EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

EUCLIDES

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van
Wiskundeleraren en van de
Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

48ste jaargang 1972/1973

Wolters-Noordhoff bv Groningen

INHOUD VAN DE 48STE JAARGANG

INHOUD VAN DE 48STE JAARGANG 1972/1973

ARTIKELEN EN VOORDRACHTEN

KORRELS

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

DIVERSEN

BOEKBESPREKINGEN

De 48e jaargang stond onder redactie van G. Krooshof, Drs. A.M. Koldijk, Dr. W.A.M. Burgers, F. Goffree, Dr. P.M. van Hiele, Drs. J. van Lint, L.A.G.M. Muskens, Dr. P.G.J. Vredenduin, Drs. B.J.Westerhof

m en a achter sommige bladzijdenummers verwijzen naar de maart- en aprilafleveringen van de jaargang. Dit i.v.m. een fout gemaakt bij de paginering.

Het mavo-ontwikkelteam

Een interessant verslag

G. KROOSHOF

Groningen

In dit artikel willen we graag de aandacht vestigen op het verslag 1971-1972 van het 'Mavo Ontwikkel Team'. De inleiding en verantwoording van dit verslag nemen we hierbij op. Er wordt in dit verslag de nadruk gelegd op de plaats van het rekenen in de mavo-wiskunde. Het zou me niet verbazen als er ook in de kringen van havo- en vwo-leraren belangstelling zou zijn voor het onderwerp rekenen. Al was het alleen maar omdat ze van hun natuur- en scheikunde-collega's zo vaak te horen krijgen 'Ze kunnen niet meer rekenen, wat kunnen jullie daaraan doen? '
In het verslag worden voorbeelden getoond van pogingen om te komen tot een zinvol rekenonderwijs. De drie onderwerpen die worden gedemonstreerd zijn

a Modulair rekenen
b De betekenis van het positiestelsel (Werkstuk 'Knollenkop')
c Cijferen (Rekenmachines)

Het team legt deze voorbeelden aan de collega's voor met de bedoeling er reacties op te verkrijgen. Het verslag kan worden aangevraagd bij het I.O.W.O. (Mavo Ontwikkelteam), Tiberdreef 4, Utrecht (Tel. 030-611611).

INLEIDING EN VERANTWOORDING

1 Het mavo-ontwikkelteam, een groep part-time medewerkers van het IOWO, begon in augustus 1971 zijn werk, uitgaande van de volgende taakomschrijving:

'Een deel-team gaat uit van de stelling dat het huidige programma voor de mavo goed is. Vanuit dit uitgangspunt wordt onderzocht in hoeverre statistiek kan worden toegevoegd.
Een ander deelteam stelt zich op het standpunt dat het mavo-programma aan kritiek onderworpen mag worden. Dit team zal werken aan de volgende opdrachten:

- formuleren van doelstellingen voor mavo-wiskunde
- doorlichten van het huidige programma
- formuleren van aanvullingen en/of wijzigingen
- onderzoeken van mogelijkheden tot experimenten
- publiceren van resultaten.'

Al vrij spoedig bleek dat de behoefte aan brede informatie op het terrein van de leerplanontwikkeling voor het team er de oorzaak van zou worden dat de aanvankelijk gestelde taakomschrijving moest worden 'bijgestuurd'.
In studiebijeenkomsten en diskussiemiddagen stelde het team zich op de hoogte van diverse modellen van leerplanontwikkeling. Tevens werd aandacht besteed aan het Colo-rapport, publikaties over doelstellingenonderzoek, over werkvormen en toetsing i.v.m. selektie en diagnose.
Naast deze meer teoretisch gerichte aktiviteiten trachtte het team de praktische uitvoering van een en ander 'in de vingers te krijgen' door analyseren van een stukje leerstof uit het huidige mavo-programma.

Inmiddels waren ook de resultaten bekend geworden van een door het team gehouden enquête.
Hoewel in de enquête geen onderzoek werd ingesteld naar de behoefte aan rekenvaardigheid gaven toch veel geënquêteerden spontaan te kennen dat zij in het mavo-programma een ruime plaats zouden willen inruimen voor de verhoging van de rekenvaardigheid bij de leerlingen.
Deze en andere uitspraken leverde het team voldoende argumenten om als onderwerp voor een te ontwikkelen leerstofpakket(je) te kiezen: 'Getallen'.

Enkele overwegingen die tot deze keuze leidden:
- vele vakkollega's en ook kollega's uit 'verwante' disciplines vragen ernaar
- in de bestaande boeken wordt over het algemeen niet zo veel aandacht besteed aan 'cijferen'
- in de basisschool heeft de leerling weliswaar 'rekenen' geleerd maar in het algemeen niet op basis van inzicht
  vele leerlingen in het voortgezet onderwijs (niet alleen in het mavo) zullen misschien de vroegere aangeleerde algoritmen en automatismen beter begrijpen en dus als zinvoller ervaren
- de leerling in het v.o. zal de noodzaak tot *goed* rekenen beter kunnen inzien nu hij gekonfronteerd wordt met praktische situaties in natuurkunde, economie, etc.
- in de examenopgaven mavo werd (en wordt) gezorgd voor 'mooie' uitkomsten omdat anders de leerling aan het wiskundige aspekt van het vraagstuk nauwelijks toekomt; opvoering en verdieping van de rekenvaardigheid lijkt derhalve allerminst overbodig
- het leren cijferen d.m.v. dressuur is 'wiskunde geweest'; 'wiskundige' spelletjes kunnen misschien nog wel eens wiskunde worden.
  De mavo-leerling lijkt toe te zijn aan het bewandelen van de gulden middenweg

na een speelse introduktie, langs de weg van het inzicht vaardigheid ontwikkelen in het hanteren van getallen.

2 De strategie die gevolgd zou moeten worden bij de ontwikkeling van een leerstofpakket over het gekozen onderwerp was aanvankelijk een zeer duistere zaak.
In de bij het team bekende modellen van leerplanontwikkeling komt het leerstofpakket pas aan de orde als vele andere moeilijke problemen zijn opgelost.
Gelukkig was er het model van Robinsohn, dat weliswaar ook in de gewenste ideale toestand diverse fasen van hoog nivo kent, maar waarin een mogelijkheid aanwezig is om vereenvoudigingen toe te passen.
De door Robinsohn zelf voorgestelde vereenvoudiging d.w.z.:

'analyse van levenssituaties en de daarvoor benodigde funkties en vaststellen van kwalifikaties van die funkties, waarna onderwijsinhouden kunnen worden gekozen,' vervangen door de opstelling van een 'katalogus-van-het-begin',

sprak het team wel aan.
Dat wil uiteraard niet zeggen dat het mavo-ontwikkelteam de noodzaak van een diepgaander procedure zou ontkennen. Integendeel: de totale planning van het onderwijs, uitgaande van wat de bestaande wetenschappen te bieden hebben en aangevuld met bijdragen uit mens- en gedragswetenschappen, lijkt ook voor het mavo-ontwikkelteam een noodzakelijk fundament voor leerplanontwikkeling.
Het ontbreken van voldoende onderwijskundige kennis, het gemis aan verantwoorde analysemethoden en onvoldoende inzicht in procedures en algemene onderwijsdoelen dwingt de 'werker-in-het-veld' tot het hanteren van vereenvoudigde, praktische procedures. Het paper van F. Goffree over 'Het ontwikkelen van een leerstofpakket' n.a.v. Hilda Taba stimuleerde het team om uitgaande van de bestaande situaties aan het werk te gaan, ermee rekening houdend, dat het uiteindelijke resultaat zou moeten worden 'aangepast' aan de algemene onderwijsdoelen.
Dat dit een gevaarlijke situatie is, erkent het team ten volle, wetend echter dat de gehele ontwikkeling van het onderwijs toch steeds mede vanuit de school gevoed dient te worden.

3 We filosoferen hier nog wat over de achtergronden van de uitgewerkte stukjes leerstof.

In de basisschool is het rekenen in de verzameling $\mathbb{N}$ uitvoerig aan de orde geweest. De geleerde rekentechnieken zijn min of meer eigendom van de leerlingen geworden. De verkregen vaardigheid dient in het voortgezet onderwijs op peil gehouden te worden door middel van oefeningen en toepassingen ook op andere terreinen dan die van het pure rekenen.
Daarnaast echter lijkt voor het voortgezet onderwijs een verdieping van het inzicht wenselijk en haalbaar.

Deze verdieping kan op verschillende manieren plaats vinden:

- rekenen in andere talstelsels
- klokrekenen en rekenen modulo *n*
- opsporen van getallenpatronen (deelbaarheid en priemgetallen)
- gebruik van handtelmachines
- het opsporen van strukturen

Om de struktuur van de getallensystemen te kunnen begrijpen heeft de leerling allereerst een goed begrip nodig van het decimale stelsel. In het geheel van notaties in het rekenen is, dunkt ons, het begrip plaatswaarde wel het meest efficiënt gebleken. (Vgl. het Romeinse talstelsel, dat in wezen tientallig is, maar waarin door het ontbreken van het begrip plaatswaarde rekentechnieken onmogelijk zijn.) Door het efficiënt gebruik van de 'plaatswaarde' is het mogelijk om elk getal weer te geven m.b.v. niet meer dan 10 verschillende symbolen, cijfers; een principe met geweldige gevolgen voor de intermenselijke kommunikatie.
Het bestuderen van getallenstelsels met een ander grondtal dan 10 kan voor de leerling verhelderend werken wat betreft de betekenis van plaatswaarde.

Het direkte praktisch nut van het rekenen in andere talstelsels moet overigens betwijfeld worden. Wel kunnen interessante historische ontwikkelingen ter sprake komen als bv. via het 60-tallig stelsel de Babylonische rekenwijze wordt beschouwd.
Over de betekenis van het tweetallig stelsel voor de hedendaagse computertechniek zal weinig misverstand meer bestaan.
Gewaakt moet worden tegen exercitie in andere talstelsels alsof ze doel in zichzelf van een stuk onderwijs zouden zijn.
Wel kan de opbouw van een getallenstelsel geïllustreerd worden door voor verschillende talstelsels een rij getallen te komponeren in tabelvorm:

stelsel	tweetallig	achttallig	tientallig	twaalftallig
symbolen	0,1	0, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, t, e

Het maken van opteltabellen e.d. kan vervolgens een goed middel zijn om het inzicht te verdiepen.

Herleiden van het ene stelsel naar het andere moet beschouwd worden als een niet erg zinvolle luxe, tenzij het vertrouwde tientallige stelsel erbij betrokken is.
Het rekenen met restklassen bv. modulo 5, kan dienen om door middel van zinvol opgebouwde oefeningen de leerlingen te laten kennismaken met een verzameling van dingen waarmee men kan rekenen zonder dat alle bekende regels gelden. Hoever we daarmee in het mavo kunnen gaan is een open vraag. Wel lijkt het duidelijk dat leerlingen geblokkeerd raken in hun denken, als steeds maar systemen worden aangeboden waarin 'alles' klopt. Juist een 'non-voorbeeld' kan soms

net dat duwtje zijn dat nog nodig was om de abstraktie van de begripsvorming te bereiken.

Tenslotte nog een opmerking.
Het is eigenlijk een merkwaardige zaak dat in vele methoden, ook voor de lagere leerjaren allerlei eigenschappen van bewerkingen binnen verzamelingen worden geïllustreerd en soms min of meer bewezen, zonder dat het laatste stapje tot inzicht in de struktuur waar het allemaal om schijnt te gaan, gezet wordt. Zijn we bang dat onze leerlingen 'dichtslaan' zodra de naam 'groep' genoemd wordt, nadat wel alle eigenschappen op een rijtje gezet zijn? In voortgezette studie zullen onze leerlingen regels en wetten voor dergelijke systemen leren opstellen waardoor strukturen op elkaar kunnen worden afgebeeld.
Wat weerhoudt ons er dan van in het mavo desnoods 'man en paard' te noemen?

4 Uiteraard heeft het Mavo-Ontwikkel-Team nagedacht over de toekomst. Hoe kunnen we de aktiviteiten zo zinvol mogelijk maken?
In het kort komen de konklusies hierop neer:

als we weten

- wat we met het wiskunde-onderwijs in het mavo eigenlijk willen
- hoe we de leerlingen op basis van die doelstellingen kunnen motiveren
- hoe we de leraren bij de uitvoering van een en ander kunnen betrekken
- waar we de benodigde tijd en mankracht vandaan kunnen halen,

dan willen we graag de middelen ontwikkelen om voor het wiskunde-onderwijs in het mavo een zodanige verlevendiging tot stand te brengen, dat elke leraar in staat gesteld wordt voor elk van zijn leerlingen een aangepaste weg door het programma uit te stippelen.

