en indirekt betrokkenen bij het basisonderwijs, met de ontwikkelingen meegedacht.

Men zou toch kunnen stellen dat, hoewel de bovengenoemde kring zeer groot is, de zaak in isolement gegroeid is. Nogmaals komt dan de vraag naar voren: waarom geen publikaties in bredere kring?

Welnu, informatie over de inhoud van het gewenste wiskunde-onderwijs aan de kollega's van het voortgezet onderwijs, dient naar onze mening te geschieden aan de hand van konkrete produkten. We vinden dat vooral de wiskundeleraar pas op zinvolle wijze kan participeren, als hij in de gelegenheid wordt gesteld stukken onderwijs, mathematisch-didaktisch te analyseren.

Het betekent niet dat hij daarmee voor voldongen feiten wordt geplaatst, het betekent wel dat hij een bestaande filosofie van wiskunde-onderwijs kan aflezen uit gegeven materialen.

Vanuit een kritische doordenking van beide kan zijn bijdrage gericht zijn op het wiskunde-onderwijs op de basisschool en daarna. De vele vragen die al gerezen zijn en die nog zullen rijzen, hoopt men op het I.O.W.O. in samenspraak met velen te kunnen beantwoorden.

In verband hiermee kunnen we stellen dat inhoudelijke informatie over het werk in de dr. Dreesschool van nu af aan regelmatig in Euclides zal worden gegeven.

Degenen, die zich willen inzetten om terstond actief mee te denken (werken), willen we graag opwekken om deel te nemen aan de 'v.o.-responsgroep', die omstreeks het volgend kursusjaar maandelijks in Utrecht bijeen zal komen onder leiding van I.O.W.O. medewerkers. Het zou bijzonder prettig zijn als enkele gehele wiskunde-sekties van scholengemeenschappen besloten zich hiervoor in te zetten.*

Zonder enige overdrijving mogen we stellen dat de leraar wiskunde van de tachtiger jaren iemand zal zijn die weet betrokken te zijn bij wiskunde-onderwijs van 4 tot 18 jaar. Het gedeelte, dat hij daarvan voor zijn rekening neemt, kan slechts tegen het vertikaal geplande leerplan in het juiste mathematisch-didactische licht geplaatst worden.

3.2 Meedenken met leerplanontwikkeling.

Er zijn in de loop der tijden heel wat manieren geweest, waarop leraren bij leerplanontwikkeling betrokken werden. Meestal betrof dit dan een stuk onderwijs, dat dicht bij het dagelijks werk in de klas lag. Het in gebruik nemen van een nieuw leerboek vormde de aanleiding. Ging het over echte veranderingen in het programma, zoals onlangs in ons voortgezet onderwijs gebeurde, dan liet men een heroriëntering op eigen leraarsniveau vooraf gaan. Leraarskursussen, schoolprogramma's, eindexamenprogramma's en leerboeken kwamen in een dergelijk geval steeds 'van hoger hand'.

* Inmiddels is op 6 november 1974 een eerste bijeenkomst geweest met de wiskundesekcie van het Wagenings Lyceum.

Enerzijds was dit voor de leraar soms moeilijk te verteren. Zijn visie op het vak kon nog slechts naar voren komen in een kritiek op de ontwikkelingen, die eerder zijn onvermogen dan zijn visie weerspiegelde.

Anderzijds gaven die inbrengen van buitenaf toch ook weer de nodige rust. Tenslotte behoefde men geen nieuwe onderwerpen zelf te bestuderen of dingen te bedenken. Het motiveren van het hoe en waarom van de veranderingen kwam eveneens voor rekening van anderen.

Het ligt voor de hand dat de gang van zaken in Nederland gedurende de laatste jaren niet geleid heeft tot een duidelijke, gemeenschappelijke visie op wiskunde-onderwijs. De meningen over het hoe en waarom van wiskunde-onderwijs kan men nauwelijks verdeeld noemen. Evenals een mening over de inhoud van het wiskunde-onderwijs, ontbreken ze in het algemeen.

De nederlandse wiskunde-leraar denkt veelal in gegeven eindexamenprogramma's en werkt zodanig, dat zijn leerlingen een zo groot mogelijke kans hebben om te slagen. Dat is legitiem, maar schrikbarend kortzichtig:

- De didaktiek van het vak wiskunde wordt dikwijls vereenzelvigd met een klein deelgebied ervan, waarin het erop aankomt bepaalde delen van de leerstof 'aan de man' te brengen. Er is echter zo bijzonder veel meer!
- Men meent dat het wiskunde-onderwijs aan de eigen school niets te maken heeft met dat in andere typen van onderwijs.
- Hoogstens spreekt men minachtend over de toeleveringsscholen en hoogachtend over de scholen, waarvoor wordt opgeleid. Een gevolg van het reeds genoemde denken in leerstof zonder meer.
- De leeftijd van de eigen leerlingen vormt soms een basis voor het spreken over niveaus en het denken over status. Hier ontbreekt een zicht op wiskunde-onderwijs in verticale zin.

De bovenstaande opmerkingen zouden een aanzet tot een destrukatieve analyse van het nederlandse wiskundeonderwijs kunnen betekenen. Als we ermee door gaan kon het wel eens blijken dat voor een konstruktieve voortzetting geen ruimte meer was.

Meedenken met leerplanontwikkeling betekent echter konstruktief analyseren. Vandaar de paragraaf over 'Een basisschool in Arnhem', waarmee dit artikel begonnen werd.

We hopen dat dit destrukatieve slot evenwel een gepeperde respons op het voorgaande mogelijk maakt.

Wellicht kan dit tijdschrift een spiegel worden van de ontwikkeling betreffende het vakdidaktisch denken in het wiskundeonderwijsveld. Een veld dat zowel in de diepte als in de breedte grotere afmetingen heeft dan tot nu toe naar voren is gekomen.

De kennismaking met vektoren in de onderbouw

P.M. VAN HIELE

Voorburg

De introductie van het begrip 'vektor'.

Naar mate de docenten beter met de nieuwe wiskunde vertrouwd raken, groeit de behoefte de vektoren zo vroeg mogelijk te introduceren. Het optellen en aftrekken van positieve en negatieve getallen willen we graag illustreren met pijlen en we denken daarbij zelf aan eendimensionale vektoren. Het enige wat ons ervan weerhoudt om op die plaats de vektor in te voeren, is, dat eendimensionale vektoren iets onafs hebben: een aantal typische eigenschappen van vektoren komt bij de eendimensionale vektoren niet goed uit de verf.

Als we in de meetkunde coördinaten hebben ingevoerd, zijn we eigenlijk al op het gebied van de vektoren aangeland. Bij deze gelegenheid hebben we dan bovendien meteen met twee dimensies te doen. Een bezwaar is echter, dat we dan weer geen aanleiding hebben vektoren op te tellen.

Hiermee hebben we precies geanalyseerd, wat er nodig is om met vektoren te kunnen starten: we moeten met meer dan één dimensie te doen hebben en we moeten iets hebben aan de optelling van de vektoren. We zien daaraan, dat de verplaatsingen in het platte vlak geschikt zijn om daaraan het begrip 'vektor' op te hangen.

Wat is een vektor?

De docent voor wie de eerste kennismaking met vektoren heeft gelegen op het terrein van de natuurkunde, heeft van deze start zeer duistere herinneringen. De fysicus stuntelde — en stuntelt vaak nu nog — wat over grootte, richting en aangrijpingspunt, hij tekende daarbij een pijl en werkte zich in een minimum van tijd op een allerverschrikkelijkste wijze in de knoop. Hij sprak over vektor, als hij de norm van de vektor bedoelde, soms stond hij toe zo maar een totaal ander aangrijpingspunt te kiezen en een andermaal mocht het aangrijpingspunt niet, of alleen maar in de richting van de vektor worden verplaatst. Het gevolg is, dat bijna alle wat oudere docenten bij het woord 'vektor' meteen associaties krijgen met een pijl, iets, wat hen dikwijls parten speelt.

We zijn in de onderbouw van heel veel misverstand af, als we tweedimensionale vektoren opvatten als geordende getallenparen, dat wil dus zeggen: een getallenpaar waaraan je een eerste en een tweede getal onderscheidt. Dienovereenkomstig is een driedimensionale vektor een geordend getallentripel en een eendimensionale vektor is gewoon maar een reëel getal. Als men vektoren op deze manier definieert, heeft men in de onderbouw nergens moeilijkheden. Ook trouwens niet in de bovenbouw, want aan een ruimere definitie van vektor hebben we ook daar niet echt behoefte. Wie vertrouwd is met de gedachte, dat vektoren geordende getallenparen of geordende getallentripels zijn, zal ook geen enkele moeite meer hebben met het optellen van 'vaste' of 'vrije' vektoren. Hij telt op: $(2, 5) + (3, -4) = (5, 1)$, ongeacht, waar hij deze getallenparen vandaan heeft gehaald. Op dezelfde manier tellen we op $3 + 5 = 8$, waarbij 3 is het aantal vissen gekocht bij de visboer en 5 het aantal flessen jenever, gekocht bij de slijter.

In deze gedachtengang is er ook geen enkel bezwaar tegen de koördinaten van het punt A vektor te noemen. Als dan A_1 het beeld is van het punt A voor de translatie t , dan krijgen we dus: de vektor behorende bij het punt A plus de vektor behorende bij de translatie t is gelijk aan de vektor behorende bij het punt A_1 . Wie dan wil schrijven: $A + t = A_1$ heeft helemaal geen ongelijk; wel acht ik het dan gewenst met vette letters te werken, omdat iedereen moet kunnen zien, dat wij het over vektoren hebben.

Zoals bij alle abstrakties, moet men voor de schrijfwijze $A + t = A_1$ het juiste moment kiezen. Wie meteen bij de introductie van translatie op deze schrijfwijze overstapt, laat de leerlingen te veel moeilijkheden tegelijkertijd verwerken.

