Euclides

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

Rapport Nomenclatuurcommissie

48e jaargang
1972/1973
no 8
april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-130785.

Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 200,—, $^1/_2$ pag. *f* 110,— en $^1/_4$ pag. *f* 60,—.

Eindrapport Nomenclatuurcommissie

1 Inleiding

Het nieuwe wiskundeprogramma heeft grote veranderingen veroorzaakt in de wiskundige nomenclatuur die bij het voortgezet onderwijs gebruikt wordt. Het is gewenst dat we trachten tot eenheid te komen ten aanzien van het gebruik van termen en symbolen. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft daarom een commissie voorgesteld met de opdracht de eenheid tot stand te helpen brengen. Deze nomenclatuurcommissie vergaderde voor het eerst op 19 februari 1970. Velen zullen vinden dat de commissie eerder geconstitueerd had moeten worden. Dit is met opzet niet gebeurd. Wil men in staat zijn advies uit te brengen betreffende te volgen nomenclatuur, dan zal men eerst met het nieuwe programma de nodige onderwijservaring moeten opdoen. Vandaar dat de commissie betrekkelijk laat ingesteld is. De werkzaamheden var de commissie werden afgesloten op 24 januari 1973.
Het doel dat ons bij de werkzaamheden voor ogen stond, is te komen tot aanbevelingen betreffende gebruik van bepaalde termen en symbolen. Meer doen dan aanbevelen kunnen we natuurlijk niet. Wel hopen we echter dat de auteurs van schoolboeken met onze aanbevelingen rekening zullen houden bij het samenstellen van kopij voor herdrukken. Zij zouden daardoor een belangrijke bijdrage leveren tot het verkrijgen van eenheid in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Verder hopen we dat de inspectie bij het redigeren van eindexamenopgaven weer rekening zal willen houden met de adviezen van de nomenclatuurcommissie, zoals ze de afgelopen jaren ook rekening hield met de inhoud van het rapport van de vroegere nomenclatuurcommissie.
We hebben getracht niet een soort keurslijf te ontwerpen. We hebben slechts daar aanbevelingen opgesteld, waar we dat noodzakelijk vonden. Er wordt dan ook nog veel aan de individuele smaak van de auteur of van de docent overgelaten. Zo is aanbevolen bij een functie de termen 'domein' en 'bereik' te gebruiken. Maar voor domein en bereik van een functie f is geen symbool voorgesteld. Men kan naar believen hiervoor geen symbool gebruiken of bijvoorbeeld D_f, dom_f, B_f, $B(f)$. In zo'n geval, waar geen symbool door ons voorgesteld wordt, is het onze bedoeling dat in eindexamenopgaven ook geen symbool gebruikt zal worden.

Wie het rapport van de vroegere nomenclatuurcommissie, gepubliceerd in Euclides 35 (1959/60), pag. 49-78, nog eens doorleest zal merken dat het totaal verouderd is. Men moet het onderhavige rapport dan ook niet zien als een aanvulling van het vroegere, maar als een geheel nieuw rapport.

De nomenclatuurcommissie bestond uit Dr. P.M. van Hiele (Voorburg), M. Kindt (Bennekom), D. Leujes (Delft), H. Steur (Ellecom), A. van Tooren (Leusden) secretaris, G. Tromp (Haarlem), Dr. P.G.J. Vredenduin (Oosterbeek) voorzitter.

2 Algemene opmerkingen

Variabelen worden cursief gedrukt. Symbolen met een vaststaande betekenis worden romein gedrukt, ook als ze deel uitmaken van een verder cursief gedrukte tekst. Bijvoorbeeld

$$\sin(2x + a) \qquad {}^2\log(x + 1)$$

$$f : x \rightarrow x + 3 \qquad \int_a^b (x^2 + x)\,\mathrm{d}x$$

$$a \in V \qquad V \cap W$$

3 De logica

3.1 *Verzamelingen*

Men kan een verzameling noteren door enumeratie van de elementen, bijvoorbeeld

$$\{2, 3, 5, 7, 11\}$$

Het is daarbij vanzelfsprekend dat de volgorde van die elementen geen rol speelt en dat geen enkel element twee of meer keren tussen de accoladen voorkomt. Daarnaast maken we veel gebruik van de 'verzamelingenbouwer'

$$\{x \in A \mid \ldots\}$$

We doen dat bij het construeren van een deelverzameling van een al eerder gedefinieerde verzameling A, namelijk van die deelverzameling die gevormd wordt door de elementen die de op de stippen geschreven eigenschap hebben. Wanneer men bijvoorbeeld vraagt de vergelijking

$$x^2 - 3x - 11 = 0$$

in $\mathbb{R}$ op te lossen, dan wenst men te weten welke elementen de verzameling

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 11 = 0\}$$

heeft.

Het is niet correct in deze notatie de aanduiding van de 'alverzameling' weg te laten (dus in het genoemde voorbeeld te schrijven $\{x \mid x^2 - 3x - 11 = 0\}$). Wanneer echter uit de context voldoende duidelijk blijkt welke die alverzameling is, kan daar niet veel bezwaar tegen bestaan. Alleen in het geval van eindexamenvraagstukken pleiten wij voor het gebruik van de volledige notatie, ten einde elke mogelijkheid van een misverstand uit te sluiten.

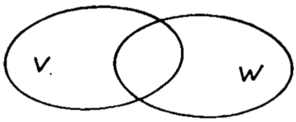
Bij het voorgaande aansluitend willen wij ons verzetten tegen sommige andere notaties die men wel eens tegenkomt. Zo vinden wij

$\{$vierkanten$\}$ of $\{$alle vierkanten$\}$

voor de verzameling van alle vierkanten een ongeoorloofde notatie.

3.2 *Venndiagrammen*

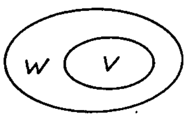
Een venndiagram (van twee verzamelingen) ziet er als volgt uit:



Essentieel is dat het vlak in vier delen verdeeld wordt, die de gevallen $x \in V \wedge y \in W$, $x \in V \wedge y \notin W$, $x \notin V \wedge y \in W$, $x \notin V \wedge y \notin W$ representeren. Venn heeft zijn diagrammen op deze wijze samengesteld om er bewijskracht aan te kunnen ontlenen als een uitspraak over verzamelingen in het algemeen aangetoond moet worden, bijvoorbeeld de eigenschap

$$V \subset W \Leftrightarrow V \cap W = V$$

Andere figuren, zoals



voor het geval dat $V \subset W$, zijn onder omstandigheden geschikt illustratiemateriaal, maar het zijn geen venndiagrammen.

3.3 *Deelverzameling*

'V is deelverzameling van W' wordt doorgaans genoteerd: $V \subset W$. Sommigen geven de voorkeur aan $V \subseteq W$, wegens de analogie met het symbool $\leqslant$ voor 'kleiner dan of gelijk aan'. Wie echter eerst over deelverzamelingen praat om daarna pas de gelijkheid van verzamelingen te definiëren, zal uit didactisch oogpunt bezwaren hebben tegen het symbool $\subseteq$ en de voorkeur geven aan $\subset$. We zouden ons daarom willen aansluiten bij het meest verspreide gebruik en 'V is deelverzameling van W' willen noteren: $V \subset W$.

Ten slotte zouden we nog willen opmerken dat de term 'alverzameling' in ons onderwijs gemist kan worden. Ook de term 'complement van een verzameling' kan men missen. In de sporadische gevallen waarin men wil opmerken dat een verzameling U het complement is van een verzameling W ten opzichte van de verzameling V, kan men schrijven: $U = V \backslash W$. Als $W \subset V$ is dit immers gelijkwaardig met: U is het complement van W (t.o.v. V).

3.4 *Logische operatoren*

Omtrent het gebruik van de tekens $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ heersen tegenwoordig geen meningsverschillen meer.
Het teken $\Leftrightarrow$ kan men op verschillende manieren uitspreken: is gelijkwaardig met, is ekwivalent met, dan en alleen dan als. We geven de voorkeur aan 'is gelijkwaardig met', omdat hierdoor het meest suggestief weergegeven wordt wat men bedoelt. De analyse van de uitspraak

A dan en alleen dan als B

is aanmerkelijk gecompliceerder. Hiermee wordt gezegd dat

A dan als B, d.w.z. $B \Rightarrow A$, en
A alleen dan als B, d.w.z. $A \Rightarrow B$

En dit blijft altijd weer nodeloos moeilijk.
Om analoge redenen raden we af te zeggen dat A een noodzakelijke en voldoende voorwaarde is voor B.
Om haakjes uit te sparen spreken we af dat $\wedge$ en $\vee$ sterker binden dan $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$. In plaats van

$$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$$

mogen we dus schrijven

$$A \vee B \Rightarrow C \wedge D$$

Het gebruik van een bepaald symbool voor 'niet' zouden we niet graag willen voorschrijven. Wie aan een dergelijk symbool behoefte heeft zouden we het teken $\neg$ willen adviseren.

