

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

49e jaargang

1973/1974

no 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Peningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt f 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nieuhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden f 21,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-130785 en 050-132925.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 200,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 110,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 60,—.

Een fundamentele stelling van de Analyse

A. J. Th. MAASSEN

Arnhem

0 Twee beweringen en een vraag.

Bewering 1:

Als een auto gedurende een half uur op een autoweg rijdt met een snelheid die voortdurend groter is dan 90 km per uur en voortdurend kleiner dan 120 km per uur, dan legt die auto in dat halve uur meer dan 45 km en minder dan 60 km af.

Bewering 2:

Als een auto op een autoweg in een half uur 50 km aflegt, dan is er in dat halve uur ten minste één moment waarop zijn snelheid 100 km per uur is.

Vraag:

Welke van deze twee beweringen is het meest plausibel?

In mijn (kleine) steekproef kwamen slechts mensen voor die bewering 1 duidelijk gemakkelijker te begrijpen vonden dan bewering 2.

Met die beweringen 1 en 2 en deze vraag in dit tijdschrift af te drukken, wordt de steekproef flink vergroot. Ik wil U niet lastig vallen met het verzoek, mij schriftelijk of mondeling antwoord op deze vraag te geven.

Ook zonder dat de uitslag van die grotere enquête die van die kleinere bevestigt, zijn de volgende overwegingen over de zgn. middelwaardestelling zinvol.

1 Een paar opmerkingen.

1.1 Het is allerm minst dwaas te verwachten, dat in de Analyse in het V.W.O. de middelwaardestelling zijn fundamentele rol toebedeeld zal krijgen.

Of in het V.W.O. die stelling zal worden bewezen, valt zeer te betwijfelen.

Essentieel voor de stelling is de volledigheid van $\mathbb{R}$; dat betekent dat het bewijs van de stelling een bepaalde, bij eerste kennismaking heel subtiële wijze van redeneren vergt; er zullen in het V.W.O. zeker leerlingen zijn die het bewijs kunnen volgen; de eis, zelfstandig het bewijs goed te formuleren, zal voor bijna alle leerlingen te zwaar zijn. Dat weerhoudt de stelling er niet van zijn centrale plaats in te nemen; zijn bewijs is officieel verhinderd en ten hoogste officieus aanwezig.

1.2 Ik heb dit artikel niet de titel 'De Middelwaardestelling' willen geven. Onze leerlingen zouden door onze collega's Duits ernstig worden gelaakt, als zij 'Mittelwertsatz' in 'middelwaardestelling' zouden vertalen; zo'n slecht voorbeeld mogen wij hun niet geven. Een meer en meer gebruikte alternatieve naam is 'Stelling van het gemiddelde':

bewering 1: als de snelheid voortdurend groter is dan 90 km per uur, dan is de *gemiddelde* snelheid ook groter dan 90 km per uur;

bewering 2: er is ten minste één moment waarop de snelheid gelijk is aan de *gemiddelde* snelheid.

1.3 Dit artikel gaat over sommige formuleringen van de stelling van het gemiddelde. Vele lezers, kennen de meeste stellingen die er in worden genoemd.

Om niet de leesbaarheid veel geweld aan te doen, worden bewijzen van de meeste stellingen niet in het verhaal zelf opgenomen; de lezer die daar in geïnteresseerd is, vindt bewijzen in de laatste paragraaf.

1.4 In paragraaf 2 worden de beweringen 1 en 2 in meer algemene vorm gebracht; het verband tussen die beweringen brengt ons op de zgn. doorlopendheid.

In paragraaf 3 worden enkele formuleringen gegeven van de stelling van het gemiddelde; het verband tussen die formuleringen wordt bekeken.

In paragraaf 4 worden enkele argumenten genoemd die kunnen pleiten voor de keuze van één van die formuleringen.

In paragraaf 5 wordt de vraag beantwoord of het V.W.O. aan die formulering voldoende heeft.

In paragraaf 6 worden bewijzen van sommige stellingen in extenso gegeven.

2 Bewering A:

Als een auto in het tijdsinterval $[a; b]$ op een autoweg rijdt met een snelheid die voortdurend groter is dan m en kleiner dan M , dan legt die auto in $[a; b]$ een weg af die groter is dan $m \cdot (b-a)$ en kleiner dan $M \cdot (b-a)$.

Bewering A¹:

Als een auto in het tijdsinterval $[a; b]$ op een autoweg rijdt met een snelheid die voortdurend ten minste m en ten hoogste M is, dan legt die auto in $[a; b]$ een weg af die ten minste $m \cdot (b-a)$ en ten hoogste $M \cdot (b-a)$ is.

Bewering B:

Als een auto in het tijdsinterval $[a; b]$ een weg met lengte P aflegt, dan is er in $[a; b]$ een moment waarop zijn snelheid $P \cdot (b-a)^{-1}$ is.

2.1 $A \Rightarrow A^1$.

Neem de waarheid van A aan; veronderstel dat een auto zich gedraagt zoals in de als-zin van A¹ beschreven is:

voortdurend geldt: $m \leq \text{snelheid} \leq M$;

kies een positief getal: ε ;

voortdurend geldt: $m - \varepsilon < \text{snelheid} < M + \varepsilon$;

en dus volgens A: $m \cdot (b-a) - \varepsilon(b-a) < \text{afgelegde weg} < M(b-a) + \varepsilon(b-a)$.

Dit laatste is waar voor elk positief getal ε ;

en dus: $m \cdot (b-a) \leq \text{afgelegde weg} \leq M \cdot (b-a)$.

2.2 $A^1 \Rightarrow A$.

Neem de waarheid van A¹ aan; veronderstel dat een auto zich gedraagt zoals in de als-zin van A beschreven is;

kies een moment van het tijdsinterval $[a; b]$ dat niet a of b is; noem dat: c ;
 dan: $m < \text{snelheid op moment } c < M$;
 dan: $m + \varepsilon < \text{snelheid op moment } c < M - \varepsilon$ voor zeker positief reëel getal ε ;
 dan (gebruik de definitie van: snelheid op moment c):
 er is een moment d van het interval $[a; b]$ met $c < d < b$ zó dat:
 $(m + \varepsilon)(d - c) \leq \text{afgelegde weg in } [c; d] \leq (M - \varepsilon)(d - c)$;
 bovendien geldt voor zo'n moment d (gebruik A^1):
 $m(c - a) \leq \text{afgelegde weg in } [a; c] \leq M(c - a)$ en
 $m(b - d) \leq \text{afgelegde weg in } [d; b] \leq M(b - d)$;
 dan ('tel de gevonden ongelijkheden op'):
 $m(b - a) \leq \text{afgelegde weg in } [a; b] \leq M(b - a)$.

2.3 $B \Rightarrow A$ en $B \Rightarrow A^1$.

Neem de waarheid van B aan; veronderstel dat een auto zich gedraagt zoals in de als-zin van bijv. A^1 beschreven is; zou die auto in $[a; b]$ bijv. minder dan $m \cdot (b - a)$ afleggen, dan zou er in $[a; b]$ een moment zijn waarop zijn snelheid kleiner was dan m , hetgeen niet het geval is.

2.4 $A^1 \Rightarrow B$? Bewering C.

Een poging uit de waarheid van A^1 die van B af te leiden, kan gelukken aan ieder die als waar aanneemt:

Bewering C:

Als de snelheid van een auto op een van twee momenten kleiner is dan α en op het andere groter is dan α ,
 dan is er tussen die twee momenten een moment waarop zijn snelheid gelijk is aan α .

Is het niet deze - terecht of ten onrechte - veronderstelde zgn. doorlopendheids-eigenschap van de snelheid van een auto, die bewering B minder plausibel doet zijn dan bewering A?

3 De stelling van het gemiddelde.

3.1 Drie versies van die stelling.

Stelling 1:

Als: $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; a < b; m \in \mathbb{R}; M \in \mathbb{R}; m < M$;
 f is een functie vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$;
 f is (eenzijdig) continu zowel te a als te b ;
 voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: f is differentieerbaar te x ;
 voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $m < f'(x) < M$,
 Dan: $m \cdot (b - a) < f(b) - f(a) < M \cdot (b - a)$.

Stelling 1¹:

Als: $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; a < b; m \in \mathbb{R}; M \in \mathbb{R}; m < M$;
 f is een functie vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$;
 f is (eenzijdig) continu zowel te a als te b ;
 voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: f is differentieerbaar te x ;
 voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $m \leq f'(x) \leq M$,
 Dan: $m \cdot (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (b - a)$.

Stelling 2:

Als: $a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}; a < b$;

f is een functie vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$;

f is (eenzijdig) continu zowel te a als te b ;

voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: f is differentieerbaar te x ,

Dan: er is $c \in \langle a; b \rangle$ zo dat $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

3.2 Zowel stelling 1 als stelling 1¹ volgen triviale uit stelling 2. Uit 1 volgt 1¹ (zie 2.1) en 1 volgt uit 1¹ (zie 2.2).

3.3 Stelling 2 is de versie die meestal behandeld wordt in elementair analyse-onderwijs;

het bewijs dat er gewoonlijk van gegeven wordt, berust op de stelling van Rolle;

het bewijs van de stelling van Rolle berust op:

elke functie die continu is op een segment, heeft zowel een maximaal als een minimaal beeld, en:

als f een functie is op het segment $[a; b]$, f differentieerbaar is te $c \in \langle a; b \rangle$ en $f(c)$ een extreem f -beeld is, dan: $f'(c) = 0$.

3.4 Om stelling 2 te bewijzen uit stelling 1, kan men met succes gebruik maken van de stelling van Darboux:

Stelling 3:

Als: f is een functie vanuit een interval I naar $\mathbb{R}$;

voor elke $x \in I$: f is differentieerbaar te x ;

$a \in I$; $b \in I$, $a < b$; $\alpha \in \mathbb{R}$;

$f'(a) < \alpha < f'(b)$ of $f'(b) < \alpha < f'(a)$,

Dan: er is $c \in \langle a; b \rangle$ zo dat $f'(c) = \alpha$.

(‘De afgeleide heeft de eigenschap van doorlopendheid.’)

Voor een bewijs van stelling 3 zie: 6.3.

Stelling 2 kan uit stelling 1 en stelling 3 gemakkelijk worden bewezen; zie 2.4 en 6.4.

4 Over preferentie.

Laten we stelling 2 noemen: ‘de sterke vorm van de stelling van het gemiddelde’ en de stellingen 1 en 1¹: ‘de zwakke vormen van de stelling van het gemiddelde’.

4.1 In het intuïtionisme geldt de sterke vorm niet; de zwakke vormen gelden daar wel.

4.2 De zwakke vormen zijn gemakkelijk te generaliseren voor ruimten met dimensie groter dan 1; dat kan van de sterke vorm – tenminste op dit moment – niet worden gezegd.

In moderne Analyse-boeken (ik noem: DIEUDONNÉ: Foundations of Modern Analysis; LOOMIS-STERNBERG: Advanced Calculus) waarin de differentiaalrekening wordt ontwikkeld op abstractere wijze dan doorgaans in wiskundecolleges voor eerste- en tweedejaarsstudenten, treft men stelling 2 onder ‘Mean-Value Theorem’ niet aan; stelling 1 (1¹) vindt men daar als een bijzonder geval van een veel rijkere stelling.

4.3 Een van de generalisaties van de sterke vorm van de stelling van het gemiddelde is wat ik hier nu maar noem: ‘de sterke Taylor’:

Als: f is een functie vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$;
 f is in elke $x \in [a; b]$ n keer differentieerbaar;
 $f^{(n)}$ is continu in $[a; b]$ en differentieerbaar in $\langle a; b \rangle$,
 dan: er is een $c \in \langle a; b \rangle$ zó dat:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Stelling 2 en stelling 3 worden gebruikt voor schattingen; aan de wetenschap dat zo'n c bestaat, heb je in concrete, numerieke problemen niet veel als je die c feitelijk niet kunt uitrekenen, en dat kun je dikwijls niet; je zoekt dan grenzen waartussen $f^{(n+1)}(c)$ zeker zal liggen; daarmee wordt de sterke Taylor gereduceerd tot de volgende generalisatie van stelling 1¹ ('de zwakke Taylor'):

Als: f is een functie vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $m, M \in \mathbb{R}$;
 f is in elke $x \in [a; b]$ n keer differentieerbaar;
 $f^{(n)}$ is continu in $[a; b]$ en differentieerbaar in $\langle a; b \rangle$;
 voor alle $x \in \langle a; b \rangle$: $m \leq f^{(n+1)}(x) \leq M$,

dan:

$$f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + m \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) \leq$$

$$f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + M \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

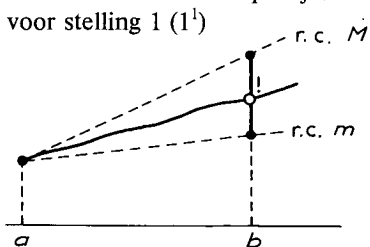
Het is op het eerste gezicht duidelijk dat de zwakke Taylor volgt uit de sterke Taylor. Van belang is hier om op te merken dat de zwakke Taylor vrijwel direct volgt uit stelling 1¹ (zie 6.5).