Hersenschimmen?
Toekomstmuziek?
Wie weet!

5 Gedurende het schooljaar 1971-1972 bestond het Mavo-Ontwikkel-team uit de volgende leden:

H.C. Arbouw	Postbus 163	Delft
F. Hardewijn	Burg. Meineszlaan 98A	Rotterdam
J.G.M. Pierik	Vuurdoornlaan 6	Zevenaar
W.M.G. Querelle	Tigrisdreef 160	Utrecht
H. van der Spek	Beverodelaan 183	Dieren
H.H. Vanderbroeck	Rome flat 87	Uithoorn
R.H.G. Vet	M. Hobbemastraat 27	Nederhorst den Berg
J.N. Bosman (m.w. IOWO)	P. Potterstraat 3	Arnhem

Didaktiek: theorie en praktijk

'Sag, Freund, was ist denn Theorie? '
'Wenn's stimmen soll und stimmt doch nie.'
'Und was ist Praxis? '
'Frag 'nicht dumm!
Wenn's stimmt und keiner weisz warum.'

Dit is een verslag van de eerste en hopelijk niet laatste studiedagen over didaktiek van de wiskunde, die georganiseerd zijn door de didaktiekkommissie van de NVvW. Ze werden gehouden op 16-17 februari en 6-7 april te Woudschoten bij Zeist.

1 De didaktiekkommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

De didaktiekkommissie is in 1970 door het bestuur van de NVvW ingesteld. De bedoeling was te komen tot een systematisch registreren, analyseren en – zo mogelijk – oplossen van problemen, die te maken hebben met het doceren van wiskunde op scholen voor sekundair onderwijs. Dit houdt in dat de kommissie niet voelt voor ad hoc oplossingen van akute problemen van het wiskundeonderwijs, die een latere ontwikkeling in de weg zouden staan.
Hieruit kan en mag niet worden afgeleid, dat de kommissie zich alleen met de schimmige toekomst wil bezighouden en niet met akute problemen. Het bewijs van het tegendeel is de publikatie 'Voorbeeld van een Lesvoorbereiding' van J. van Dormolen die begin 1973 aan alle leden van de NVvW is toegestuurd.[1]
Het gaat erom dat de kommissie haar werk wil proberen te doen vanuit een visie op een toekomstige ontwikkeling van het wiskunde onderwijs. Daarom heeft zij in 1970 een voorlopig werkplan opgesteld waarvan de hoofdpunten bekend zijn gemaakt in Euclides **46** (1970-1971) p. 8-11 en dat toegelicht is in een paar artikelen van van Dormolen: 'Naar een nieuw onderwijsprogramma voor wiskunde', (Euclides **46** (1970-1971) p. 1-7 en 121-129).

2 Verandering van taktiek

Aanvankelijk lag het in de bedoeling, dat de didaktiekkommissie op gezette tijden, op de één of andere manier rapport zou uitbrengen van haar vorderingen. De vraag was, hoe die rapportage zou moeten gebeuren.
Men voelde niets voor de publikatie van lijsten met doelstellingen, met leerstof, met werkvormen, etc. zonder verdere toelichting. Zulke lijsten zouden aansluiting missen met de praktijk en daarom snel in boekenkasten verdwijnen, nadat ze zouden zijn gelezen.
Veeleer leek een konferentie geschikt, waarbij de praktisch konsekwenties van de resultaten duidelijk gemaakt zouden kunnen worden. Maar ook deze vorm heeft zijn bezwaar, als hij niet terdege is voorbereid, niet wordt geleid door kundig kader en, omdat er bij anderen geen inzicht zou bestaan over doel, vorm en inhoud van zo'n konferentie, maar door een handjevol belangstellenden wordt bezocht.

1 Van deze publikatie zijn voor belangstellenden nog exemplaren beschikbaar. Men kan ze verkrijgen bij Drs J. van Dormolen, Pedagogisch-Didaktisch Instituut voor de Leraarsopleiding, Budapestlaan 6, Utrecht.

3 De Studiedagen

De didaktiekommissie heeft het aangedurft na grondige voorbereiding deze studiedagen te houden. Twee keer zijn een vijftigtal wiskundeleraren van verschillende schooltypen aan de slag geweest om te leren de theorie van de publikatie in praktijk te brengen. Hiertoe waren de deelnemers in vijf groepen verdeeld, die werkten en diskussiëerden o.l.v. gespreksleiders, die goed op de hoogte waren met de publikatie. Elke groep werkte verder autonoom. M.b.v. lesmateriaal, als een puzzel, hoofdstukken uit leerboeken, (proefwerk)vragen over zo'n tekst werd de publikatie gekonkretiseerd.

Ter afwisseling stonden een aantal films en een les op videotape ter beschikking, die volgens het model uit de publikatie waren opgezet. Deze konfrontatie met de praktijk relativeerde het model. Tevens was dit een goede gelegenheid om met elkaar van gedachten te wisselen over de eigen lespraktijk.

Het programma van de studiedagen was als volgt:
A: Analyseren van leerstofordening in de bestaande teksten
B: Analyseren van gewenste leerervaringen van leerlingen bij bestaande teksten
C: Opstellen van lesplannen aan de hand van bestaande teksten
Tussendoor waren er korte plenaire vergaderingen om het voorafgaande na te bespreken of het volgende in te leiden.
Na afloop was tijd ingeruimd om het geheel te evalueren.

A Hier werd geoefend in het herkennen van aan- of afwezigheid van leerfasen (oriënteren – sorteren – abstraktie – expliciteren – verwerken = O-S-A-E-V), bij het leren van nieuwe begrippen, stellingen en algoritmen.
De eerste opdracht luidde: rangschik 20 losse kaarten. De tekst op deze kaarten vormden een eenheid, waarin een wiskundig begrip geleerd werd. De bedoeling was de fasen O-S-A-E-V hierin te herkennen.[2]
Het vervolg van deze puzzel was groepsgewijs te zoeken naar de antwoorden op de volgende vragen bij bestaande teksten.
1 Welke fasen kunt u in de tekst herkennen?
2 Welke fasen zijn verkeerd geplaatst?
3 Welke fasen ontbreken?

Het met elkaar doen – het met elkaar bespreken, waarom de één de grens tussen bijv. oriënteren en sorteren hier trekt, terwijl de ander deze grens vijf regels verder legt, leidt tot een bewustwording van de vraag: 'hoe doe ik dit in mijn lespraktijk? ' Uit de diskussies bleek dat de doelstellingen van de tekstschrijver(s) en van de docent, die met de tekst werkt eerst geformuleerd moeten worden, voordat het mogelijk is de vragen te beantwoorden.

B Getracht werd helderheid te verkrijgen over het verschil tussen doelstellingen gericht en leerstof gericht denken. Bij een lijst met vragen bij een tekst moesten de volgende vragen beantwoord worden.
1 Welke doelen worden er in de vragen getoetst?

2 Een dergelijke opdracht is in dit nummer afgedrukt op pag. 394 e.v.

2 Welke doelen worden niet getoetst, maar hadden wel getoetst kunnen worden?
3 Welke doelen kunnen pas veel later getoetst worden?
4 Welke doelen kunnen niet schriftelijk getoetst worden?

Een voorzichtige konklusie uit de diskussies zou kunnen zijn, dat men wel doelstellingen-gericht wil denken, maar dat men gedwongen wordt (door examendruk, gebrek aan kreativiteit van de docent (?)) leerstof-gericht te werken.

C Een lesplan bestaat uit verschillende komponenten, waarna de komponenten 'doel' en 'leerstofordening' in A en B aan de orde zijn geweest. Van de groepen werd verwacht dat zij deze aspekten in een lesplan konden verwerken. De opdracht luidde:

Probeer een lesplan op te stellen met behulp van een bestaande tekst door:
1 Uw korte termijndoelstellingen (= leerstofdoelen),
2 Uw lange termijndoelstellingen te formuleren,
3 een gedetailleerde leerstofordening te geven.

Een opdracht, waaruit duidelijk bleek, dat je thuis niet in een uurtje een lesplan in elkaar draait. De beschikbare tijd (ongeveer 2 uur) bleek voldoende te zijn om een niet volledig plan op te stellen van een gedeelte van de te behandelen stof.

D Het slot van de studiedagen was er een evaluatieve plenaire vergadering. Enkele opmerkingen uit deze evaluatie waren:
1 De doelstelling van de studiedagen 'vanuit het model lessen te leren voorbereiden' is bereikt.
2 De ervaringen van de studiedagen zullen invloed hebben op het maken van toetsen of proefwerken.
3 De publikatie 'Voorbeeld van een lesvoorbereiding' is een stuk duidelijker geworden.
4 Men heeft gezien hoe een onverwachte lessituatie geanalyseerd kan worden.
5 Het werken in een groep, het samen praten met docenten van een ander(e) school(type), leidt tot een bewustwording van problemen, die niet wezenlijk bleken te verschillen, maar hoogstens gradueel.

Tijdens de slotbijeenkomst kwamen de volgende suggesties voor een vervolg van de studiedagen:
1 Herhaling en uitbreiding van de onderwerpen van de studiedagen.
2 Eén onderwerp thuis grondig voorbereiden en op de studiedagen bespreken b.v. de inhoud van het leerprogramma.
3 Aandacht besteden aan de toetsingsproblematiek.
4 De algemene doelstellingen van het wiskunde onderwijs.

De Redaktie van Euclides verzocht om een verslag.
Hierbij drie kanttekeningen: voor de geïnteresseerden, die op de studiedagen geweest zijn, is dit verslag overbodig, voor de geïnteresseerden, die niet geweest zijn, is het te summier en wij kunnen ons niet voorstellen dat er ongeïnteresseerden zijn.

Francis Meester
Bert Zwaneveld

Meetkunde met vectoren IX[1]
(uitgewerkte opgaven)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Een praktische vraag is uiteraard: hoeveel tijd neemt de behandeling in beslag en welk peil hebben de leerlingen dan bereikt? De klas waarmee ik meetkunde met vectoren behandeld heb, was ouderwets opgevoed. Aan het einde van de vierde klas heb ik een korte inleiding gegeven over verzamelingen, relaties en functies. Zowel het begrip translatie als het begrip vector was nieuw voor de leerlingen. Ik heb dus in de vijfde klas eerst de intuïtieve kennis aangebracht, die een mammoet-leerling reeds heeft als hij in de bovenbouw komt, en heb daarna het programma afgewerkt, waarvan ik in de voorgaande artikelen een overzicht gegeven heb. Daarvoor had ik twee lesuren per week beschikbaar, zowel in klasse 5 als in het begin van klasse 6. Ik heb toen half oktober en half november een proefwerk gegeven. Beide proefwerken bestonden uit twee opgaven. Deze hadden betrekking op cirkel en bol, omdat deze het laatst behandeld waren, maar methodisch hadden ze betrekking op de vectoriële methode in het algemeen.
Hier volgen de opgaven en de uitwerkingen. In de uitwerkingen heb ik getracht duidelijk te doen blijken, wat ik bedoel met het 'vertalen' van meetkundige in vectoriële taal en omgekeerd.

Opgave 1. Gegeven is de bol

$$x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 + x_3^2 + 5 = 0$$

Gevraagd het vlak door de punten $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, dat de bol snijdt volgens een cirkel met straal 1.
Aanwijzing. Bereken eerst de afstand van het vlak en het middelpunt van de bol.

Oplossing. De vergelijking van de bol schrijven we

$$(x_1 - 3)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$$

1 De voorgaande artikelen vindt men in Euclides, **48**, 1-7 en 9.

Het middelpunt van de bol is dus $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, de straal is 2.

De afstand van het vlak en het middelpunt van de bol is dus $\sqrt{3}$.
Nu begint het vertalen.

gevraagd wordt een vlak $\qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4$

het vlak gaat door $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ $\qquad a_1 + 3a_2 = a_4 \qquad (1)$

het vlak gaat door $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad a_1 = a_4 \qquad (2)$

afstand vlak en $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{3}$ $\qquad \dfrac{|2a_1 - a_4|}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}} = \sqrt{3} \qquad (3)$

We moeten nu uit (1), (2), (3) de verhouding van a_1, a_2, a_3, a_4 oplossen.
Dit stelsel is gelijkwaardig met

$$a_2 = 0,\ a_1 = a_4,\ \frac{4a_4^2}{a_3^2 + a_4^2} = 3$$

Zodat we vinden

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sqrt{3} : 0 : 1 : \sqrt{3} \ \text{ v}$$

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sqrt{3} : 0 : -1 : \sqrt{3}$$

Waarmee de beide vlakken gevonden zijn.