De pijlvoorstelling van vektor

Als men de vektor heeft geïntroduceerd als een verplaatsing in een assenstelsel — bijvoorbeeld: een verplaatsing van 3 naar rechts en 4 naar beneden duiden we aan met $(3, -4)$ — dan heeft men meteen de pijlvoorstelling van vektor, als men een willekeurig punt A door een lijnstuk met zijn beeld B verbindt. Om duidelijk te maken, dat B het beeld is, zetten we bij B een haak in het lijnstuk en we spreken dan van de vektor $\overrightarrow{AB}$. Deze vektor is $(3, -4)$; $\overrightarrow{AB}$ is de pijlvoorstelling van deze vektor. Aangezien we voor A ieder punt van het vlak kunnen kiezen, heeft de vektor $(3, -4)$ oneindig veel pijlvoorstellingen. Wie er plezier in heeft, mag nu zeggen, dat ik hiermee de vrije vektor heb ingevoerd. Ikzelf heb hieraan geen behoefte: ik heb één vektor $(3, -4)$ met oneindig veel pijlvoorstellingen. Men zou ook nog kunnen spreken van een vrije pijlvoorstelling, maar ook dat woord kunnen we missen.

Ter onderscheiding met de koördinaten van punten, kan men de verplaatsingsvektor aanduiden met teksthaken: $[3, -4]$. Mijn leerlingen zijn dit gewend, maar de vraag is, of het veel zin heeft dit onderscheid te maken; misschien stap ik er wel vanaf.

Als men de translatie (a, b) laat volgen door de translatie (c, d) , krijgt men als samenstelling de translatie $(a + c, b + d)$; hiermee is het optellen van vectoren zinvol geworden.

Als we bij de samenstelling van verplaatsingen de pijlvoorstelling tekenen, krijgen we de kop-staart voorstelling van de vektoroptelling. Als we ook bij de vektoroptelling $A + t = A_1$ een pijlvoorstelling willen tekenen, moeten we gebruik maken van de pijlen OA en OA_1 . Daarmee maken we echter in de onderbouw voor de leerlingen de zaak beslist niet duidelijker.

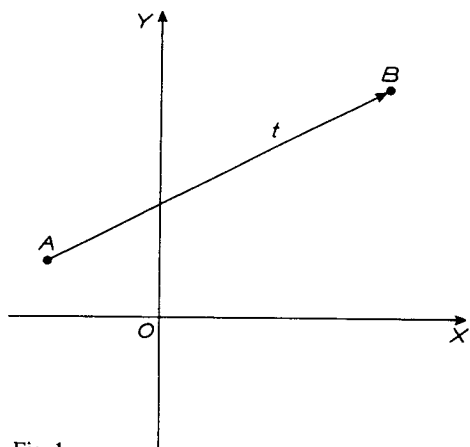


Fig. 1

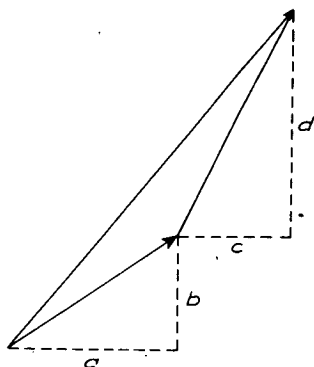


Fig. 2

Het rekenen met vectoren

Het goed kunnen rekenen met vectoren is gebaseerd op het goed kunnen optellen van positieve en negatieve getallen. Nu zijn we gewend het optellen van positieve en negatieve getallen te illustreren met pijlen en daarmee zijn we dan eigenlijk in een kringetje rondgedraaid. Er is echter niets op tegen al met pijlen te werken, vóór de vectoren zijn ingevoerd. Men kan beginnen met de getallenrechte uit te breiden met de negatieve getallen. Een getal a is groter dan een getal b , als het rechts van b op de getallenrechte ligt. Beter gezegd: er is op de rechte een pijlrichting aangebracht en een getal a is dan groter dan een getal b , als men van b naar a gaande zich in de pijlrichting moet bewegen. We kunnen zeggen: $(+4)$ is 11 groter dan -7 omdat je 11 in de pijlrichting moet gaan om van -7 tot $+4$ te komen. De verplaatsingen op de getallenrechte zijn optelbaar: een verplaatsing van -4 gevolgd door een verplaatsing van $+7$ heeft hetzelfde effect als een verplaatsing van $+3$. Daaruit kan men aflezen: $(+7) + (-4) = (+3)$.

Op die manier kunnen we rekenregels voor het optellen van positieve en negatieve verplaatsingen laten vinden. We kunnen ook laten zien, dat de getallen zich gedragen als verplaatsingen: het getal -5 plus de verplaatsing $+11$ geeft als beeld het getal $-5 + (+11) = +6$.

In het algemeen hebben de leerlingen bij deze optellingen niet de beschikking over een telraam, zij moeten dus gebruik maken van de tafels van optelling en aftrekking en dat geeft tesamen met de vraag, wat je eigenlijk moet doen, in het begin veel moeilijkheden. Je krijgt dan voorschriften als: — 5 en + 11 zijn tegengesteld gericht; bij de optelling vreten ze elkaar gedeeltelijk op, + 11 is het sterkst en er blijft dus + 6 over.

Het duidelijkst, maar niet het kortst is de volgende bewerking: — 5 + (+ 11) = — 5 + (+ 5) + (+ 6) = 0 + (+ 6) = + 6.

Dit is de manier waarop de leerlingen moeten denken, maar de schrijfwijze is voor beginnende leerlingen vrij zwaar.

Groep

In het laatste voorbeeld hebben we gebruik gemaakt van de eigenschappen van een groep.

Deze immers luiden:

Men noemt een verzameling G van elementen met een operator $*$ groep (schrijfwijze: $G, *$), als aan de volgende eisen voldaan wordt:

1. Bij iedere twee elementen a en b van G bestaat er een element $a * b$ dat tot G behoort.
2. Er is een neutraal element n dat tot G behoort, zodat voor ieder element a van G geldt: $a * n = n * a = a$.
3. Bij ieder element a van G bestaat er een element a^{inv} van G met de eigenschap: $a * a^{\text{inv}} = a^{\text{inv}} * a = n$.
4. De operator $*$ is associatief: voor iedere drie elementen a , b en c van G geldt: $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Bij de optelling van reële getallen hebben we bovendien te doen met een commutatieve groep:

5. Voor iedere twee elementen a en b van G is $a * b = b * a$.

Bij de bewerking hierboven hebben we gebruik gemaakt van de associatieve eigenschap. Immers voor — 5 + ((+ 5) + (+ 6)) schreven we ((— 5) + (+ 5)) + (+ 6).

We beschouwen (— 5) en (+ 5) als elkaars inverse: hun som is het neutrale element 0.

Ten slotte gebruikten we eigenschap 2 bij $0 + (+ 6) = + 6$.

Nu is het echt niet aan te bevelen eerst het begrip 'groep' te behandelen voor je aan het optellen van positieve en negatieve getallen gaat. Een van de grondslagen van de didactiek vertelt immers, dat men het algemene leert door eerst enkele bijzondere gevallen te bekijken, en niet omgekeerd. We hebben dus een goede kans het begrip 'groep' te leren met behulp van de optelling van de reële getallen (of de gehele getallen, zo men wil), met behulp van de vermenigvuldiging van de reële getallen met uitzondering van nul (of in de verzameling van de rationale getallen met uitzondering van nul, zo men wil) en met behulp van de optelling van vectoren.

Toch, al komt het begrip 'groep' voor de leerlingen nog lang niet ter sprake, voor ons docenten (en auteurs van schoolboeken) is het van belang ons te realiseren, dat het begrip 'tegengestelde van een getal' bij de optelling van positieve en negatieve getallen een belangrijke rol speelt. Het optellen van -7 en $+3$ verloopt vlot, als de leerlingen beseffen, dat $(-3) + (+3) = 0$ daarbij een belangrijk gegeven is.

Het aftrekken van vectoren

De leerlingen weten wel zo ongeveer (of zijn bereid het zich te herinneren, of in ieder geval te doen alsof zij zich herinneren), dat $8 - 5 = 3$, omdat je 3 bij 5 moet doen om 8 als som te krijgen. In het positieve deel van de getallenrechte zien we dus wel, dat $8 - 5 = 3$, omdat 8 drie eenheden rechts van 5 ligt.

Anders gezegd: je moet op 5 de translatie 3 uitvoeren om uit te komen in 8. Met behulp daarvan kan men suggereren, dat $8 - 5$ hetzelfde is als $8 + (-5)$. Bewijzen kan men hier niets, ik geloof zelfs, dat het niet mogelijk is hier de zaak 'duidelijk te maken'. We zijn hier nog helemaal in het stadium van de 'verkenning'. We kunnen natuurlijk $8 - (-5) = 8 + (+5)$ niet uit de lucht laten vallen. Maar zelfs, als we de leerlingen kunnen suggereren, dat deze omzetting 'hun volkomen duidelijk' is, dan nog zijn ze de argumenten die daarvoor gediend hebben heel spoedig vergeten. In ieder geval: hoe vlugger we de leerlingen ervan kunnen overtuigen, dat het aftrekken van het getal a vervangen kan worden door het optellen van het getal $-a$, des te beter is het.

Bij de vectoren gaat het niet anders. Men voert het begrip 'nulvektor' in en laat zien, dat iedere vektor een tegengestelde heeft. Meetkundig kunnen we met 'tegengestelde van een vektor' heel veel doen en het kost ons daarom niet de minste moeite dit begrip erin te heien.

Men kan dan $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ definiëren als het element $\mathbf{x}$ dat voldoet aan $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$. Vervolgens kan men aantonen, dat $\mathbf{x} = (-\mathbf{b}) + \mathbf{a}$. Noodzakelijk is dit niet: men kan ook rechtstreeks definiëren, dat $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ hetzelfde betekent als $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Met behulp van deze omzetting kan men iedere aftrekking van vectoren vervangen door een optelling. Hebben de pijlvoorstellingen van twee vectoren hetzelfde beginpunt, dan krijgt men: $\mathbf{AB} - \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{CA} = \mathbf{CA} + \mathbf{AB} = \mathbf{CB}$.