4.4 De opmerkingen onder 4.1, 4.2 en 4.3 zijn van (meta-)mathematische aard; de hierna volgende is van didactische aard.

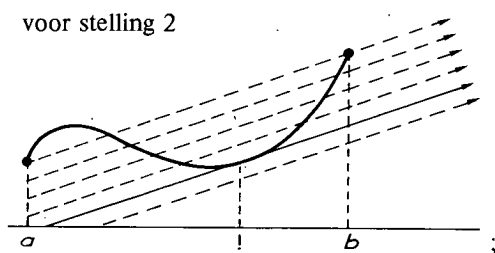
Het bewijs van de zwakke vorm is niet duidelijk moeilijker of gemakkelijker dan dat van de sterke vorm. Vooralsnog geloof ik niet dat in die bewijzen didactische argumenten voor een voorkeur kunnen worden gevonden. Welke van de twee is het gemakkelijkst plausibel te maken?

Je kunt dat doen met plaatjes:

voor stelling 1 (1¹)



voor stelling 2



je kunt het óók doen door aan snelheid te denken; zie de beweringen 1 en 2 van paragraaf 0.

Ik laat een oordeel over de grootste duidelijkheid – zijnde een duidelijk subjectief oordeel – aan U over.

4.5 De naam ‘zwakke vorm van de stelling van het gemiddelde’ voor de stellingen 1 en 1¹ zou kunnen suggereren dat je met de stellingen 1 en 1¹ minder kunt doen dan met stelling 2 (die de naam ‘sterke vorm’ draagt). Ik ken ervaren analytici die zeggen dat – tot nu toe – in al die gevallen waarin men gewoonlijk de sterke vorm laat werken, ook de zwakke vormen blijken te kunnen werken. Zeker is, dat de zwakke vormen voor de analyse van het voortgezet onderwijs ruimschoots voldoende zijn; zie paragraaf 5.

5 Toepassingen van de stelling van het gemiddelde.

5.1 Stellingen.

Als: f is een functie vanuit $[a; b]$ naar $\mathbb{R}$;
 f is (eenzijdig) continu zowel te a als te b ;
 voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: f is differentieerbaar te x ;
 voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \end{array} \right\}$ resp. $\left\{ \begin{array}{l} \text{voor elke } x \in \langle a; b \rangle: \\ 0 < f'(x) \end{array} \right.$
 dan: voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $\left. \begin{array}{l} f(x) < f(a) \end{array} \right\}$ resp. $\left\{ \begin{array}{l} \text{voor elke } x \in \langle a; b \rangle: \\ f(a) < f(x). \end{array} \right.$

Deze twee stellingen volgen direct uit stelling 1:

neem voor M : 0 resp. neem voor m : 0.

Vwo-abituriënten die wiskunde I hebben bestudeerd, moeten de volgende opgave kunnen maken:

Gegeven: de functie f vanuit $[-1; 1]$ naar $\mathbb{R}$: $x \mapsto \sqrt{2x+2} + \sqrt{1-x}$.

Bewijs: $\sqrt{6}$ is het grootste f beeld;
 het volledig f -origineel van $\sqrt{6}$ is $\{\frac{1}{3}\}$.

Wie deze opgave op de gebruikelijke manier maakt, past beide stellingen toe: de ene op $[\frac{1}{3}; 1]$, de andere op $[-1; \frac{1}{3}]$.

5.2 Stelling.

Als: voor elke $x \in \langle a; b \rangle$: $f'(x) = 0$,

dan: f is een constante functie op $\langle a; b \rangle$.

Bewijs: neem twee elementen van $\langle a; b \rangle$: u, v ; $u < v$.

Voor alle $x \in [u; v]$: $0 \leq f'(x) \leq 0$;

dus: $0 \cdot (v-u) \leq f(v) - f(u) \leq 0 \cdot (v-u)$;

dus: $f(u) = f(v)$.

Dat is een belangrijke stelling; er volgt direct uit:

Als f een continue functie is vanuit een interval I van $\mathbb{R}$; F en G primitieve functies zijn van f op I ,

dan verschillen F en G een constante functie.

5.3 Wie de Riemann-integraal invoert via ondersommen, boven- en tussensommen, kan de stelling van het gemiddelde – óók in zijn zwakke vorm – goed gebruiken, om de hoofdstelling van de Analyse te bewijzen:

Als: f is een op $[a; b]$ integreerbare functie;

F is een primitieve van f op $[a; b]$,

dan: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Bewijs:

Laat $\langle x_0, x_1, \dots, x_u \rangle$ een verdeling zijn van $[a; b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_u = b$.

Dan geldt voor elke $i \in \{1, 2, \dots, u\}$:

$(x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(t) | t \in [x_{i-1}; x_i]\} \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(t) | t \in [x_{i-1}; x_i]\}$
wegens stelling 1¹.

Bovendien: $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^u (F(x_i) - F(x_{i-1}))$.

Dus: voor elke verdeling A van $[a; b]$ geldt:

ondersom van f bij $A \leq F(b) - F(a) \leq$ bovensom van f bij A .

Hieruit èn uit de integreerbaarheid van f volgt wat bewezen moet worden.

5.4 De opdracht:

'Onderzoek of de functie f vanuit $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $x \rightarrow \sqrt[3]{x} \cdot \sin x$ differentieerbaar is te 0' wordt door veel leerlingen (althans: vele van de mijne) uitgevoerd op een manier die neerkomt op het volgende:

$f': x \rightarrow \sqrt[3]{x} \cdot \cos x + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sin x \cdot x^{-1}$;

dus: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$; dus: $f'(0) = 0$.

Die leerlingen koesteren heimelijk de verwachting:

Als nu maar $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ bestaat,

dan bestaat $f'(0)$ ook en $f'(0)$ is gelijk aan die limiet.

Dit jeugdig optimisme wordt bevestigd door de volgende stelling die men m.b.v. de stelling van het gemiddelde gemakkelijk bewijst:

Als: f is continu te c ;

f is differentieerbaar in een rechteromgeving van c ;

f is differentieerbaar in een linkeromgeving van c ;

$\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ bestaat; $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = p$,

Dan: f is differentieerbaar te c en $f'(c) = p$.

Bewijs: Op grond van de gegevens en stelling 1 geldt:

Voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat:

voor alle $x \in \langle c, c + \delta \rangle$: $(x - c)(p - \varepsilon) \leq f(x) - f(c) \leq (x - c)(p + \varepsilon)$ en

voor alle $x \in \langle c - \delta, c \rangle$: $(x - c)(p + \varepsilon) \leq f(x) - f(c) \leq (x - c)(p - \varepsilon)$.

Dus:

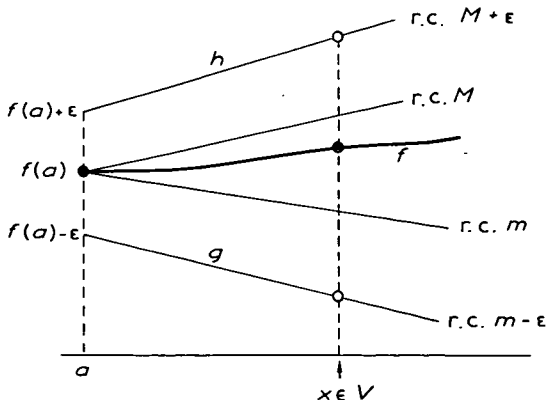
$f'(c)$ bestaat en $f'(c) = p$.

6 Enkele bewijzen.

6.1 Bewijs van stelling 1 (met de supremumstelling).

Kies een positief getal: ε .

Bekijk $V = \{x \in [a; b] | f(a) - \varepsilon + (m - \varepsilon)(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon + (M + \varepsilon)(x - a)\}$:



Merk op: V is niet leeg, want $a \in V$;

V is naar boven begrensd, nl. door b .

Noem $\sup V$: 's'; dan: $a \leq s \leq b$.

Beweringen: i. $s > a$; ii. $s \in V$; iii. $s = b$.

Noem de functies:

$x \rightarrow f(a) - \varepsilon + (m - \varepsilon)(x - a)$ en $x \rightarrow f(a) + \varepsilon + (M + \varepsilon)(x - a)$: 'g' resp. 'h'.

i De functies g, f en h zijn (rechts)continu te a ;

bovendien: $g(a) < f(a) < h(a)$;

er is dus een (rechter)omgeving I van a zó dat $I \subset V$;

dus: $s > a$.

ii In elke (rechtsgesloten) linkeromgeving van s zijn er x met

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x);$$

bovendien: g, f en h zijn continu te s ;

dus: $g(s) \leq f(s) \leq h(s)$; dus: $s \in V$.

iii Stel: $s < b$.

f is differentieerbaar te s ; dus:

voor elke t met $0 < t \leq b - s$: $f(s+t) = f(s) + f'(s) \cdot t + \alpha(t)$ waarin α een functie is met de eigenschap $\lim_{u \rightarrow 0} \alpha(u) \cdot u^{-1} = 0$.

Hieruit en uit ii:

$$f(a) - \varepsilon + (m - \varepsilon)(s - a) + f'(s) \cdot t + \alpha(t) \leq f(s+t) \leq f(a) + \varepsilon + (M + \varepsilon)(s - a) + f'(s) \cdot t + \alpha(t);$$

bovendien: $m \leq f'(s) \leq M$, omdat $s \in \langle a; b \rangle$.

$$f(a) - \varepsilon + (m - \varepsilon)(s - a) + m \cdot t + \alpha(t) \leq f(s+t) \leq$$

$$f(a) + \varepsilon + (M + \varepsilon)(s - a) + M \cdot t + \alpha(t).$$

Dus:

er is een positief getal δ zó dat voor alle t met $0 < t < \delta$:

$$-\varepsilon \cdot t < \alpha(t) < \varepsilon \cdot t.$$

Dus: voor elk positief getal t dat kleiner is dan zo'n δ :

$$f(a) - \varepsilon + (m - \varepsilon) \cdot (s+t-a) \leq f(s+t) \leq f(a) + \varepsilon + (M + \varepsilon) \cdot (s+t-a).$$

Dus: er is een positief getal t zó dat $s+t \in V$;

dit is in conflict met: $s = \sup V$.

Dus: $s = b$.

$$\text{Dus: } -\varepsilon + (m - \varepsilon) \cdot (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq \varepsilon + (M + \varepsilon) \cdot (b - a);$$

$$\text{dus: } m(b - a) - \varepsilon(b - a + 1) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a) + \varepsilon(b - a + 1).$$

Dit laatste geldt voor elk positief getal ε .

$$\text{Dus: } m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

6.2 Bewijs van stelling 1¹.

Hoewel stelling 1¹ direct uit stelling 1 kan worden afgeleid, laat ik nog een bewijs van stelling 1¹ volgen die berust op een andere volledigheidsstelling van $\mathbb{R}$ dan de supremumstelling t.w. de doorsnedestelling van Cantor: elke inkrimpende en verschrompelende rij van segmenten heeft een niet-lege doorsnede.

(De rij $n \rightarrow [a_n; b_n]$ heet 'inkrimpend en verschrompelend' als

voor alle n : $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.)

Stel $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} > M$; dan: $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} > M + \delta$ voor zekere positieve δ ;
 dan: $f(b) - f(a) > (M + \delta)(b-a) + \varepsilon$ voor zekere positieve δ en ε .

Omdat f (eenzijdig) continu is zowel te a als te b , zijn er a' en b' van $\langle a; b \rangle$ zó dat $a' < b'$ en $f(a') - f(a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $f(b) - f(b') < \frac{1}{2}\varepsilon$;
 we kiezen zulke a' en b' , en noemen die: ' α_1 ' resp. ' β_1 '.

Dan:

$$f(\beta_1) - f(\alpha_1) > f(b) - f(a) - \varepsilon > (M + \delta)(b-a) > (M + \delta)(\beta_1 - \alpha_1);$$

en dan:
$$\frac{f(\beta_1) - f(\alpha_1)}{\beta_1 - \alpha_1} > M + \delta. \quad (*)$$

Merk op: f is differentieerbaar te p voor elke $p \in [\alpha_1; \beta_1]$.

Wegens (*) geldt ten minste één van beide:

$$\frac{f\left(\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}\right) - f(\alpha_1)}{\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2} - \alpha_1} > M + \delta; \quad \frac{f(\beta_1) - f\left(\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}\right)}{\beta_1 - \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}} > M + \delta;$$

geldt het eerste, dan definiëren we: $\alpha_2 = \alpha_1$; $\beta_2 = \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}$;

geldt het eerste niet, dan definiëren we: $\alpha_2 = \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}$; $\beta_2 = \beta_1$.

We behandelen nu $[\alpha_2; \beta_2]$ op dezelfde wijze als zojuist $[\alpha_1; \beta_1]$;

we vinden: $[\alpha_3; \beta_3]$.