Commentaar. Ik vind het van weinig belang te vragen naar een vlak, dat een bol snijdt volgens een cirkel met een bepaalde straal. Op het huidige eindexamen komen dergelijke vragen echter voor. Het overige deel van de opgaaf vind ik erg geschikt: men moet het vertaalprocédé begrijpen, dan is men er; het rekenwerk is eenvoudig.

Opgave 2. Gevraagd de verzameling van de punten in het vlak $x_3 = 0$, waardoor raaklijnen gaan aan de bol

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$$

die evenwijdig zijn aan de lijn

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Oplossing. De richting van de gegeven lijn is

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

(Bijna alle leerlingen lieten hier na de − 1 en 4 door 0 te vervangen).
Uit dit stelsel moeten we de verhouding van x_1, x_2, x_3 oplossen. We vinden

$$x_1 : x_2 : x_3 = -1 : 1 : 1$$

De gevraagde richting is dus

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu volgen we verder de methode, die we steeds volgen bij het opsporen van puntverzamelingen.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ voldoet} \Longleftrightarrow \text{de lijn } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ raakt de bol}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \Longleftrightarrow$$

de vergelijking $(p_1 - \lambda)^2 + (p_2 + \lambda)^2 + \lambda^2 = 4$ met veranderlijke λ

heeft precies 1 wortel $\Longleftrightarrow$

$$(p_1 - p_2)^2 - 3(p_1^2 + p_2^2 - 4) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2 = 6 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ligt op } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 6$$

De gevraagde verzameling is dus

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 6$$
$$x_3 = 0$$

Commentaar. Men maakt wel eens het bezwaar, dat men weliswaar een antwoord vindt, maar uit dit antwoord niet kan teruglezen van wat voor aard de gevonden kromme is. Ik zie hiertegen geen enkel bezwaar. Als het erom gaat een bepaalde denkmethode aan te leren, behoeft men toch niet terug te schrikken voor een

resultaat, waarvan de vertaling in meetkundetaal niet meer lukt. Geheel afgezien nog van het feit, dat met de methode van de analyse, die onze leerlingen ook ter beschikking staat, men zeer goed meer van deze kromme te weten kan komen.
Dit was het eerste proefwerk. De leerlingen vonden het erg moeilijk en de resultaten vond ik slecht. Ik besloot het nog eens te proberen.

Opgave 3. Gevraagd het raakvlak aan de bol

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

door de lijn l

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing. Het vlak gaat door l, is gelijkwaardig met: het vlak gaat door

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(De meeste leerlingen brengen deze vereenvoudiging niet aan en komen dan tot een vergelijking in λ, waaraan elke λ voldoet. Rekentechnisch even eenvoudig, maar van het begrip iets meer eisend.)
Nu is het weer een vertaalsom, te vergelijken met opgave 1.

gevraagd wordt een vlak	$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4$
het vlak gaat door $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$2a_1 = a_4$
het vlak gaat door $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$2a_2 - 2a_3 = a_4$
het vlak raakt de bol	$\dfrac{\lvert a_4\rvert}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}} = 1$

Dit stelsel is gelijkwaardig met

$$a_4 = 2a_1, a_2 = a_1 + a_3, a_1^2 - a_1a_3 - a_3^2 = 0$$

Uit de laatste vergelijking vindt men $a_1 : a_3$, waarna

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

bekend is en de raakvlakken gevonden zijn.

Opgave 4. Gegeven is (in het platte vlak) de cirkel

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Wat is de verzameling van de snijpunten van paren raaklijnen aan deze cirkel, die loodrecht op elkaar staan?
(Voor alle zekerheid expliciet toegevoegd: geen ouderwetse planimetrie gebruiken.)

Oplossing. Kies een punt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ op de cirkel. Roteer dit punt over 90°; het beeldpunt is $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$. De raaklijnen in **p** en **q** aan de cirkel zijn resp.

$$p_1x_1 + p_2x_2 = 1$$
$$-p_2x_2 + p_1x_2 = 1$$

Nu weer de traditionele methode om puntverzamelingen te vinden.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ voldoet $\Longleftrightarrow$

er is een punt **p** op de cirkel zo, dat de raaklijnen in **p** en **q** en de cirkel beide door

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gaan $\Longleftrightarrow$

$$\exists p_1, p_2 : \begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = 1 \\ -p_2x_1 + p_1x_2 = 1 \\ p_1^2 + p_2^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\exists p_1, p_2 : \begin{cases} p_1 = (x_1 + x_2)/(x_1^2 + x_2^2) \\ p_2 = (x_2 - x_1)/(x_1^2 + x_2^2) \\ p_1^2 + p_2^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 \Longleftrightarrow$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

Commentaar. Bij het opgeven van het laatste vraagstuk ben ik onvoorzichtig geweest. Ik had de graad van moeilijkheid onderschat. Het eerste vraagstuk ging wel, maar het tweede ging beslist niet. De oorzaak lag voornamelijk daarin, dat er andere wegen zijn om het te proberen en dat deze tot narigheden aanleiding geven. Men nam twee raaklijnen, stelde de eis, dat deze loodrecht op elkaar staan en kreeg zo te veel parameters.

Conclusie. Ik had de klas nog lang niet op het peil, waarop ik ze graag wilde hebben. Natuurlijk had ik nog een behoorlijke hoeveelheid tijd voor mij. Maar ook op het ogenblik, waarop ik dit schrijf (de kerstvakantie), ben ik nog ver van tevreden. Daar staat tegenover, dat de klas een middelmatige, maar niet slechte gymnasium-B klas is met 22 leerlingen en we in de toekomst het vak zullen geven aan kleine klassen, die speciaal voor wiskunde, natuurkunde of techniek geopteerd hebben.

Ik hoop hiermee een indruk gegeven te hebben van hetgeen ik graag wil bereiken met het onderwijs in meetkunde met vectoren, van de moeilijkheden daarmee verbonden. Naar mijn smaak ben ik nog maar onvoldoende geslaagd ben. De moeilijkheid, waarop ik voornamelijk stuit, is deze. De leerlingen zijn graag bereid om het me te laten uitleggen, ze hebben dan wel belangstelling en begrijpen het wel. Daarmee is het hun nog niet eigen geworden. Om de dingen te doorgronden is het noodzakelijk, dat ze het thuis grondig nagaan en dan niet rusten, voordat zij in hun eentje het begrepen hebben. En deze laatste bereidheid ontbreekt. Met als gevolg, dat ik dezelfde moeilijkheden telkens weer opnieuw moet uitleggen. Waarna het weer zo duidelijk is, dat je het thuis heus niet meer hoeft na te kijken. Enz.

Tot slot wil ik nog samenvatten, wat de principiële dingen zijn, die we bij het maken van opgaven steeds weer tegenkomen.

Ervoor zorgen, dat elke volgende bewering gelijkwaardig is met de vorige,

elimineren,

methode om puntverzamelingen te vinden,

keuze van een geschikt coördinatenstelsel,

oplossen van de verhouding van veranderlijken uit een stelsel homogene vergelijkingen,

het consequent vertalen van de meetkundige gegevens in vectoriële taal, daarna vaststellen wat men met deze gegevens moet doen om de vraag te beantwoorden (dus niet blind rekenen zonder te begrijpen wat de meetkundige zin van het rekenwerk is).

En dan tot slot een punt, wat nog niet aan de orde geweest is. Er wordt vaak over geklaagd, dat weliswaar driedimensionale meetkunde beoefend wordt, maar dat door de gevolgde methode geen stereometrisch inzicht verkregen wordt. Dat zou inderdaad jammer zijn. Het is dus aan te bevelen het rekenwerk steeds van tekeningen vergezeld te laten gaan. Went men de leerlingen hieraan, dan zal men de vraag vanzelf horen: tekent u het eens eventjes, als men vergeet een figuur op het bord te zetten.

Didaktische literatuur
uit buitenlandse tijdschriften

The Mathematical Gazette; 393-397, juni 1971-oktober 1972.

M.J. Ligthill, The art of teaching the art of applying mathematics;
H.B. Williams, A history of teachers of mathematics;
S.N. Collings, The open university;
L.E. Clarke, Down with the mean;
A.J. Moakes, A further note on machine computation for π;
H.S.M. Coxeter, An ancient tragedy;
L. Karlov, On the advance of the perihelia according to special relativity.

R.L. Plackett, The application of the chi-squared test;
J.A. Dunn, Tessellations with pentagons;
L.J. Bowles, Logic diagrams for up to n classes;
D.G. Ball, Squares, triangles and hexagons on pinboards;
A.W. Gilles, Equations and matrices;
J.E. Drummond, Differential equations: is infinity a dirty word?
J. Cameron, Establishing a pecking order;
G.M. Hamilton, Some projections of the hypercube;
R.H. Bromley, Functions and variables, and their differentiation;
J.O. Irwin, Friday 13th.

S.L. Parsonson, Comparison of first year university mathematics syllabuses;
E.M. Williams, Curriculum for the 70's;
P.M. Lawrence, An algebraic approach to some pouring problems;
P.G. Dean, Numerical methods and the computer;
R.P. Burn, The seven points plane;
H. Liebeck, The vector space axiom 1. $v = v$;
J.F. Rigby and J. Wiegold, Non-commutative associative operations, and a non-commutative group structure on the reals.

D.A. Quadling, Exeter;
T. Kiang, An old chinese way of finding the volume of a sphere;
J.D. Baum, An arithmetic method in symbolic logic;
C.J. Lawrance and R. Webster, Stereoscopic scatter diagrams for illustrating population distributions;
R.E. Scraton, On divergent series;
J.A. Dunn and J.E. Pretty, Halving a triangle;
H.R. Corbishley, Improving direct iteration.

B.T. Bellis, Whatever next;
Graham S. Smithers, Early warning, a statistical classroom experiment;
J.H. Mason, Can regular tetrahedra be glued together face to face to form a ring?
J.E. Prussing, A non-relativistic analogy to relativistic time dilatation;
R.L. Goodstein, The fundamental formula in the algebra of sets;
M.L. Cornelius, The transition from school to university mathematics.

Logica en formele theorieën

DR. D. VAN DALEN

Utrecht

De modernisering van het wiskundeonderwijs heeft bij de betrokkenen, leraren zowel als leerlingen, belangstelling voor de logica doen ontstaan. Men hoeft slechts de vaktijdschriften voor didactiek en de huidige schoolboeken na te slaan om daar een indruk van te krijgen.
De logica waar men in het onderwijs mee te maken heeft is de klassieke, tweewaardige logica. Om precies te zijn, dat is de logica die men beoefent aan de hand van de bekende *waarheidstafels.* Deze waarheidstafels vertellen ons hoe de waarheid van samengestelde uitspraken afhangt van de waarheid der onderdelen. Door hun aard zijn de tafels slechts geschikt voor de propositielogica, d.w.z. voor dat deel van de logica dat alleen gebruik maakt van de voegtekens (en andere, daaruit definieerbare voegtekens). De propositielogica is bijzonder belangrijk omdat zij als basis dient voor alle praktische toepassingen, zij is echter niet voldoende voor de praktijk van de wiskunde en andere wetenschappen om de belangrijke reden dat zij geen variabelen kan behandelen. In de propositielogica kan men dus wel redeneringen als 'Als de driehoek gelijkzijdig is, dan zijn alle hoeken gelijk; twee der hoeken zijn verschillend, dus de driehoek is niet gelijkzijdig', maar niet een eenvoudige redenering van de soort 'Als het kwadraat van een geheel getal even is, dan is het getal zelf even; 36 is even, dus 6 is even' rechtvaardigen.
Hoewel dus de waarheidstafels en de propositielogica bijzonder belangrijk en fundamenteel zijn moet men voor toepassingen van de logica in wiskunde (en elders) nog een stapje doen en de z.g. *predicatenlogica* te hulp roepen. Men kan deze situatie vergelijken met de rekenkunde; hoewel de tafels van vermenigvuldiging onontbeerlijk zijn voor de wiskunde, zou het toch niet raadzaam zijn om daar te blijven stilstaan. De propositielogica en de waarheidstafels bieden overigens tal van interessante problemen, die in 2 nader aangestipt zullen worden.
In dit artikel willen wij wat realistische toepassingen van de logica op de wiskunde geven. Uiteraard kunnen wij geen gedetailleerde bewijzen geven, de lezer wordt daarvoor naar de bestaande literatuur verwezen.
Bij de behandeling van de predicatenlogica stuit men op een didactisch, zelfs filosofisch, probleem, nl. hoe de stellingen van de logica te bepalen.