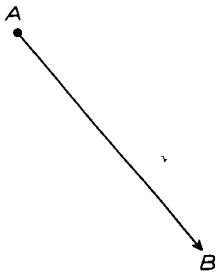


Fig. 3

Uit $A + t = B$ volgt: $t = (-A) + B = B - A$.

Daar $AB = -BA$ kunnen de leerlingen ook begrijpen, dat $A - B$ het tegengestelde is van $B - A$.

Doel van dit artikel

Hoe men in de onderbouw meetkundige eigenschappen kan bewijzen met behulp van vectoren, heb ik in dit artikel nog niet laten zien. Daarmee wil ik in een volgend artikel beginnen. Ik heb in de eerste plaats verband willen leggen tussen het begin van 'vectoren' en het begin van het 'getalbegrip'. Dit verband laat nog vele interpretaties toe bij het opstellen van een leermethode. Voor gebruikers van welke methode dan ook, is het van belang, dat zij deze samenhang leren doorzien. Zij weten dan ook, waarop hun uitleg gericht is. Verder heb ik een aantal punten aangeroerd waarover discussie mogelijk en gewenst is.

Met dit artikel en die welke nog zullen volgen hoop ik deze discussie op gang te brengen. Methodieken en didactieken ontstaan niet in het brein van een enkeling, maar worden geboren door de uitwisseling van ideeën.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Op de laatste jaarvergadering heeft het bestuur volmacht gekregen een opvolger van de overleden voorzitter dr. J. K. van den Briel in het bestuur te benoemen.

Het bestuur heeft dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12 Warnsveld, bereid gevonden het voorzitterschap van de vereniging op zich te nemen.

De secretaris.

J. W. Maassen

Enkele kritische opmerkingen bij de normen voor de beoordeling van het schriftelijk werk wiskunde van het HAVO-examen

De bindende normen voor de beoordeling van het schriftelijk werk, vastgesteld door de commissie, bedoeld in artikel 27, lid 5, van het Besluit eind-examens v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o. van het jaar 1974 verschillen op het punt van rekenfouten en verschrijvingen met die van 1973. Stond er in 1973: 'Voor elke rekenfout of verschrijving wordt één punt afgetrokken', in 1974 luidt de regel: 'Voor elke rekenfout of verschrijving *in de berekening* (cursivering van ons) wordt één punt afgetrokken tot een maximum van het aantal punten van het desbetreffende onderdeel'.

Onze bezwaren tegen deze regel zijn van tweeërlei aard:

I Deze regel is onduidelijk.

a. Wat is een verschrijving?

Volgens Koene-Endepols: een fout gemaakt bij het schrijven. Het kan toch niet de bedoeling zijn, dat dit soort fouten een rol speelt bij het beoordelen van een wiskunde-examen. Waarschijnlijk bedoelen de opstellers van de normen iets anders. Wij zouden graag willen weten wat?

b. Wat is een onderdeel?

In de normen wordt aangegeven hoeveel punten per onderdeel gegeven mag worden. Vaak wordt dit nog uitgesplitst, bijvoorbeeld als volgt:

voor c: 5 punten: voor de grafiek van f 3 punten

voor de grafiek van g 2 punten

Een kandidaat maakt bij het tekenen (en de bijbehorende berekening) van de grafiek van g drie rekenfouten, terwijl hij de grafiek van f geheel juist tekent. Moeten voor onderdeel c nu 2 of 3 punten worden toegekend? Ons is gebleken, dat de meningen hierover verdeeld zijn.

c. De toevoeging 'in de berekening' is verwarrend.

De vraag waar de berekening begint en waar deze ophoudt, kan op allerlei manieren beantwoord worden. Hoort het geven van een tekenoverzicht bij de berekening? Hoort het trekken van een conclusie uit een berekening bij de berekening? Hoort het overnemen van de gegevens bij de berekening?

d. Naar onze mening is de formulering van deze regel aanvechtbaar. Immers, op een bepaalde manier gelezen is hier sprake van rekenfouten in de berekening.

Als U het bovenstaande scherpslijperij vindt, kunnen wij ons dit wel indenken. Over al deze punten zijn dit en het vorige jaar evenwel verschillen van mening gerezen die tot langdurige en onbevredigende discussies aanleiding gaven.

II Een strikte toepassing van deze regel kan tot onrechtvaardigheid leiden.

- a. De bedoeling van het examen is, inzicht te krijgen in kennis en vaardigheid van de kandidaat op het gebied van de wiskunde; natuurlijk is bij het maken van het examenwerk een bepaalde zorgvuldigheid vereist, maar voor ons is het de vraag of deze zorgvuldigheid een rol mag spelen bij de beoordeling van het examenwerk.

Om een voorbeeld te noemen. Het gebeurt nogal eens dat kandidaten een verbetering die betrekking heeft op dat wat reeds geschreven is, onvolledig uitvoeren. Het komt ons onredelijk voor in dit geval één of meer punten af te trekken.

Wat te denken van een kandidaat die bij het oplossen van een vergelijking één maal achter één van de vergelijkingen ' $= 0$ ' vergat; het kostte hem één punt en hij verspeelde daarmee een 10 als eindcijfer.

Elke leraar kan uit eigen ervaring voorbeelden toevoegen.

- b. Deze regel is nadelig voor slordige kandidaten.

Het kan voorkomen dat een kandidaat blijkt geeft een bepaalde moeilijkheid goed te kunnen oplossen. Het kan de examinerator onmogelijk gemaakt worden om dit in zijn beoordeling tot uitdrukking te brengen, omdat hij voor *elke* rekenfout of verschrijving één punt moet aftrekken.

Het bovenstaande geeft ons aanleiding tot het volgende voorstel:

- a. Zou de examinerator niet meer vrijheid gegeven kunnen worden bij het meetellen van rekenfouten en verschrijvingen. Dit zou kunnen betekenen dat de regel betreffende rekenfouten en verschrijvingen geheel uit de normen verdwijnt en in de hierna geciteerde regel ondergebracht wordt:

Is de beantwoording van een onderdeel niet geheel juist of is de vereiste motivering onvolledig, dan dient op basis van het maximaal beschikbare aantal punten voor dit onderdeel een zodanig geheel aantal punten te worden gegeven dat een daarmee evenredige waardering wordt uitgedrukt.

- b. Als het voorstel onder a niet overgenomen wordt (wat wij zeer zouden betreuren), zouden wij ervoor willen pleiten dat de examineratoren duidelijkheid verschaft wordt omtrent de interpretatie van de regel betreffende rekenfouten en verschrijvingen.

Wiskunde-sectie van de
Chr. S.G. 'Oude Hoven'
te Gorinchem

De redactie van Euclides heeft ons in de gelegenheid gesteld onmiddellijk te reageren op dit ingezonden artikel.

Met de schrijvers van het artikel zijn wij het eens, dat de bedoeling van het examen is: gegevens te verkrijgen over de kennis, het inzicht en de vaardigheden van de kandidaten.

Wiskundige bewerkingen – redeneringen en berekeningen – vereisen een grote mate van nauwkeurigheid. Een kommafout in de berekening van een ingenieur inzake de belasting van een brug, kan fataal zijn! De nauwkeurigheid moet dan ook wel degelijk een rol spelen bij de beoordeling.

Voor het maken van een rekenfout is een aftrek van 1 % gesteld.

Een rekenfout wordt nu duidelijk milder beoordeeld dan bij de oude examens v.h.m.o.. Voor drie vraagstukken waren toen 30 punten beschikbaar, terwijl de deskundigen/gecommiteerden een halve punt aftrokken voor een rekenfout. De tekst van de normen is in 1974 verbeterd t.o.v. die in 1973.

Het weglaten van de letter *t* in 'hieruit word *t* geconcludeerd' kon gelden als een 'verschrijving'. Met een 'verschrijving in de berekening' wordt bedoeld: een fout die zonder enige berekening wordt gemaakt, b.v.

$$\begin{aligned}\sin x &= 4 + \underline{3} \cos x \\ \sin x - \underline{2} \cos x &= 4.\end{aligned}$$

Een 'rekenfout' is letterlijk een fout in de berekening, zoals

$$\begin{aligned}2 \sin x \cdot (-3 \cos x) &= 4 \\ -8 \sin x \cos x &= 4\end{aligned}$$

Zou men op dit punt geen voorschriften geven, dan zouden o.i. vele en langdurige discussies ontstaan tussen correctoren, terzake van de toe te kennen punten.

In alle vergaderingen met docenten is de laatste jaren de wens naar voren gekomen de normen voor het centraal schriftelijk werk zoveel mogelijk te verfijnen, teneinde eenduidigheid en uniformiteit te bewerkstelligen.

Als men dit doel voor ogen heeft, moet men ook trachten ervoor te zorgen dat alle correctoren eenzelfde gedragslijn volgen t.a.v. rekenfouten en verschrijvingen in de berekeningen.

drs. W. E. de Jong
drs. B. J. Westerhof

Korrel

Wiskunde voor ouders

Een loffelijk streven is op eenvoudige wijze ouders iets uit de moderne wiskunde bij te brengen, zodat ze hun kinderen beter bij hun huiswerk kunnen helpen. Het maandblad School levert bijdragen in deze richting. In het nummer van april 1974 lezen we (blz. 62):

‘Wanneer u nu bij elke x van $\mathbb{Z}$ niet de tweede macht, maar de (tweedemachts-) wortel gaat zoeken, treden er ‘problemen’ op. Kiest u voor x het getal 81 dan vindt u **twee** bijbehorende getallen y , want

$$-9 = \sqrt{81}, \text{ omdat } (-9) \cdot (-9) = 81,$$

maar ook

$$+9 = \sqrt{81}, \text{ omdat } (+9) \cdot (+9) = 81.$$

Dit is voor wiskundigen al een voldoende reden om de relatie y is de **tweede-machtswortel van x** geen **functie** te noemen.