3.5 *Kwantoren*

Uitspraken van de vorm

er is een x waarvoor . . .
voor alle x geldt . . .

zijn in het huidige onderwijs van veel belang. Men kan de notatie ervan bekorten door een symbool voor de existentiekwantor en voor de alkwantor in te voeren. Of en wanneer men dat wil doen is een kwestie van persoonlijk didactisch inzicht. We hopen dan ook dat symbolen voor kwantoren in eindexamenopgaven niet zullen voorkomen.
Velen zullen wel tot het gebruik van deze symbolen op de duur willen overgaan. Ze hebben dan de keus tussen

$\exists$, $\forall$ en $\bigvee$, $\bigwedge$

'Voor alle geldt' heeft te maken met een conjunctie en 'er is een' heeft te maken met een disjunctie; vandaar de symbolen $\bigwedge$ en $\bigvee$, die vormverwantschap hebben met $\wedge$ resp. $\vee$. 'Er is' (existeert) begint met een e en 'alle' begint met een a; vandaar de omgekeerde E en de omgekeerde A als symbolen voor 'er is' resp. 'alle'. Wat voor de leerlingen het meest suggestief en verreweg het gemakkelijkst is om te onthouden, behoeft geen betoog. Vandaar onze voorkeur voor $\exists$ en $\forall$.
Als men zegt

voor alle x geldt . . .

dan heeft deze x slechts betrekking op de elementen van een bepaalde verzameling. Als men zegt

voor alle x geldt: $x^2 > -1$

dan bedoelt men dat dit geldt voor bijvoorbeeld alle reële getallen. Men bedoelt niet dat het voor alle complexe getallen geldt en zeker niet dat het voor alle punten geldt. Dit moet dan ook in de notatie vermeld worden. Indien uit de context reeds blijkt op de elementen van welke verzameling x betrokken is, dan kan men gemakshalve volstaan met te schrijven $\forall x$. Is dat niet het geval en men bedoelt dat x element is van de verzameling V, dan schrijft men

$\forall\, x \in V$ of $\underset{x \in V}{\forall}$

Hetzelfde geldt voor $\exists$.
Om haakjes uit te sparen kan men afspreken dat de kwantoren reiken tot het eind van de formule, tenzij het tegendeel is aangegeven.

4 De algebra

4.1 *Verzamelingen van getallen*

Het is nuttig voor de namen van de fundamentele getallenverzamelingen een afwijkend lettertype te gebruiken, namelijk

$\mathbb{N}$ voor de verzameling van de natuurlijke getallen,
$\mathbb{Z}$ voor de verzameling van de gehele getallen,
$\mathbb{Q}$ voor de verzameling van de rationale getallen,
$\mathbb{R}$ voor de verzameling van de reële getallen.

In overeenstemming met het heersende gebruik worden deze letters romein gezet (rechtop bij vaste betekenis).

Door toevoeging van een + of een – zou men dan desgewenst namen van de bijbehorende deelverzamelingen positieve of negatieve getallen kunnen construeren:

$\mathbb{R}^+$ in plaats van $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}^-$ in plaats van $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

Het gaat ons echter te ver het gebruik van deze symbolen in eindexamenopgaven aan te bevelen.
De natuurlijke getallen worden opgevat als kardinaalgetallen van eindige verzamelingen. Dit houdt in dat 0 tot de natuurlijke getallen wordt gerekend. We verwijzen in dit verband naar de 'korrel' in Euclides **46** (1970-71), pag. 70-71, waar men de motivering voor dit advies vindt.
Voor geordende paren en voor intervallen zijn allerlei notaties in gebruik. Om vergissingen en verwarringen te voorkomen stellen we voor de notaties voor geordende paren duidelijk verschillend te maken van die voor intervallen.
De ronde haken worden gereserveerd voor geordende paren:

(a, b)

Bij intervallen geeft men het gesloten karakter aan door het gebruik van vierkante haken, het open karakter door dat van gebroken haken:

$[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

Wanneer een interval aan één kant onbegrensd is, dan heeft dat interval aan die kant een open karakter en dan wordt daar dus een gebroken haak gebruikt in de notatie. Het ontbreken van het grensgetal wordt door een pijl aangegeven. Zo komen we bijvoorbeeld tot

$\langle 0, \rightarrow\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Het woord 'gesloten' wordt ook gebruikt bij de bespreking van de structuur van de fundamentele getallen verzamelingen: $\mathbb{N}$ is gesloten voor de bewerking optellen. Bezwaar is hiertegen niet. Wel zouden we willen opmerken dat de term 'gesloten' in deze betekenis in ons onderwijs gerust gemist kan worden. Bezwaar hebben we wel tegen de termen 'eenheidselement' en 'nuelement'. Men kan beter spreken van het neutrale element (van een verzameling ten opzichte van een bewerking). Men komt dan niet tot vreemdsoortige uitspraken als: 0 is het eenheidselement van $\mathbb{R}$ t.o.v. de optelling.
Tegen stippelnotaties, zoals

$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

voor de verzameling $\mathbb{N}$, zijn wetenschappelijk gefundeerde bezwaren in te brengen.

Toch zal iedereen ze aanvaarden om didactische redenen. Eveneens zal men de schrijfwijze

$$\{0, 1, 2, \ldots, 100\}$$

toelaten voor

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 100\}$$

'Enzovoorts' en 'tot en met' worden weergegeven door precies drie stippen.

4.2 *Vergelijkingen en ongelijkheden*
Dit onderwerp heeft de commissie weinig moeilijkheden gegeven. Er zijn geen principiële verschillen in schrijfwijze voorhanden, hoogstens enkele minder principiële verschillen in woordgebruik. En daar beperken we ons dus toe. Sommigen spreken van een vergelijking met onbekende x, anderen van een vergelijking met variabele of veranderlijke x. De laatstgenoemde terminologie is door de Staatssecretaris gebezigd in het 'Voorlopig leerplan'. Ook wij geven de voorkeur aan 'veranderlijke'. Wie spreekt in de onderbouw over een vergelijking met onbekende x wekt de indruk dat letters verschillende functie kunnen hebben, namelijk dat ze een willekeurig element uit een verzameling kunnen voorstellen, maar ook wel een bepaald, maar voorlopig nog onbekend element. Om dit misverstand tegen te gaan en te accentueren dat een (cursieve) letter *altijd* een willekeurig element uit een bepaalde verzameling voorstelt, zouden we de term 'onbekende' liever niet willen gebruiken.

De multivalentie van het woord 'oplossing' is kenmerkend voor de ontwikkeling van de Nederlandse taal in onze tijd. Vele woorden op -ing delen dat lot. Bij 'de verdeling van de buit' kan men denken aan het verdeelproces, maar ook aan het door dat proces opgeleverde eindresultaat. En 'de opstelling van het elftal' is een bezigheid vermeld in de taakomschrijving van de trainer en ook het resultaat van die bezigheid.
Wij leggen ons bij deze ontwikkeling neer en geven dus de voorkeur aan

(3, 5) is een oplossing van $7x - 3y = 6$

boven bijvoorbeeld

(3, 5) is een wortelpaar (wortelvector) van $7x - 3y = 6$

Het is consequent dan ook te zeggen

3 is een oplossing van $7x - 15 = 6$

maar tegen 3 is een wortel van $7x - 15 = 6$ hebben we geen enkel bezwaar.
Het vinden van de oplossingsverzameling (en dat proces heet dan ook weer de oplossing) kan op twee gelijkwaardige manieren gebeuren. Men kan een rij gelijkwaardige beweringen of een rij gelijke verzamelingen construeren. Wordt bijvoorbeeld gevraagd de vergelijking $x^2 + 3x - 4 = 0$ in $\mathbb{N}$ op te lossen, dan schrijft men

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid (x + 4)(x - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = -4 \vee x = 1\} \\ &= \{1\}\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}x^2 + 3x - 4 = 0 \wedge x \in \mathbb{N} &\Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) = 0 \wedge x \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow (x = -4 \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

In de eerste oplossing is de oplossingsverzameling het laatste exemplaar van de rij gelijke verzamelingen en dat lijkt dus enkele voordelen te bieden. Anderzijds verschaft ook de tweede oplossing alle informatie die de steller van de opgave wenst, zodat men ook daarmee tevreden kan zijn.
Het lijkt nuttig nog een paar woorden te besteden aan de bijzondere gevallen die zich bij het oplossen van vergelijkingen voor kunnen doen. Soms is de oplossingsverzameling leeg. Dit blijkt nadat men de vergelijking opgelost heeft, zodat het een nodeloze taalverkrachting is die vergelijking dan onoplosbaar te noemen. Er is geen behoefte meer aan de termen vals en identiek. In plaats van

$x^2 = 5$ ($x \in \mathbb{N}$.) is een valse vergelijking

of

$x^2 = 5$ is vals in $\mathbb{N}$

gebruiken we immers toch

$x^2 = 5$ ($x \in \mathbb{N}$) heeft een lege oplossingsverzameling.

De begrippen 'strijdigheid' en 'afhankelijkheid' willen we echter niet graag missen. Het eerste van die twee wordt zonder wijziging overgenomen uit de oude praktijk: een stelsel vergelijkingen heet strijdig indien de oplossingsverzamelingen van die vergelijkingen een lege doorsnede hebben, dus indien de oplossingsverzameling van het stelsel leeg is. Het begrip 'afhankelijkheid' is echter aan een herwaardering toe. Vroeger kon men zeggen

de vergelijkingen $2x - 5y = 7$ en $4x - 10y = 14$ zijn afhankelijk,

terwijl men tegenwoordig in plaats daarvan gebruikt

$$2x - 5y = 7 \Leftrightarrow 4x - 10y = 14$$

De oude afhankelijkheid had iets te maken met gelijkheid van oplossingsverzamelingen. Het gebruik van hetzelfde woord in wiskunde II pleit er voor nu een iets ruimere inhoud er aan te geven: een stelsel vergelijkingen heet afhankelijk indien er een echt deelstelsel bestaat waarmee het gelijkwaardig is. Een voorbeeld van een afhankelijk stelsel is dan:

$$x^2 + x = 0$$
$$x^3 + x^2 = 0$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

omdat het deelstelsel dat uit de laatste twee vergelijkingen bestaat, gelijkwaardig is met het hele stelsel.

Tot slot van deze paragraaf nog een kleinigheid: om redenen die in het hoofdstuk over functies vermeld worden, adviseren we voortaan de termen 'eerstegraads' en 'tweedegraads' te gebruiken in plaats van 'lineair' en 'kwadratisch'.