In het geval van de propositielogica doet zich eigenlijk hetzelfde probleem voor, alleen beschikt men daar over de methode der waarheidstafels, zodat men regelrecht kan narekenen of een propositie waar is. D.w.z. er is een combinatorische methode om de waarheid vast te stellen. Strikt genomen zijn er twee onafhankelijke combinatorische methodes in het geval van de propositielogica: 1^e de methode van de waarheidstafels, 2^e de bewijs-methode, d.i. de methode om vast te stellen of een propositie een stelling is, door middel van een bewijs uit axioma's m.b.v. afleidingsregels. De volledigheidsstelling van de propositielogica zegt dat beide methoden hetzelfde resultaat opleveren (zie [1], § 9). Er staan hier twee principieel verschillende methodes tegenover elkaar: de eerste methode maakt gebruik van interpretaties en de tweede methode maakt alleen gebruik van de combinatorische eigenschappen van het bewijsbaarheidsbegrip. De tweede methode ziet dus geheel af van de betekenis en interpretatie der formules. De eerste methode behoort tot het gebied van de modeltheorie en de tweede tot het gebied van de bewijstheorie.
Ook bij de predicatenlogica doet zich dit alternatief voor; een modeltheoretische behandeling of een bewijstheoretische.
Wie wel eens in de handboeken van de logica geneusd heeft weet dat bewijzen, zelfs van simpele stellingen, vaak schrikwekkend lang kunnen zijn en dat de kans op fouten groot is. Om deze reden is het voor elementaire logica verkieslijker om een modeltheoretische behandeling te geven. Ook voor de predicatenlogica geldt de volledigheidsstelling die zegt dat een formule dan en slechts dan waar is als zij bewijsbaar is, dientengevolge verliest men niets door van interpretaties gebruik te maken.
Daarbij komt nog dat juist de toepassingen van de logica in de wiskunde berusten op het interpreteren van uitspraken. U ziet dus, redenen te over om de predicatenlogica van de modeltheoretische kant te benaderen.

1 Interpretatie van de predicatenlogica

Het is verreweg het makkelijkst om de interpretatie van formules van de predicatenlogica te illustreren aan een paar speciale voorbeelden. Het algemene geval levert daarna bij raadpleging van de literatuur weinig moeilijkheden, men zie [1], § 17, § 19.
Als eerste voorbeeld kiezen we de groepentheorie. Deze theorie heeft te maken met een vermenigvuldigingsoperatie, een inverse-operatie en een neutraal element, derhalve beschouwen we een symbolische kunsttaal die hiervoor de symbolen $\cdot$, $^{-1}$ en e bevat. Daarnaast bevat zij tevens het symbool '=' voor de gelijkheid en symbolen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ voor variabelen.
In de eerste plaats voeren wij nu *termen* in, dat zijn taalkundige objecten die later als elementen van groepen geïnterpreteerd zullen worden. Termen zijn die uitdrukkingen die uit de variabelen en e gevormd kunnen worden m.b.v. de operaties $\cdot$ en $^{-1}$. Preciezer gezegd,

(i) e is een term
(ii) $x_0, x_1, x_2, \ldots$ zijn termen
(iii) als t_1 en t_2 termen zijn, dan is $(t_1 \cdot t_2)$ (of kortweg $t_1 t_2$) een term

(iv) als t een term is dan is (t^{-1}) een term
(v) geen uitdrukking is een term tenzij zij het is op grond van (i) – (iv)
Voorbeelden van termen zijn $(e \cdot e)$, $(((e^{-1})^2\, x_3)^{-1})$.

We spreken af dat we haakjes weglaten wanneer dat geen misverstand kan opleveren, de bovenstaande voorbeelden schrijven we dan als ee, $(e^{-1}x_3)^{-1}$.
Nu gaan we over tot het invoeren van uitspraken over termen. De eenvoudigste soort bestaat uit identiteiten van de vorm $t_1 = t_2$, waarin t_1 en t_2 termen zijn. Deze uitspraken of *formules* noemen we *atomen*. Uit de atomen bouwen we ingewikkelder formules op m.b.v. de voegtekens

(i) als A en B formules zijn, dan is $(A \wedge B)$ een formule
(ii) als A en B formules zijn, dan is $(A \vee B)$ een formule
(iii) als A en B formules zijn, dan is $(A \rightarrow B)$ een formule
(iv) als A een formule is, dan is $(\neg A)$ een formule
(v) als A een formule is, dan is $(\forall x_i)\, A$ een formule
(vi) als A een formule is, dan is $(\exists x_i)\, A$ een formule
(i) – (iv) zijn bekend uit de propositielogica, achtereenvolgens de conjunctie (en), disjunctie (of), implicatie (als, dan), negatie (niet). (v) is de universele kwantificatie (voor alle x_i–A), (vi) is de existentiële kwantificatie (er is een x_i zodat A).
Voorbeelden van formules zijn

$$x_1 = (x_0 e)^{-1}, (x_1 = x_7 \rightarrow x_1^{-1} = x_7^{-1}), (\exists x_0)\,(x_0 x_0 = e \wedge x_0 \neq e)$$

$$(\forall x_1)\,(\text{E}\, x_2)\,(x_1 x_2 = e)$$

Waar geen misverstand mogelijk is zullen we weer haakjes weglaten.
Bij interpretatie zullen termen naar elementen van groepen verwijzen. Dit is nogal eenvoudig voor e, de interpretatie van e is natuurlijk het neutrale element. De zaak ligt moeilijker bij termen als x_{27} en $x_3{}^{-1}x_0$, immers de interpretatie van een variabele is niet vastgelegd (ouderwets gezegd: een variabele moet alle waarden kunnen aannemen). We lossen de moeilijkheid op door iedere keer te specificeren welke waarden we kiezen voor de variabelen.

De volgende definitie preciseert dit:
een *bedeling* s bij een groep G is een afbeelding die aan iedere variabele een element van G toevoegt. We definiëren nu de interpretatie van termen onder een bedeling s:

$$< e \mid G, s > = e$$

(het neutrale element van G)

$$< x_i \mid G, s > = s(x_i)$$

(het beeld van x_i onder s, d.i. de gekozen waarde voor x_i)

$$< t_1 \cdot t_2 \mid G \cdot s > = < t_1 \mid G, s > \cdot < t_2 \mid G, s >$$

(de interpretatie van het produkt is het produkt van de interpretaties)

$$< t^{-1} \mid G, s > = < t \mid G, s >^{-1}$$

(de interpretatie van de inverse is de inverse van de interpretatie).

Voorbeeld: Beschouw de (additieve) groep $\mathbb{Z}$ der gehele getallen. Zij

$$s(x_i) = i - 1.$$

Hieronder volgen een aantal termen en hun interpretatie

t	$< t^{-1} \mid \mathbb{Z}, s >$	
e	0	
$(e\,x_3)^{-1}$	$-(0+2)$	$(= \ -2)$
$((x_{15}x_0)(x_2^{-1}\,x_4))^{-1}x_6$	$-((14+(-1))+((-1)+3))+5$	$(= -10)$
$(x_1^6\,x_0)\,x_5$	$((0+0+0+0+0+0)+(-1))+4$	$(= \ \ 3)$
$x_{100}\,x_{100}^{-1}$	$99+(-99)$	$(= \ \ 0)$

Nu we de termen kunnen interpreteren, gaan we ook de formules interpreteren. Het is weer noodzakelijk om bedelingen te gebruiken, omdat anders de interpretatie van formules als $x_0 = x_1$ niet mogelijk is. Een formule wordt geïnterpreteerd als waar of onwaar in een gegeven groep onder een gegeven bedeling. We gebruiken hiervoor de notaties

$G, s \models A$ (A is waar in G onder s)

en

$G, s \not\models A$ (A is niet waar in G onder s)

De waarheid van formules gaat men eenvoudigweg na door de erin voorkomende termen te interpreteren en het resultaat te controleren in G.
In het bovenstaande voorbeeld is $x_2x_3 = x_4$ waar omdat

$$< x_2 \mid \mathbb{Z}, s > + < x_3 \mid \mathbb{Z}, s > = < x_4 \mid \mathbb{Z}, s >$$

$(1 + 2 = 3)$

Dus

$$\mathbb{Z}, s \models x_2x_3 = x_4$$

De algemene definitie luidt,

$$G, s \models t_1 = t_2 \text{ als } < t_1 \mid G, s > = < t_2 \mid G, s >$$

$G, s \models A \wedge B$ als $G, s \models A$ en $G, s \models B$
$G, s \models A \vee B$ als $G, s \models A$ of $G, s \models B$
$G, s \models A \rightarrow B$ als $G, s \models A \Rightarrow G, s \models B$
$G, s \models \neg A$ als $G, s \not\models A$

Zij nu $s(i/a)$ de bedeling s^1 die men uit s als volgt verkrijgt:

$$s^1(x_j) = s(x_j) \text{ als } j \neq i$$
$$s^1(x_i) = a$$

D.w.z. s^1 stemt met s overeen voor $x_j \neq x_i$ maar s^1 geeft aan x_i de waarde a.
$G, s \models (\forall x_i) A$ als voor alle a $G, s(^i/a) \models A$ (d.w.z. we laten x_i door alle mogelijke elementen a interpreteren).
$G, s \models (\exists x_i) A$ als er een a is zodat $G, s(^i/a) \models A$.

Voorbeeld. Neem weer $\mathbb{Z}$ en s als boven.
$\mathbb{Z}, s \models (\exists x_0)(x_0 x_5 = e) \Leftrightarrow$
Er is een a zodat $\mathbb{Z}, s(^0/a) \models x_0 x_5 = e \Leftrightarrow$
Er is een a zodat $a + 4 = 0$
Dit laatste is juist, kies $a = -4$.
$\mathbb{Z}, s \models (\forall x_2)(x_2 x_3 = x_1 \rightarrow x_2 \neq x_0) \Leftrightarrow$
voor alle a $\mathbb{Z}, s(^2/a) \models x_2 x_3 = x_1 \rightarrow x_2 \neq x_0 \Leftrightarrow$
voor alle a $(\mathbb{Z}, s(^2/a) \models x_2 x_3 = x_1 \Rightarrow \mathbb{Z}, s(^2/a) \models x_2 \neq x_0)) \Leftrightarrow$
voor alle a $(a + 2 = 0 \Rightarrow a \neq -1)$

Dit laatste is weer juist.
Met enige oefening ziet men in dat de interpretatie van een formule verkregen wordt door haar in de omgangstaal om te zetten en de juistheid in de gegeven groep te controleren.
We zeggen nu dat een formule waar is in een groep G als hij waar is onder alle bedelingen.
Notatie: $G \models A$ als voor alle s $G, s \models A$
Een formule is (zonder meer) waar in de groepentheorie als hij waar is in alle groepen.
Voorbeeld:

Voorbeeld: $\mathbb{Z} \models x_0 x_1 = x_1 x_0$
($\mathbb{Z}$ is een <u>*commutatieve*</u> groep)

Wij zullen nu nog de theorie van de (partiële) ordening beschouwen. Hiervoor hebben we nodig een taal met symbolen $<$ en $=$ resp. de kleiner- en de gelijkheidsrelatie. Operaties zijn niet nodig. De enige termen die voorkomen zijn variabelen en eventueel constanten $c_0, c_1, c_2 \ldots$
De formules worden zoals boven gevormd uit de atomen

$$t_1 = t_2 \text{ en } t_1 < t_2$$

(waarin t_1, t_2 variabelen of constanten zijn).

De termen en formules worden geïnterpreteerd in een partieel geordende verzameling. We nemen weer als voorbeeld $\mathbb{Z}$, met de gewone ordening. Bedelingen worden als hierboven gedefinieerd. We hoeven alleen de interpretatie van atomen te definiëren, de interpretatie van samengestelde formules is geheel identiek met de hierboven aangegeven interpretatie. Ter onderscheiding van de kleiner-relatie in de gehele getallen van het symbool zullen we voor de notatie van de eerste het teken $\lessdot$ gebruiken.