Zo gaan we door en construeren een inkrimpende en verschrompelende rij van segmenten: $n \rightarrow [\alpha_n; \beta_n]$, waarvoor geldt:

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} > M + \delta \text{ voor alle } n.$$

Volgens de doorsnede stelling van Cantor:

er is een element van $[\alpha_1; \beta_1]$ dat element is van elk segment van die rij: γ ;
 in elke omgeving van γ zijn er $\gamma - h$ en $\gamma + k$ met $h \geq 0$; $k \geq 0$; $(h, k) \neq (0, 0)$

zó dat:
$$\frac{f(\gamma + k) - f(\gamma - h)}{k + h} > M + \varepsilon.$$

Dat is in conflict met $f'(\gamma) \leq M$.

6.3 Bewijs van stelling 3.

Maak de volgende functie $g: x \rightarrow f(x) - \gamma \cdot x$;

veronderstel het geval: $f'(a) < \gamma < f'(b)$.

Merk op: $g'(a) < 0$ en $g'(b) > 0$.

Dan: $g(a)$ en $g(b)$ zijn niet het minimum van g op $[a; b]$.

Dan: er is $c \in \langle a; b \rangle$ met $g(c)$ is minimum.

Dan: $g'(c) = 0$.

6.4 Bewijs van stelling 2 uit stelling 1 en stelling 3.

Uit stelling 1 volgt:

er is $p \in \langle a; b \rangle$ zo dat $f'(p) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, en:

er is $q \in \langle a; b \rangle$ zó dat $f'(q) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Daaruit en uit stelling 3 volgt:

er is $c \in \langle a; b \rangle$ zó dat $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

6.5 Afleiding van de zwakke Taylor uit stelling 1¹.

Definieer:

$$g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + m \cdot \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$h: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + M \cdot \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Merk op: g, h zijn continu op $[a; b]$;

g, h zijn differentieerbaar op $\langle a; b \rangle$;

$$g'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} [f^{(n+1)}(x) - m] \geq 0 \text{ voor alle } x \in \langle a; b \rangle;$$

$$h'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} [f^{(n+1)}(x) - M] \leq 0 \text{ voor alle } x \in \langle a; b \rangle.$$

Dus (op grond van stelling 1¹):

$$g(a) \leq g(b) \text{ en } h(b) \leq h(a).$$

Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (I.O.W.O.)

Meermalen hebben in 't verleden commerciële uitgevers van wiskunde literatuur of vertegenwoordigers van dezen in druk of mondeling beweerd, speciale relaties met het I.O.W.O. te onderhouden.

Hoewel het vanzelf spreekt, dat het I.O.W.O. bij het beschikbaar stellen van zijn leerplanproductie alle betrokken commerciële uitgevers gelijkelijk behandelt en met geen hunner een speciale relatie onderhoudt, wil ik ten overvloede beklemtonen, dat alle beweringen omtrent dergelijke speciale relaties onwaar zijn.

Prof. dr. Hans Freudenthal

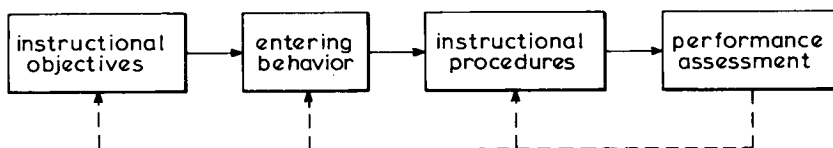
Teaching by exception 2

L. WEIDE

Delft

HERORIENTATIE

In het kader van de bijvakstudie Onderwijskunde aan de RU Leiden heeft een kritiese heroriëntatie plaats gevonden op de in het rapport Teaching by Exception (Weide, 1973) aangesneden problematiek. Hierbij heeft als leidraad gediend het door Glaser (1962) ontwikkelde en door De Cecco (1968) verder uitgewerkte onderwijsmodel:



Objectives

In Teaching by Exception is in eerste instantie getracht een reeds ontwikkeld curriculum in een operationele vorm te brengen. Hierbij zijn mogelijke achterliggende doelstellingen voorlopig buiten beschouwing gelaten. Voor verdere ontwikkeling en verfijning zullen echter expliciete doelen moeten worden gesteld. De aangewezen instanties hiervoor zijn momenteel de verschillende leerplancommissies.

Nu laat het zich aanzien, dat het ontwikkelen van doelstellingen evenzeer een kwestie van vallen en opstaan is als het ontwikkelen van procedures (Van Dormolen, 1970). In het hierboven afgebeelde model is dit ook impliciet aangegeven door de gebroken (terugkoppelings-)lijnen.

Het lijkt dan ook een aantrekkelijke gedachte, om integrale programma-ontwikkeling te laten coördineren en sturen door de desbetreffende leerplancommissies. Hierbij zouden doelstellingen en procedures naar wederzijdse gebleken behoeften kunnen worden ontwikkeld.

Entering behavior

Teaching by Exception gaat uit van een vast prestatieniveau en variabele verwerkingstijden. Binnen dit systeem kan het voor nieuwe leerstofeenheden vereiste begingedrag worden uitgedrukt in voorafgaande leerstofeenheden en/of toetsen.

Het vooronderwijs werkt echter voornamelijk op basis van vaste verwerkingstijden en variabele prestatieniveaus. Dit heeft tot gevolg, dat overigens capabele leerlingen in het begin van de brugklas of -periode allerlei leemten in hun voorkennis kunnen vertonen door predispositie en/of incidentele oorzaken zoals ziekte.

Om in deze leemten te voorzien, zal het systeem naar beneden toe steeds verder moeten worden uitgebouwd. In verband hiermee zou kunnen worden overwogen, of en in hoeverre de zo ontwikkelde programma-onderdelen rechtstreeks kunnen worden ingezet in het basisonderwijs.

Instructional procedures

Met nadruk is er van verschillende kanten steeds weer op gewezen, dat de vormgeving van het onderwijs dient te gebeuren vanuit de (inhoudelijke) curriculumontwikkeling. (cf. De Cecco, 1968 en Herz, 1972).

Niettemin wordt hier een poging ondernomen om eerst te komen tot de ontwikkeling van apparatuur, die het vervolgens mogelijk moet maken om tot een geleidelijke curriculumontwikkeling te komen vanuit de huidige onderwijssituatie.

Tegenover de eerstgenoemde aanpak in afgeronde *deelsystemen* kan de tweede worden beschouwd als een benadering vanuit een *aspectsysteem*, namelijk de programmering. Van hier uit kunnen dan naar behoefte en vermogen bepaalde deelsystemen worden ontwikkeld. (c.f. In 't Velt, 1972)

Juist voor een klein land als Nederland, met enerzijds een beperkt (onderwijs-) budget en anderzijds een binnen het taalgebied veel te kleine gebruikerskring om eventueel geïnvesteerde ontwikkelingskosten ooit terug te verdienen. (cf. Wachsmann, 1972), lijkt dit een aanpak die op korte termijn toch tot aantrekkelijke resultaten kan leiden.

Performance assessment

Het meest expliciete moment in het onderwijs is momenteel de summatieve evaluatie, de beoordeling van de leerling. De hierbij gebruikte toetsen komen in Nederland hoofdzakelijk op twee manieren tot stand:

- 1 Door de leraar, op basis van subjectieve ervaring en intuïtie.
- 2 Door het Centraal Instituut voor Toets Ontwikkeling (CITO), via een objectiverende statistische evaluatie.

Bij de individuele leraar vindt er gewoonlijk een overwegend impliciete terugkoppeling plaats op de voorgaande fasen in het onderwijsmodel. Voor de ontwikkeling van onderwijsprogramma's door teams zal deze terugkoppeling echter expliciet moeten worden gemaakt.

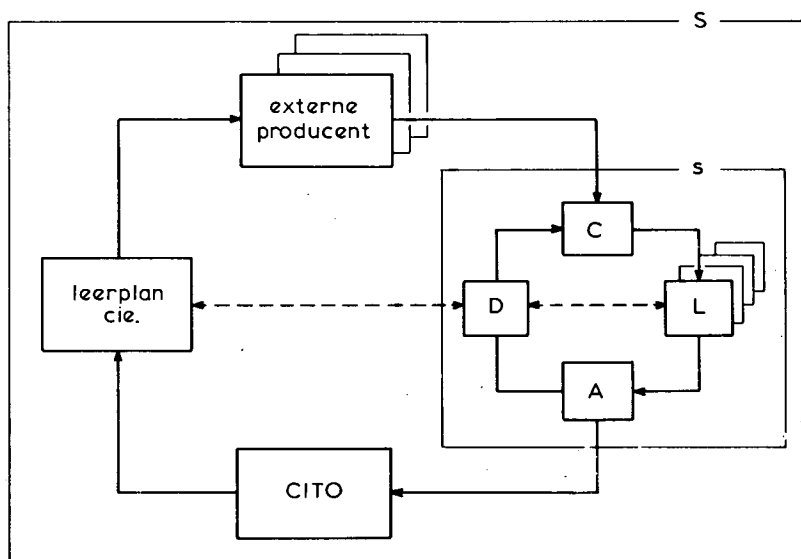
In dit kader zouden de activiteiten van het CITO een logiese voortzetting kunnen vinden in een formatieve evaluatie (de beoordeling van de onderwijsprocedures). De summatieve evaluatie zou ondertussen geheel in de te ontwikkelen program-

ma's dienen te worden geïntegreerd. De oorspronkelijke vooronderstelling, dat bij adequate programma's de kwantitatieve prestaties van de leerling een bruikbaar selectie criterium zou kunnen zijn voor eventuele plaatsing in MAVO, HAVO of VWO afdeling, blijkt te worden gesteund door verschillende onderzoekresultaten (Schwarzer, 1971).

Systeemopzet

In onderstaand relatiediagram is aangegeven hoe een en ander zou kunnen worden opgezet.

Diagram S geeft de opzet per vakgebied aan. Met 'externe producent' wordt hier bedoeld een instantie of persoon, die zich onder contract van de leerplancommissie bezig houdt met technisch-specialistische facetten van de curriculumontwikkeling. Subdiagram s schetst de opzet per schoolklas. Door de hierin aangegeven administratie worden de gegevens over verwerkte items en eventueel commentaar voorverwerkt naar de onderscheiden behoeften van de docent en van het CITO.



C = Curriculum

D = Docent

L = Leerling

A = Administratie

— formele relaties

---- informele relaties: tussen leraar en leerling het eigenlijke teaching by exception, tussen leraar en leerplancommissie vrijblijvende suggesties etc.

Literatuur

J.P. DE CECCO, *The Psychology of Learning and Instruction: Educational Psychology*, Prentice Hall, 1968.

J. VAN DORMOLEN, Naar een nieuw onderwijsprogramma voor de wiskunde, in: *Euclides*, 46, 1970-1971.

O. HERZ, Curriculumentwicklung und Bildungstechnologie, in: *Programmiertes Lernen*, 3/1972.

R. SCHWARZER, Eine Voruntersuchung zur Beziehung von Intelligenz, Arbeitszeit und Lernerfolg beim Programmiertes Lernen, in: *Programmiertes Lernen*, 3/1971.

J. IN 'T VELD, Systeem- en Modelbegrippen, in: *Inleiding tot de Methodologie*, Technische Hogeschool Delft, 1972.

TH. WACHSMANN, Möglichkeiten und Grenzen der Rationalisierung des Unterrichts durch Anwendung neuer Lehr- und Lernverfahren (Ein Denkmodell für Kosten-Nutzen-Kalkulationen), in: *Programmiertes Lernen*, 2/1972.

L. WEIDE, Teaching by Exception, in: *Euclides*, 49e jaargang, no. 3.

HULPAPPARATUUR

Doelstelling

Aansluitend aan de hiervoor beschreven heroriëntatie zal in het kader van de hoofdvakstudie Industriële Vormgeving aan de TH Delft apparatuur worden ontworpen ten behoeve van een eventuele realisering van het geschetste onderwijsontwikkelingssysteem.

In eerste instantie zal worden voorzien in:

- programmapresentatie
- aanbrengen van wijzigingen
- vastleggen van verwerkte items
- vastleggen van eventueel commentaar.

Programma van eisen

Deze doelstelling is verder gespecialiseerd in het volgende programma van eisen:

1 Presentatie

- 1.1 De programmapresentatie dient zodanig te zijn, dat een normale leerling er 3 aaneengesloten lesuren mee kan werken binnen aanvaardbare vermoeidheidsgrenzen.
- 1.2 Indicaties voor te volgen programmatakken dienen zo eenvoudig mogelijk te zijn.
- 1.3 Programmatakken welke door een leerling niet behoeven te worden verwerkt, moeten toch kunnen worden bekeken.
- 1.4 Desgewenst dient een leerling een aantal stappen in het programma terug te kunnen gaan.
- 1.5 Aanleiding en mogelijkheden tot verstoring van de itemvolgorde dienen minimaal te zijn.
- 1.6 De leerling dient regelmatig inzicht te hebben in zijn kwantitatieve prestaties, zowel reeds geleverde als nog te leveren.