4.3 *Relaties*

Er zijn verschillende manieren voorhanden om in de onderbouw het begrip 'relatie van V naar W' te introduceren. Op grond van didactische voorkeur maakt men daaruit een keuze. Zo kan men zowel tot de notatie

de relatie $x + 2y = 6$ van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$,

komen als tot de notatie

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 6\}$$

Bij de eerste moet per traditie bekend zijn dat bijvoorbeeld het paar (4, 1) wel aan de relatie voldoet en het paar (1, 4) niet. Alleen de tweede notatie geeft alle bedoelingen duidelijk weer. Niettemin achten we in de onderbouw beide bovengenoemde versies bruikbaar en acceptabel. In examenopgaven geven we vanzelfsprekend de voorkeur aan de tweede.

Het genoemde voorbeeld vervult nog een tweede functie. Het staat natuurlijk iedereen vrij om in dit geval te spreken over een relatie *in* $\mathbb{N}$ in plaats van over een relatie *van* $\mathbb{N}$ *naar* $\mathbb{N}$. Voor officiële documenten adviseren wij echter consequent gebruik van de van-naar-terminologie.

Bij een relatie van V naar W verstaat men onder het domein van die relatie de verzameling van de elementen van V die als eerste element in een tot de relatie behorend geordend paar voorkomen. Onder het bereik van de relatie verstaat men de verzameling van de elementen van W die als tweede element in een tot de relatie behorend geordend paar voorkomen.

Vanzelfsprekend zal men ook in de onderbouw al over de inverse van een gegeven relatie spreken. Later behandelt men de functies en afbeeldingen als bijzondere relaties en dan komen ook de inversen van functies aan bod. Nu doet zich daarbij de situatie voor dat een bepaalde functie van V naar W als *functie* geen inverse heeft, maar als *relatie* wel een inverse bezit (elke relatie bezit een inverse). Om die reden pleiten we er voor geen speciale notatie in te voeren voor inverse relatie, wel voor inverse functie.
Ook als men een relatie van V naar W niet wenst te definiëren als een deelverzameling van $V \times W$, zal men toch over die deelverzameling willen spreken. In navolging van Bourbaki wordt dan wel de benaming 'grafiek van de relatie' gebruikt. Deze term willen we echter reserveren voor het beeld van die verzameling in een coördinatenvlak.

4.4 *Functies*

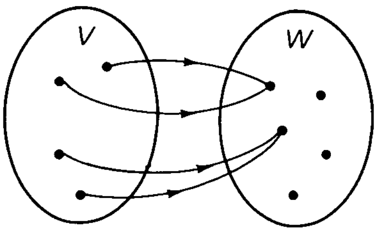
Een functie van V naar W wordt gedefinieerd als een relatie van V naar W die de bijzondere eigenschap heeft dat elk element van V in *ten hoogste één* tot die relatie behorende geordend paar als eerste element optreedt. Hierdoor wordt een dikke knoop doorgehakt. Allerlei argumenten voor deze beslissing worden hieronder genoemd.
Aan de aard van de verzamelingen V en W worden hierbij geen bijzondere eisen gesteld. In de onderwijspraktijk komen functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ het meest frekwent voor. Maar bij het inrichten van een lijn g als getallenlijn hebben we te maken met een functie van $\mathbb{R}$ naar die lijn g, bij het inrichten van een vlak Π als coördinatenvlak gebruiken we een functie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar Π. In allerlei leerplannen en examenprogramma's komen de functies van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ als apart onderwerp voor. In de meetkundige onderwerpen van de leerstof treffen we spiegelingen, rotaties en translaties aan als functies van Π naar Π.
De woorden 'functie' en 'afbeelding' worden door ons als synoniem beschouwd. Het is nuttig ze in de klas door elkaar te gebruiken. We hadden natuurlijk ook wel het woord 'functie' kunnen reserveren voor bijzondere relaties naar $\mathbb{R}$ en voor alle andere gevallen het woord 'afbeelding' kunnen adviseren. We vonden het echter verstandig dat niet te doen.
Voor afschaffing van een van de twee woorden voelden we ook niet. Het woord 'functie' is erg diep geworteld in onze traditie en het woord 'afbeelding' heeft zo'n beeldende waarde, past zo goed bij begrippen als origineel en beeld. Met het woord 'transformatie' is het anders gesteld. Ook dit woord heeft een beeldende waarde. De beelden die het oproept, hebben echter te maken met verplaatsing en met vormverandering. En dat zijn nu juist verkeerde beelden in de situatie waarin we dat woord vaak gebruikten. We vinden het dus nuttig de rotaties, spiegelingen en translaties voortaan te noemen afbeeldingen of functies van het vlak naar zichzelf.

Gezien de discussie die naar aanleiding van het voorgaande ontstaan is, lijkt het ons verstandig ons standpunt nog wat nader toe te lichten.

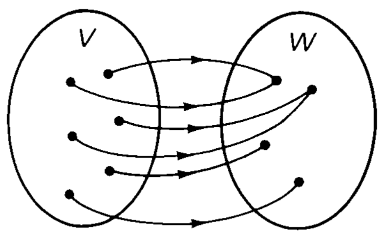
Men onderscheidt in de wiskunde de volgende vier, elkaar niet uitsluitende, soorten afbeeldingen:

afbeeldingen van V in W,
afbeeldingen van V op W,
afbeeldingen uit V in W,
afbeeldingen uit V op W.

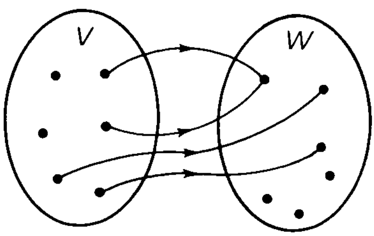
Deze vier soorten zijn er resp. door gekenmerkt dat
elk element van V een beeld heeft, maar niet elk element van W beeld hoeft te zijn,
elk element van V een beeld heeft en elk element van W beeld is,
niet elk element van V een beeld hoeft te hebben en niet elk element van W beeld hoeft te zijn,
niet elk element van V een beeld hoeft te hebben, maar wel elk element van W beeld is.
Zie de onderstaande vier figuren.



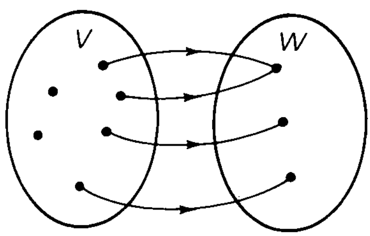
afbeelding van V in W



afbeelding van V op W



afbeelding uit V in W



afbeelding uit V op W

Voor schoolgebruik is een dergelijke onderscheiding overbodig. We zouden ons dan ook graag tot één soort, en dan natuurlijk de meest algemene, willen beperken. Daarbij willen we een terminologie voorstellen die suggestief is en overeenkomt met de terminologie die bij relaties gebezigd wordt. Bij een afbeelding denken we aan een pijldiagram. We vragen ons af: waar komen de pijlen *van*daan en waar gaan ze *naar*toe? Zo komen we ertoe te spreken van een afbeelding *van V naar W*. Wie later op meer subtiele manier met afbeeldingen in aanraking komt, zal zich met bovengenoemde onderscheidingen bezig kunnen houden en daarbij niet gehinderd worden door de term die hij tot dan toe gebruikt heeft.

In de vorige paragraaf werd al even gesproken over de begrippen 'domein' en 'bereik'. Ter verkrijging van de nodige eenheid raden we aan ook bij functies deze twee woorden te kiezen uit de ruime voorraad ekwivalente termen (bron, definitieverzameling, beeldenverzameling enzovoorts). Voor de definities verwijzen wij naar de vorige paragraaf.

Methoden om een functie te noteren:
Met de functie $f : x \to f(x)$ van V naar W bedoelen we een functie waarvan het domein bestaat uit alle $x \in V$ waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.
Zo is het domein van de functie

$f : x \to \sqrt{(100 - 4x^2)}$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$
de verzameling $[-5, 5]$.

Willen we het domein een extra beperking opleggen, dan moeten we dat vermelden.
Met de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$g : x \to \sqrt{(100 - 4x^2)}$ voor $x \geqslant 0$

bedoelen we een functie waarvan het domein bestaat uit alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\sqrt{(100 - 4x^2)}$ betekenis heeft en bovendien geldt $x \geqslant 0$. Het domein van deze functie is dus $[0,5]$.
Er kunnen desgewenst speciale notaties voor domein en bereik van een functie afgesproken worden. Bijvoorbeeld D_f of $D(f)$ en B_f of $B(f)$. Wij willen dat echter niet verplicht stellen. In examenopgaven kan men zonder bezwaar formuleringen opnemen zoals 'Wat is het domein van de functie f? '.
Als f een functie van V naar W is en $(a, b) \in V \times W$ een tot die functie behorend geordend paar is, dan noemt men b het f-beeld van a en omgekeerd *a een* f-origineel van b. Indien geen verwarring mogelijk is, kan men natuurlijk ook kortweg over het beeld, een origineel spreken.
Voor elke $b \in W$ verstaat men onder volledig f-origineel van b de verzameling van alle f-originelen van b. Dit is in elk geval een deelverzameling van het domein van f. Het kan ook een lege verzameling zijn, namelijk als b geen element is van het bereik van f.
Voor elke $A \subset V$ verstaat men onder het f-beeld van A de verzameling van de f-beelden van de elementen van A. Hierin behoeft A geen deelverzameling van het domein van f te zijn.
Voor elke $B \subset W$ verstaat men onder het volledig f-origineel van B de vereniging van de volledige f-originelen van de elementen van B. Hierin behoeft B geen deelverzameling van het bereik van f te zijn.
Het begrip 'volledig f-origineel' kan nuttig zijn bij beschouwingen over continuï-

teit. Ook in de onderbouw kunnen we er profijt van hebben. Het stelt ons namelijk in staat de term 'nulpunten' te elimineren, die dubbelzinnig was en vaak begripsverwarringen veroorzaakte. In plaats van te vragen naar de nulpunten van een gegeven functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ kunnen we nu vragen naar het volledig origineel van 0. En bij een functie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is elke niveauverzameling (liever niet niveaulijn of niveaukromme) het volledig origineel van een of ander reëel getal.