$\mathbb{Z}$ $, s \models x_i < x_j$ als $s(x_i) \lessdot s(x_j)$
Neem s weer als hierboven: $s(x_i) = i - 1$
voorbeeld: $\mathbb{Z}$ $, s \models x_2 < x_{12}$ want $1 \lessdot 11$
$\mathbb{Z}$ $, s \models (\forall x_0)(\neg x_0 < x_0) \Leftrightarrow$
voor alle a $\mathbb{Z}$ $, s(^0/a) \models (\neg x_0 < x_0) \Leftrightarrow$
voor alle a: niet $a \lessdot a$. Dit is juist
$\mathbb{Z}$ voldoet aan alle axioma's van de partiële ordening, t.w.

$$(\forall x_0)(\forall x_1)(\forall x_2)(x_0 < x_1 \wedge x_1 < x_2 \rightarrow x_0 < x_2)$$

$$(\forall x_0)(\neg x_0 < x_0)$$

en ook nog aan

$$(\forall x_0)(\forall x_1)(x_0 < x_1 \vee x_0 = x_1 \vee x_1 < x_0)$$

D.w.z. $\mathbb{Z}$ is totaal geordend.

De hierboven, voor groepen en partieel geordende verzamelingen aangegeven kunsttaal en bijbehorende interpretatie kan tot willekeurige soorten structuren uitgebreid worden. Analoog worden dan de relaties

$$\underline{A}, s \models P, \underline{A} \models P \text{ en } \models P$$

gedefinieerd. Als $\underline{A} \models P$, dan zeggen we dat $\underline{A}$ een *model* is van P. Formules P met de eigenschap dat ze geen vrije variabelen bevatten (zie [1], p. 49), zijn voor de modeltheorie prettig hanteerbaar. Deze formules, die we *zinnen* noemen, hebben nl. de eigenschap dat hun waarheid onafhankelijk is van de bedeling. Preciezer: als P een zin is en $\underline{A}, s \models P$ geldt voor een zekere s dan geldt $\underline{A}, s \models P$ voor alle bedelingen s.

2 De compactheidsstelling

Het bezitten van een model hangt voor een verzameling Γ van zinnen ten nauwste samen met de consistentie van Γ (d.w.z. het niet strijdig zijn van Γ). Het is algemeen bekend dat men de consistentie van een verzameling zinnen (denk aan axioma's, b.v. van de niet-euclidische meetkunde) aantoont door een model voor de verzameling te geven. Het omgekeerde geldt ook: als Γ consistent is, dan heeft Γ een model (Gödel, Henkin, Beth, e.a.). We vatten dit samen in de *Consistentiestelling:* Een verzameling Γ is dan en slechts dan consistent als zij een model bezit. (Opm. $\underline{A}$ is een model van Γ als $\underline{A}$ voor iedere zin uit Γ een model is.) Het

bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van dit artikel, men raadplege bijv. [3], 4.17, [6] p 51, [5] p 311.
Een direct gevolg van de consistentiestelling is de z.g. *compactheidsstelling,* die zich uitspreekt over het bestaan van modellen: *Een verzameling zinnen* Γ *heeft een model dan en slechts dan als iedere eindige deelverzameling van* Γ *een model heeft.*
Alvorens de stelling te bewijzen merken we een paar dingen op:
(1) De stelling is geheel modeltheoretisch, er wordt niet over bewijsbaarheid gesproken. Er zijn dan ook bewijzen die uitsluitend modeltheoretische hulpmiddelen gebruiken (methode van de ultraprodukten).
(2) De stelling vertoont een sterke analogie met de compactheidseigenschap uit de topologie (Heine-Borel): de doorsnede van een familie gesloten deelverzamelingen is niet leeg, dan en slechts dan als iedere eindige deelfamilie een niet-lege doorsnede heeft. Deze analogie is niet toevallig, in [2] zullen we daar nader op ingaan.
Bewijs van de compactheidsstelling: Als Γ een model A heeft, dan is A ook model voor iedere eindige deelverzameling Δ van Γ. We hoeven dus alleen te bewijzen dat Γ een model heeft als iedere eindige deelverzameling Δ van Γ een model heeft. Stel nu dat Γ geen model heeft, dan is Γ inconsistent volgens de consistentiestelling. D.w.z. dan is er een bewijs van een contradictie, laten we zeggen $P \wedge \neg P$ uit Γ. Zo'n bewijs is een eindig rijtje formules, waarin dus hoogstens eindig veel zinnen $Q_1, \ldots, Q_n$ uit Γ gebruikt worden. Maar dan is $\Delta = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ een eindige inconsistente deelverzameling, die volgens de consistentiestelling geen model heeft. Dit is in tegenspraak met het gegevene, dus heeft Γ wèl een model.
De compactheidsstelling stelt ons in staat om tal van opmerkelijke resultaten in de modeltheorie af te leiden. Het is vooral Abraham Robinson die op ruime schaal van de compactheidsstelling gebruik maakte.
We zullen nu een aantal toepassingen van de compactheidsstelling laten volgen.

3 Het bestaan van oneindige modellen

We beschouwen een willekeurige theorie (desgewenst kan men aan de groepentheorie denken) en de daarbij passende structuren. Wanneer nu een verzameling Γ van zinnen gegeven is kan men zich afvragen of Γ alleen eindige of ook oneindige, of misschien zelfs alleen oneindige modellen heeft. We bedoelen hier met een (on)eindig model een model dat (on)eindig veel elementen heeft. Het blijkt dat we bepaalde axioma's (zinnen) kunnen opschrijven die de eindigheid of oneindigheid van de eventuele modellen ten gevolge hebben.
De nu volgende zin heeft alleen modellen met hoogstens 2 elementen

$$H_2 = (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \vee x = z).$$

Immers de interpretatie van de zin in een model $\underline{A}$ luidt: van elk drietal elementen van $\underline{A}$ zijn er minstens twee identiek.
Als $H_2 \in \Gamma$ dan heeft Γ dus zeker alleen eindige modellen.
(Zoek zelf zinnen $H_3, H_4, \ldots$ die de aantallen elementen beperken tot 3, 4, . . .).

Beschouw nu de zinnen

$$\neg(\exists x)\,P(x,x)$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,[P(x,y)\wedge P(y,z)\rightarrow P(x,z)]$$
$$(\forall x)(\exists y)\,P(x,y)$$

Als $\underline{A}$ een model is van deze zinnen, dan is de interpretatie van P een partiële ordeningsrelatie zonder maximale elementen. Men ziet direct dat $\underline{A}$ dan oneindig moet zijn.
De conjunctie van de bovenstaande drie zinnen heeft dus alleen oneindige modellen.
Wij kunnen nu 3 gevallen onderscheiden:

I Alle modellen zijn eindig
II Alle modellen zijn oneindig
III Er zijn zowel eindige als oneindige modellen.

Het geval I kan nog verfijnd worden zoals blijkt uit de volgende stelling:
Als Γ willekeurig grote eindige modellen heeft, dan heeft Γ oneindige modellen
Bewijs: Beschouw de volgende nieuwe constanten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$ ($i \in \mathrm{N}$) (d.w.z. deze symbolen kwamen nog niet in de taal van de betreffende theorie voor) en voeg aan Γ toe de zinnen $c_i \neq c_j$ (voor $i \neq j$). Het resultaat is Γ'. Het is duidelijk dat een model van Γ' oneindig moet zijn, immers de interpretaties van de constanten c_i zijn onderling verschillend, het model bevat dus een aftelbare deelverzameling. Om aan te tonen dat Γ' een model heeft gebruiken we de conpactheidsstelling.
Zij Δ een eindige deelverzameling van Γ', dan bevat Δ een aantal zinnen van de vorm $c_i \neq c_j$, laten we zeggen

$$c_1 \neq c_2,\ c_2 \neq c_7,\ c_3 \neq c_5 \text{ en } c_1 \neq c_5.$$

We zoeken nu een model voor Δ, en wel een met minstens 5 elementen (2 elementen is eigenlijk al genoeg, waarom?), omdat we dan c_1, c_2, c_3, c_5, c_7 kunnen interpreteren. Het is gegeven dat Γ willekeurig grote eindige modellen heeft, er is dus een model $\underline{A}$ met elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 5$) van Γ. We interpreteren nu $c_1, \ldots, c_5$ als $a_1, \ldots, a_5$, dan is $\underline{A}$ een model van Δ (immers de zinnen van Δ, die niet van de gedaante $c_i \neq c_j$ zijn, behoren tot Γ). Hiermee is aangetoond dat iedere eindige deelverzameling Δ van Γ' een model heeft, derhalve heeft ook Γ' een model. Dit model van Γ' is automatisch een model van Γ, want $\Gamma \subset \Gamma'$, dus Γ heeft een oneindig model.
Uit de zojuist bewezen stelling volgt dat geval I vervangen kan worden door I'.
Er is een getal n zodat alle modellen hoogstens n elementen hebben.

4 Eindigheid is geen elementaire eigenschap

De predicatenlogica die wij hier beschouwen heeft duidelijke beperkingen. In het geval van de groepentheorie kunnen wij bijvoorbeeld niet over ondergroepen, normaaldelers, etc. spreken, omdat de taal alleen variabelen voor elementen bevat (z.g. individu-variabelen). Deze predicatenlogica heet *elementair* of *logica van de eerste orde.* De beperkingen van de elementaire logica hebben merkwaardige consequenties, niet alleen is de uitdrukkingskracht van de taal beperkt, ook zijn er paradoxale gevolgen met betrekking tot definieerbaarheid, het bestaan van modellen, enz. We zullen nu bewijzen dat in een gegeven theorie geen verzameling zinnen Γ aangegeven kan worden, zodat $\underline{A}$ een model van Γ is dan en slechts dan als $\underline{A}$ eindig is. Anders gezegd de eindigheid der modellen kan men niet in een elementaire predicatenlogica karakteriseren. Dit is te merkwaardiger omdat in de wiskunde eindigheid niet moeilijk te karakteriseren is, bijvoorbeeld op de manier van Dedekind.

We bewijzen nu onze bewering met behulp van paragraaf 3. Stel dat Γ een verzameling is met de eigenschap dat $\underline{A}$ een model is van Γ, dan en slechts dan als $\underline{A}$ eindig is, dan heeft Γ willekeurig grote eindige modellen. Volgens 3 heeft Γ dan ook een oneindig model, dit is in strijd met het gegeven. De bedoelde verzameling Γ bestaat dus niet.

5 Een non-standard model voor de axioma's van Peano

Bij de axiomatisering of formalisering van een stuk wiskunde kan men twee tegenovergestelde idealen nastreven. Men kan een axiomastelsel ontwerpen dat op maat gesneden is voor een bepaalde gegeven structuur of men kan een axiomastelsel opstellen dat zoveel mogelijk uiteenlopende structuren als model heeft. Het eerste vindt men bij het stelsel van Peano voor de theorie van de natuurlijke getallen, het tweede bij de groepentheorie. In de informele wiskunde bewijst men zonder veel moeite dat het stelsel van Peano categorisch is, d.w.z. dat elk tweetal modellen isomorf is. Een nadere analyse van dit bewijs toont aan dat het gebruik maakt van kwantificatie over deelverzamelingen, het kan dus niet geformaliseerd worden in de logica van de eerste orde, wèl in de logica van de tweede orde. Dit laatste vindt men in [7], p. 162.

We zullen nu verder gaan dan de erkenning dat de categoriciteit van Peano's stelsel niet bewezen kan worden. We zullen een model aangeven dat niet isomorf is met $\mathbb{N}$. Beschouw de verzameling Γ van alle zinnen P die waar zijn in het standaardmodel $\mathbb{N}$. Voeg nu aan de taal één extra constante c toe en zij

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{c \neq \overline{0}, c \neq \overline{1}, c \neq \overline{2}, \ldots\}$$

($\overline{n}$ is het symbool dat als het natuurlijke getal n geïnterpreteerd wordt).

Bewering: Γ' heeft een model.