2 Registratie

- 2.1 Van iedere leerling dient automatisch te kunnen worden vastgelegd welke programma-stappen hij heeft verwerkt, ten behoeve van formatieve programma-evaluatie en eventuele

gerichte studiehulp.

2.2 Kwalitatieve itembeoordelingen moeten door de leerling zo gemakkelijk mogelijk kunnen worden vastgelegd.

2.3 Verwerkte items en beoordeling moeten op een zodanige wijze worden vastgelegd, dat deze met bestaande of binnen deze ontwerp-opdracht te specificeren apparatuur administratief kunnen worden verwerkt.

3 Wijzigingen

3.1 Experimentele wijzigingen en/of uitbreidingen door individuele leraren moeten zo eenvoudig mogelijk kunnen worden gerealiseerd.

3.2 Collectieve wijzigingen en/of uitbreidingen van reeds in gebruik zijnde programma's moeten met zo weinig mogelijk kosten en/of moeite kunnen worden aangebracht.

3.3 Rapportering van elke programmaverandering aan de desbetreffende leerplancommissie(s) en verdere belanghebbenden dient zo goed mogelijk te worden verzekerd.

4 Gebruik

4.1 Bij gebruik van de te ontwikkelen apparatuur dienen er geen speciale eisen aan de omgeving behoeven te worden gesteld.

4.2 Voor ambulant gebruik, bijvoorbeeld bij verschillende proefopstellingen, hulpapparatuur en voor eventueel huiswerk dient de apparatuur draagbaar te zijn.

4.3 De te ontwikkelen apparatuur dient te voldoen aan alle in redelijkheid te stellen eisen van hygiëne.

4.4 Problemen als wachten en plaatsverwisselen zowel bij gebruik van het basisprogramma als van hulpapparatuur dienen binnen aanvaardbare grenzen te blijven.

5 Kosten

5.1 Systeemkosten, welke uit de collectieve middelen moeten worden gedekt, mogen de kosten van conventioneel onderwijs niet te boven gaan.

5.2 De kosten welke voor rekening van de individuele leerling komen, mogen niet hoger zijn dan die voor gangbare leerboeken.

Volgens punt 5.1 van het programma van eisen mogen de systeemkosten, welke uit de collectieve middelen moeten worden gedekt, niet hoger zijn dan de kosten van conventioneel onderwijs.

In de (korte termijn) praktijk betekent dit, dat de apparatuur zal moeten worden bekostigd uit besparingen op leraarssalarissen (cf. Wachsmann, 1972).

Onderstaand rekenschema geeft een overzicht van de financiële versus de organisatorische mogelijkheden. Hierbij zijn de volgende grootheden gebruikt:

Grootheden

Loko = loonkosten per leerlingles, dat is een één maal door één leerling te volgen les.

Lar = lerarenrooster, het aantal wekelijks door een leraar te geven lessen.

S = gemiddeld jaarsalaris leraar.

W = aantal schoolweken per jaar.

G = maximale klassegrootte, aantal leerlingen per leraar.

E = extra leerlingen, aantal leerlingen boven de conventionele klassegrootte.

Ako = apparatuurkosten per leerlingles.

Berekening

De loonkosten per leerlingles kunnen worden berekend met de volgende formule:

$$Loko = \frac{S}{Lar \times G \times W}$$

Voor $S = f\ 27.000,-$

$Lar = 30$

$G = 30$

$W = 40$

wordt $Loko = f\ 0,75$.

Indien nu door het inzetten van apparatuur de belasting van de leraar per leerling zodanig kan worden verminderd, dat (bij gelijkblijvend onderwijsresultaat) de klassegrootte kan worden opgevoerd, dan levert dit een besparing op van $E \times Loko$. Door deze besparing te delen door het resulterende *totaal* aantal leerlingen, kunnen de toelaatbare apparatuurkosten per leerling worden gevonden:

$$Ako = \frac{Loko \times E}{G + E}$$

In onderstaande tabel is voor een aantal denkbare gevallen aangegeven welke waarden Ako kan aannemen:

klassen	wordt	$E =$	$Ako =$
2	1	30	0,37
3	2	15	0,25
4	2	30	0,37
4	3	10	0,18
5	3	20	0,30
5	4	7	0,14
6	3	30	0,37
6	4	15	0,25
6	5	6	0,12
7	4	22	0,32
7	5	12	0,21
7	6	5	0,11

Binnen conventionele schoollokalen zal E hooguit = 10 kunnen worden.

Ten aanzien van de leraarbelasting zullen naar alle waarschijnlijkheid E -waarden van 30 tot de reële mogelijkheden behoren.

Eindexamens 1973 - II

Hieronder drukken we de opgaven af van de examens tweede zitting (herexamens) en wel op op verzoek van verschillende lezers van alle schooltypen:

WISKUNDE I - MAVO 3 (2 uur)

Bij elk van de volgende opgaven zijn vier antwoorden vermeld. Een van de antwoorden is juist. Teken een kringetje om de letter van het goede antwoord.

1 Van de waarnemingsgetallen 1, 2, 3, 4, 1, 5, 6, 7, 1, 8 en 1 wordt een frequentietabel gemaakt.

Er geldt

- a de modus is 1 en de mediaan is 3 b de modus is 1 en de mediaan is 5
c de modus is 4 en de mediaan is 3 d de modus is 4 en de mediaan is 5

2 $\{0\}$ is de oplossingsverzameling van

- a $3x = 3x$ b $-3x = 3x$ c $3x = 3x + 1$ d $-3x = 3x + 1$

3 Het beeld van (a, b) bij een rotatie om $O(0, 0)$ over 90° is

- a (b, a) b $(-b, a)$ c $(-b, -a)$ d $(b, -a)$

4 Gegeven zijn de verzamelingen

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b\} \text{ en } W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 0\}.$$
$$V \cap W = \emptyset \text{ voor}$$

- a $a = -1$ en $b = 0$ b $a = -1$ en $b \neq 0$
c $a = 1$ en $b = 0$ d $a = 1$ en $b \neq 0$

5 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7(2-x)}{2} > 7\}$ is gelijk aan

- a $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$ b $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$
c $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ d $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

6 De top van de grafiek van $x \rightarrow x^2 - 4x - 5$ is een punt in het

- a eerste kwadrant b tweede kwadrant
c derde kwadrant d vierde kwadrant

7 Van de functie $x \rightarrow 12x - 1$ is $\mathbb{Z}$ het bereik.

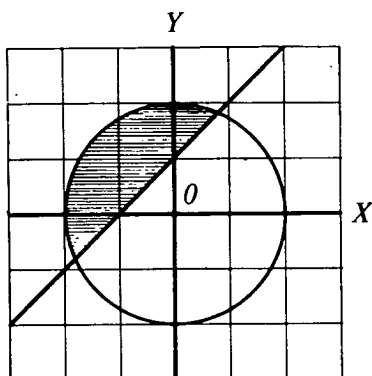
Welk van de onderstaande getallen kan *geen* origineel zijn bij deze functie?

- a $\frac{2}{3}$ b $\frac{3}{4}$ c $\frac{4}{5}$ d $\frac{5}{6}$

8 In nevenstaande figuur zijn de grafieken getekend van $x^2 + y^2 = 4$ en $y = x + 1$.

Voor de coördinaten x en y van de punten uit het gearceerde gebied (met inbegrip van de grenslijnen) geldt

- a $x^2 + y^2 \leq 4$ en $y \leq x + 1$
- b $x^2 + y^2 \leq 4$ en $y \geq x + 1$
- c $x^2 + y^2 \geq 4$ en $y \leq x + 1$
- d $x^2 + y^2 \geq 4$ en $y \geq x + 1$



Figuur 1

9 Als $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ en $\tan \alpha < 0$, dan is

- a $\sin \alpha < 0$ en $\cos \alpha < 0$
- b $\sin \alpha < 0$ en $\cos \alpha > 0$
- c $\sin \alpha > 0$ en $\cos \alpha < 0$
- d $\sin \alpha > 0$ en $\cos \alpha > 0$

10 Een kubus heeft een lichaamsdiagonaal met lengte 24.

Een ribbe van de kubus heeft de lengte a .

Voor a geldt

- a $0 < a \leq 4$
- b $4 < a \leq 8$
- c $8 < a \leq 12$
- d $12 < a$

11 Van een kubus $ABCD \cdot EFGH$ is de lengte van een ribbe 1.

Voor de omtrek p van driehoek ACH geldt

- a $0 < p \leq 2$
- b $2 < p \leq 4$
- c $4 < p \leq 6$
- d $6 < p \leq 8$

12 Bij spiegelen in de grafiek van $y = x$ is het beeld van de grafiek van $y = 2x - 2$ de grafiek van

- a $y = 2$
- b $y = 2x + 2$
- c $y = -2x + 2$
- d $y = \frac{1}{2}x + 1$

13 De grafiek van een functie $x \rightarrow px + q$ gaat door de punten $(2, 0)$ en $(1, 3)$.

Nu geldt

- a $p \geq 0$ en $q \geq 0$
- b $p \geq 0$ en $q < 0$
- c $p < 0$ en $q \geq 0$
- d $p < 0$ en $q < 0$

14 De lengte van een diagonaal van een vierkant is 6.
De omtrek van dit vierkant is

- a $12\sqrt{2}$ b 18 c $24\sqrt{2}$ d 36

15 De grafieken van $y - x = 2$ en $y = -\frac{1}{2}x + a$ snijden elkaar op de x -as.
Voor a geldt

- a $a = -1$ b $a = 1$ c $a = -4$ d $a = 4$

16 Van welke van onderstaande vergelijkingen bevat de oplossingsverzameling twee elementen?

- a $x^2 - 2x = -4$ b $x^2 - 3x = -4$
c $x^2 - 4x = -4$ d $x^2 - 5x = -4$

17 De functie $x \rightarrow x^2 + 2x + 2$ heeft

- a een minimum maar geen nulpunten
b een minimum en twee nulpunten
c een maximum maar geen nulpunten
d een maximum en twee nulpunten

18 De punten waarvan de coördinaten x en y voldoen aan

$y > -x$ en $x < -y$, liggen in

- a geen enkel kwadrant
b precies twee kwadranten
c precies drie kwadranten
d alle kwadranten

19 In een ruit $ABCD$ is S het snijpunt van de diagonalen.
Voor elk punt P binnen driehoek DCS geldt

- a $PA < PC$ en $PB < PD$
b $PA < PC$ en $PB > PD$
c $PA > PC$ en $PB < PD$
d $PA > PC$ en $PB > PD$

20 Het punt $(2, 2)$ is het middelpunt van de cirkel die gaat door het punt $(5, -2)$.
Deze cirkel gaat *niet* door het punt

- a $(-1, -2)$ b $(-1, 6)$ c $(3, -3)$ d $(6, 5)$

21 In driehoek ABC is CD de hoogtelijn op AB .

$$AB = 10, AD = 6 \text{ en } \tan \angle BAC = \frac{4}{3}.$$

Voor de oppervlakte O van driehoek ABC geldt

- a $O < 20$ b $20 \leq O < 30$ c $30 \leq O < 40$ d $40 \leq O$

22 $x + 1$ is een factor van $x^2 + px + 1$

Voor p geldt

- a $p = 0$ b $p = 1$ c $p = 2$ d $p = 3$

23 In driehoek ABC zijn de middens van de zijden AB , BC en AC respectievelijk F , D en E .

Driehoek ABC is het beeld van driehoek DEF bij een vermenigvuldiging met de factor

- a $\frac{1}{2}$ b $-\frac{1}{2}$ c 2 d -2

24 Een functie f beeldt elk getal x af op $x + 1$.

Er geldt

- a $f(-2) = -1$ en $f(-1) = 0$
b $f(-1) = -2$ en $f(0) = 1$
c $f(0) = -1$ en $f(1) = 0$
d $f(1) = 2$ en $f(2) = 1$

25 De verzameling $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3 - x < 2x + 4 < 5 - x\}$ bevat

- a geen element
b precies één element
c precies twee elementen
d meer dan twee elementen

WISKUNDE II-MAVO 3 (1½ uur)

1 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten

$A(1, -2)$, $B(7, -2)$ en $C(4, 2)$.

a Bereken de tangens van $\angle BAC$ en bepaal de grootte van hoek BAC in graden nauwkeurig.

Bereken de omtrek van driehoek ABC .

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC .

Bij de vermenigvuldiging met O als centrum en 2 als factor is driehoek $A'B'C'$ het beeld van driehoek ABC .

b Bereken de tangens van $\angle B'A'C'$ en bepaal de grootte van hoek $B'A'C'$ in graden nauwkeurig.

Bereken de omtrek van driehoek $A'B'C'$.

Bereken de oppervlakte van driehoek $A'B'C'$.

2 Met $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ als domein is de functie f gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 2x - 3$

en de functie g door $g(x) = x - 3$.

a Los de vergelijking $f(x) = 0$ op.

b Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.

c Teken de grafieken van f en g in één rechthoekig assenstelsel.

d Lees uit de figuur af voor welke x geldt $f(x) > g(x)$.