Een andere reden waarom $y = \sqrt{x}$ geen functie heet, is dat er (oneindig) veel x 'en in $\mathbb{Z}$ te vinden zijn, waar (in $\mathbb{Z}$) geen wortel voor bestaat. Voor de negatieve getallen is geen wortel te vinden, omdat **min maal min, plus is**, maar ook vele positieve getallen hebben in $\mathbb{Z}$ geen wortel. Zo bestaat er geen **geheel** getal y , zodanig dat $y \cdot y = 2$. Ook dit is een reden waarom we de **relatie** $y = \sqrt{x}$ niet een functie noemen. We hopen u ook met het relatieverhaal wat vertrouwen gegeven te hebben bij het openen van het wiskundeboek van uw kind.’

School, Maandblad waarin school en thuis elkaar ontmoeten, is uitgegeven door Zomer en Keuning. Losse nummers f 3.—. Abonnement per jaar f 30.—. U kunt zich niet via Euclides abonneren.

P. G. J. Vredenduin

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Elemente der Mathematik; 2-29², juli 1973-maart 1974

- K. Voss, In Memoriam Heinz Hopf;
P. Erdős, Über die Zahlen der Form $\sigma(n) - n$, und $n - \varphi(n)$;
M. Jeger, Irreduzible Polynome als kombinatorische Figuren;
H. Ratschek, Intervalarithmetik mit Zirkel und Lineal;
R. Z. Domiaty, Eine Bemerkung zu total beschränkten Mengen.
H. Dörninger, Überdeckung der Ebene durch incongruente Kreise;
G. D. Chakerian, Minimum area of circumscribed polygons;
S. F. Kapoor, Hypo-eulerian and hypo-traversable graphs;
E. Karst, New quadratic forms with high density of primes;
H. Bachofner, Das Tankursproblem;
W. Böhm, Über eine Bemerkung J. Steiners.
R. Schneider, Volumen und Schwerpunkt von Polyedern;
M. S. Klamkin, Two non-negative quadratic forms;
A. M. Bruckner en J. Cedèr, A note on discontinuous functions;
D. Suryanarayana, There is no odd super perfect number of the form p^{2^x} .
W. A. Webb, Rationals not expressible as a sum of three unit fractions;
K. Rable, Eine bemerkenswerte Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise einer Ebene;
A. Makowski, On a problem of Rotkiewicz on pseudoprime numbers;
A. Makowski, On the equation $\varphi(n+k) = 2\varphi(n)$.
S. Kunze en H. Stachel, Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe;
J. Zaks, Non-Hamiltonian square-minus-two;
H. Guggenheimer, Proof of a conjecture of H. Hadwiger;
R. Higgins, A note on a problem in the theory of sequences;
O. Botsch, Ein reduziertes Erzeugenden-System der Kongruenzgruppe in der Ebene.

The Mathematics Teacher, LXVI-LXVII; oktober 1973-mei 1974.

- M. A. Farrell en E. R. Ranucci, On the occasional incompatibility of algebra and geometry;
L. J. Morrow, Flow charts for equation solving and maintenance of skills;
H. Andersen, Griefless graphing for the novice;
H. B. Siner, A responsive mathematics program for open admissions;
J. Lenz, Geometry and other science fiction;
E. M. Maletsky, Activities: fun with flips;
B. L. Stern, Algebra in card tricks;
E. P. Smith, A look at mathematics education today.
G. S. Carson, Soma cubes;
D. Moursund, Selecting goals for an introductory computer programming course;
R. E. Spaulding, Recreation tactix;

N. G. Hernandez, Introductory strategies in mathematics education;
 R. C. Ulrich, A computational confidence builder;
 Th. E. Moore, Cayley's color groups;
 R. Schmalz, Categorization of questions that mathematics teachers ask;
 L. C. Bolster, Midpoints and measures;
 H. Grossman, Urquhart's quadrilateral theorem;
 P. A. White, An application of clock arithmetic;
 G. Kulm, Sources of reading difficulty in elementary algebra textbooks;
 R. J. Crouse en Cl. Reese, Using algebra to solve an interesting card trick;
 E. A. Tanis, A statistical hypothesis test for the classroom;
 N. T. Gridgeman, Coprimes and randomness.

R. L. Wilder, Mathematics and its relations to other disciplines;
 E. F. Krause, Taxicab geometry;
 E. M. Maletsky, Patterns and positions;
 J. L. King Jr, A method for solution of nonlinear inequations;
 N. A. Drain, A general algorithm for factorization;
 H. van Engen, A note on 'an algebraic treatment of magic squares';
 W. L. Lepowski, The total angular deficiency of polyhedra.

E. R. Ranucci, Fruitful mathematics;
 W. L. Schaaf, Mathematics in use, as seen on postage stamps;
 H. F. Fehr, The secondary school mathematics curriculum improvement study;
 R. E. Reys, Discovery with cubes;
 G. L. Lane, Some experiences with slow learners;
 J. H. Hughes, How to break a window without calculus.

D. Davidson, Learning mathematics in a group situation;
 R. J. Crouse, Ripley's believe is or not- a source of motivational incentives;
 B. Shneiderman, A computer graphics system for polynomials;
 G. E. Noether, The nonparametric approach in elementary statistics;
 P. J. Boyle, An algebra adage;
 R. E. Spaulding, Pythagorean puzzles;
 B. L. Eaton, Dots on cubes;
 M. G. Monzingo, On Simpson's rule;
 G. R. Mon, Nonverbal teaching;
 Ch. A. Reeves, Network theory, an enrichment topic;
 L. L. Schroeder, Buffon's needle problem.

M. S. Bell, What does 'everyman' really need from school mathematics?
 L. M. Toschki, The permutation triangle;
 A. Rothbart en B. Paulsell, Pythagorean triangles;
 D. Detemple en J. M. Robertson, The equivalence of Euler's and Pick's theorems;
 J. M. Sconyers, Something new on number line;
 A. L. Hess, Unary operations;
 B. Henry, The fourth dimension and beyond . . .

Ch. Brumfiel, Using a game as a teaching device;
 S. Forseth en A. Price Troutman, Using mathematical structures to generate artistic designs;
 H. Fremont, Some uncommon sense about individualized instruction, intuition and applications;
 M. B. Nicolai, A discovery in linear algebra;
 D. Ballew, Numeration systems with unusual bases;
 Ch. W. Trigg, Tetrahedral frameworks;
 W. L. Lepowsky, The area of a parallelogram is the product of its sides;
 M. Maxfield, Mixture problems by some 'Old Math';
 Chr. R. Hirsch, Pick's rule;
 G. K. Goff e.a., Matrix algorithms for operations on polynomials;
 W. J. Rapaport, Paper folding and convergent sequences;
 M. J. Flyna, The computer's impact on mathematics: numerical and Monte Carlo methods;
 T. D. Garmley, Video-based individualized systems;
 G. Kulm, Area ratios in convex polygons.

Boekbespreking

Tafels Wiskunde en Statistiek, Wolters-Noordhoff, 72 blz., f 6,40.

Dit boekje bevat naast de tabellen van logaritmen met grondtal 10, ook die van natuurlijke logaritmen en e -machten. Verder tabellen van goniometrische verhoudingen, uitgaande zowel van graden als van radialen. Daardoor is het geschikt voor gebruik bij het VWO. Jammer is wel dat we geconfronteerd worden met logaritmen in 5 decimalen bij het grondtal 10.

Bij de tabellen voor de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek valt de zeer overzichtelijke manier op waarop de tabel voor de binomiale verdeling is ingedeeld. De rode achtergrond, die overigens bij alle tabellen wordt toegepast, is hier zeer functioneel. Natuurlijk ontbreken de tabellen voor de normale en de Poissonverdeling niet. Daarna volgen een aantal tabellen, die bij het VWO waarschijnlijk niet gebruikt gaan worden, maar waardoor het boekje ook bij het HBO zijn diensten zal bewijzen. De laatste bladzijde bevat een aantal toevalsgetallen. De prijs van het boekje is, gelet op omvang en omslag, aan de hoge kant.

Th. van Eekelen

Velders en Kuijpers, *Werkboek rekenliniaal* (met antwoorden en toetsboekjes), Wolters-Noordhoff ISBN 90 01 89210 8 f 6,50 en 90 01 89211 6 f 3,05.

De stof die 80 bladzijden telt, is verdeeld over 20 taken-met-voorbeelden. Wie dit alles goed heeft verwerkt, zal zeker een vlotte rekenliniaaltechniek hebben verkregen.

Juist omdat ik dit boekje graag een behoorlijk debiet gun, maak ik de kritiek wat gedetailleerd, in de hoop een nóg bruikbaar herdruk te beleven. De betrokken bladzijden staan er tussen haakjes achter.

Taal- en tekenkwesties. Liever derdewortel dan derdemachtswortel (5), dé diameter liever d noemen (54), want D is de verzameling (45). De wens het deelteken: door het computerdeelteken/of door breukstreep te vervangen is al heel oud, maar het herhaald gebruik van de dubbele punt is echt afschrikwekkend (76) 2e betekent ten tweede (24), lg of log? (69)

Wiskundige kwesties. Een ! achter een getal is niet steeds storend, maar er kan een verkeerde gewoonte uit groeien i.v.m. faculteit (33), de figuur op (45) is geen venndiagram, maar een pijldiagram, men kan immers links $1/\pi$ toevoegen en dan komt 1 rechts. Bovendien moet 12,56 zijn 12,57. Is het midden van (45) geen ballast? Als ik een getal 5 keer (niet $5 \times$) met zichzelf vermenigvuldig vind ik de zesde macht (75). Niet aanbevelenswaardig is de schrijfwijze

$32 = 2^5 (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32)$, waarbij alleen het gebruik van het computervermenigvuldigteken weldadig aandoet (70). Is het nog wel correct over goniometrische verhoudingen te spreken, als het slechts om de getallen gaat? (78) Een verhouding is een verzameling geordende paren. Dat $46' = 0,77$ is een storend vergissinkje (80).