Pas de compactheidsstelling toe: laat Δ een eindige deelverzameling van Γ' zijn. Δ bevat een aantal zinnen van de gedaante $c \neq \overline{i}$, laten we zeggen

$$c \neq \overline{0}, c \neq \overline{12}, c \neq \overline{14}, c \neq \overline{371}.$$

We interpreteren nu c in $\mathbb{N}$ door 372, dan is aan $c \neq \bar{0} \ldots c \neq \overline{371}$ voldaan. Ook de overige zinnen van Δ zijn waar in Γ', (omdat ze al in Γ voorkomen), derhalve is $\mathbb{N}$ met de speciale interpretatie van c een model van Δ.
We zien dus dat iedere eindige $\Delta \subset \Gamma'$ een model heeft, daarom heeft Γ' ook een model $\underline{M}$. In $\underline{M}$ komt een element a voor dat de interpretatie is van c en a verschilt van de interpretaties $0^*, 1^*, 2^*, \ldots$ van $0, 1, 2 \ldots$
Stel nu dat f een isomorfisme van $\mathbb{N}$ op $\underline{M}$ is, dan geldt $f(0) = 0^*, f(1) = 1^*, \ldots$ en men ziet direct dat er geen n is met $f(n) = a$. D.w.z. $\mathbb{N}$ en $\underline{M}$ zijn niet isomorf.
$\underline{M}$ voldoet aan alle zinnen waaraan $\mathbb{N}$ voldoet, $\underline{M}$ en $\mathbb{N}$ zijn dus *logisch* niet te onderscheiden, maar wiskundig (d.m.v. isomorfie) wèl. We noemen $\underline{M}$ een non-standaard model. Het bestaan van non-standaard modellen was al bekend aan Skolem (1933).
Het non-standaard model heeft tal van afwijkende eigenschappen, het element a bij voorbeeld is groter dan elke n^*, de ordening is niet-archimedisch, a noemen we oneindig groot. Robinson e.a. hebben m.b.v. non-standaard modellen van uiteenlopende theorieën belangwekkende resultaten geboekt.

6 Iedere partieel geordende verzameling kan totaal geordend worden

Beschouw een partieel geordende verzameling $\underline{A}$, vraag: kan men de $<$-relatie op $\underline{A}$ uitbreiden zodat $\underline{A}$ in een (totaal) geordende verzameling $\underline{A}^*$ overgaat?
Dit probleem is al vroeg opgelost m.b.v. het keuzeaxioma. Een bewijs met Zorn's Lemma is heel voor de hand liggend. We zullen hier een bewijs geven m.b.v. de compactheidsstelling. Eerst voegen we aan de taal van de theorie voor ieder element a van $\underline{A}$ een constante $\bar{a}$ toe en we vormen de verzameling Γ van alle zinnen $\bar{a} < \bar{b}$ en $\bar{a} \neq \bar{b}$ die in $\underline{A}$ gelden:

$$\Gamma = \{\bar{a} < \bar{b} \mid \underline{A} \models \bar{a} < \bar{b}\} \cup \{\bar{a} \neq \bar{b} \mid \underline{A} \models \bar{a} \neq \bar{b}\}$$

Vervolgens beschouwen we $\Gamma' = \Gamma \cup \{(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x)\}$
Een model $\underline{B}$ van Γ' is totaal geordend en de ordening is op isomorfie na een uitbreiding van de pariële ordening op $\underline{A}$, immers, als $\underline{A} \models \bar{a} < \bar{b}$, dan geldt $(\bar{a} < \bar{b}) \in \Gamma'$ en dus $\underline{B} \models \bar{a} < \bar{b}$.
D.w.z. als $a < b$ in $\underline{A}$ geldt en a^*, b^* zijn de interpretaties van $\bar{a}$ en $\bar{b}$ in $\underline{B}$ dan geldt $a^* < b^*$. Het model $\underline{A}$ is dus een deel van model $\underline{B}$ en alles wat we hoeven te doen om $\underline{A}$ totaal te ordenen is het copiëren van de ordening op $\underline{B}$.
Het is dus voldoende om een model van Γ' te vinden. Hiertoe beschouwen we een eindige deelverzameling Δ van Γ'. Δ bestaat uit zinnen $\bar{a} < \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{b}$ en eventueel

$$(\forall x)(\forall y)(x < y \vee x = y \vee y < x).$$

Als de laatste zin niet voorkomt, dan is $\underline{A}$ al een model van Δ. Laat dus deze zin wel voorkomen. Het gezochte model van Δ krijgen we door de partieel geordende verzameling, bestaande uit de a's die in Δ voorkomen, totaal te ordenen. Deze verzameling is eindig en de opgave luidt: geef een totale ordening aan de partieel geordende verzameling

$$\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

De procedure hiervoor is inductief: stel dat $a_1, \ldots, a_i$ al totaal geordend zijn, neem a_{i+1} en plaats a_{i+1} voor (*na*) a_j als $\bar{a}_{i+1} < \bar{a}_j (\bar{a}_j < \bar{a}_{i+1})$ in Δ voorkomt.
Als noch $\bar{a}_{i+1} < \bar{a}_j$, noch $a_j < \bar{a}_{i+1}$ in Δ voorkomen plaats dan a_j voor $\bar{a}_{i+1}$. Op deze manier wordt $\{a_1, \ldots, a_n\}$ totaal geordend.

Hiermee is een model van Δ aangegeven. We mogen nu de compactheidsstelling toepassen: Γ' heeft een model, zoals gevraagd werd.
In het voorgaande zijn een paar toepassingen van de compactheidsstelling gedemonstreerd. Het aantrekkelijke van de methode is dat de redeneringen betrekkelijk eenvoudig zijn en dat voornamelijk enig manipuleren met modellen gevraagd wordt. Dat men toch diepe resultaten, zoals niet karakteriseerbaarheid van de klasse der eindige modellen (of analoog – de wel-ordeningen), krijgt, is bijzonder treffend.
Het punt dat het duidelijkste onderstreept moet worden is, dat men al een heel eind komt in de logica en haar toepassingen door uitsluitend gebruik te maken van de modeltheorie, d.i. van de interpretatie, zonder in te gaan op de techniek van het formele bewijzen. Juist een stelling als de compactheidsstelling demonstreert dat een groot deel van de logica in de wiskundige context met vrucht gebaseerd kan worden op het waarheidsbegrip. Ook didactisch lijkt mij de semantische benadering, via de interpretatie, duidelijke voordelen te hebben boven de technisch, syntactische benadering, zowel inzichtelijk als ook om redenen van efficiëntie en tijdsbesparing.

Literatuur:

1 D. van Dalen, Formele Logica, Utrecht, Oosthoek 1971.
2 D. van Dalen, Propositielogica en mini-modeltheorie, Mathematica & Paedagogia, 18, n. 59, p. 75, 1973.
3 H. Freudenthal, Exacte Logica, Haarlem, Bohn, 1961.
4 P.R. Halmos, Naive Set Theory, Princeton Van Nostrand, 1960 ook in vertaling. Intuïtieve verzamelingenleer, Utrecht, Aula-Boeken, 1968.
5 S.C. Kleene, Mathematical Logic, New York, Wiley, 1966.
6 R.C. Lyndon, Notes on Logic, Princeton, Van Nostrand 1966.
7 J.B. Robbin, Mathematical Logic, New York, Benjamin 1969.

Boekbespreking

K. de Bruin e.a., *Getal en ruimte,* deel 5/6 VI, Analyse en statistiek voor de vijfde en zesde klas V.W.O., Uitg. Tjeenk Willink-Noorduyn.

Dit deel geeft uitbreiding en verdieping van de analyse stof, die reeds aan de orde is geweest in deel 4/5 V.O.
De hoofdstukken I en II geven een uitstekende herhaling van een flink gedeelte der onderbouwstof. Mede door de overzichtelijke opbouw leent het zich zeer goed voor zelfstudie.
Ik heb bewondering voor de wijze, waarop gepoogd wordt in een aantal kleine stappen de leerling te brengen tot inzicht in moeilijke begrippen. Ten duidelijkste geldt dit voor de hoofdstukken over continuïteit en limieten.
De twee hoofdstukken aan het slot geven een eerste inleiding in de kansrekening.
De resterende stof voor wiskunde I zal verschijnen in deel 5/6 V2 van deze serie.
Wij mogen verwachten dat, als dit deel dezelfde kwaliteiten vertoont als het besproken deel, docent en leerling met vrucht uit deze boeken zullen werken.

L.J.M. v.d. Zijden

Prof. Dr. Herbert Meschkowski e.a., *Meyers Handbuch über die Mathematik,* 2. ern. Auflage, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, Prijs DM 36

Deze nieuw bewerkte uitgave kwam tot stand naar aanleiding van de invoering der moderne wiskunde op de scholen. De bedoeling is een voor vele leesbare inleiding in de wiskunde te geven. Men wil leraren van elk niveau helpen met de nieuwe denkwijzen vertrouwd te geraken.
Deel A geeft in 150 bladzijden een ook voor ernstige leken verstaanbare inleiding in de verzamelingenleer, de logica, het getalbegrip tot en met complexe getallen en structuren. In tegenstelling tot de volgende delen is hier over het algemeen sprake van een deductieve behandeling.
Deel B geeft in 490 blz. hoofdstukjes Euclidische meetk., analytische meetkunde en lineaire algebra, differentiaal- en integraalrekening en toegepaste wiskunde; dit laatste houdt in principes van de numerieke wiskunde, statistiek en computerwiskunde. De behandeling van deze onderwerpen is in wiskundig opzicht summier. De grote lijnen worden helder aangegeven, bewijzen van stellingen treft men nauwelijks aan.
Dit geldt nog sterker voor deel C waar alleen gepoogd wordt de lezer een beeld te geven van de inhoud en de betekenis van enkele speciale onderwerpen. Deze zijn: getaltheorie, klassieke algebra, differentiaalvergelijkingen, functietheorie, topologie, functie-analyse, waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek, informatietheorie, lineair programmeren, theorie der oneindige verzamelingen. Deel C omvat ongeveer 270 pagina's.
Een wiskundig woordenboek van 300 bladzijden besluit dit lijvige werk, waarvan de prijs beslist laag te noemen is.

L.J.M. v.d. Zijden

Kingman, J.F.C., *Regenerative Phenomena,* John Wiley & Sons, New York etc., 1972, XII + 190 p., prijs $ 5.–.

Dit boek, dat verschijnt in de serie: 'Tracts on Probability and Statistics', is bestemd voor degenen die onderzoek verrichten op het gebied van de Markov ketens. Het is ook toegankelijk voor hen, die een redelijke kennis van maattheorie en waarschijnlijkheidsrekening bezitten. Het bevat veel resultaten, die de auteur de laatste tien jaar op dit gebied gepubliceerd heeft. Daarom is dit boekje een welkome aanwinst.

J.L. Mijnheer

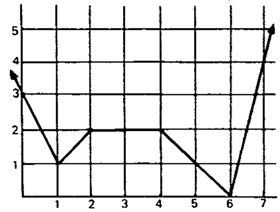
Ontvangen boeken

Sterregids 1973, Wolters-Noordhoff, Groningen 68 blz. *f* 11,–
H.J. Jacobs e.a., *Moderne Wiskunde,* Wolters-Noordhoff, Groningen 1972, deel 2 voor de brugklas, 3e herziene druk, 246 blz. *f* 11,90.
Chr. Boermeester e.a., *Van A tot Z,* deel 1b, 4e geheel herziene druk, Muusses, Purmerend, 1972, 157 blz., *f* 9,50.

Legpuzzel

In aansluiting op het artikel over leerstofordening (Euclides **48**, 1972-73, januarinummer) volgt hier een stuk van een les. Jammer genoeg zijn de gedeelten door elkaar geraakt. Aan u de taak de stukken A tot en met Z in een goede volgorde te zetten. (Let op het onbepaald lidwoord: als u voor uzelf kunt motiveren waarom u de door u gekozen volgorde neemt, hoeft u niet meer naar een andere te zoeken.)
U kunt de blanco-stukken gebruiken als joker: doe ze ertussen als u het nodig vindt. Maak eventueel zelf nog jokers erbij. De bladzijden 397 en 400 zijn blanco gelaten om u gelegenheid te geven, zonder beschadiging van andere teksten uit te knippen. In het volgende nummer van Euclides komt mijn oplossing. Of liever: komt de volgorde waarin ik de stukken geschreven heb vóór ik ze door elkaar gooide.