3 Van de balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 16$, $AD = 12$ en $AE = 8$.

a Bereken de lengte van het lijnstuk BD en bereken de lengte van het lijnstuk DF in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de grootte van hoek BDF in graden nauwkeurig.

P is een punt op de diagonaal BD , zodanig dat $\angle BPF = 58^\circ$.

c Bereken de lengte van de lijnstukken BP en DP .

d Bereken de oppervlakte van driehoek DPF .

4 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de puntverzamelingen

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 2y + 6 = 0\} \text{ en}$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x - y - 7 = 0\}.$$

a Bepaal $V \cap W$ door berekening.

b Geef V en W aan in het assenstelsel XOY .

In hetzelfde assenstelsel is een puntverzameling U gegeven door

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ en } 0 \leq y \leq 5\}.$$

c Schrijf de elementen op van de verzameling $U \cap (V \cup W)$.

WISKUNDE I - MAVO 4 (2 uur)

Een meerkeuze toets als bij mavo 3. De opgaven 1 t/m 10 waren gelijk aan die van mavo 3.

11 Een balk heeft ribben met lengten 1, 2 en 3.

Welk van de onderstaande getallen geeft *niet* de oppervlakte van een diagonaalvlak aan?

a $\sqrt{13}$ b $3\sqrt{3}$ c $2\sqrt{10}$ d $3\sqrt{5}$

12 Welke van onderstaande functies heeft *geen* nulpunten?

a $x \rightarrow x^2 - 3x + 2$ b $x \rightarrow x^2 - 3x - 2$
c $x \rightarrow x^2 - 3x + 3$ d $x \rightarrow x^2 - 3x - 3$

13 De omtrek van een cirkel is 6π .

De oppervlakte van deze cirkel is

a $3\pi^2 \mathbb{Z}$ b $9\pi \mathbb{Z}$ c $6\pi^2 \mathbb{Z}$ d 36π

14 Welke van onderstaande verzamelingen is een deelverzameling van $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$?

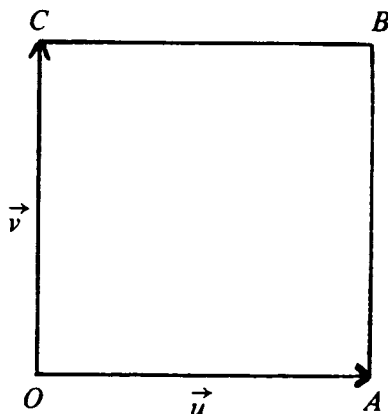
a $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$
b $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\}$
c $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 4\}$
d $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$

15 In nebenstaand vierkant $OABC$ is

$$\vec{OA} = \vec{u} \quad \text{en} \quad \vec{OC} = \vec{v}.$$

Nu geldt

- a $|\vec{u}| - |\vec{v}| = 0$ en $|\vec{u} - \vec{v}| = 0$
- b $|\vec{u}| - |\vec{v}| = 0$ en $|\vec{u} - \vec{v}| \neq 0$
- c $|\vec{u}| - |\vec{v}| \neq 0$ en $|\vec{u} - \vec{v}| = 0$
- d $|\vec{u}| - |\vec{v}| \neq 0$ en $|\vec{u} - \vec{v}| \neq 0$



Figuur 2

16 $x(x - 1) < 0$ is gelijkwaardig met

- a $x < 0$ en $x > 1$
- b $x < 0$ of $x > 1$
- c $x > 0$ en $x < 1$
- d $x > 0$ of $x < 1$

17 Van welke van onderstaande vergelijkingen bevat de oplossingsverzameling precies één element?

- a $x^2 = 2$
- b $x^2 = 1$
- c $x^2 = 0$
- d $x^2 = -1$

18 Als $k \begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan geldt voor k en p

- a $k = 2$ en $p = 2$
- b $k = 2$ en $p = -2$
- c $k = -2$ en $p = 2$
- d $k = -2$ en $p = -2$

19 Van de vectoren $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$ is gegeven:

$$\vec{OP} + \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\vec{OP} - \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nu geldt

- a P ligt op de x -as
- b P ligt op de y -as
- c Q ligt op de x -as
- d Q ligt op de y -as

20 Een cirkel met straal r wordt ten opzichte van het middelpunt vermenigvuldigd met de factor k .

De oppervlakte van de beeldfiguur is gelijk aan

- a $\pi r^2 k^2$ b πrk^2 c $\pi r^2 k$ d πrk

21 De beeldfiguur van $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ bij de translatie $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ is

- a $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x - 1)^2 - 1\}$
- b $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x - 1)^2 + 1\}$
- c $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x + 1)^2 - 1\}$
- d $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = (x + 1)^2 + 1\}$

22 In parallellogram $ABCD$ is $\angle DAB = \alpha$.

$$AB = a \text{ en } AD = b.$$

Het snijpunt van de diagonalen is S .

De oppervlakte van driehoek SBC is

- a $\frac{1}{8}ab \sin \alpha$ b $\frac{1}{4}ab \sin \alpha$ c $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$ d $ab \sin \alpha$

23 In de kubus $ABCD \cdot EFGH$ is S het midden van de ribbe AE .

$$\angle ACS = \beta.$$

Voor β geldt

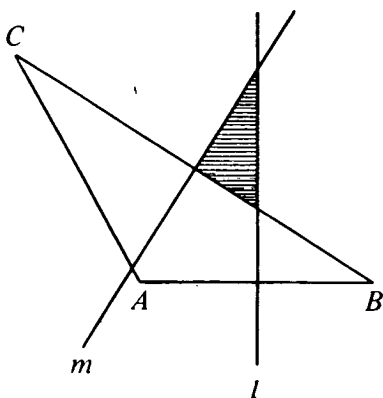
- a $18^\circ < \beta < 23^\circ$
- b $23^\circ < \beta < 28^\circ$
- c $28^\circ < \beta < 33^\circ$
- d $33^\circ < \beta < 38^\circ$

24 Van een nevenstaande driehoek ABC is

l de middelloodlijn van AB en
 m de middelloodlijn van BC .

Voor elk punt P van het gearceerde gebied
(met inbegrip van de grenslijnen) geldt

- a $PA \leq PB$ en $PC \leq PB$
- b $PA \leq PB$ en $PC \geq PB$
- c $PA \geq PB$ en $PC \leq PB$
- d $PA \geq PB$ en $PC \geq PB$



Figuur 3

25 De grafiek van een functie $f: x \rightarrow x^2 + ax + b$ gaat door de punten $(2, 8)$ en $(4, 30)$.
Voor a en b geldt

- a $a \geq 0$ en $b \geq 0$
- b $a \geq 0$ en $b < 0$
- c $a < 0$ en $b \geq 0$
- d $a < 0$ en $b < 0$

26 $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \leq x^2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \leq x + 2\}$ bevat

- a geen elementen
- b precies 2 elementen
- c precies 4 elementen
- d meer dan 4 elementen

27 Gegeven zijn de puntenverzamelingen

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 5x + 6y > 30\}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y > -2\}$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 5\}$$

U , V en W hebben gemeenschappelijke punten in

- a precies één kwadrant
- b precies twee kwadranten
- c precies drie kwadranten
- d alle kwadranten

28 De grafieken van $y = -2x - 1$ en $y = px + q$ snijden elkaar loodrecht in $(-1, 1)$.
Nu geldt voor p en q

- a $p = \frac{1}{2}$ en $q = -1\frac{1}{2}$
- b $p = \frac{1}{2}$ en $q = 1\frac{1}{2}$
- c $p = 2$ en $q = -3$
- d $p = 2$ en $q = 3$

29 De grafieken van de functies $f: x \rightarrow ax + b$ en $g: x \rightarrow px + q$ hebben geen gemeenschappelijk.
Nu geldt

- a $a = p$ en $b = q$
- b $a = p$ en $b \neq q$
- c $a \neq p$ en $b = q$
- d $a \neq p$ en $b \neq q$

30 De cirkel met vergelijking $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ en een rechte lijn met vergelijking $x + y = a$ hebben twee punten A en B gemeen.
Voor welke a is de lengte van AB maximaal?

- a $a = -3$
- b $a = -1$
- c $a = 1$
- d $a = 3$

WISKUNDE II – MAVO 4 (2 uur)

1 Een winkelier verkoopt doosjes punaises. Op elk doosje staat gedrukt dat het 75 punaises bevat. Bij een steekproef komt men echter tot het volgende resultaat.

aantal punaises per doosje	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
aantal doosjes	1	2	2	15	20	20	21	12	4	3

- a Hoeveel bedraagt de modus?
- b Bereken hoeveel punaises een doosje gemiddeld te *veel* of te *weinig* bevat.
- c Hoeveel procent van het aantal onderzochte doosjes bevat te veel punaises; hoeveel procent van het aantal onderzochte doosjes bevat te weinig punaises?

2 Van een balk $ABCD.EFGH$ is gegeven $AB = 10$, $AE = 6$ en $EH = 8$.

- a Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABGH$.
- Op de diagonaal AH ligt het punt P zodanig dat de oppervlakten van driehoek PBH en vierhoek $ABGH$ zich verhouden als $1 : 4$.
- b Bewijs dat P het midden is van het lijnstuk AH .
- c Bereken de grootte van hoek PBH in graden nauwkeurig.

3 In een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven een lijn l met de vergelijking $x + 2y = 5$ en een cirkel met de vergelijking $x^2 + y^2 = 5$.

- a Toon door berekening aan dat de lijn l de cirkel raakt en bereken de coördinaten van het raakpunt.

Een lijn m is evenwijdig met l en raakt eveneens de gegeven cirkel.

b Bepaal een vergelijking van m .

Bij spiegeling in de x -as is l' het beeld van l en m' het beeld van m .

c Bepaal een vergelijking van l' en een vergelijking van m' .

d Bewijs dat de lijnen l , l' , m en m' een ruit insluiten.

4 In een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven het punt A met de plaatsvector $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Het punt B is zo gelegen dat de vector $\vec{OB}$ het beeld is van $\vec{OA}$ bij rotatie om O over 120° .

a Bereken de kentallen van $\vec{OB}$.

Van het punt P is gegeven dat $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

b Bereken de kentallen en de lengte van $\vec{OP}$.

c Bewijs dat $\vec{OB}$ het beeld is van $\vec{OA}$ bij spiegeling in de drager van $\vec{OP}$.

5 Gegeven is de relatie $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq -x^2 + 4 \text{ en } y \geq 0\}$.

In een rechthoekig assenstelsel XOY is de grafiek van deze relatie een gebied V .

a Geef V in een figuur aan.

Bij spiegeling in het punt O is V' het beeld van V .

b Geef V' in de figuur aan.

Van welke relatie is V' de grafiek?

De doorsnede van de bij V en V' behorende relaties heeft W tot grafiek.

c Geef W in de figuur duidelijk aan.

Van welke relatie is W de grafiek?

WISKUNDE (Definitief programma) - HAVO (3 uur)

1 Gegeven is de volgende klasse-indeling van een aantal waarnemingen:

<u>klasse</u>	<u>frequentie</u>
12–16	5
17–21	11
22–26	16
27–31	14
32–36	4

a In welke klasse ligt de mediaan?

b Bereken het gemiddelde.

c Bereken de standaarddeviatie (ook standaardafwijking genoemd).

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de cirkel c met vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0.$$

en de lijnen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a Bewijs dat de lijn l de cirkel c raakt.
 b Op de cirkel c liggen punten waarvan de afstand tot l gelijk is aan de afstand tot m .
 Bereken de coördinaten van deze punten.

3 De functie $f: x \rightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

heeft als domein $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$.

- a Bereken de uiterste waarde van f en geef het bereik van f aan.
 b Teken de grafiek van f .
 c Los op: $f(x) \geq 3$.

4 Gegeven is de relatie

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 3x + 2y > 12 \wedge 3x + 10y > 36 \wedge x + 2y < 12\}.$$

- a Teken de grafiek van de relatie V .
 b Wat is de minimale waarde van $x + y$ als $(x, y) \in V$ en voor welke getallenparen (x, y) wordt dat minimum bereikt?
 Licht het antwoord toe.

5 Gegeven zijn de functies

$$f: x \rightarrow {}^2\log 2x \quad \text{en} \quad g: x \rightarrow {}^2\log (3 - x).$$

Elke functie heeft een zo groot mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ als domein.

- a Geef het domein en het bereik van f .
 Geef het domein en het bereik van g .
 b Teken in één figuur de grafieken van f en g .
 c Los op: $f(x) \cdot g(x) \leq 0$.

6 In een rechthoekig assenstelsel is gegeven de vierzijdige piramide $T.ABCD$, waarvan

$$A = (3, 3, 0), B = (-3, 3, 0), C = (-3, -3, 0), D = (3, -3, 0) \text{ en } T = (0, 0, a) \text{ met } a > 0.$$

P is het midden van de ribbe CT .