In het bovenstaande werden geen speciale notaties gebruikt voor de genoemde elementen en deelverzamelingen. Dit gebeurde met opzet, omdat de nomenclatuurcommissie bezwaren heeft tegen bepaalde min of meer gangbaar geworden notaties.
Natuurlijk wordt de notatie $f(a)$ voor het f-beeld van a aanvaard. Is f een functie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar W, dan zouden we voor het f-beeld van bijvoorbeeld (3, 2) moeten schrijven (als we consequent waren) $f((3, 2))$. In dat geval aanvaarden we echter $f(3, 2)$.

Bezwaar hebben we echter tegen de overeenkomstige notatie $f(A)$ voor het f-beeld van de deelverzameling A van V. De functie f koppelt elementen van V aan elementen van W, niet deelverzamelingen van V aan deelverzamelingen van W. In $f(a)$ moet a domein-element zijn, in $f(A)$ daarentegen behoeft A geen domein-deel te zijn. Het gebruiken van een analoge notatie kan begripsverwarring in de hand werken.
Op grond van soortgelijke argumenten wordt het invoeren van ad-hoc-notaties voor origineel van een element, volledig origineel van een element of verzameling ontraden. Men treft hiervoor wel eens de notatie f^{-1} aan. Om de daaraan verbonden gevaren in te zien vrage men zich af wat $\sin^{-1} x$ betekent.
Aan het samenstellen van twee functies zijn bij het aanvaarden van de door ons voorgestelde functiedefinitie geen moeilijkheden meer verbonden. Bij gegeven functies f van U naar V en g van V naar W kan men in elk geval $g \circ f$ (uit te spreken: 'g na f') als functie van U naar W definiëren. Het is nu niet nodig de beperkingen op te leggen dat het bereik van f deel is van het domein van g. Indien namelijk x behoort tot het domein van f en $f(x)$ niet tot het domein van g behoort, dan wordt aan x door $g \circ f$ geen enkel element van W toegevoegd. In dat geval zal x niet tot het domein van $g \circ f$ behoren en daar is bij de door ons voorgestelde functiedefinitie geen enkel bezwaar tegen. Zelfs mogen het beeld van f en het domein van g disjunct zijn; in dat geval is het domein van de functie $g \circ f$ leeg.
In een voorbeeld stellen we nog even naast elkaar de opvatting

> een functie f van V naar W is een relatie van V naar W die aan elk element van V precies één element van W koppelt

en onze opvatting

> een functie f van V naar W is een relatie van V naar W die aan elk element van V ten hoogste één element van W koppelt.

We beschouwen de functies f en g die gedefinieerd worden door

$$f(x) = \sqrt{(16 - x)} \quad \text{en} \quad g(x) = \sqrt{(4 - x^2)}$$

en vragen naar de samengestelde functie $g \circ f$.
Omdat $\langle \leftarrow, 16]$ het domein van f is zou volgens de eerste opvatting ook $g \circ f$ het interval $\langle \leftarrow, 16]$ tot domein moeten hebben. Maar $f(0)$ is geen element van het domein van g en daarom bestaat $g \circ f$ niet.
Volgens onze opvatting is $g \circ f$ een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, met als koppelingsvoorschrift $x \to \sqrt{(x - 12)}$ en met als domein het interval $[12, 16]$.
De didactische voordelen van onze opvatting zijn duidelijk.
Een slotopmerking nog over het samenstellen van functies. In onze scholen wordt geen algebra in functieruimten bedreven. Er is dus geen enkele aanleiding om f^2 te gaan schrijven voor $f \circ f$. En dat is maar gelukkig ook, want daardoor kunnen we zonder gewetensbezwaren gebruik blijven maken van de vertrouwde $\sin^2 x$ en $\log^2 x$.
Een functie f van V naar W is een bijzondere relatie van V naar W en bezit als zodanig een inverse relatie van W naar V. We stellen voor de functie f omkeerbaar te noemen indien ook die inverse relatie een functie is. Voor die inverse relatie stellen we de naam 'inverse functie van f' en het symbool f^{inv} voor. We geven aan f^{inv} de voorkeur boven f^{-1} om redenen die hierboven vermeld zijn.
Ook in dit geval springen de didactische voordelen van onze opvatting omtrent functies in het oog. Volgens de eerste opvatting zou de functie

$$f : x \to \sqrt{(x + 2)} \text{ van } [-2, \to\rangle \text{ naar } \mathbb{R}$$

geen inverse hebben, maar wel de functie

$$g : x \to \sqrt{(x + 2)} \text{ van } [-2, \to\rangle \text{ naar } [0, \to\rangle$$

Onze opvatting laat toe te zeggen: de functie

$$f : x \to \sqrt{(x + 2)} \text{ van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R}$$

heeft als inverse de functie

$$g : x \to x^2 - 2 \quad \text{van } [0, \to\rangle \text{ naar } \mathbb{R}$$

Als het functiebegrip op onze manier wordt ingevoerd ligt de vraag voor de hand hoe het staat met de wildernis van injecties, surjecties en bijecties.
Een duidelijke behoefte aan de termen injectie en surjectie blijkt niet te bestaan. We zien het nut van officialisering van die termen dus niet in.
De bijecties zijn in ons werk van fundamentele betekenis (we gebruiken het woord bijectie hier in de volgende betekenis: een bijectie van V naar W is een omkeerbare functie van V naar W die V als domein en W als bereik heeft). Men denke

bijvoorbeeld aan de bijecties die ten grondslag liggen aan coördinatenstelsels. Ook zou men in de combinatoriek een permutatie van een verzameling V kunnen definiëren als een bijectie van V naar V.
Wij menen echter dat we onze leerlingen een terminologie-jungle moeten besparen en willen daarom ook het gebruik van de term bijectie facultatief stellen.

Hierboven hebben we al verscheidene malen een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ in formuletaal aan de lezer voorgesteld. Niettemin is het verstandig aan deze notaties nog een paar regels apart te besteden.
In principe hebben we de beschikking over drie notatie-schema's: de pijlnotatie, de $f(x)$-notatie en de verzamelingsnotatie. Ze worden hieronder getoond:

$$f : x \rightarrow \frac{x-4}{x+2} \text{ van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R}$$

de functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{x-4}{x+2}$

de functie $f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \dfrac{x-4}{x+2} \right\}$

De eerste twee zijn goed ingeburgerd en hebben daardoor bestaansrecht verkregen. De derde willen we met enige tolerantie tegemoet treden, maar voorlopig nog niet verkiesbaar stellen voor officiële taken.
Tegen

de functie $f : x \rightarrow y = \dfrac{x-4}{x+2}$

verzetten we ons. Dit wekt de indruk dat f een functie van $\mathbb{R}$ naar een verzameling vergelijkingen is.

De term 'lineaire functie' willen we verbannen omdat deze in wiskunde II een inhoud krijgt die anders is dan de tot nu toe gebruikelijke. In plaats daarvan willen we 'eerstegraads functie' adviseren. Om consequent te zijn bevelen we tegelijkertijd aan voortaan over 'tweedegraads functies' te spreken en niet over 'kwadratische functies'.

5 Meetkunde onderbouw

5.1 *Algemene opmerkingen*

De begrippenrijkdom binnen de meetkunde is aanmerkelijk groter dan die binnen de algebra. Dat maakt het moeilijk voor de meetkunde een stelsel notaties te bedenken dat bijectief afgebeeld kan worden op het stelsel begrippen. Mogelijk is het wel, maar dan moet men slecht hanteerbare en bizarre notaties accepteren.
In het verleden heeft dit wel eens aanleiding gegeven tot ergernis. Maar een

schadelijke verwarring is er naar onze mening eigenlijk nooit geweest. Voor de onderbouw is dat ook wel begrijpelijk, want de intuïtieve benadering van de meetkunde is daar erg belangrijk geworden. Dat impliceert dat de behoefte aan zorgvuldige en ondubbelzinnige verbale omschrijving van de begrippen kleiner is geworden. En voor de behoefte aan de geformaliseerde omschrijvingen van de notaties geldt dat nog sterker.

5.2 *Lengten en maatgetallen*

Het begrip 'lijnstuk' kan men zonder moeite bij brugklassers introduceren; zij brengen dat ten dele uit het basisonderwijs mee. Daar hebben zij zich bovendien ook al beziggehouden met het begrip 'lengte'. Het is nuttig ons even te verdiepen in de formele inhoud van dat laatste begrip.
In de verzameling lijnstukken in een plat vlak kan men de relatie 'is congruent met' definiëren. We gaan niet in op de vraag hoe men dat zou kunnen doen.
Deze relatie 'is congruent met' is een ekwivalentie-relatie. Hij induceert dus een klasse-indeling, een partitie in de verzameling van lijnstukken. Elke klasse bestaat uit onderling congruente lijnstukken. Van twee lijnstukken uit dezelfde klasse zeggen we niet alleen dat ze congruent zijn, maar ook dat ze gelijke lengte hebben of even lang zijn. Opgemerkt dient te worden dat hierbij (nog) geen sprake is van getallen.

Formeel gesproken is nu 'een lengte' synoniem met 'een klasse van die partitie'. Er is hier analogie met het begrip 'richting' aanwezig. In de verzameling van lijnen in een vlak introduceert men de ekwivalentie-relatie 'is parallel met'. De klassen van de bijbehorende partitie worden richtingen genoemd.