Didactische kwesties. De schrijvers willen terecht geen techniek zonder begrip. Daarom eerst taxeren, dan rekenen (12). Ze hadden ook de natuurkundige schrijfwijze der getallen kunnen behandelen met de belangrijkheidsrij: Aantal cijfers — eerste cijfer — andere cijfers. Bij de twee suggestieve plaatjes, die de herleiding van gewone tot decimale breuken bevorderen ontbreekt echter de taxatie: $3/7 + 9/17$ geeft ongeveer $1/2 + 1/2 = 1$ en $4/11$ en $5/13$ zijn ongeveer gelijk, zodat het antwoord dicht bij 1 moet liggen (28, 32).

Tot mijn verwondering slaat het uitgewerkte voorbeeld (liever: tegenvoorbeeld) op een andere opgave (31). Is het niet beter, het grondtal 2 te noemen voordat we 10 nemen? (70) Op de vraag,

wat logaritmen eigenlijk zijn, ontbreekt de slagzin: Logaritmen zijn exponenten. Verder zag ik daar graag twee equivalentierelaties genoemd:

1. ... gaat door kommaverplaatsing over in ... en

2. ... gaat door vermeerdering met een geheel getal over in ...

en dan de opmerking, dat er (1, 1)-correspondentie is tussen de verzameling equivalentieklassen 1 en de verzameling equivalentieklassen 2. (71) Ik kan me voorstellen, dat de schrijvers niet op *al* mijn wensen ingaan en toch een optimaal bruikbare herdruk van dit mij sympathieke boekje verzorgen.

J.K. Timmer

Analyse en statistiek, deel 5/6 V2 van de serie 'Getal en ruimte' door K. de Bruin e.a., uitg. Tjeenk Willink/Noorduijn. 223 blz., f 16,—.

Dit uitstekende leerboek voor de hoogste klassen van het VWO begint met een hoofdstuk goniometrie, waarbij de eerder behandelde stof nogmaals aan de orde komt, en daarna uitgebreid wordt met de functie $a \sin x + b \cos x + c$ en de cyclometrische functies, welke beknopt behandeld worden. Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden is helaas geen gebruik gemaakt van de eenheidscirkel, waarmee toch wel prettiger te werken valt dan met de grafiek. Ook bij het hoofdstuk integraalrekening merk je de concentrische methode. Als nieuwe onderwerpen komen ter sprake de kettingregel bij het berekenen van integralen en de berekening van oppervlakte en inhoud. Opgenomen is ook (nog) een hoofdstuk over rijen welke, zoals bekend, niet tot het examenprogramma VWO behoren. §6 van dit hoofdstuk bevat echter een aantal belangrijke limieten.

De parametervoorstelling wordt zeer goed duidelijk gemaakt met een voorbeeld uit de mechanica. Ook het begrip differentiaal wordt helder behandeld. Wat speciaal opvalt is, dat steeds bij het begin van een nieuw onderwerp met een goed gekozen voorbeeld wordt duidelijk gemaakt waarom men heen wil. De leerling heeft daardoor meteen houvast. Dit geldt ook bij de behandeling van de differentiaalvergelijkingen.

Ook de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek worden behandeld. Tabellen voor de binomiale kansverdeling, alsmede de Poisson en de normale verdeling, welke ook nog eens als losse bijlage zijn toegevoegd (handig!), completeren het geheel.

Het boek wordt besloten met een zeer grote verzameling herhalingsopgaven. De keuze der vraagstukken is in het hele boek erg goed.

Naast de vele opvallende zaken in dit boek valt ook de uitstekende en stevige uitvoering op.

Th. van Eekelen

Beiträge zum Mathematikunterricht 1972; twee delen, opv. 192 en 224 blz.; ingen 39, 80 en 44,80 DM; Schroedel Verlag, Hannover, 1973.

De ondertitel van deze uitgave luidt: 'Vorträge auf der 6. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 11 bis 14 April in Kiel'.

Voor informatie over de congressen die in 1968 en in 1959 te Frankfurt am Main en te Ludwigsburg werden gehouden verwijzen we naar p. 115 van de 48e jaargang van Euclides.

Ook het nu verschenen verslag van het in 1972 gehouden congres verdient ongetwijfeld de belangstelling van de Nederlandse wiskundedocent, niet in het minst door de grote variatie van onderwerpen die ter sprake zijn gebracht. Weliswaar zijn de meeste voordrachten afgestemd op de situatie aan de Pädagogische Hochschule voor de onderwijzersopleiding, maar de behandeling is

van dien aard dat de methodische en de didactische problematiek ook voor het onderwijs aan mavo, aan havo en bij het vwo betekenis heeft.

Om een indruk te geven van de rijke inhoud sommen we een aantal titels op uit de meer dan 40 voordrachten die in de beide delen werden gebundeld.

11 The role of the didactics of mathematics under the 1972 planning of the mathematics teaching in grades 5-10 in Denmark (Christiansen);

2 Das Problem exemplarischer Gegenstände im mathematischen Unterricht (Becker);

3 Idealisierte Rechenmaschinen — eine Einführung in die Informatik (Cohors-Fresenborg);

4 Über Sinn und Unsinn der Mengenlehre in der Grundschule (Hestermeyer);

5 Zur Propädeutik der räumlichen Geometrie (Müller);

6 Logik in der Schule (Oberschelp);

7 Der Vektorraum der Einkäufe (Georges Papy);

8 Der Einfluss verschiedener Formen des Mathematikunterrichts in der Grundschule auf die Entwicklung des beweglichen Denkens (Picker).

11 9 Die Omnivalenz der 'Farbenzahlen' Cuisenaires (Rahn);

10 Zur Problematik der 'Neuen Mathematik' in der Hauptschule (Schupp);

11 Geometrie in endlichen Geometrien (Siemon);

12 Mathematik im 1 Schuljahr (Hans Georg Steiner);

13 Das Evaluationskonzept des Frankfurter Projekts (Weis);

14 Zur Grundschule-Mengenlehre (Windelberg);

15 Über die Grundlagen der Längenmessung (Winzen);

16 Zum Begriff 'Gruppierung' in der Piagetschen Psychologie (Wittmann).

Het ontbreken van een vel druks (p. 113-128) in deel I zal naar we mogen verwachten alleen een gebrek van mijn recensieexemplaar zijn.

Het is begrijpelijk dat in de gehouden conferenties meer problemen werden gesteld dan opgelost; voor het oplossen van didactische problemen dienen conferenties niet, wel voor het doorgeven van informatie. De samenstellers van de bundel wijzen er uitdrukkelijk op dat ondanks de veelzijdigheid van het conferentieprogramma allerlei fundamentele problemen onaangeroerd bleven. Voor de oplossing van deze problemen is nog veel wetenschappelijk werk gepaard gaande met didactische experimenten te verzetten, ook in Duitsland. Aan een verantwoorde leerplanopbouw voor basisscholen en voor het voortgezet onderwijs is men ginds evenmin als bij ons nog toe.

Joh. H. Wansink

Fredrik Ernst, *Wiskunde voor het tto, Algebra 2 (met rekenen)*, voor Nederland bewerkt door M.A.P. Verhoeven, Malmberg, f 9,50 ISBN 90 208 43524.

Het boek telt 64 bladzijden, de oorspronkelijke uitgave is Zweeds.

Wat een hoopvol begin lezen we in het voorwoord: *Het succes voor ons, docenten, ligt niet in het primaire doel, het eindexamen, maar in het slagen van onze leerlingen in de toekomst, dus op langere termijn.* En bij even vlug doorbladeren treft het aardige plaatje op blz. 59 ook aangenaam. Zonder het eerste deel te kennen en helaas onbekend met de Zweedse voorganger, begon ik welgemeend een nadere verkenning van het terrein. Maar o, wat een bittere teleurstelling! Ik weet niet of ik mij moet richten tot de originele Zweedse tekst, of tot de bewerker (waarom publiceert deze zijn kwaliteit niet?) of tot de adviseur van de uitgever; ik heb slechts een eindprodukt, dat zeker gemiddeld één fout per bladzijde bevat en dat is toch echt niet aanvaardbaar.

Er zijn taal- en tekenfouten, didactische fouten, wiskundige fouten en, op (63, 64), waarmee ik de bladzijden aanduid, enige zetfouten.

Van de voornaamste slechts enige voorbeelden.

Taal en teken. De grafiek van een kromme (28, 48), de zes kortste i.p.v. de kortste zes (47), altijd i.p.v. onder alle omstandigheden (o.a. 57).

Wiskunde. Omtrek v.e. cirkel i.p.v. cirkel (7, 8). Hieruit *blijkt* dat wat we aangenomen hebben *vals blijkt* te zijn. Daarom *moet* het *tegengestelde* waar zijn (27). Dit ligt ook op taalterrein. Als $a = b$ en $b = c$, dan is de juiste voortzetting $a = b = c$, dus $a = c$. Niet, zoals hier staat, $b = a = c$, dus $a = c$. (vereenvoudigd naar 27, 30). Precies verkeerd gebruik van $=$ en *is* (27, 40). Sigma vergeten (41, 45), waardoor de zaak onbegrijpelijk wordt, onvolledige definitie van IR (55). Welke van de volgende vergelijkingen zijn gelijkwaardig? (31). Welke van de volgende (vergelijkingen!) zijn functies? (58).

Didactiek. Ik wenste, dat deze jongens minder stof kregen en beter. Dit boek vermeldt ouderwetse dingen (13, 14, 51, 60), gewilde modernismen (25, 27) en slordig gegeven bewijzen van zaken, die te moeilijk en oninteressant voor deze leerlingen zijn (27, 30). Soms staat iets eenvoudigs, waarmee men moet beginnen, tot slot (26, 52). Schijngeleerdheid vinden we op (54, 55), betreffende gelijk-machtigheid en oneindige verzameling, maar zonder verband. Omwegen worden gemaakt (51, 29, 15) en het maken van een omweg wordt verlangd op (19), waar het stelsel

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6} \\ x+y+z = 32 \end{cases}$$

opgelost moet worden door teruggang naar 2 verg. met 2 onbekenden.