Het vlak V door A en door P en evenwijdig aan de lijn BD snijdt de lijn BT in Q en de lijn DT in R .

- a Bereken a in het geval dat de lijn CT loodrecht op het vlak V staat.
 b Naam $a = 6$ en bereken de oppervlakte van vierhoek $AQPR$.

WISKUNDE I - VWO (3 uur)

1 De functies f en g zijn voor elke reële x gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{en} \quad g(x) = x^2 + 2x.$$

- a Welke waarden kan $f(x)$ aannemen?
 b Bewijs dat voor elke x geldt: $f(x) \leq g(x)$.
 c Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de grafieken van f en g .

2 Beschouw op het interval $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq 1\frac{1}{2}\pi$ de functie

$$f(x) = \frac{3 \sin x}{2 - \cos x}.$$

- Teken de grafiek van f .
- Onderzoek hoeveel buigpunten de grafiek van f heeft.
- Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel begrensd door de grafiek van f en de X -as.

3 Beschouw voor elke reële x waarvoor $x > \ln p$ de verzameling V van de functies

$$f_p : x \rightarrow -2x + \ln(e^x - p).$$

Hierin is p een positief reëel getal.

- Voor welke p hebben de bijbehorende functies uit V een positieve uiterste waarde?
- Voor welke p snijdt de grafiek van de bijbehorende functie uit V de X -as in twee punten waarvan de afstand $\ln 3$ is?

4 Beschouw de functies f gegeven door:

$$\begin{array}{lll} f(x) = -x^2 + 4x & \text{voor } x \leq 0 & \text{en} \quad \text{voor } x \geq 3 \\ f \text{ is een derdegraadsfunctie van } x & \text{voor } 0 < x < 3. \end{array}$$

De functies f zijn continu voor $x = 0$ en $x = 3$.

- Bewijs dat geen van de functies f voor elke x differentieerbaar is.
- Een van de functies f die voor elke x behalve voor $x = 3$ differentieerbaar is, heeft een grafiek die de X -as raakt.

Bereken de uiterste waarden van deze functie en teken de grafiek van deze functie.

WISKUNDE II – VWO (3 UUR)

1 Van een recht driezijdig prisma $ABC.DEF$ zijn de lengten van vier ribben gegeven:

$$AB = 4, BC = 4\sqrt{3}, AC = 8 \text{ en } AD = 4\sqrt{3}.$$

- Bewijs dat de lijnen CD en BF elkaar loodrecht kruisen en bereken hun afstand.
- Bereken de cosinus van de hoek van de vlakken, die door de lijn AD gaan en die de bol met middellijn BF raken.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven

$$\begin{array}{l} \text{de cirkel met vergelijking } x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ \text{en de hyperbool met vergelijking } x^2 - y^2 - 4 = 0. \end{array}$$

V is de verzameling van de punten waarvan de poollijn ten opzichte van de cirkel en de poollijn ten opzichte van de hyperbool elkaar loodrecht snijden.

- V is een deelverzameling van een puntverzameling bestaande uit twee lijnen.

Bewijs dit.

Welke punten van deze twee lijnen behoren niet tot V ?

- Wat is de verzameling van de snijpunten van de elkaar loodrecht snijdende poollijnen?

3 Van de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ zijn alle ribben even lang.

Het punt Q is het midden van de ribbe TD .

Op de ribbe AD ligt een variabel punt P .

Het vlak door PQ dat evenwijdig aan de lijn AC is, snijdt de ribbe CD in R .

- Bepaal de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken PQR .

Geef een korte toelichting.

b Bij een bepaalde stand van P gaat het raakvlak in Q aan de omgeschreven bol van viervlak $DPQR$ door B . Bereken in dat geval $AP : PD$.

4 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven een stelsel lijnen met vergelijking

$$\lambda^2 x - x + \lambda y - 2 = 0.$$

a Welke lijnen van het stelsel gaan door het punt $(2, 7)$?

Bereken de tangens van de hoek waaronder deze lijnen elkaar snijden.

b Teken de verzameling van de punten waardoor geen lijn van het stelsel gaat.

c Stel een vergelijking op van de verzameling van de punten waardoor twee lijnen van het stelsel gaan die loodrecht op elkaar staan.

Wiskundig Genootschap

Het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op zaterdag 5 januari 1974 in het gebouw van het Comenius College, Bisonlaan 1 in Hilversum.

Als thema is gekozen: 'Algebra'.

Het programma luidt als volgt:

10.00–10.30 u. Aankomst en koffie.

10.30–11.30 u. Prof. dr. W. Peremans: 'Traliëtheorie en informatie'.

11.45–12.45 u. Prof. dr. F. van der Blij: 'Enkele algebraïsche facetten die voorkomen bij de theorie van perceptieonderzoek'.

12.45–14.00 u. Lunch.

14.00–15.00 u. Prof. dr. W. Kuyk: 'Vergelijkingen over eindige lichamen'.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom. I.v.m. de te reserveren plaatsruimte wordt ieder die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen verzocht, hiervan zo spoedig mogelijk bericht te geven aan R. Troelstra, Eemnesserweg 183, Hilversum (tel. 02150-57208) en tevens te vermelden of hij aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen. (De kosten voor de lunch ten bedrage f 7,50 gelieve men te storten op giro nr. 633074 t.n.v. R. Troelstra te Hilversum of ter plaatse te voldoen. Voor deelname aan de lunch is opgave van te voren noodzakelijk.)

Verscheidenheden

PROF. DR. O. BOTTEMA

Delft

LXXXIX *Beweging langs een lemniscaat*

1 Bij Hamel¹ kan men de volgende merkwaardige stelling aantreffen: een punt dat zich een vlak in beweegt onder invloed van een naar een vast centrum O gerichte kracht kan als baan een lemniscaat hebben als deze kracht omgekeerd evenredig is met de *zevende* macht van de afstand tot O . Wij komen hier op de aangelegenheid terug omdat Hamel zich vrijwel beperkt tot een formele verificatie van de uitspraak en niet in gaat op enige interessante aspecten van het probleem.

2 Wij nemen O als oorsprong van een poolcoördinatenstelsel (r, φ) . De kracht F op een punt P met massa één, zij volgens PO gericht en groot $k^2 r^{-7}$, waarin k een positieve constante is. Dan is

$$F = -k^2 r^{-7}$$

en de potentiaal V van het veld dus

$$-\frac{1}{6}k^2 r^{-6}$$

als het nulpunt in het oneindige wordt gekozen. Daar de kinetische energie van P gelijk is aan

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

geldt de vergelijking

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{3}k^2 r^{-6} = 2h, \quad 2.1$$

waarin h de totale energie voorstelt. Omdat het veld centraal is geldt de perkenwet

$$r^2 \dot{\varphi} = c, \quad 2.2$$

met $c \neq 0$ als het dubbele van de constante sectorsnelheid. Als het om de baan van P gaat kunnen wij het best de tijd elimineren door

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \dot{r} \dot{\varphi}^{-1},$$

waarna uit 2.1 tenslotte volgt

$$c^2(r^2 r'^2 + r^4) - \frac{1}{3}k^2 = 2hr^6. \quad 2.3$$

Wij beschouwen nu *die bewegingen van P waarvoor de totale energie h gelijk aan nul is.*

De bewegingsvergelijking luidt dan

$$r^2 r'^2 + r^4 = \frac{1}{3c^2} k^2, \quad 2.4$$

of, als men $r^2 = u$ stelt

$$u'^2 + 4u^2 = \frac{4}{3c^2} k^2. \quad 2.5$$

Door differentiatie naar φ ontstaat daaruit

$$u'' + 4u = 0, \quad 2.6$$

met de algemene oplossing

$$u = A \cos 2(\varphi - \varphi_0), \quad 2.7$$

die de integratieconstanten A en φ_0 bevat. Omdat 2.7 aan de oorspronkelijke vergelijking 2.5 voldoen moet is

$$A^2 = \frac{k^2}{3c^2}$$

en wij hebben daarmee de vergelijking der banen bepaald:

$$r^2 = \pm \frac{k}{c\sqrt{3}} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \quad 2.8$$

3 Gelijk welbekend is stelt de vergelijking in poolcoördinaten

$$r^2 = B \cos 2\varphi \quad 3.1$$

een *lemniscaat* voor. Wij kunnen ons daarbij zonder bezwaar tot positieve waarden van B beperken: $B = a^2$. Reële punten ontstaat voor

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

en voor

$$\frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi;$$

met deze beide intervallen corresponderen de rechter- en de linkerhelft van de kromme. Zij is symmetrisch t.o.v. de X - en t.o.v. de Y -as en t.o.v. O . In O heeft zij een dubbelpunt; de takraaklijnen zijn de bissectrices van de assen.

De X -as snijdt haar in de toppen $(a, 0)$ en $(-a, 0)$. Dit zijn de het verst van O gelegen punten.

Gaat men over op rechthoekige coördinaten dan blijkt 3.1 een (rationale) kromme

van de vierde graad te zijn, die behalve O ook de isotrope punten tot dubbelpunten heeft.

Uit 2.8 blijkt dat de baankrommen in ons veld (bij $h = 0$) lemniscaten zijn. Wij kunnen ons daarbij tot $c > 0$ beperken. Er is een stelsel van ∞^2 dergelijke krommen. Voor een zelfde waarde van c met variabele φ_0 zijn de krommen congruent. De diameter $2a$ van de kromme (en daarmee haar gedaante) hangt van c af:

$$a^2 = \frac{k}{c\sqrt{3}} \quad 3.2$$

4 Wij stellen ons voor dat P uit een willekeurig punt P_0 in een willekeurige richting vertrekt en zoeken de baan als de grootte van de beginsnelheid zo wordt gekozen dat een lemniscaat wordt beschreven.

Zonder bezwaar kunnen wij voor P_0 het punt $r = r_0$, $\varphi = 0$ nemen; de beginsnelheid v_0 (> 0) make de hoek α met de Y -as

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Daar $h = 0$ is

$$v_0 = \frac{k}{r_0^3 \sqrt{3}}.$$

De snelheidscomponent in Y -richting is $v_0 \cos \alpha$ en dus is

$$c = v_0 r_0 \cos \alpha = \frac{k \cos \alpha}{r_0^2 \sqrt{3}}.$$

Voor $\varphi = 0$ geldt verder

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{tg} \alpha$$

en zo vindt men $\sin 2\varphi_0 = \sin \alpha$.

De gevraagde baan heeft derhalve de vergelijking

$$r^2 = \frac{r_0^2}{\cos \alpha} \cos (2\varphi - \alpha). \quad 4.1$$

Uit 4.1 leest men af dat de lange as van de lemniscaat door

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

wordt aangewezen en de raaklijnen in O door

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4}.$$

De lengte a is gelijk aan

$$\frac{r_0}{\cos \alpha}.$$

Zij is het kleinst voor $\alpha = 0$, P_0 is dan een top. Als α toe of afneemt wordt a groter en de lemniscaat meer lang gerek. Voor

$$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad \alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{is} \quad \lim a = \infty. \quad \text{Voor} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

is de baan het verlengde van OP_0 , voor

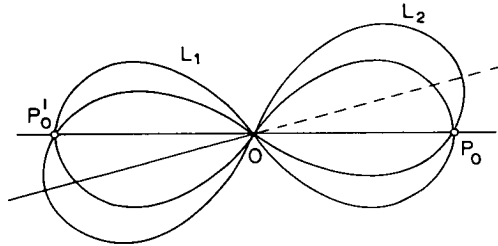
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

de tegengestelde halfrechte. Dat zijn ook de enige gevallen dat de baan zich tot het oneindige uitstrekt.

In alle andere keert P naar P_0 terug en ontstaat een periodieke beweging. Alle lemniscaten door P_0 gaan niet alleen tweemaal door O , maar ook alle door het met P_0 t.o.v. O diametraal gelegen punt P'_0 . Twee dezer lemniscaten hebben een zesvoudig snijpunt in O , en viervoudige in de isotrope punten en daar

$$4 \times 4 - 6 - 2 \times 4 = 2$$

zijn er buiten P_0 , P'_0 en O geen snijpunten. In fig. 1 zijn twee banen door P_0 geschetst.



De kromme 4.1 gaat door het punt (r_1, φ_1) als

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_1^2 - r_0^2 \cos 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_1}, \quad 4.2$$

waaruit blijkt dat elk punt van het vlak vanuit P_0 door een baankromme kan worden bereikt behalve als

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad r_1 \neq 0.$$

Er is ook slechts één zo'n kromme.

5 Wij willen tenslotte de tijd in onze beschouwingen betrekken en in het bijzonder nagaan hoe lang het duurt dat P weer in P_0 terug is.