In de verzameling van de lengten kan men een ordeningsrelatie definiëren. We verdiepen ons weer niet in de vraag, hoe dat gebeuren kan. We nemen zonder meer aan dat die relatie er is en dat we dus van een lengte kunnen zeggen, dat hij groter is dan een andere lengte. Natuurlijk dragen we die ordening over naar individuele lijnstukken: we zeggen ook van een lijnstuk, dat het langer is dan een ander lijnstuk. Nog steeds spelen getallen hierin geen rol. Maar in de volgende en laatste fase gaat dat veranderen.

De geordende verzameling van de lengten wordt nu bijectief afgebeeld naar de geordende verzameling positieve reële getallen. Voor de derde keer interesseert de manier waarop dat gebeurt ons bitter weinig. We merken alleen op, dat die afbeelding een isomorfie is t.o.v. de ordening: de orde van twee lengten is dezelfde als die van de aan hen toegevoegde beeldgetallen.
Het bij deze afbeelding aan een lengte toegevoegde beeldgetal noemen we 'het maatgetal van die lengte'.

We hebben dus nu met drie verschillende begrippen te maken gekregen:

(1) lijnstuk als meetkundig plaatje,
(2) lengte als ekwivalentie-klasse,
(3) maatgetal van lengte.

Het laatste begrip van dit drietal is vrij gemakkelijk met leerlingen te bespreken, als we ons tenminste de vrijheid veroorloven het over te dragen van lengten naar individuele lijnstukken (zoals we dat ook deden bij de ordening van lengten). Als we dat doen, dan krijgen we de gelegenheid er de nadruk op te leggen dat er oneindig veel van die isomorfe afbeeldingen zijn, omdat elk lijnstuk tot eenheidslijnstuk benoemd kan worden. Veel moeilijker ligt het met het begrip lengte (ekwivalentie-klasse). Maar het valt gelukkig sterk te betwijfelen, of dit begrip besproken dient te worden.

5.3 *Bizarre notaties*

In de paragraaf *algemene opmerkingen* stelden we, dat het mogelijk is een sluitend stelsel notaties te bedenken voor de begrippen die we in de meetkunde hanteren. Dat willen we nu demonstreren voor de drie fundamentele begrippen lijnstuk, lengte van lijnstuk, maatgetal van lengte, en voor een paar daaruit afgeleide begrippen.
Het wordt een afschrikwekkend voorbeeld. Maar hopelijk zet het kracht bij aan de aanbevelingen die we daarna zullen formuleren.

Als naam voor een lijnstuk als meetkundig plaatje zouden we een kleine letter kunnen gebruiken of de achter elkaar geschreven hoofdletters die de eindpunten van dat lijnstuk benoemen:

$$p,\ AB$$

Dan zouden we de lengte van dat lijnstuk (de lengte waartoe dat lijnstuk behoort) kunnen noteren door de naam van het lijnstuk zelf tussen haken te schrijven:

$$(p),\ (AB)$$

En tenslotte zouden we het maatgetal van die lengte kunnen aanduiden door voor de naam van die lengte zelf nog de (vaste) m van maatgetal te schrijven:

$$\mathrm{m}(p), \mathrm{m}(AB)$$

Met deze afspraak zouden verschillende begrippen inderdaad keurig netjes verschillende notaties krijgen. Bijvoorbeeld zou

$$(p) > (q)$$

betrekking hebben op de ordening van de lengten als ekwivalentieklassen, terwijl

$$\mathrm{m}(p) > \mathrm{m}(q)$$

betrekking zou hebben op de ordening van de bijbehorende maatgetallen. Bent u daar gelukkig mee?

De stelling van Pythagoras zou als volgt er uitzien:

$$(\mathrm{m}(a))^2 + (\mathrm{m}(b))^2 = (\mathrm{m}(c))^2$$

En ook dit is niet aanlokkelijk.
Bij de afgeleide begrippen komen we bijvoorbeeld tot $ABCD$ als naam voor een rechthoek, $(ABCD)$ als notatie voor de oppervlakte van die rechthoek als ekwivalentie-klasse, en tenslotte $\mathrm{m}(ABCD)$ voor het maatgetal van die oppervlakte.
Dit leidt dan tot zo iets:

$$\mathrm{m}(ABCD) = \mathrm{m}(AB) \cdot \mathrm{m}(AD)$$

Tenslotte nog dit: bij dit stelsel past onverbiddelijk een onderscheid tussen congruentie (van lijnstukken of rechthoeken) en gelijkheid (van lengten, oppervlakten of van de maatgetallen daarvan). Wat denkt u van:

$$p \cong q, \quad \mathrm{m}(p) = \mathrm{m}(q) \quad \text{of} \quad (p) = (q)$$

5.4 *Figuren en hun maatgetallen*
We komen nu tot onze aanbevelingen. Daarbij willen we in de eerste plaats stellen dat we in de schoolwiskunde de begrippen lengte, oppervlakte en inhoud als ekwivalentie-klassen kunnen missen. Daarvoor stellen we dus geen notatie voor; we beperken ons tot het aanduiden van de figuren zelf en van hun maatgetallen.
Bij de figuren die geen maatgetallen hebben, is alles heel eenvoudig. Als namen voor punten gebruiken we hoofdletters. Lijnen en halve lijnen worden met kleine letters benoemd. En vlakken en halve vlakken weer met hoofdletters.
Voor de figuren mèt maatgetal doen we het volgende voorstel. Als we de figuur zelf, het plaatje, willen aanduiden, dan maken we dat kenbaar door de soortnaam van de figuur voluit op te schrijven voor de verdere aanduiding. Ontbreekt die soortnaam, dan wordt automatisch niet de figuur zelf, maar zijn maatgetal bedoeld. We schrijven dus bijvoorbeeld:

driehoek ABC (of ook wel ΔABC)

als we het plaatje bedoelen. Staat er dan in de volgende regel

$$ABC = 84$$

dan hebben we het over het maatgetal van de oppervlakte van die driehoek. Zo schrijven we ook

rechthoek $ABCD$

als naam voor de figuur. Voor de oppervlakte van die rechthoek kunnen we schrijven

$$ABCD = AB \cdot AD$$

want door het ontbreken van het voorvoegsel 'lijnstuk' is het duidelijk dat we met AB en AD maatgetallen bedoelen.
De stelling van Pythagoras kan nu geschreven worden

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

en dat is kort en kernachtig genoeg. Het vereist wel het overwinnen van een lichte hindernis om te schrijven

lijnstuk AB is hypotenusa van driehoek ABC

maar dat is de prijs die we betalen voor eenvoudige maatgetalnotaties.
Overigens vinden wij dat speciaal bij lijnstukken ook de kleine letters gebruikt kunnen worden. Maar dan uitsluitend voor de maatgetallen, niet voor de plaatjes. Dit leidt dan bijvoorbeeld tot de versie van de stelling van Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

5.5 *Hoeken en hoekgrootten*
De moeilijkheden bij hoeken liggen niet principieel anders dan bij lijnstukken. Ook hier kunnen we weer onderscheid maken tussen de hoek als meetkundige figuur, de hoekgrootte als ekwivalentie-klasse en het maatgetal van die klasse. Er zijn echter ook enkele kleine verschillen. Daar gaan we in deze paragraaf wat nader op in.

Bij de lijnstukken hebben we (ietwat hautain) gesteld, dat we in de schoolwiskunde de lengten wel kunnen missen. Het is echter niet zo, dat we bij de hoeken de hoekgrootten kunnen missen. Er zijn immers twee verschillende afbeeldingen van de verzameling hoekgrootten (ekwivalentie-klassen) naar de verzameling reële getallen in gebruik.
Zo zijn 60° en $\frac{\pi}{3}$ rad namen voor dezelfde hoekgrootte; de maatgetallen 60 en $\frac{\pi}{3}$ zijn verschillend.
Het was tot nu toe traditie om bij de eerste afbeelding altijd met hoekgrootten te werken en bij de tweede altijd met maatgetallen. Wij willen met die traditie breken en stellen voor in beide gevallen hoekgrootten te gebruiken. Dat betekent dat bij het radialen-stelsel steeds 'rad' achter het maatgetal geschreven wordt. Dus bijvoorbeeld:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \tfrac{1}{2}$$

Het voordeel hiervan is, dat we in de bovenbouw des te duidelijker kunnen laten uitkomen dat we in de analyse niet meer met hoekgrootten werken, maar met getallen. De goniometrische functies hebben dan niet meer de verzameling hoekgrootten tot domein, maar de verzameling reële getallen. Daar schrijven we dan ook

$$\sin\frac{\pi}{6} \quad \text{en niet} \quad \sin\frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

Een tweede verschilpunt met de lijnstukken is het volgende. We hadden als algemeen principe gesteld, dat de naam van de figuursoort voluit geschreven zou worden bij de verdere benaming in het geval dat het plaatje bedoeld wordt. We schrijven dus

hoek B of hoek ABC (van driehoek ABC)

Laten we nu dat voorvoegsel 'hoek' weg, dan ontstaat niet, zoals bij de lijnstukken e.d., een notatie voor de hoekgrootte of voor het maatgetal. Immers

B duidt het punt B aan en
ABC betekent het maatgetal van de oppervlakte van de driehoek ABC

Ons voorstel is nu het teken $\angle$ te gebruiken, als we de grootte van een hoek willen aanduiden. De grootte van hoek B, van hoek ABC wordt dus geschreven

$\angle B, \ \angle ABC$

Als alternatieve notatie voor hoekgrootten stellen we de griekse letters voor (zonder het hoekteken). Dus:

driehoek ABC is gelijkbenig omdat $\angle A = \angle B$
driehoek ABC is gelijkbenig omdat $\alpha = \beta$
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ = \pi$ rad
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ rad

In het laatste geval kunnen we voor onze leerlingen rustig verzwijgen dat we operaties hanteren op ekwivalentie-klassen.
Tot slot van deze paragraaf vermelden we nog, dat de gebruikelijke namen voor de goniometrische functies zijn

sin, cos, tan

5.6 *Functies*

Het komt ons uit didactisch oogpunt gewenst voor ook in de meetkunde letters te gebruiken voor functies, evenals in de algebra. Of daar kleine letters of hoofdletters voor gebruikt worden is niet zo belangrijk. Zo kunnen we schrijven

s of S voor een spiegeling,
t of T voor een translatie,
r of R voor een rotatie

Op de gebruikelijke manier kan men dan ook de beelden bij die functies noteren; het spiegelbeeld van punt A bij de spiegeling s wordt bijvoorbeeld $s(A)$. Desgewenst kunnen de namen van functies nog voorzien worden van indices en bijvoorbeeld de spiegeling t.o.v. de lijn l met s_l aanduiden.