Waarom niet de matrixoplossing gepropageerd? Het systeem is toegankelijk, naar gebleken is, voor de basisschool. Immers men zet

$$\begin{pmatrix} x+3 & y-2 & z-3 & x+y+z-2 & 30 \\ 4 & 5 & 6 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

en doet de rest met één klap uit het hoofd! Maar dit past niet bij de ouderwetse behandeling van de evenredigheid.

De weinige aardige dingen, die het boek bevat, zoals scheikunde (13), kunnen helaas mijn eindoordeel niet wijzigen: Een aaneenschakeling van slordigheden! Trouwens: Waarom moeten wij zo nodig het buitenland nadoen?

J.K. Timmer

Bottema, Djordjevic, Janic, Mitrinovic, Vasic; *Geometric Inequalities*; Wolters-Noordhoff; 151 pag.; f 19,50

Dit boek geeft een enorme verscheidenheid aan ongelijkheden op meetkundig gebied, vnl. op dat der driehoeken. Daarnaast enige ongelijkheden op o.a. het gebied van polygonen en cirkels. Naast de eenvoudige, maar niet triviale, ongelijkheden, geeft het boek ook zeer vele ten dele minder bekende, ten dele zeer ingewikkelde ongelijkheden. De schrijvers hebben grote aandacht besteed aan verwijzingen naar literatuur. Bewijzen van de diverse ongelijkheden zijn nu eens gegeven dan weer weggelaten: literatuurverwijzing helpt de lezer verder.

Dit goed verzorgde boek bestemd voor studenten, leraren en 'all scientists interested in geometry' zal voor menig een van nut zijn. Een handig naslagwerk en een aansporing tot studie. Aanbevolen!

W. Kleijne

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgave.

323 1975¹⁹⁷⁴ wordt geschreven in het 1974-tallig stelsel.

Gevraagd de laatste vier cijfers.

Onze puzzelspecialist B. Kootstra wenst hiermee de lezers van Euclides een voorspoedig grondtal.

324 De redactie van Euclides heeft besloten buitenlandse tijdschriften aan bepaalde leden ter inzage te geven en deze daarover te laten refereren, indien dit voor de lezers van Euclides nuttig kan zijn.

Hoewel de rubriek recreatie daarvoor niet de meest geëigende is, vermeld ik hier dat The Mathematics Teacher van april 1974 (vol. 67, nr. 4) grotendeels in beslag genomen wordt door herdenking van onze landgenoot M. C. Escher en artikelen over vlakverdeling.

Het is een betrekkelijk simpele vraag, maar ik wil hem in dit verband toch eens stellen. Waarop berusten veel van Eschers vlakverdelingen? Hoe is te verklaren dat onderstaande figuur een vlakverdeling mogelijk maakt?



Oplossingen

321 Het aantal kantelingen, waarin het veld (p, q) op de voorgeschreven manier bereikt kan worden, is minimaal $p+q$.

De velden, die in $p+q$ kantelingen bereikt kunnen worden, zijn in de figuur gearceerd. Het zijn de velden, waarvoor $p = 4n$ of $q = 4n$ of $(p = 4n+2$ en $q \neq 0$ en $q \neq 1)$ of $(q = 4n+2$ en $p \neq 0$ en $p \neq 1)$.

De overige velden zijn bereikbaar in minimaal $p+q+k$ kantelingen, waarin k even is.

De velden $(0, 1)$; $(0, 2)$ en $(0, 3)$ zijn bereikbaar in minimaal 3, 4 resp. 5 kantelingen. Hetzelfde geldt voor de velden $(1, 0)$, $(2, 0)$ en $(3, 0)$.

Uit het voorgaande volgt, dat als veld (p, q) bereikbaar is in $p+q$ kantelingen elk rechts ervan gelegen veld (p, q_1) ($q_1 > q$) bereikbaar is in minimaal $p+q_1+2$ kantelingen (tenzij het reeds in $p+q_1$ kantelingen bereikbaar is). Hetzelfde geldt m.m. voor elk eronder gelegen veld (p_1, q) ($p_1 > p$).

Nu blijven nog slechts enkele velden over. Het veld $(1, 1)$ is bereikbaar in minimaal 6, de velden $(1, 2)$ en $(2, 1)$ in minimaal 5 en de velden $(1, 3)$ en $(3, 1)$ in minimaal 8 kantelingen.

In de onderstaande figuur zijn de minimale aantallen in de velden geplaatst.

0	3	4	5	4	7	8	9	8
3	6	5	8	5	8	9	10	9
4	5	4	5	6	7	8	9	10
5	8	5	8	7	10	9	12	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	8	7	10	9	12	11	14	13
8	9	8	9	10	11	12	13	14
9	10	9	12	11	14	13	16	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

322 Onder een half-regelmatig veelvlak van het type $p_1 p_2 \dots p_i$ verstaan we een half-regelmatig veelvlak, waarin in elk hoekpunt samenkomen een regelmatige p_1 -hoek, p_2 -hoek, ..., p_i -hoek en waarbij bovendien de veelhoeken in deze (cyclische) volgorde om het hoekpunt gerangschikt zijn. Omdat de som van de hoeken om een hoekpunt kleiner is dan 360° zijn er slechts de volgende mogelijkheden.

a. $i > 3$. Er zijn geen andere typen mogelijk dan

3 3 3 n , 3 3 3 4, 3 3 3 5, 3 3 3 3 4,
3 3 4 4, 3 3 5 5, 3 4 4 4, 3 3 3 3 5.

Blijft over de vraag, of deze mogelijkheden ook realiseerbaar zijn.

3 3 3 n . Kies $n = 4$. Kies twee vierkanten zo, dat ze een gemeenschappelijke as hebben en zo, dat de zijden elkaar onder hoeken van 45° kruisen (fig. 1). Kies de afstand van hun vlakken zo, dat driehoek AEF gelijkzijdig is.

In A komen nu samen de gelijkzijdige driehoeken AEF , ADE en ABF . Analoog is het geval 3 3 3 n voor andere waarden van n realiseerbaar.

Het geval 3 3 4 4 is niet realiseerbaar. In fig. 2 is een begin gemaakt.

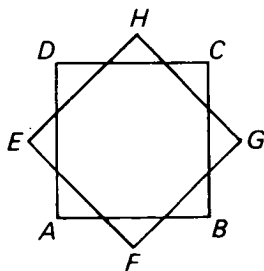


fig. 1.

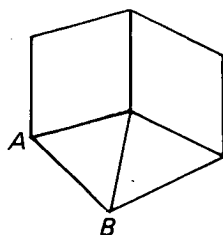


fig. 2.

Aan AB moet nu een driehoek aangepast worden, als we op hoekpunt A letten, echter een vierhoek, als we op hoekpunt B letten.

$3\ 4\ 3\ 4$ is realiseerbaar. De hoekpunten krijgen we door de middens van de ribben van een kubus (of van een regelmatig achthoek) te nemen.

$3\ 3\ 5\ 5$ mislukt op dezelfde wijze als $3\ 3\ 4\ 4$.

$3\ 5\ 3\ 5$ verkrijgen we door als hoekpunten te nemen de middens van de ribben van een regelmatig twaalfvlak (of twintigvlak).

$3\ 4\ 4\ 4$. Ook dit geval is realiseerbaar. Ga uit van een vierkant $ABCD$ en pas daar vier vierkanten ABB_1A_1 , BB_2C_1C , ... aan zo, dat de driehoeken BB_1B_2 , ... regelmatig worden. Pas aan A_1B_1 , ... D_2A_1 acht vierkanten. En pas daaraan weer een stel van vijf vierkanten en vier driehoeken congruent met het begin negental. Dit laatste kan op twee manieren, die uit elkaar kunnen ontstaan door een draaiing over 45° .

$3\ 3\ 3\ 3\ 4$ gelukt. Begin met een vierkant en groepeer daar 12 driehoeken omheen. Hieromheen komt een ring van 4 vierkanten en 8 driehoeken, daarna weer een ring van 12 driehoeken en ten slotte 1 vierkant.

Analoog wordt het geval $3\ 3\ 3\ 3\ 5$ behandeld.

b. $i = 3$.

Als voor het type $p_1\ p_2\ p_3$ geldt p_1 is oneven, dan zouden we aan de zijden afwisselend een p_2 -hoek en een p_3 -hoek moeten passen. Dit kan alleen, als $p_2 = p_3$. En om dezelfde reden moeten dan p_2 en p_3 even zijn.

We zien daaruit, dat er geen andere typen mogelijk zijn dan

$4\ 4\ n$, $6\ 6\ 4$, $8\ 8\ 3$ $4\ 6\ 8$,
 $6\ 6\ 3$, $6\ 6\ 5$, $10\ 10\ 3$ $4\ 6\ 10$.

$4\ 4\ n$ is het regelmatig n -zijdige prisma met vierkanten als opstaande zijvlakken.

$6\ 6\ 3$ heeft als hoekpunten de punten, die de ribben van een regelmatig viervlak in drie gelijke delen verdelen.

Op dezelfde manier krijgen we $8\ 8\ 3$ uit een kubus, $6\ 6\ 4$ uit een regelmatig achthoek, $10\ 10\ 3$ uit een regelmatig twaalfvlak en $6\ 6\ 5$ uit een regelmatig twintigvlak.

$4\ 6\ 8$ mislukt. Begin met een vierkant. Pas daaraan resp. een zes-, acht-, zes- en achthoek. Vul aan met vier vierkanten. En daarna loopt het mis. Evenzo mislukt $4\ 6\ 10$.