Uit

$$r^2 \dot{\varphi} = c \quad \text{volgt, daar} \quad c = \frac{k \cos \alpha}{r_0^2 \sqrt{3}},$$

5.1

$$\dot{\varphi} = \frac{k \cos^2 \alpha}{r_0^4 \sqrt{3} \cdot \cos(2\varphi - \alpha)}$$

of als $2\varphi - \alpha = \psi$

$$\dot{\psi} = \frac{2k \cos^2 \alpha}{r_0^4 \sqrt{3} \cos \psi} \quad 5.2$$

Voor $\psi = 0$ is P in een top van zijn baan en voor $\psi = \frac{\pi}{2}$ daarna voor het eerst in O . Daar uit 5.2 volgt

$$\frac{dt}{d\psi} = \frac{r_0^4 \sqrt{3}}{2k \cos^2 \alpha} \cos \psi, \quad 5.3$$

krijgen wij voor de tijdsduur T van een totale omwenteling

$$T = 4 \frac{r_0^4 \sqrt{3}}{2k \cos^2 \alpha} \int_0^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi = \frac{2r_0^4 \sqrt{3}}{k \cos^2 \alpha}, \quad 5.4$$

wat ook als

$$T = \frac{2r_0}{v_0 \cos^2 \alpha} \quad 5.5$$

kan worden geschreven.

6 Wie de eenvoud van de antwoorden 5.4 en 5.5 als een verrassing ervaart zal de vreugde herbeleven van Fagnano toen het deze in 1750, tijdens de eerste eeuw der infinitesimaalrekening, gelukte de oppervlakte van de door Jacob Bernoulli in 1694 gevonden lemniscaat te bepalen². Het betreffende probleem is sinds lang een eenvoudige toepassing van de elementaire integraalrekening. De oppervlakte van de lemniscaat $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ is gelijk aan a^2 .

Volgens 4.1 is $a^2 = \frac{r_0^2}{\cos \alpha}$ en daar de perksnelheid $\frac{1}{2}c = \frac{k \cos \alpha}{2r_0^2 \sqrt{3}}$ wordt

$$\text{inderdaad } T = \frac{r_0^2}{\cos \alpha} \bigg/ \frac{k \cos \alpha}{2r_0^2 \sqrt{3}} = \frac{2r_0^4 \sqrt{3}}{k \cos^2 \alpha}.$$

¹ G. Hamel, *Theoretische Mechanik* (1967), 530-532.

² Zie b.v. G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* (1910), 214-219.

Vragen en reacties van lezers

Enkele kritische opmerkingen bij de normen voor de beoordeling van het schriftelijk werk wiskunde van het havo-examen

Inleiding

Het beoordelen van het examenwerk van de kandidaten voor het examen wiskunde havo heeft ons dit jaar veel hoofdbreken gekost. In het verleden leverde het nakijken van examenwerk ook moeilijkheden, maar helaas waren deze moeilijkheden dit jaar groter.

De discussies over de beoordeling liepen steeds vast door de o.i. dubbelzinnige formulering van de 'Bindende normen voor de beoordeling van het schriftelijk werk, vastgesteld door de Commissie, bedoeld in artikel 27, lid 5, van het Besluit eindexamens v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.', waarbij ik graag de nadruk leg op het woord *bindende*.

De verschillen van mening concentreerden zich op de interpretatie van de brief, gedateerd januari 1973, over de havo-examens wiskunde 1973, gericht aan de Rectoren/Directeuren van de scholen voor havo, in het vervolg te noemen 'de brief'. Een afschrift van deze brief is te vinden in Euclides, jrg 72-73, nr. 6, blz. 227 e.v.

Naar mijn mening bestaat er een discrepantie tussen de brief en bovengenoemde normen.

Ter staving van deze bewering het volgende:

In de brief over het havo-examen staat onder punt 8 het volgende (ik citeer):

De opdracht 'Tekenen de grafiek van f ' houdt in een onderzoek naar het gedrag van de functie voor zover mogelijk aan de hand van

- a het tekenschema van $f(x)$;
- b het tekenschema van $f'(x)$;
- c onderzoek naar horizontale en verticale asymptoten.

De opdracht 'Tekenen in één figuur de grafieken van f en g ' houdt mede in dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch wordt opgelost.

I Vraagstuk A2a van het havo-examen 1973 luidt als volgt:

De functie f is voor elke reële x gedefinieerd door

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

- a Tekenen de grafiek van f op het interval $-1 \leq x \leq 3$.

De normen voor de beoordeling van dit vraagstuk onderdeel luiden als volgt:

Voor dit onderdeel worden 10 punten beschikbaar gesteld;

- (1) voor de berekening van de gemeenschappelijke punten met de X -as 2 punten;
- (2) voor het tekenverloop van $f'(x)$ 3 punten;
- (3) voor de berekening van de extreme waarden 3 punten;
- (4) voor de grafiek 2 punten.

ad (1) De kandidaat die $f(x) = 0$ oplost en de resultaten direct in zijn figuur uitzet, heeft volgens de brief aan zijn verplichtingen voldaan.

Hij heeft echter niet de gemeenschappelijke punten met de X -as berekend, maar alleen de x -coördinaten daarvan.

M.i. had de norm moeten luiden:

Voor de *bepaling* van de gemeenschappelijke punten met de X -as:

Als dan uit de figuur blijkt dat de kandidaat de goede snijpunten gevonden heeft, heeft hij zijn twee punten verdiend.

ad (3) Om dezelfde redenen als hierboven aangegeven, had m.i. de norm moeten luiden: Voor het *bepalen* van de extreme waarden.

In de brief wordt namelijk niet de berekening van de extreme waarden geëist.

Geëist wordt: het tekenschema van $f'(x)$. Als onderdeel van deze opdracht zal de kandidaat de vergelijking $f'(x) = 0$ moeten oplossen.

Als de kandidaat, zonder iets op te schrijven, de wortels van deze vergelijking gebruikt om de extreme waarden in zijn figuur aan te geven, heeft hij volgens de brief aan zijn opdracht voldaan, terwijl hij volgens de normen tekort schiet: hij geeft namelijk niet de *berekening* van de extreme waarden.

II Vraagstuk A4a van het havo-examen luidt als volgt:

Met domein $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ zijn gegeven de functies

$$f: x \rightarrow -\cos 2x \text{ en } g: x \rightarrow \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right).$$

a Teken in één figuur de grafieken van f en g .

De normen voor de beoordeling van dit vraagstukonderdeel luiden als volgt:

- (1) voor de grafiek van f 2 punten;
- (2) voor de grafiek van g 3 punten;
- (3) voor de snijpunten der grafieken 3 punten.

ad (1) Als de leerling de grafiek van f moet tekenen, moet hij volgens de brief in ieder geval het tekenschema van f en dat van f' bepalen. Vele leerlingen laten dit, gezien de eenvoud van de opgave, achterwege. Volgens de norm hoeven we hiervoor niets af te trekken (zie ook de formulering van (4) onder I). Volgens de brief heeft de kandidaat niet aan zijn verplichtingen voldaan.

ad (2) Hetzelfde als onder ad (1) is opgemerkt geldt mutatis mutandis voor (2).

ad (3) Volgens de norm wordt de berekening van de snijpunten geëist, terwijl volgens de brief de algebraïsche oplossing van $f(x) = g(x)$ voldoende is.

In de norm wordt dus ten onrechte de *berekening* van de y -coördinaat van het snijpunt geëist.

M.i. hadden de normen moeten luiden:

- (1) voor het op de voorgeschreven wijze afleiden van de grafiek van f 2 punten;
- (2) idem voor g 3 punten;
- (3) voor de oplossing van $f(x) = g(x)$ 3 punten.

III Mijn laatste bezwaar is van algemene aard.

In de algemene regels wordt gesteld:

Voor elke rekenfout of verschrijving wordt 1 punt afgetrokken.

Mijn bezwaar richt zich hier tegen het 'elke'.

In het verleden werd het beoordelen van de aftrek voor rekenfouten of verschrijvingen aan de examinator overgelaten.

Een strikte toepassing van deze regel kan tot onrechtvaardigheid leiden. Er zijn leerlingen die een onderdeel bijna helemaal netjes hebben uitgewerkt en op het laatste nippertje, b.v. bij het invullen en uitwerken van een op zich juiste formule, verschrijvingen en/of rekenfouten maken. Toepassing van de norm zou er in een dergelijk geval toe kunnen leiden, dat het goede niet gewaardeerd wordt.

Bovendien is toepassing van deze regel wel zeer nadelig voor slordige kandidaten.

Bij navraag is mij gebleken dat tegen deze regel, m.i. zeer terecht, nogal eens gezondigd is.

Frans Bouman

Boekbespreking

S.M.P. *Revised Advanced Mathematics*, Book 1, Cambridge University Press, London, 1973, XI + 380 blz., £2.-.

De herziene editie heeft verschillende verbeteringen ondergaan. Opvallend is dat nog meer de aandacht afgekeerd is van de abstracte wiskunde en de toepassingen centraal staan. In dit verband is tekenend dat het eerste hoofdstuk over Structures als afzonderlijk hoofdstuk is vervallen. Gestart wordt onmiddellijk met de computer. Hieraan wordt in de gereviseerde uitgave meer aandacht besteed dan in de oorspronkelijke. Het hoofdstuk over functies wordt ingeleid door functionele verbanden in het dagelijks leven en in de wetenschappen. Daarna wordt ingegaan op de noodzaak van het mathematiseren van concrete situaties en eerst nu volgen wiskundige uiteenzettingen over functies.

De opzet is ongewijzigd. Weer komen aan de orde de belangrijke onderwerpen uit de gehele cursus, t.w. algebra, trigonometrie, vectoren, mechanica, statistiek, computerwerk, met de bedoeling dat ze in de volgende delen verdiept worden. De Engelsen noemen dit treffend een spiraalsgewijze behandeling van de leerstof.

In het voorbericht vond ik de opmerking: 'We anticipate that many students will use this book with only intermittent help from teachers'. In verband hiermee zijn achterin het boek thans ook de antwoorden opgenomen.

P. G. J. Vredenduin.

R. Bens, E. Bouqué, G. Verschuere, *Opbouw 5a*, Wesmael-Charlier N.V., Namen, 1972, XVI + 259 blz.

Het boek is bestemd voor de tweede klasse (dus voor de voorlaatste).

Na een korte herhaling worden de complexe getallen behandeld. Het hoofdstuk is traditioneel van opzet. Nu volgt het hoofddeel van het boek. Dit gaat over matrices, lineaire transformaties, determinanten en stelsels vergelijkingen. Het is een mooi sluitend logisch geheel, waarbij elk volgend hoofdstuk goed bij het voorgaande aansluit. En het is bijzonder helder geschreven.

Eerst wordt alles besproken wat we van matrices nodig zullen hebben. In het erop volgende hoofdstuk over lineaire transformaties van vectorruimten komt meteen de inhoud van het voorgaande hoofdstuk tot zijn recht. Hierna schakelen we over op vergelijkingen. Uit de stelsels van twee eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken worden de determinanten van orde 2 geboren. Iets moeilijker komen de determinanten van de derde orde tot stand. De stap naar de determinanten van de n^e orde is dan zo gebeurd. We leren met determinanten rekenen. Veel hoeven we niet te kunnen. Hoofdzak is, dat we weten of een determinant gelijk aan 0 is of niet en dat we kans zien alle getallen onder de hoofddiagonaal tot 0 te herleiden. Kunnen we dit, dan kunnen we ook gemakkelijk de rang van een matrix bepalen. En nu is de weg geëffend voor een bespreking van stelsels eerstegraads vergelijkingen. In een handomdraai zien we, hoe de algemene oplossing tot stand komt. De regel van Cramer wordt nog wel kort vermeld, maar zou eigenlijk net zo goed gemist kunnen worden. Tot mijn vreugde zag ik, dat nu een wetenschappelijk correcte theorie van het elimineren volgt. Ten slotte nog een aardig hoofdstuk over eigenvectoren en een behandeling van de orthogonale transformaties, waarbij de complexe getallen opnieuw tot hun recht komen.

Het boek wordt besloten met een hoofdstuk over veeltermen met complexe coëfficiënten.

Het hoofddeel heeft me bijzonder geboeid.

P. G. J. Vredenduin.

Ook dit boek is bestemd voor de voorlaatste klas van het secundair onderwijs.

Men zou de inhoud gevoelig kunnen betitelen met 'meetkunde met vectoren'. Maar het boek graaft wel dieper dan in onze cursus meetkunde met vectoren het geval is. Het affiene en het metrische standpunt worden, gelukkig, zorgvuldig gescheiden gehouden. De eerste negen hoofdstukken gaan over affiene meetkunde, de laatste zeven over euclidische meetkunde, dus over een inproductruimte. De behandeling is wiskundig streng en soms tamelijk abstract.