Aan woorden zoals 'homothetie' hebben wij, althans in de onderbouw, geen behoefte. Wil men nadruk leggen op het speciale karakter van bepaalde afbeeldingen, dan gebruike men congruentie-afbeelding of congruentie, gelijkvormigheidsafbeelding of gelijkvormigheid.

Waarschijnlijk ten overvloede herhalen we het advies niet te spreken over meetkundige transformaties. Er is geen principieel verschil tussen afbeeldingen in de meetkunde en in de algebra en het is dus niet raadzaam een terminologisch onderscheid te maken.

5.7 *Vectoren*
Het ligt voor de hand dat bij de introductie van het vectorbegrip die notatie wordt gebruikt, die het beste aansluit bij het meetkundige beeld van een pijltje met beginpunt A en eindpunt of spits B. In die fase schrijft men dus

$$\overrightarrow{AB}$$

Op den duur krijgt men echter behoefte aan eigennamen voor vectoren (en in de bovenbouw kan men die eigennamen beslist niet missen). En dan ontstaat het probleem van de tegenstrijdige eisen bij drukwerk en schrift.
In drukwerk moet de vector goed te onderscheiden zijn van de scalaire variabele. Daarom is de vette kleine letter het aangewezen symbool. Een bijkomstig voordeel ervan is, dat hij betrekkelijk gemakkelijk als index gebruikt kan worden, bijvoorbeeld bij een translatie. En een nadeel is dat men moet breken met de gewoonte belangrijke formules vet te zetten.
Voordelen en nadelen tegen elkaar afwegende bevelen wij de vette kleine letter aan voor vectoren in drukwerk.
De nulvector zouden we willen schrijven: **o**. Deze letter o wordt vet en romein (niet cursief) gedrukt, omdat we hier met een constante te maken hebben.
Voor geschreven teksten zijn deze letters echter volmaakt ongeschikt. In plaats daarvan kan men dan gebruiken letters, voorzien van een boven- of onderstreep of voorzien van een pijltje. Het ligt niet op het terrein van de nomenclatuurcommissie hiervoor aanbevelingen te doen.

5.8 *Kleinigheden*
In het voorafgaande is al terloops iets opgemerkt over de relatie 'is evenwijdig met'

of 'is parallel met'. Wij stellen voor deze relatie op te vatten als een ekwivalentie-relatie.
Dit houdt in, dat elke lijn geacht wordt evenwijdig met zichzelf te zijn. Tot nu toe waren de meningen over deze kwestie nogal verdeeld. Met het oog op de afhankelijkheid van vectoren (bovenbouw) menen wij wel aan deze verdeeldheid een eind te mogen maken.

Wij hebben ons in het voorgaande niet bekommerd om de definitie van het begrip 'hoek'. Het lijkt ons niet belangrijk of men een hoek wil definiëren als doorsnede van halve vlakken of als figuur van twee halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt.
Bij de definitie van veelhoeken en veelvlakken ligt dat echter anders. Wij spreken over oppervlakte en omtrek van een driehoek, van een rechthoek. Dat kan alleen als wij driehoek en rechthoek als tweedimensionale figuren zien. Dat behoort in de definities dus ook tot uitdrukking te komen.

In dit verband willen we ook meteen een novum introduceren in onze wiskundetaal.
Wij willen onderscheid maken tussen bijvoorbeeld

de cirkel (M, r)
de cirkelschijf (M, r)

De cirkel is een gesloten lijn. We kunnen over zijn lengte spreken. De cirkelschijf daarentegen is tweedimensionaal en heeft een omtrek en een oppervlakte.
Analoge opvattingen hebben wij over bolvlak en bol.

6 Analyse en goniometrie

6.1 *Continuïteit*

Er zijn geen moeilijkheden ten aanzien van de locale continuïteit. Uitdrukkingen zoals

de functie f is continu in het getal 3

hebben nooit aanleiding gegeven tot misverstanden. Dat men in plaats van over 'het getal 3' soms spreekt over 'het punt 3' is strikt genomen een taalmisbruik, maar dan wel één van een acceptabele soort.
Spreekt men echter over continuïteit als globale eigenschap, dan is er soms een mogelijkheid tot het ontstaan van misverstanden aanwezig. Voor dit geval bevelen wij aan niet zonder meer te zeggen 'de functie f is continu', maar steeds het interval (of de vereniging van intervallen) te noemen waarop de bewering betrek-

king heeft. Dus bijvoorbeeld

de functie f is continu in $\langle 3, \rightarrow \rangle$
de functie f is continu in zijn domein.

Ten aanzien van de eenzijdige continuïteit merken wij op, dat deze onzes inziens een 'ad libitum' is.

6.2 *Differentieerbaarheid*
Hierover kunnen we heel kort zijn door te volstaan met: alles, wat voor de continuïteits-terminologie geldt, geldt ook voor de differentieerbaarheidsterminologie.

6.3 *Limieten*
Men ontmoet nog al eens notaties, zoals

als $x \rightarrow 4$, dan $f(x) \rightarrow 5$

die in wezen de structuur van een implicatie hebben (ten onrechte). Daar menen wij ons tegen te moeten verzetten. Alleen notaties in de geest van

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 5$$

vinden wij dus bruikbaar.

Bij de zogenaamde 'oneigenlijke' limieten stellen wij ons op het standpunt dat het symbool ∞ in officiële teksten niet onmiddellijk mag volgen op een gelijkteken. In examenopgaven kan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$$

dus wel voorkomen, maar

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

hoewel eventueel acceptabel in het boek en op het bord, vinden wij niet geschikt in examenopgaven.
Overigens stellen wij ons op het standpunt, dat ∞ hetzelfde betekent als $+\infty$; de al jaren lang bestaande verwarring in dat opzicht dient uit de weg geruimd te worden. Deze beslissing noopt wel tot wat langere notaties, zoals

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} = \lim_{x \to -\infty} x^{-1} = 0$$

Naar onze mening geschikte notaties voor eenzijdige limieten zijn

$$\lim_{x \to 0,\, x > 0} x \ln x = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

omdat deze door iedereen begrepen worden. In de klas en in de boeken is natuurlijk ook heel goed bruikbaar

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$$

6.4 *Maxima en minima*

In twee verschillende opgaven van het experimentele vwo-examen 1971 staan de volgende zinnen:

> Voor welke waarden van p heeft de functie g geen uiterste waarden?
> Bereken voor $k = 2$ de uiterste waarden van $g(x)$.

Men schijnt dus zowel naar de uiterste waarden van een functie als naar de uiterste waarden van een variabele te kunnen vragen. En dit voorbeeld maakt dan wel meteen heel duidelijk hoe nodig het is wat orde te scheppen in de bestaande chaos.
Nu stellen wij meteen maar voorop, dat we eigenlijk beide bovenstaande formuleringen wat slordig vinden, hoewel we de voorkeur hebben voor de tweede van het stel. Wij vinden namelijk dat het zoeken van een uiterste waarde (maximum, minimum, extreem) altijd betekent het zoeken naar een maximaal element of minimaal element van een welbepaalde verzameling (die voorzien is van een orde). Nu geeft de fameuze auteur Bourbaki hiervoor de volgende definitie (Théorie des ensembles, chap. 3):

> Laat E een van een orde voorziene verzameling zijn. Men zegt dan dat $a \in E$ het kleinste (minimale) element van E is, als voor elke $x \in E$ geldt $x \geqslant a$.

Deze definitie vinden wij acceptabel voor schoolgebruik, hoewel hij ons dwingt te accepteren dat 3 het minimale element is van $\{3\}$. En . . . hoewel hij ons dwingt te aanvaarden, dat zo'n verzameling E ten hoogste één minimaal element (en ten hoogste één maximaal element) kan hebben.

Juist dat laatste heeft vergaande consequenties voor ons onderwijs. Aan de hand van een tweetal voorbeelden onderzoeken we die nader.
Volgens de opvattingen die wij altijd gehanteerd hebben, heeft de functie

$$f : x \to x^5 - 2x^3 + x$$

een relatief minimum $f(1)$ en een relatief maximum $f(-1)$ en die twee relatieve

extremen zijn allebei gelijk aan 0. Maar het bereik van f is $\mathbb{R}$ en het bereik van f heeft dus geen extremen.
Het tweede voorbeeld betreft de functie

$$f : x \to (x - 3)\sqrt{x}$$

Volgens de oude opvattingen heeft $f(x)$ een (absoluut) minimum, namelijk $f(1) = -2$. Verder heeft $f(x)$ een randmaximum, namelijk $f(0) = 0$. Het bereik van f heeft -2 als minimum, maar bezit geen maximum.