Ontvangen boeken

W. J. Jacobs, e.a., *Moderne wiskunde*, deel 5h v. voor havo en v.w.o., derde herziene druk. Wolters-Noordhoff, Groningen, 186 blz., f 13,50.

Drs. Chr. Boormeester e.a., *Van A tot Z - $M^4 - 3a$* .

J. Muusses B.V., Purmerend, 1975, 5e geheel herziene druk f 12,90.

Van A tot Z - HV - 3a. 2e geheel herziene druk, f 15,90.

ONDERWIJSRESEARCHDAGEN 1975

Als vervolg op de Onderwijsresearchdag 1974 in Amsterdam organiseert de Werkgroep Onderwijsresearch voor 1975 twee onderwijsresearchdagen in Enschede.

Doel van de researchdagen is: door uitwisseling van ideeën over en resultaten van recent onderzoek van onderwijs, de kwaliteit van toekomstig onderzoek te verbeteren.

Plaats: T. H. Twente te Enschede

Datum: Dinsdag 25 en Woensdag 26 maart 1975

- Deelname:** Men kan op twee manieren deelnemen aan de onderwijsresearchdagen 1975:
- a. 2 dagen all-in (incl. overnachting, diner, ontbijt en twee lunches).
Kosten f. 110,—.
 - b. 2 dagen uitsluitend congres (zonder maaltijden en overnachting).
Kosten f. 50,—.
- Alle deelnemers ontvangen onmiddellijk na verschijning het Verslag ORD '75.
- Aanmelding:** Kan geschieden vanaf 1 december 1974 door storting van de kosten op bankrekening nr. 59.31.29.881 bij de A.B.N. te Enschede t.g.v. ORD '75 onder vermelding van naam en adres van deelnemer(s). (Postgirorekening A.B.N. Enschede is nr. 800578). Voor studenten geldt een reductieregeling.
Zij kunnen zich schriftelijk aanmelden bij het secretariaat.
- Werkvormen:** Er zullen drie soorten bijeenkomsten worden georganiseerd:
- a. presentatie van losse, korte papers met open discussie
 - b. presentatie van papers in themagroepen
 - c. presentatie van papers in kleine werkgroepen.
- Secties:** De organisatiecommissie heeft een indeling in vier secties gemaakt:
- Sectie 1: *curriculumonderzoek en -ontwikkeling*
 - Sectie 2: *onderzoek naar onderwijsleerprocessen*
 - Sectie 3: *researchmethodologie*
 - Sectie 4: *onderwijssystemen*

Oproep voor papers

Onderzoekers worden opgeroepen aan de onderwijsresearchdagen 1975 een bijdrage te leveren door vóór 31 december 1974 een papervoorstel in te leveren, waarin gerapporteerd wordt over eigen onderzoek en/of reflecties over dat onderzoek.

Nadere informatie voor paperschrijvers is verkrijgbaar bij het secretariaat ORD '75.

Papercommissie

Prof. dr. L. van Gelder (Groningen), dr. L. J. Th. van der Kamp (Leiden), prof. dr. F. K. K. Kieviet (Leiden), drs. C. F. van der Klauw (Rotterdam), dr. Q. L. Th. van der Meer (Wageningen), drs. H. P. Stroomberg (Amsterdam).

Organisatiecommissie

dr. B. Creemers (Utrecht), drs. J. F. M. J. van Hout (Enschede), ing. F. J. H. Mertens (Enschede), drs. J. Michalides (Enschede), mej. drs. G. A. Poortvliet (Amsterdam), prof. dr. E. Warries (Enschede).

Secretaris: N. H. B. Bakker (Enschede).

Secretariaat: T. H. Twente – D.O.B.
Postbus 217, Enschede
Telefoon: 053 – 93333

Het Nationaal Tentoonstellingspark van Senegal zal in februari 1976 de 1e Afrikaanse Leermiddelenvakbeurs herbergen

De 1e Internationale Jaarbeurs van Dakar die 46 officiële deelnemingen telt, heeft haar nieuwe installaties ingehuldigd: het Nationaal Tentoonstellingspark van de hoofdstad van Senegal. Het zijn deze ultra-moderne paviljoenen die door de Internationale Jaarbeurs van Brussel werden uitgekozen om er van 2 tot 8 februari 1976 de Eerste Afrikaanse Leermiddelenvakbeurs – DIDAFRICA te houden.

DIDAFRICA zal dus plaatshebben in goed uitgeruste paviljoenen, die beschikken over de nodige infrastructuur. Het Nationaal Tentoonstellingspark van Dakar omvat inderdaad 27.000 m² overdekte tentoonstellingshallen, opgetrokken in een originele stijl en versierd met echte Afrikaanse motieven, alsmede 149.000 m² tentoonstellingsruimten in de open lucht en berijdbare terreinen.

Verschillende paviljoenen werden gereserveerd voor DIDAFRICA: zij zijn alle voorzien van water, elektriciteit en telefoon voor elke stand. Bijzondere zorg werd besteed aan de dienstverlening voor de deelnemers: ontvangstsalons, rustzalen, sanitair, stortbaden, parkings, stapelplaatsen, enz... De deelnemers zullen eveneens de gelegenheid hebben ter plaatse ultra-modern materiaal te huren voor de inrichting van hun stands.

Ook is in hetzelfde complexe het Internationaal Kongrescentrum van Dakar ter beschikking van de internationale verantwoordelijken van de opvoeding en het onderwijs. Het kan plaats bieden aan 2.000 personen en beschikt over de meest moderne uitrusting die in Afrika op dit ogenblik te vinden is.

De actieve samenwerking tussen de Internationale Jaarbeurzen van Dakar en Brussel laat een optimaal gebruik toe van een goed uitgerust tentoonstellingscentrum, dat voor de fabrikanten van leermiddelen de poort opent tot een markt in volle bloei alsmede aan de pedagogen van gans een werelddeel de gelegenheid biedt zich te dokumenteren over de mogelijkheden van een modern materieel aangepast aan de noden en de bijzondere vereisten van het onderwijs in Afrika.

Het Belgisch Centrum voor Methodiek van de Wiskunde

Het Belgisch Centrum voor Methodiek van de Wiskunde organiseert voor de 14e maal een Internationaal Congres in Knokke-Heist. Dit congres vindt plaats van 1 april tot en met 4 april 1975 en is gewijd aan de nagedachtenis van Broeder Paul R. BURGRAEVE, de betreunde secretaris-generaal en penningmeester van het BCMW.

Inschrijving:

800 fr., tot 31 januari 1975;
1000 fr., na 31 januari 1975.

Studenten hoeven alleen maar 300 fr. te betalen.

De inschrijving geeft niet alleen recht op het bijwonen van de spreekbeurten en lessen en het deelnemen aan de werkgroepen en forumgesprekken, maar ook op de *teksten* die tijdens het congres bestudeerd worden.

Onderwerp van het congres: CONTINUÏTEIT EN INLEIDING TOT DE CATEGORIËN.

Inlichtingen over het congres: BCMW

Albertlaan 224
1180 Brussel

AMERICAN HOST PROGRAM voor Nederlandse leerkrachten

Het Nederland-Amerika Instituut deelt mede, dat de American Host Foundation, Inc., te New York, voor de zomer 1975 met zijn AMERICAN HOST PROGRAM wederom de gelegenheid biedt tot kennismaking met het Amerikaanse leven aan een groot aantal Nederlandse leerkrachten, in de vorm van een gastvrij verblijf van één maand in de Verenigde Staten.

De deelnemers gaan per vliegtuig naar New York, waar men twee à drie dagen verblijft. Daarna logeert men vier weken bij een of twee Amerikaanse gezinnen.

Definitieve vertrekdata:

GROEP I – 24 juni 1975 naar New York, 28 juli 1975 uit New York

GROEP II – 15 juli 1975 naar New York, 18 augustus 1975 uit New York

GROEP III – 30 juli 1975 naar New York, 1 september 1975 uit New York

De aan het programma verbonden kosten variëren al naar gelang het gedeelte van de Verenigde Staten, waaraan men de voorkeur geeft:

a. het Oostelijke gedeelte	\$573
b. het Middenwesten en/of het Zuiden	\$693
c. het Westen	\$843

Deze bedragen dekken alle kosten (inklusief het verblijf in New York), behalve zakgeld ($\pm$ \$250).

Nadere inlichtingen en formulieren betreffende dit programma kunnen tot uiterlijk 15 februari 1975 worden aangevraagd bij het:

NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT

Afdeling Studievoorzichting
Prinsengracht 919, Amsterdam
Telefoon: 020 – 23 94 25

Lehrmittelmesse Didacta 1976 erneut in Basel

Zwischen dem Verband Europäischer Lehrmittelfirmen (Eurodidac) und der Genossenschaft Schweizer Mustermesse Basel ist kürzlich der Vertrag über die Durchführung der 14. Didacta im Jahre 1976 unterzeichnet worden. Der von Dr. Wilhelm Tham, Stockholm, präsierte Verband, dessen Generalsekretariat von Bruno Maria Kaufmann, Freiburg i.Br., geführt wird, überträgt damit zum dritten Mal nach 1966 und 1970 die Durchführung der Europäischen Lehrmittelmesse nach Basel. 1974 fand die 12. Didacta in Brüssel statt. Im März 1975 folgt die 13. Didacta, die vom Deutschen Lehrmittelverband zusammen mit den Messegesellschaften Hannover und Nürnberg organisiert wird, in den Messehallen von Nürnberg. Die 14. Didacta in Basel findet vom 23. bis 27. März 1976 statt, wobei wiederum mit ungefähr 800 Ausstellern und einer Standfläche von rund 30000 m² gerechnet wird.

Genootschap voor geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen.

Voorjaarsvergadering van het Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek.

Deze zal gehouden worden op zaterdag 26 en zondag 27 april 1975 te Leiden. Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en toezending van het programma wenden tot de secretaris Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (post Breda).