J. van Dormolen

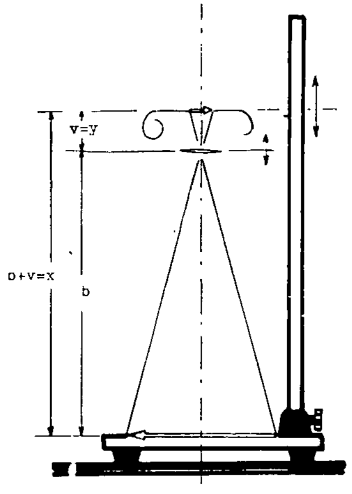
A $g(73 + \sqrt{6}) = f(\quad)$	B Gegeven zijn de functies $f: x \to (x+3)^2 + 2$ en $g: x \to x^2 + 2$. Vul in: De grafiek van f ontstaat uit die van g door deze over een afstand 3 naar .... te verschuiven.	C 
D Gegeven zijn de functies $f: x \to x^2 + 2$ en $g: x \to x^2 + 6x + 11$. De grafiek van g ontstaat uit die van f door deze over een afstand .... naar .... te schuiven.	E De nieuwe grafiek is de grafiek van een functie, die we g zullen noemen.	F $g(685) = f(\quad)$ $g(5) = f(\quad)$ $g(0) = f(\quad)$ $g(-\sqrt{6}) = f(\quad)$
G De cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 + 5x - 3y = 0$ wordt horizontaal verschoven tot het middelpunt op de y-as komt. In welke richting, over welke afstand? Vergelijking?	H $g(0 + \sqrt{6}) = \cdots$ $g(1 + \sqrt{6}) = \cdots$ $g(2 + \sqrt{6}) = \cdots$ $g(3 + \sqrt{6}) = \cdots$ $g(4 + \sqrt{6}) = \cdots$ $g(5 + \sqrt{6}) = \cdots$	I Teken de grafiek van f over in je schrift. Teken in dezelfde figuur een grafiek die uit die van f ontstaat door deze over een afstand $\sqrt{6}$ naar rechts te verschuiven. ($\sqrt{6} \approx 2{,}45$)
J $g(a + 2\sqrt{6}) = f(\quad)$ $g(a + 8\sqrt{6} + 3\sqrt{3}) =$ $f(\quad)$	K $g(a + \sqrt{6}) = f(\quad)$	L Een lijn met vergelijking $3x + 5y - 7 = 0$ wordt over een afstand 2 naar rechts verschoven. Wat is de nieuwe vergelijking?
M Wat was ook al weer de bedoeling van deze les?	N Gegeven zijn de functies $f: x \to (x-3)^2 + 2$ en $g: x \to x^2 + 2$. De grafiek van f ontstaat uit	O Als je de grafiek van f over een afstand $\sqrt{6}$ naar *rechts* verschuift ontstaat de grafiek van de functie $g: x \to f(\quad)$.

P $f(0) = \ldots.$ $f(4) = \ldots.$ $f(1) = \ldots.$ $f(5) = \ldots.$ $f(2) = \ldots.$ $f(6) = \ldots.$ $f(3) = \ldots.$ $f(7) = \ldots.$	Q $g(3+\sqrt{6}) = f(\quad)$ $g(4+\sqrt{6}) = f(\quad)$ $g(5+\sqrt{6}) = f(\quad)$ $g(6+\sqrt{6}) = f(\quad)$ $g(7+\sqrt{6}) = f(\quad)$	R Gegeven zijn de functies $f: x \to \sin x$ en $g: x \to \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$. De grafiek van .... ontstaat uit die van .... door deze over een afstand .... naar *rechts* te verschuiven.
S Doe een mededeling over de grafieken van $f: x \to \sin x$ en $g: x \to \cos(x + \frac{3}{4}\pi)$	T Als je alles te weten kunt komen van de functie f, dan kun je $g(x)$ berekenen omdat je weet dat $g(x) = f(\quad)$	U ALS JE DE GRAFIEK VAN EEN FUNCTIE F OVER EEN AFSTAND a NAAR *RECHTS* VERSCHUIFT ONTSTAAT DE GRAFIEK VAN DE FUNCTIE $G: x \to$
V Als je de grafiek van de functie f over een afstand $\sqrt{3}$ naar rechts verschuift, ontstaat de grafiek van de functie $h: x \to f(\quad)$	W We gaan uit gegeven functies nieuwe maken, door hun grafiek op een bepaalde manier te verschuiven.	X Hier staat de grafiek van een functie, die we gemakshalve f noemen.
Y Als je alles te weten kunt komen over de functie f, dan kun je $g(21\frac{3}{4})$ berekenen, omdat je weet dat $g(21\frac{3}{4}) = f(\quad)$	Z Jammer, nu gaat de bel.	

Een hyperbool in een vergrotingstoestel

IR. H. MULDER
Aruba

Men kan foto's afdrukken met een vergrotingsapparaat. De werking ervan is gelijk aan die van een dia-projector.



Door de afstand van negatief tot scherm te veranderen, kan men een andere mate van vergroting bereiken. Tevens moet dan nog, om scherpstelling te verkrijgen, de afstand van lens tot negatief aangepast worden.
Dit geschiedt dan, zoals bij een projector, door de lens een beetje te verstellen.

Immers de formule

$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ moet gelden.

Er dringen zich twee interessante vragen op:

1. ontwerp op de verticale kolom een vergrotingsschaal
2. koppel de beide verplaatsingsmechanismen aan elkaar zodat een automatisch toestel ontstaat.

De afstand van negatief tot grondplaat (scherm), gekozen in verband met de gewenste vergroting, is de onafhankelijke veranderlijke $(b + v)$ en de daarbij aangepaste afstand van negatief tot lens de afhankelijke veranderlijke (v).
Zoals we meestal zeggen: y is afhankelijk van x, is hier (v) afhankelijk van $(b + v)$.
Vanwege de gewoonte zullen we hier dan ook
$(b + v) = x$ stellen
en $v = y$.
We gaan uit van een lens met $f = 5$ cm.

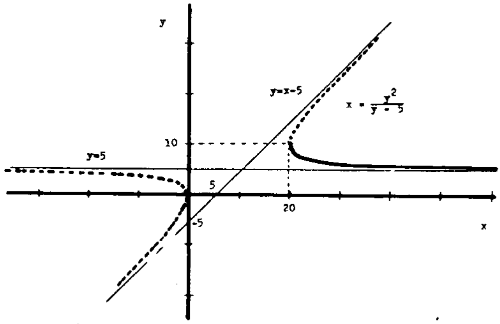
$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$ wordt zodoende $\frac{1}{y} + \frac{1}{x - y} = \frac{1}{5}$

ofwel $5x = xy - y^2$ of $x = \frac{y^2}{y - 5}$

De vergroting volgt uit $n = \frac{b}{v}$ of $n = \frac{x-y}{y}$

waaruit weer volgt $x = y\,(n + 1)$

De grafiek van $x = \frac{y^2}{y-5}$ is een hyperbool met horizontale asymptoot $y = 5$ en scheve asymptoot $y = x - 5$.
Van deze hyperbool is maar een klein gedeelte bruikbaar.
We kunnen alleen positieve x-waarden gebruiken, zodat alleen de rechter tak geldig is.
Deze tak heeft een minimumwaarde voor x bij $x = 20$ en $y = 10$. Dit is optisch gezien een interessant punt.

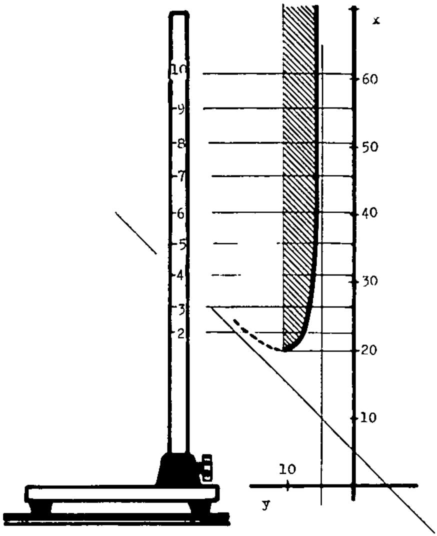


De vergroting is daar 1 (immers hier geldt $b = v = 10$ cm). Het vergrotingsapparaat geeft geen verkleinde beelden, zodat alleen het onderste deel van de rechtertak bruikbaar is.
We gaan nu de grafiek nader analyseren en proberen tot praktische conclusies voor de fabricage van het apparaat te komen.
Uit de genoemde formules volgen de waarden in de nu volgende tabel. We bezien de vergrotingswaarden n van 2 maal tot 10 maal.

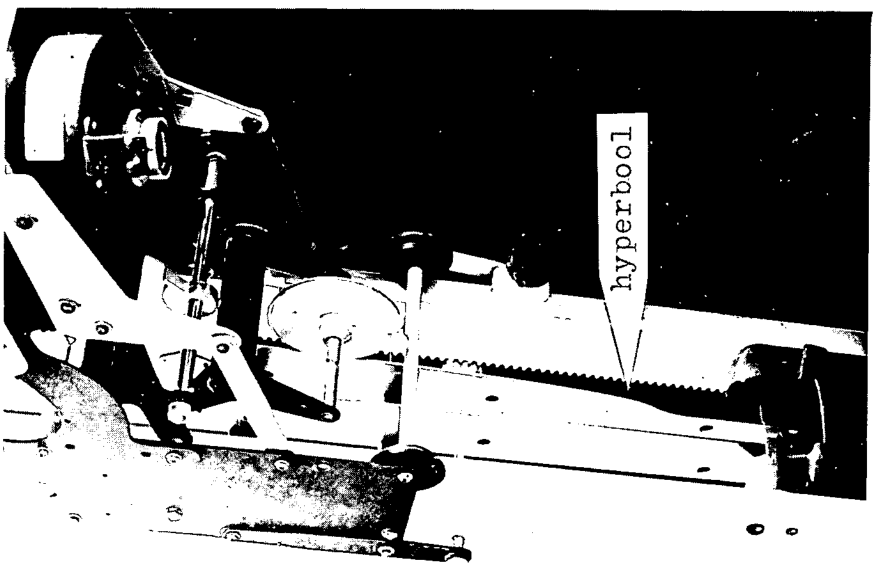
n	v of y	b	$(b + v)$ of x
1	10 cm	10 cm	20 cm
2	7,50	15	22,50
3	6,67	20	26,67
4	6,25	25	31,25
5	6	30	36
6	5,83	35	40,83
7	5,71	40	45,71
8	5,62	45	50,62
9	5,55	50	55,55
10	5,50	55	60,50

Hier is dus af te lezen, hoe bij elke n, waarden van b en v behoren.
Allereerst is het voor ons belangrijk te weten, hoe $(b + v)$ afhangt van n, want dan weten we hoe hoog we het negatief tegen de kolom moeten plaatsen.
Er is nu een schaalverdeling te ontwerpen, die direct op de kolom is aan te brengen voor vergroting van 2 maal tot 10 maal.
We zien hieruit ook dat de kolom nu minstens 60,5 cm hoog moet worden, laten we zeggen 70 cm. Langs de x-as in de grafiektak is deze schaal aangegeven. Omdat de kolom verticaal staat is in de grafiek de x-as ook verticaal gezet.

Ons tweede probleem is het koppelen van de beide verschuivingsmechanismen.
Bij vergroting 2 maal vonden we $y = 7\frac{1}{2}$ cm
en bij 10 maal $y = 5\frac{1}{2}$ cm



De lens moet over dit interval dus nog maximaal 2 cm verstelbaar zijn.
De oplossing voor het mechaniek is deze, dat langs de kolom een rail gemonteerd is met een profiel overeenkomstig het genoemde deel van de hyperbool. Daarlangs rijdt een wieltje dat met een hefboom de lens opdrukt, die bij $n = 2$ op 7½ cm van de film staat, zodat in de hoogste stand (bij $n = 10$) de afstand tot 5½ cm verkleind wordt.



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Evenals vorige jaren organiseert de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren voor alle belangstellenden forumbesprekingen van eindexamens voor vwo, havo en mavo aan de hand van de eindexamens 1973.
Op 15 september 1973 is er een bijeenkomst in Utrecht, Transitorium I van het Universiteitscentrum 'De Uithof'.
Voor havo en vwo van 13.30-17.00 uur gezamenlijk en
voor mavo van 13.30-17.00 in een aparte bijeenkomst.

Voor het mavo zullen er ook regionale bijeenkomsten worden georganiseerd en wel te

Leeuwarden 29-9	Arnhem datum?	den Haag 22-9	Venlo 17-9
Assen datum?	Utrecht 15-9	Bergen op Zoom datum?	Geleen 28-9
Hengelo datum?	Haarlem 22-9	Tilburg datum?	