De bestaande chaos kunnen wij dus niet verdrijven met de aanbeveling: vraag voortaan alleen maar naar extreme elementen van het bereik van de bestudeerde functies. Want randextremen en relatieve extremen zijn belangrijk bij het onderzoek van een functie, belangrijk namelijk voor het tekenen van de grafiek van die functie. En daarom zijn wij niet bereid afstand te doen van deze extremen, die geen extremen van het bereik hoeven te zijn.
Nu kunnen we ons uit dit dilemma redden door naast de globale beschouwing van een functie ook een locale beschouwing in te voeren. Daarmee bedoelen we het volgende.
Laat a een element van het domein van een functie f zijn. Kies een open interval I waar a toe behoort, en bekijk het f-beeld van I. Het is daarvoor niet nodig dat I deelverzameling is van het domein van f (zie paragraaf 4.4 van dit rapport). Nu kan het gebeuren, dat $f(a)$ een extreem element is van dat f-beeld van I. In dat geval noemen we $f(a)$ een 'locaal extreem van $f(x)$'. Dus:

> We noemen $f(a)$ een locaal extreeem van $f(x)$ indien er een open interval I om a bestaat zo, dat $f(a)$ extreem is van het f-beeld van I.

Op grond van deze definitie zijn al onze oude absolute extremen, relatieve extremen en randextremen nu locale extremen geworden. Dit betekent een vereenvoudiging in de terminologie en deze bevelen wij van harte aan. Als standaardformulering voor examenvraagstukken kan dus voortaan dienen:

> Bereken de locale extremen van $f(x)$ en bepaal het bereik van f.

6.5 *Differentiaalvergelijkingen*

We stuiten hier op twee vrij moeilijke problemen:
a hoe noteren we bij voorkeur een differentiaalvergelijking?
b wat verstaan we onder het oplossen van een differentiaalvergelijking?
We beginnen met het tweede probleem. Daarbij gaan we, bij wijze van voorbeeld, uit van de differentiaalvergelijking

$$(y + 4)\,\mathrm{d}x = (x - 2)\,\mathrm{d}y$$

Aan deze vergelijking kan voldaan worden door een geschikte keuze van de waarde van x, van de waarde van y en van de verhouding van dx en dy. Bijvoorbeeld is eraan voldaan door

$$x = 4, \quad y = -1, \quad dx : dy = 3 : 2$$

We geven nu de voorkeur aan een meetkundige terminologie en zeggen, dat hierdoor een lijnelement bepaald wordt en wel het lijnelement in het punt (4, – 1) met de richtingsverhouding 3 : 2 of met de richtingsvector $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Natuurlijk is het niet onze bedoeling een dergelijk lijnelement een oplossing van de differentiaalvergelijking te noemen. De oplossingen van de vergelijking zijn krommen; ze heten integraalkrommen van de vergelijking. Een kromme is een integraalkromme van de differentiaalvergelijking als al zijn raaklijnelementen aan de vergelijking voldoen. Bijvoorbeeld is de lijn $x = 2$ een integraalkromme van de genoemde vergelijking. Ook de lijn $y = -2x$ is er één. Nu willen we niet één integraalkromme hebben en ook niet enkele integraalkrommen, maar een volledige verzameling. Dat wil zeggen een verzameling integraalkrommen waarbij als het ware alle lijnelementen die aan de differentiaalvergelijking voldoen, een beurt hebben gekregen. Een dergelijke verzameling is de verzameling van alle lijnen door het punt (2, – 4):

$$a(x-2) + b(y+4) = 0, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$$

We geven nog een tweede voorbeeld, omdat in het voorgaande eenvoudige voorbeeld enkele complicaties verdoezeld zijn. We kiezen

$$x\, dy + y\, dx = 0$$

Het is duidelijk, dat door

$$xy = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

een verzameling integraalkrommen wordt bepaald.
We stuiten nu echter op twee moeilijkheden:

a Deze verzameling integraalkrommen voldoet niet aan de eis, dat alle lijnelementen die aan de differentiaalvergelijking voldoen, 'een beurt krijgen'. Elk lijnelement in de oorsprong (0, 0) voldoet namelijk aan de differentiaalvergelijking. Maar alleen de twee daarvan die langs een coördinaat-as gericht zijn, raken aan één van de krommen $xy = c$ (namelijk aan de ontaarde kromme $xy = 0$). En het is niet mogelijk integraalkrommen te vinden waaraan de andere lijnelementen in de oorsprong raken.
Een punt waarin elk lijnelement aan de differentiaalvergelijking voldoet, noemen we een singulier punt (van die vergelijking). Deze singuliere punten zullen we een

uitzonderingspositie moeten geven. Zo komen we tot de definitie:
Een volledige verzameling integraalkrommen van een differentiaalvergelijking is een verzameling integraalkrommen met de eigenschap, dat elk lijnelement in een niet-singulier punt dat aan de vergelijking voldoet, raaklijnelement is van een integraalkromme van die verzameling.
Volgens deze definitie is $xy = c$, $c \in \mathbb{R}$, nu wèl een volledige verzameling integraalkrommen.

b Heeft het zin te vragen naar alle volledige verzamelingen integraalkrommen of is het beter met één verzameling tevreden te zijn?

Er zijn talloze volledige verzamelingen integraalkrommen. Bijvoorbeeld

$$xy = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$
$$|xy| = c, \qquad c \in \mathbb{R},\ c \geqslant 0$$
$$xy = c \text{ voor } x \geqslant 0 \text{ en } xy = 2c \text{ voor } x < 0, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Men ziet nu, dat het niet mogelijk is alle volledige verzamelingen integraalkrommen op te sommen.

Conclusie: onder het oplossen van een differentiaalvergelijking verstaan we het vinden van één volledige verzameling integraalkrommen.

Nu het eerste probleem: de schrijfwijze van de vergelijking. We keren daartoe terug naar ons eerste voorbeeld, dat we genoteerd hebben

$$(y + 4)\,\mathrm{d}x = (x - 2)\,\mathrm{d}y$$

Een andere notatie is

$$y + 4 = (x - 2)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Helaas is de zo genoteerde vergelijking niet gelijkwaardig met de vorige. Lijnelementen waarvoor $\mathrm{d}x = 0$ voldoen niet meer aan de tweede vergelijking. In alle van $(2, -4)$ verschillende punten van de lijn $x = 2$ voldoet dus geen enkel lijnelement meer. Een volledige verzameling integraalkrommen is nu dus de verzameling van alle lijnen door het punt $(2, -4)$ met uitzondering van de lijn $x = 2$.
Het lijkt ons ongewenst door een afwijkende schrijfwijze uitzonderingen te scheppen die het probleem nodeloos compliceren en zelfs het inzicht in de betekenis van een differentiaalvergelijking kunnen bemoeilijken.
Een andere ongewenste schrijfwijze is

$$x + y \cdot y' = 0$$

De y' wijst op differentiatie van een functie. Blijkbaar wordt hier dus bedoeld de functies $x \to y(x)$ te vinden waarvoor

$$x + y(x) \cdot y'(x) = 0$$

Relaties die geen functies zijn, voldoen niet meer. Dit heeft vervelende gevolgen. Zouden we gevraagd hebben op te lossen

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

dan hadden we gevonden

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Vragen we echter op te lossen

$$x + y \cdot y' = 0$$

dan vinden we

$$x \to \sqrt{(1 - x^2)} \quad \text{voor} \quad -1 < x < 1$$
$$x \to -\sqrt{(1 - x^2)} \text{voor} \quad -1 < x < 1$$

Ook nu worden door een niet-adekwate schrijfwijze moeilijkheden in het leven geroepen die beter achterwege kunnen blijven.

6.6 *Integralen en primitieven*

Ten aanzien van de notaties is de integraalrekening voor ons een vrijwel probleemloos gebied. Bijna alles wat er te zeggen valt, is te lezen uit het onderstaande voorbeeld:

$$\int_2^3 3x^2\,\mathrm{d}x = [x^3]_2^3 = 19$$

Het enige wat hier nog aan toegevoegd kan worden, is dat we geen tegenstanders zijn van het gebruik van ∞ als bovengrens of $-\infty$ als benedengrens, mits gehanteerd op de volgende manier:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{p \to \infty} \int_0^p \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{p \to \infty} (1 - \mathrm{e}^{-p}) = 1$$

We zouden echter willen pleiten voor een beperking tot één oneigenlijke grens. En andere typen van oneigenlijke integralen vinden wij eventueel in de klas nog wel bruikbaar, maar niet op het examen.

Een opmerking die in elke andere paragraaf ook gemaakt zou kunnen worden, is dat wij het gebruik van indices aanbevelen. Denkende aan primitieven geeft dit aanleiding tot het volgende voorbeeld.
Men schrijve niet

de primitieven van $f : x \to 2x$ zijn de functies $F : x \to x^2 + c$

(en zeker niet 'is de functie . . .'), maar wel

de primitieven van f zijn de functies $F_c : x \to x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Dit voorbeeld van het gebruik van indices zou met vele andere aangevuld kunnen worden; bijna in elk gebied van ons vak werken wij in feite met geïndiceerde verzamelingen.