GETAL EN RUIMTE

De methode voor moderne wiskunde die *af* is en *bij* blijft voor:

MAVO III

MAVO IV

HAVO onderbouw, bovenbouw

VWO onderbouw, bovenbouw, wiskunde I en II

GETAL EN RUIMTE

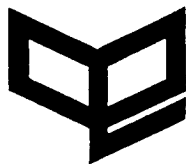
- overzichtelijk
- praktisch en doelgericht
- aandacht voor rekenvaardigheid
- veel opgaven
- herhalingsstof
- samenvattingen
- trefwoordenregister

Bij *Getal en Ruimte* zijn antwoordenlijsten met nuttige tips voor de docenten. Ieder jaar verschijnt een „Informatie Getal en Ruimte”.

Getal en Ruimte is samengesteld door K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz, H. Steur, A. H. Syswerda, R. A. J. Vuijk.

Het is een uitgave van Tjeenk Willink/Noorduijn.

Voor meer informatie kunt u zich wenden tot Educaboek, Postbus 48, Culemborg, tel. 03450-3143 toestel 248.



educaboek bv
culemborg

Mathematische Statistiek 1

voor het vwo

Auteursgroep JAGT

Wolters-Noordhoff



Passen en meten

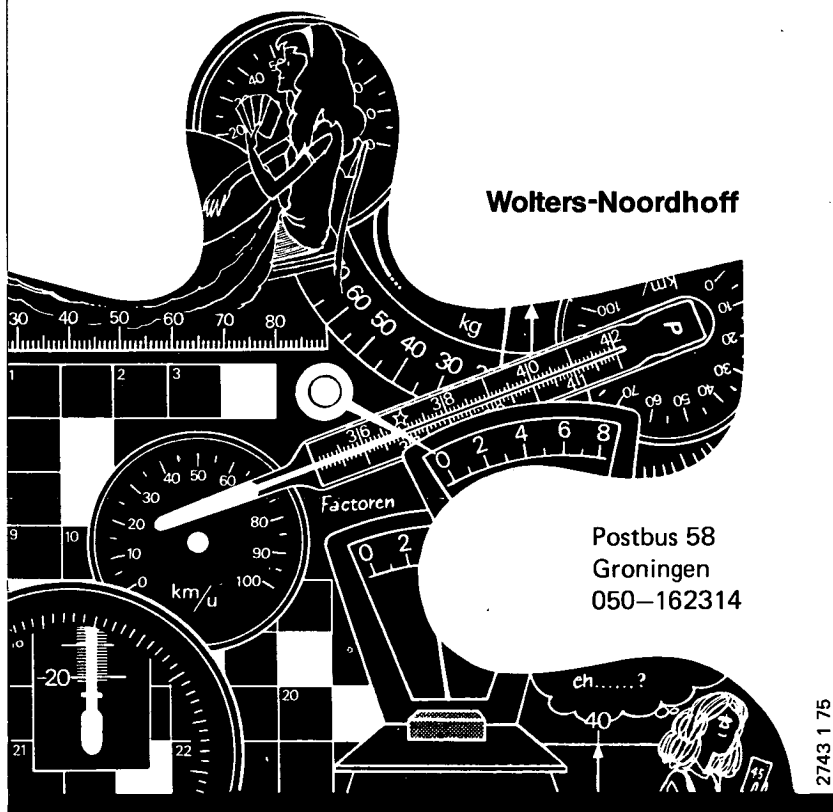
Wiskunde/rekenen voor LBO/LAVO

E.G. Doevendans
L.A.G.M. Muskens
F. Paludanus
M. Sjamaar
J.E. Vellekoop



Wolters-Noordhoff

Differentiatie
binnen
klasseverband



Postbus 58
Groningen
050-162314

2743 1 75

Tafels voor wiskunde

WN-tafels voor wiskunde is bestemd voor gebruik op scholen voor algemeen voortgezet en voorbereidend wetenschappelijk onderwijs.

De inhoud bestaat uit:

- kwadraten, tweedemachtswortels en omgekeerden
- sinus, cosinus en tangens, met het argument in graden én radialen
- gewone logaritmen in vier decimalen

Zeer overzichtelijk door toepassing van tweekleurendruk.

WN-tafels voor wiskunde

ISBN 90 01 95780 3

2e druk, ing. 37 pag., f 3,80.

Tafels wiskunde- statistiek

WN-tafels voor wiskunde-statistiek is bestemd voor de hoogste leerjaren van het vwo en voor het hoger beroepsonderwijs.

De inhoud bestaat uit:

- logaritmen in vijf decimalen
- sinus, cosinus en tangens, met het argument in graden en radialen
- e-machten en natuurlijke logaritmen
- statistische tabellen, waaronder normale, binomiale en Poisson-verdeling

WN-tafels wiskunde-statistiek

ISBN 90 01 95779 X

2e druk, ing. 80 pag., f 7,70.

Voor presentaanvragen en meer informatie:

Wolters-Noordhoff, Postbus 58,
Groningen 050-162314



Wolters-Noordhoff

244/06 4989

In september 1975 start een tweejarige heroriënteringskursus wiskunde l.b.o. (40 kursusmiddagen). De cursus richt zich in eerste instantie op docenten in het l.b.o. die wel bevoegd waren voor rekenen, maar niet voor wiskunde.

In deze cursus zal gepoogd worden een duidelijke integratie tot stand te brengen tussen wiskunde-inhoud en -didaktiek.

Enerzijds zal de te volgen werkwijze tijdens de bijeenkomsten hiertoe moeten bijdragen, terwijl anderzijds de kursusdocenten deze werkwijze en de resultaten daarvan regelmatig met de kursisten zullen bespreken en uitdiepen, vooral ten behoeve van de klaspraktijk. Een van de belangrijkste uitgangspunten hierbij is dat wiskunde geleerd wordt door wiskunde te doen.

Voor elk van de ongeveer 25 nog nader te bepalen kursusplaatsen zoekt het I.O.W.O. een

wiskunde docent

die zich door de bovenstaande omschrijving voelt aangesproken (een eerste graads bevoegdheid is gewenst, maar niet beslist noodzakelijk).

didaktiek docent

die in staat is onderwijsleerprocessen te evalueren en die een link kan leggen tussen de cursus en de klaspraktijk.

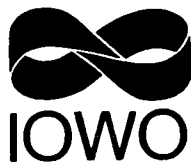
(We denken hierbij aan een pedagoog met belangstelling voor wiskunde of een wiskundige met een gedegen onderwijskundige kennis.)

Aan de kursusdocenten wordt vanuit het I.O.W.O. een intensieve begeleiding gegeven.



Aanmeldingen, aangevuld met een korte toelichting, kunnen gericht worden aan George Schoemaker, directeur Wiskivon, I.O.W.O.

Eventuele nadere informatie over inhoud, honorering, etc.) kunt U daar inwinnen bij Chrit Leenders of Wim Kremers (030) - 611611.



Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, Tiberdreef 4, Utrecht/Overv.



Zojuist verschenen:
De 6de, volledig herziene druk van
ANALYSE deel 1 door
Dr. B. Meulenbeld en Dr. A. W. Grootendorst

*Een boek op het juiste niveau
van exactheid. Opgezet vanuit
de huidige opvattingen over
moderne wiskunde. Zeer
geschikt ter voorbereiding van
MO-A-examens en
propaedeutische examens.*

Korte inhoudsopgave:

Beginnels van de differentiaal- en integraalrekening/
Complexe getallen/Extreme waarden. Het schetsen
van krommen/Systematische berekening van de
primitieven van enige klassen van functies/Oneigenlijke
integralen/Rijen/Reeksen/Vergelijkingen/Numerieke
integratie en differentiatie. Hyperbolische functies/
Functies van twee veranderlijken.

Van deel 2 verschijnt in 1976 een eveneens volledig
herziene editie.

Prijs f 33,— per ex. incl. B.T.W.

Bestelnr. 90 11 39507 7

Leverbaar via de erkende boekhandel

Een uitgave van Stam Technische Boeken



GEEFT U EEN EIGEN HUIS ZONDER ZORGEN

Totale financiering van uw eigen
huis (oud of nieuw), met **alle** bij-
komende kosten. Normale rente
over gehele lening, geen afsluit-
provisie. Adviezen na bestude-
ring van uw koopakte.

Vraag budget-schema aan:

**Het Voorlichtingsbureau voor
Academici, hogere ambtenaren,
staffunctionarissen, leraren etc.**

**Mallebaan 98, Utrecht, tel. 030-
31 97 47***

In opdracht van de Nederlandse Vereniging voor Weer- en Sterrenkunde is uitgegeven de

Sterrengids 1975

samengesteld door Lic. Jean Meeus,
met een bijdrage van H. Terpstra
89 pag., inge. geïll. f 14,00. ISBN 90 01 81277 5

Inhoud: Beknopt jaaroverzicht 1975; Tijdaanwijzing; Twaalf sterrenkaarten, zes paren; Eise Eisinga en zijn planetarium; Belangrijke hemelverschijnselen in 1975; De wegen van planeten en planetoiden; Voorspel zelf de hemelverschijnselen; Wetenswaardigheden en tabellen

De zon in 1975/De maan in 1975/De planeten in 1975/Onderlinge standen der Jupitermanen/Titan/Japetus/Enkele sterbedekkingen zichtbaar te Utrecht/Conjuncties van planetoiden met heldere sterren/Eros in 1974-'75/Maxima van Mira-sterren.



Ook verkrijgbaar via de boekhandel.

H. D. Tjeenk Willink Groningen

2851 1 75

INHOUD

Fred Goffree: Verzamelingenleer, moderne wiskunde en modern wiskundeonderwijs	259
P. M. van Hiele: De kennismaking met vectoren in de onderbouw	276
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars	281
Enkele kritische opmerkingen bij de normen voor de beoordeling van het schriftelijk werk wiskunde van het havo-examen	282
P. G. J. Vredenduin: Korrel	285
Didactische literatuur	286
Boekbespreking	288
Recreatie	292
Ontvangen boeken	294
Berichten	295