Uit de inhoud wil ik één ding speciaal vermelden, namelijk de introductie van inhoud. We nemen aan, dat er een afbeelding is van $\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3$ naar $\mathbb{R}$, genaamd vol, met de volgende eigenschappen: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}_3$ en $k \in \mathbb{R}$ geldt

1. $\text{vol}(a, kb, c) = k \text{vol}(a, b, c)$ ¹⁾
2. $b = b_1 + b_2 \Rightarrow \text{vol}(a, b, c) = \text{vol}(a, b_1, c) + \text{vol}(a, b_2, c)$ ¹⁾
3. $\text{vol}(a, a, c) = 0$ ¹⁾
4. $\text{vol}(e_1, e_2, e_3) = 1$ $((e_1, e_2, e_3)$ is een basis)

Dit viertal axioma's is gemakkelijk plausibel te maken en is dus een didactisch aanvaardbare basis om mee verder te werken. Wel moet erbij verteld worden, dat men in zijn achterhoofd bij vol (a, b, c) gedacht heeft aan het volume van het parallellepipedum opgespannen op a, b, c . En verder dat de inhoud van een teken voorzien is (vgl. 2).

De uniciteit van de toevoeging vol is gemakkelijk aan te tonen, d.w.z. zodra een basis gekozen is, ligt daarmee vol vast.

Elke functie van a, b en c die aan de vier axioma's voldoet, is dus gelijk aan vol. Stel

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$b = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$$

$$c = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$$

dan blijkt aan de axioma's te voldoen

$$(a, b, c) \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Waarmee op slag bewezen is, dat deze determinant de inhoud voorstelt.

Opmerking verdient dat de functie vol niet speciaal toegespitst is op de driedimensionale ruimte. Men kan analoog oppervlakte in $\mathbb{R}_2$ definiëren. (En men zou dan in $\mathbb{R}_2$ met een eenvoudig figuurtje kunnen demonstreren, dat de determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

de oppervlakte van een parallellogram voorstelt, waarna de generalisatie naar drie dimensies acceptabel wordt.)

Misschien iets voor onze boekenschrijvers om over te nemen.

P. G. J. Vredenduin

¹⁾ Bedoeld is, hoewel het niet expliciet vermeld is, dat a, b en c in deze axioma's dezelfde rol spelen.

Men moet elk axioma dus door een drietal vervangen of bijv. toevoegen:

$\text{vol}(a, b, c) = \text{vol}(b, c, a) = \text{vol}(c, a, b)$.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wasenaarsheuvel 73, Oosterbeek.

304 25 recruten van verschillende lengte zijn in een carré gerangschikt. Een sergeant zoekt uit elke rij de grootste, kiest de kleinste van deze vijf grootsten en haalt hem uit het carré. We noemen hem A_1 . Daarna zoekt hij in elke kolom onder de overgeblevenen de kleinste en kiest van deze vijf kleinsten de grootste. Hij haalt deze uit het carré. We noemen hem A_2 . Gegeven is dat A_2 langer is dan A_1 . Op de 23 overgeblevenen wordt de eerste operatie uitgevoerd en daarna op de 22 overgeblevenen de tweede operatie, enz. De achtereenvolgens uitgekozenen noemen we A_3, A_4 , enz. Wat weten we nu van de lengten van $A_1, A_2, \dots, A_9$?

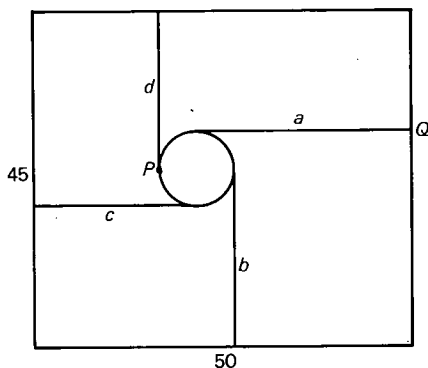
305 Er zijn twee stapeltjes lucifers. A en B mogen om beurt hetzij van één stapeltje een willekeurig aantal lucifers afnemen, hetzij van beide stapeltjes evenveel. A begint. De ene stapel bestaat uit 23 lucifers, de ander uit 14. A , die niet eens ideaal intelligent ondersteld wordt, neemt van de 23 er 5 af. De vraag is nu:

- is dit verstandig?
- op welke twee manieren kan B voortgaan om winst te forceren?

(B. Kootstra)

Oplossingen

302 Een geit zat aan een touw dat om de cilinder in onderstaande figuur gewikkeld was. Het touw was 40 m lang. Hield zij het touw gestrekt, dan raakte haar loopbaan de vier zijden van het weiland. Gevraagd straal en plaats van de cilinder, punt waar touw bevestigd is aan de cilinder en deel van het weiland dat de geit kaal kon vreten.



Onderstel dat de omtrek van de cilinder $4x$ is. Dan is

$$b = a - x$$

$$c = a - 2x$$

$$d = a - 3x$$

$$a + c = 50$$

$$b + d = 45$$

waaruit we vinden:

$$a = 27,5$$

$$4x = 10$$

De straal van de cilinder en de coördinaten van de as zijn nu bekend.

Omdat het touw in totaal 40 m lang is, is het vastgemaakt aan de cilinder in P en $1\frac{1}{4}$ keer om de cilinder gewonden, voordat het vrije uiteinde rechts van het bovineinde van de cilinder aan de geit in Q vastzit. Als de geit honger krijgt, wikkelt zij deze $1\frac{1}{4}$ slag los door linksom om de cilinder te lopen. Als men het narekent, blijkt dat zij dan juist het hele grasveld kan bereiken.

303 Gevraagd drie rechthoekige driehoeken met gelijke minimale omtrek waarvan de lengten van de zijden geheel zijn.

Voorlopig stellen we de eis, dat de lengten van de drie zijden geen factor gemeen hebben. We krijgen de mogelijke lengten dan door eerst te kiezen p en q zo, dat p en q geen factor gemeen hebben en beide oneven zijn en dan als zijden te kiezen

$$a = pq, \quad b = \frac{1}{2}(p^2 - q^2), \quad c = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

We vinden dan de volgende mogelijkheden:

p	q	a	b	c	omtrek
1	3	3	4	5	12
1	5	5	12	13	30
3	5	15	8	17	40
1	7	7	24	25	56
3	7	21	20	29	70
5	7	35	12	37	84
1	9	9	40	41	90
5	9	45	28	53	126
enz.					

Om alle mogelijkheden te krijgen merken we op, dat we de getallen in elke rij nog met een willekeurig positief geheel getal vermenigvuldigen kunnen.

We moeten dus drie getallen uit de laatste kolom vinden met minimaal kgv. Het kgv van 12, 30 en 40 is 120. Men ziet direct, dat geen drietal van de afgedrukte omtrekken een kleiner kgv heeft. Zetten we de rij voort, dan krijgen we uitsluitend omtrekken groter dan 120. De gevraagde driehoeken hebben dus als zijden

30, 40, 50 20, 48, 52 24, 45, 51

Ad 298 Van collega E. C. Buissant des Amories kreeg ik een brief waarin hij me meedeelde, dat ik enige, en zelfs vijf oplossingen vergeten had. Hij had gelijk. Ik vermeld niet welke. Wie lust heeft, kan nog eens zoeken.

DE VRIJE LEERGANGEN

Opleiding voor Middelbare Akten

Het nieuwe studiejaar

WISKUNDE M.O.-B

begint 11 januari 1974 om 18.15 uur in
het Hoofdgebouw van de Vrije Universiteit,
De Boelelaan 1105, Amsterdam

Aanmelding gaarne voor 1 januari 1973

Aanmeldingsformulieren bij de administratie
Vrije Leergangen, De Boelelaan 1105, Amsterdam

Inlichtingen bij:

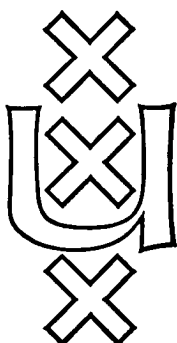
Drs P. NOORDZIJ - Sandbergstraat 12 - Abcoude
Telefoon 02946-1950

Universiteit van Amsterdam

Aan de Subfaculteit der Wiskunde vacceert per
1 augustus 1974 de functie van

docent in de vakdidactiek

— voor een deel van volledige werktijd —



De aan te stellen functionaris zal tot taak krijgen de didactische vorming van a.s. wiskunde-leraren te verzorgen; assistentie door een wetenschappelijk medewerker (in deeltijdsaanstelling) is op het ogenblik aanwezig.

Sollicitaties kunnen worden gericht aan de secretaris van de benoemingscommissie, mevr. Dr. A. B. Paalman-De Miranda, Mathematisch Instituut, Roetersstraat 15, A'dam-1004, bij wie ook inlichtingen kunnen worden ingewonnen.



STICHTING GELDERSE LEERGANGEN

In verband met de per 1 augustus 1974 te openen opleidingen voor leraar 2e/3e graad wis- en natuurkunde vraagt de Stichting Gelderse Leergangen voor haar lerarenopleiding te Nijmegen op zo kort mogelijke termijn:

een HOOFFDDOCENT(E) WISKUNDE

een HOOFFDDOCENT(E) NATUURKUNDE

De Stichting verwacht van ieder van deze—in volledige betrekking aan te stellen—medewerkers dat zij/hij:

- belangstelling heeft voor ontwikkelingen in haar/zijn vakgebied;
- zich interesseert voor onderwijsproblemen en openstaat voor een experimentele benadering ervan;
- over organisatorische kwaliteiten beschikt;
- een eerstegraads bevoegdheid bezit;
- onderwijservaring heeft;
- in staat en bereid is in samenwerking met collega's ook van andere disciplines, en studenten vorm te geven aan een opleiding tot leraar.

Salariëring op basis van het rangenstelsel voor wetenschappelijke ambtenaren (max. f 4.600,— per maand).

Inlichtingen worden gaarne verstrekt door Drs. J. Classen, directeur, tel. instituut: 080-775233, toestel 11.

Gegadigden voor deze functies worden uitgenodigd binnen 8 dagen hun sollicitatie met curriculum vitae en referenties te richten aan de directeur van de lerarenopleiding, Graafseweg 274 te Nijmegen.

Didactische oriëntatie wiskunde- leraren

In de afgelopen jaren hebben in het wiskunde-
onderwijs grote veranderingen plaatsgevonden:
nieuwe leermiddelen, nieuwe leermethoden,
nieuwe programma's.

Deze recente ontwikkelingen worden op
uitvoerige wijze belicht in de volledig herziene
edities van de delen 1 en 2 van

Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren

onder redactie van

dr. Joh. H. Wansink

Deel 1, 2e druk, 340 pagina's gebonden f 34,50
ISBN 90 01 93765 9

Met een bijdrage van J. Timmer over
studietoetsen.

Deel 2, 2e druk, 464 pagina's gebonden f 45,00
ISBN 90 01 93766 7

Met bijdragen van G. Krooshof over Moderne
Wiskunde,

dr. P. M. van Hiele over Van A tot Z,

dr. R. Holvoet over Papy.

Deel 3, 398 pagina's gebonden f 39,50
ISBN 90 01 93767 5

Met bijdragen van tien prominente wiskundigen
en didactici.

Onmisbaar voor een ieder die wiskundeleraar is,
of dit wil worden. Meer gedetailleerde informatie
vindt u in ons uitgebreid prospectus, dat u op
aanvraag kan worden toegezonden.

Verkrijgbaar bij de boekhandel

Vermeldt bij bestellingen steeds titel, auteur en
ISBN.

Prijswijzigingen voorbehouden



Wolters-Noordhoff

244 59 50/607

DE „STICHTING SCHOOLADVIESDIENST OOST - GELDERLAND”
te Doetinchem, werkzaam t.b.v. het openbaar, het bijzonder en het
neutraal-bijzonder onderwijs, vraagt:

EEN PEDAGOOG-DIDACTICUS

voor de projectgroep "Kulturele Vaardigheden".

Taak:

- leggen en onderhouden van contacten met lagere scholen.
- leiden van werkbijeenkomsten met onderwijsgevendens.
- participeren in de begeleiding van de ontklassikalisering van het rekenonderwijs.
- participeren in de voorbereiding tot inhoudelijk (wiskunde) vernieuwing van het rekenonderwijs.

Vereist zijn:

- ervaring in het lager onderwijs;
- goede contactuele eigenschappen;
- leidinggevende kwaliteiten;
- de bevoegdheid wiskunde MO-A of MO-B of gevorderde studie daarvoor.

De salariering geschiedt, gelet op leeftijd, ervaring en bevoegdheden volgens het B.B.B.R.A. resp. in de schalen 89-103-114 / 114-130-146.

De rechtspositie is conform de rechtspositieregeling van de gemeente Doetinchem.

Opname in het Algemeen Burgerlijk Pensioenfonds en I.Z.A.

Huisvesting naar keuze in één der deelnemende gemeenten.

Sollicitaties binnen 14 dagen te richten aan het bestuur t.a.v. de directeur L. Bolk, Holterweg 119, Doetinchem.

Inlichtingen worden verstrekt door de directeur (08340-30851 bureau; 05430-2114 privé) of de projectleider J. G. J. van Dijk (08340-30851 bureau; 08340-24923 privé).

INHOUD

A. J. Th. Maassen: Een fundamentele stelling van de analyse 121

I.O.W.O. 130

L. Weide: Teaching by exception 2 131

Eindexamens 1973-II 137

Wiskundig genootschap 149

Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 150

Vragen en reacties van lezers 155

Boekbespreking 157

Recreatie 159