In samenwerking met de inspectie worden voor havo en vwo voorlichtingsbijeenkomsten gehouden te Zwolle (28 sept), Rotterdam (28 sept), Eindhoven (5 okt) en Haarlem (5 okt), alle van 15.00-17.30 uur.
Deze worden speciaal belegd voor het beantwoorden van vragen over de omvang van de wiskundestof en de organisatie van schoolonderzoek en eindexamen 1974.

Nadere gegevens volgen in Euclides, in het Weekblad en in een schrijven aan alle betreffende scholen.

De jaarvergadering van de Vereniging is vastgesteld op zaterdag 27 oktober te Utrecht.

14e Internationale post-universitaire cursussen

Deze cursussen worden van maandag 20 tot en met vrijdag 24 augustus a.s. gehouden in de Rijksuniversiteit te Gent – België.

Het doel van deze – sedert 1960 georganiseerde – cursussen is docenten van het niet-universitair onderwijs op de hoogte te houden van wetenschappelijke vorderingen. Er zijn vier secties: wiskunde, natuurkunde, biologie en scheikunde.

Het programma voor de wiskunde heeft als thema 'Wiskundige logica' en vermeldt de cursussen:
Prof. Dr. J. Drabbe (Brussel)
Formalisation
Dr. C. Manet (Brussel)
Diagrammes
Dr. D. van Dalen (Utrecht)
First order logic and model theory
Prof. Dr. M. Boffa (Brussel)
Théorie des ensembles
Prof. Dr. E. Specker (Zürich)
Fonctions recursives
Prof. Dr. P. Wilker (Bern)
Arithmetik und Geometrie im Lichte mathematischer Logik
Die Modelle von Skolem und Tarski zur elementaren Arithmetik (Peano) und zur Geometrie (Hilbert)

Men kan aanmeldingsformulieren en het volledige programma aanvragen bij de heer P. Mispelter, Rijksadministratief Centrum, Wijk Arcaden, Bur 3065, 1010 Brussel, België.

De kosten bedragen 100 BFrs. voor de inschrijving; verder 180 BFrs. per nacht voor logies en ontbijt en 60 BFrs. voor elke maaltijd.

Buiten het cursusprogramma zijn er bezoeken aan Gent en Brugge en andere manifestaties. We bevelen de cursus gaarne aan. De post-universitaire cursussen zijn steeds een trefpunt van vele docenten uit verschillende landen.

Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs

CURSUSSEN VOOR LERAREN

Het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs organiseert in het cursusjaar 1973/'74 de navolgende cursussen voor wiskundeleraren 1e en 2e graad.

I *Meerdaagse cursussen:*

1.1	Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek	27, 28, 29 aug. '73	Utrecht
1.2	Toegepaste Analyse (herh.)	25, 26, 27 okt. '73	Amsterdam
1.3	Numerieke Wiskunde	7, 8, 9 jan. '74	Eindhoven

In dit verband verwijst het I.O.W.O. gaarne naar de cursussen didaktiek der wiskunde onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskunde Leraren (zie toelichting 1.4.)

II *Middagcursussen:*

2.1	Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek	10 donderdagmiddagen 16.00 - 18.15 uur
2.2	Numerieke Wiskunde	5 woensdagmiddagen 16.00 - 18.00 uur

III *Middagbijeenkomsten keuzevak Wiskunde-II:*

3.1	Complexe Getallen	29 okt. '73 (en evt. feb. '74)
3.2	Projectieve Meetkunde	14 sep. '73 (en evt. feb. '74)
3.3	Topologie	24 okt. '73 (en evt. feb. '74)

Toelichting:

1.1
De cursus is een inleiding in de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Als leidraad zal dienen het boek 'Introductional Mathematical Statistics' van E. Kreiszig. Theorie uit dit boek zal in colleges worden toegelicht en de vraagstukken hieruit komen in praktica ter sprake. Deze cursus is speciaal bedoeld voor leraren, die onderwijs gaan geven in de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek en die op dit terrein over geen of weinig vakkennis beschikken. Het te gebruiken boek kost ± *f* 35,–, maar kan door een gezamenlijke bestelling tegen een gereduceerde prijs van *f* 30,– aan de cursisten geleverd worden.
Na het volgen van deze cursus kunt u zich eventueel in cursus 2.1 nader oriënteren in het onderwijs in de w. en s.

1.2
Onderwerpen uit de analyse die in de leerstof van de hogere klassen van v.w.o. voorkomen volgens het nieuwe programma, zullen worden behandeld vanuit twee gezichtspunten:
enerzijds zal de stof 'uit een hoger standpunt' worden bezien, om de leraren een bredere achtergrond te verschaffen, anderzijds zal speciale aandacht worden besteed aan de toepassingen en de toepasbaarheid van de stof, hetgeen in het onderwijs van nut kan zijn om de leerling beter te motiveren. Hoofdzakelijk zullen differentiaalvergelijkingen in beschouwing worden genomen.

1.3
Deze cursus beoogt een inleiding te zijn in enkele numerieke oplossingsmethoden, speciaal die welke geschikt kunnen worden gemaakt voor een behandeling in het keuzeonderwerp Numerieke Wiskunde binnen Wiskunde-II. In deze cursus zal geen aandacht worden geschonken aan

het programmeren van de oplossingsmethoden voor een computer. Dit laatste zal wel in cursus 2.2 worden opgenomen.

1.4
In nr 5 van de 48e jaargang van Euclides (januari nr. '73/'73) geeft drs. J. van Dormolen zijn zienswijze op de lesvoorbereiding van de wiskundeleraar.
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren verzorgt hierover in een conferentieoord:
a Een *vervolg*cursus 'Didaktiek der Wiskunde' op 15, 16, 17 oktober 1973
b Een *aanvangs*cursus 'Didaktiek der Wiskunde' op 16, 17 november 1973

Kandidaten voor de vervolgcursus, die reeds eerder aan een aanvangscursus deelnamen, worden persoonlijk door de vereniging aangeschreven. De aanvangscursus staat open voor wiskunde-leraren 3e, 2e en 1e graad. Daar het I.O.W.O. de organisatie van deze cursussen verzorgt, wordt u verzocht ook uw groene inschrijfformulier aan het I.O.W.O. toe te zenden. Omdat voor het welslagen van cursus b maximaal 50 deelnemers kunnen worden toegelaten, wordt deze cursus bij grote inschrijving in 1974 herhaald.

2.1
Op de middagcursussen waarschijnlijkheidsrekening en statistiek staat de behandeling van de herziene leerlingentekst 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek voor het v.w.o.', uitgave I.O.W.O. centraal. De simultaan met deze leerlingentekst te verschijnen 'Kanttekeningen' geven met de daarbij te gebruiken transparanten een wezenlijke bijdrage tot de voorbereiding van de lessen waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Mocht u aan deze cursus willen deelnemen en bent u niet of nauwelijks thuis in de w. en s., dan adviseren wij u eerst de cursus 1.1 te volgen.
De cursussen worden gehouden op donderdagmiddagen van 16.00 - 18.15 uur, op de data 20/9, 27/9, 4/10, 25/10, 1/11, 8/11, 22/11, 29/11, 13/12 en 20/12.
De cursusplaatsen worden bepaald aan de hand van de inschrijvingen. Materiaalkosten zullen u in rekening worden gebracht.

2.2
De cursisten van de cursus 'Numerieke Wiskunde' (zie 1.3) worden in deze voortgezette cursus in de gelegenheid gesteld de theorie van de cursus in praktijk te beoefenen met behulp van de computer. Enige bedrevenheid in het programmeren strekt hierbij tot aanbeveling, maar is geen noodzakelijke voorwaarde voor het kunnen volgen van deze cursus. Aan de hand van een te zijner tijd te publiceren leerlingentekst zal ook veel aandacht worden besteed aan de didaktiek van het keuzevak 'Numerieke Wiskunde'.
Een van de cursussen wordt gehouden in Utrecht op woensdagmiddag van 16.00 - 18.00 uur op de data 23/1, 6/2, 20/2, 6/3 en 20/3 1974.
Andere cursusplaatsen worden bepaald aan de hand van de inschrijvingen.

3
Ter begeleiding van de leraren die een der genoemde onderwerpen in keuzevak wiskunde-II behandelen in het seizoen 1973/'74 worden deze bijeenkomsten belegd. In principe zijn de bijeenkomsten bestemd voor *uitwisseling van ervaringen*, voor het stellen van (achtergrond-)vragen. De auteurs van de betrokken teksten zullen aanwezig zijn.
Afhankelijk van de belangstelling zal eventueel een tweede respektievelijk derde middag worden belegd.
N.B. De leraren die tijdens keuzevak wiskunde-II statistiek behandelen, worden verwezen naar de cursus 2.1.

Behalve de bovengenoemde produktiekosten van de uit te reiken teksten zullen de deelnemers geen kosten in rekening worden gebracht. Kosten van gemaakte reizen per openbaar vervoer (tweede klas) worden vergoed.

Aanmeldingsformulieren worden naar de scholen van het voortgezet onderwijs verstuurd. Ook zijn zij op telefonische aanvraag te verkrijgen bij het I.O.W.O., tel. 030-611611 tst. 48.

De formulieren voor deelname moeten vóór 15 juni 1973 aan het secretariaat van het Instituut, Tiberdreef 4, Utrecht/Overvecht worden toegestuurd, ten name van mejuffrouw I.C. Leenstra.

De Minister van Onderwijs heeft ons gemachtigd mededeling te doen van het feit, dat hij evenals in voorgaande jaren de schoolleiding aanbeveelt wiskundeleraren de gelegenheid te bieden één of meer cursussen te volgen en dat hij eventueel benodigd buitengewoon verlof voor het bijwonen van een meerdaagse cursus goedkeurt, indien niet op andere wijze b.v. door roosterverschuivingen, in de lessen kan worden voorzien.

In een dergelijk geval dient het buitengewoon verlof ex. 1-C7 van het RPB-WVO door het bevoegd gezag te worden aangevraagd bij de Directie Onderwijsvernieuwing en Planning van het departement, met vermelding van de reden waarom omzetting van het lesrooster niet mogelijk is.

Namens het
Instituut Ontwikkeling
Wiskunde Onderwijs

Drs. E.J. Wijdeveld,
Algemeen Directeur.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

296 Houdt men een dobbelsteen in een willekeurige stand, dan kan men één, twee of drie zijvlakken zien. Het aantal ogen dat men ziet, is dan minimaal 1 en maximaal 15. Kan men alle tussengelegen aantallen te zien krijgen?
Op welk aantal ogen is de kans maximaal? (mevr. B.C. Dijkstra-Kluyver)

297 Neem een positief geheel getal en schrijf dit tientallig, b.v. 96. De som van de kwadraten van 9 en 6 is 117. De som van de kwadraten van 1, 1 en 7 is 51. Zo voortgaande vinden we

96, 117, 51, 26, 40, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16 . . . .

en nu repeteert het. We monden dus uit in een cyclus van acht getallen.
Dit is niet altijd het geval. Zo levert 13:

13, 10, 1, 1 . . .

dus tenslotte een serie van louter 1'en.
Zijn er nog andere mogelijkheden? Zo ja, welke? Zo neen, waarom niet? (Drs J. van Dormolen)

Oplossingen

294 Een quadrille die aan de vraag voldoet, is

```
0   0 – 5   5 – 3   3 – 6   6
|                           |
0   0   5   5   3   3   6   6
    |   |   |   |   |   |
    6   6   1   1   2   2

    6   6   1   1   2   2
    |   |   |   |   |   |
1   1   4   4   0   0   5   5
|                           |
1   1   4   4   0   0   5   5
    |   |   |   |   |   |
    2   2   3   3   4   4
    2 – 2   3 – 3   4 – 4
```

295 Een magisch kwadraat dat aan de gestelde eis voldoet, is

5-5	3-0	1-5	2-2	3-4
1-1	2-3	5-3	6-5	0-4
3-6	6-6	0-0	1-2	4-2
0-1	1-3	5-2	6-4	4-4
6-2	3-3	4-5	0-2	4-1

Dit kwadraat heeft nog de extra bijzonderheid dat de tien kolommen halve stenen ook gelijke sommen hebben
Voor een toelichting op de oplossingen verwijs ik naar het in het vorige nummer gerecenseerde boek van Ir. Leeflang.

INHOUD