Men treft nog al eens aan de mededeling, dat $x \to \ln |x|$ een primitieve is van $x \to \frac{1}{x}$. Daar is natuurlijk niets tegen in te brengen. Maar ook vindt men wel de bewering, dat door $x \to \ln |x| + c$ àlle primitieven van die functie worden gedefinieerd. Hiertegen willen wij protesteren. Tot de verzameling van alle primitieven behoort bijvoorbeeld ook de functie die weergegeven wordt door

$x \to \ln x + 5$ voor $x > 0$
en $x \to \ln(-x) + 7$ voor $x < 0$

6.7 *Goniometrie*

De redactie van opgaven uit de goniometrie heeft nooit moeilijkheden gegeven. Maar het schriftelijk weergeven van de oplossingsweg en van het tenslotte gevonden eindresultaat is altijd een ietwat hachelijke zaak geweest. En dat is er niet beter op geworden bij de laatste leerplanwijzigingen. Wanneer men proberen gaat de oplossingsverzameling van een simpele goniometrische ongelijkheid als

$$\sin x > \tfrac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

op een verantwoorde manier te noteren, dan zoekt men een notatie voor de vereniging van oneindig veel disjuncte intervallen. En in de onderbouw is men nooit verder gekomen dan de vereniging van twee, hooguit drie verzamelingen.
Nu gaat er van de zin waarmee deze paragraaf begint, een geruststellende werking uit. Het daar genoemde feit heeft tot gevolg dat wij voor de goniometrie een grotere dosis vrijblijvendheid in onze aanbevelingen kunnen verpakken. Wat we hieronder ook voor willen stellen, het zal toch geen enkele invloed hebben op de redactie van examenopgaven. En daarom kan elke docent of auteur ermee doen of laten wat hij wil.

Laten wij nu eens met elkaar vergelijken het volgende tweetal notaties voor de oplossing van een simpele goniometrische vergelijking:

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \iff \exists\ k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

De tweede formulering is correct. Maar daar staat tegenover dat het gebruik van juist deze kwantor problemen oplevert voor vele leerlingen. Correct hanteren ervan is te leren, maar het kost aandacht en die wordt onttrokken aan de wiskundig-inhoudelijke zaken waar het eigenlijk om gaat. De eerste formulering is onverdedigbaar. Substitueert men bijvoorbeeld 2 voor de vrije variabele k, dan ontstaat er een onware uitspraak.
Het probleem is dus: hoe raken we zowel die k als die kwantor kwijt?

Nu heeft dit probleem een volstrekt legitieme oplossing en die is gelegen in het gebruik van

x is gelijk aan $\frac{\pi}{6}$ naar de modulus 2π

met als bijpassende notatie

$$x = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

De eerste indruk is misschien, dat hier aantrekkelijke kanten aan zijn verbonden. Het op de achtergrond liggende klokrekenen biedt aanknopingspunten. Bovendien ligt in niet te ver verschiet het tijdstip waarop over ekwivalentie-relaties gesproken zou kunnen worden op een tamelijk abstract niveau.
Bij nader inzien merken we, dat de problemen zo nog niet uit de wereld zijn. Want hoe hanteer je deze terminologie in de oplossing van de ongelijkheid

$$\sin x > \tfrac{1}{2}\ ?$$

Moet je dan gaan zeggen

x is naar de modulus 2π gelijk aan een of ander getal uit het interval $\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \rangle$?

Het klinkt niet zo gek, maar hoe schrijf je dat op? En ziedaar, als een duveltje uit een doosje springt die kwantor weer naar boven.

Er zijn natuurlijk bezwaren aan te voeren tegen ad-hoc-notaties. Maar het komt ons voor dat die bezwaren minder gewicht in de schaal leggen dan de zeer gewichtige tegenwerpingen tegen het gebruik van de traditionele k. Daarom leggen we u de volgende mogelijkheden voor:

$$\sin x = \tfrac{1}{2} \iff x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}_{2\pi}$$

$$\sin x > \tfrac{1}{2} \iff x \in \left\langle\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\rangle_{2\pi}$$

Daarbij wordt het symbool in het rechterlid van de eerste regel gedefinieerd (in woorden!) als de verzameling van alle getallen die naar de modulus 2π gelijk zijn aan één van de tussen de accoladen genoemde getallen. En dat in de tweede regel betekent de verzameling van alle getallen die naar die modulus gelijk zijn aan een element van het genoemde interval.
Zo men dat wil, kan men in die omschrijving het woord 'modulus' nog wel wegwerken. En het is ook denkbaar, dat men in plaats van 2π liever mod 2π zou willen aanhangen.

Zekerheidshalve herhalen we, nu het hoge woord er uit is, dat deze aanbeveling de onvoorzichtigste uit dit hele rapport is. Toch hopen we, dat u het de moeite waard vindt er eens mee te experimenteren.

6.8 *Kleinigheden*

De juiste spelling van de namen van de cyclometrische functies is

arcsin, arccos, arctan

De natuurlijke logaritme wordt aangeduid met 'ln', de logaritmen met een van e verschillend grondtal g worden geschreven als '${}^{g}\log$', ook als dat grondtal g gelijk is aan 10.

7 Meetkunde met vectoren

7.1. *Inleiding*

De titel van dit hoofdstuk is misschien voor sommigen slecht gekozen. Zij zijn wellicht van oordeel dat in het 'vak' wiskunde II lineaire algebra wordt bedreven, die dan aan de hand van voorbeelden uit de euclidische of affiene ruimte wordt toegelicht. In die opvatting zou 'vectoren met meetkunde' een betere titel zijn.
Zonder een voorkeur uit te willen spreken verwijst de gekozen titel naar een andere opvatting: we bedrijven meetkunde in de euclidische of in de affiene ruimte; bij de beschrijving van die ruimte maken we gebruik van een algebraïsch model.
Voor de keuze van dat model heeft men een aantal mogelijkheden tot zijn beschikking. Om maar één van de mogelijkheden waaruit elke docent kan en moet kiezen, met name te noemen: punten kunnen met vectoren geïdentificeerd worden, maar ook kunnen deze twee begrippen streng gescheiden gehouden worden. In het licht daarvan wordt het een onbelangrijke vraag, of je de kentallen van een vector nu verticaal boven elkaar of horizontaal naast elkaar 'moet' schrijven.
Tenminste ... voor de klaspraktijk is die vraag onbelangrijk. Voor examendrukwerk verdient de verticale schrijfwijze de voorkeur, omdat die begrijpelijk is voor elke kandidaat, ongeacht zijn opleiding.

7.2 *Lijnen en vlakken*
Lijnen en vlakken worden voorgesteld door vergelijkingen, zoals

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2$$

Zodra er kentallen ingevoerd zijn krijgen die vergelijkingen, een ander uiterlijk:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 5 \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{Bmatrix} + \lambda_1 \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \lambda_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

De vector $\boldsymbol{b}$ wordt 'richtingsvector' van de lijn genoemd, $\boldsymbol{b}_1$ en $\boldsymbol{b}_2$ heten overeenkomstig richtingsvectoren van het vlak. Desgewenst zou men $\boldsymbol{a}$ kunnen noemen een 'steunvector', maar gebruik van deze term willen wij facultatief stellen.

Nu is in het voorgaande enkele malen het woord 'vergelijking' gebruikt. Men pleegt echter ook

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$

te betitelen als vergelijking van een vlak. Daaruit vloeit de behoefte voort voor de hiervoor gebruikte notaties een andere term tot zijn beschikking te hebben. Dat zou kunnen zijn 'vectorvoorstelling' of 'parametervoorstelling'. Het is begrijpelijk dat de laatstgenoemde term de voorkeur zal hebben van diegenen die punten met vectoren identificeren.

7.3 *Stelsel onafhankelijke vectoren*
Het woord 'stelsel' wordt in de wiskunde voornamelijk gebruikt om er een geordend n-tal objecten mee aan te geven. Dit houdt in, dat een voorbeeld van een correcte vraag is

is $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ een onafhankelijk stelsel?

Tegen de variant

is $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ een onafhankelijk stelsel?

bestaan natuurlijk bezwaren. De notatie $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ wordt immers geacht hetzelfde voor te stellen als de notatie $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$.

Daarentegen is de uitspraak

$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ is een basis

helemaal in orde, zolang men met die basis niets anders wil doen dan willekeurige vectoren schrijven als lineaire combinaties van de basisvectoren:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{c}$$

Wil men echter een vector gaan aanduiden door middel van zijn kentallen, dan zal men eerst van die basis een geordend drietal $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ moeten maken.
Dit soort subtiele verschillen lijkt misschien onbelangrijk, maar kan voor een goed begrip vaak van groot belang zijn.

7.4 *Inprodukt en lengte*
Wij stellen voor het inprodukt van de vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ te noteren $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (met de stip op 'halve hoogte').
Het scalaire produkt wordt in principe zonder stip geschreven $\lambda \boldsymbol{a}$. We geven enkele voorbeelden:

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q}$
$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ is het scalaire produkt van $\boldsymbol{c}$ met het inprodukt van $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$

Aan deze produktnotatie voor het inprodukt geven wij de voorkeur boven de vrij frequent gebruikte $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, om te voorkomen dat men dat leest als een geordend paar vectoren.

Binnen onze nauwe horizon zien we geen verschil tussen de gebruikelijke meetkundige interpretatie van de lengte van een vector en het meer theoretische en algemene begrip 'norm'. Daarom lijkt het ons overbodig naast elkaar $|\lambda|$ voor de modulus van een reëel getal en $\|\boldsymbol{a}\|$ voor de lengte van een vector te gebruiken. We stellen voor die lengte dan ook maar als $|\boldsymbol{a}|$ te schrijven. In plaats van

$$\|\lambda \boldsymbol{a}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$$

kunnen we dus schrijven

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$$

Hierin is de stip op halve hoogte wenselijk om de strepen van elkaar te scheiden. Dit levert geen gevaar op voor verwarring met een inprodukt.
De formule voor de hoek φ van (en niet 'tussen') twee vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ kan nu geschreven worden in de vorm

$$|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \varphi = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

7.5 *Afbeeldingen en matrices*

De invoering van het begrip 'matrix' kan heel goed gebeuren door een verkorte notatie te ontwerpen voor de coördinaten-formules van een afbeelding. En het samenstellen van twee afbeeldingen leidt dan ongedwongen tot de invoering van het produkt van de bijbehorende matrices.
Voor leerlingen is dat al een heel pittige abstractie. Als zij amateur zijn in de letterlijke betekenis van dat woord, liefhebber dus, dan zijn zij misschien nog wel bereid en in staat om nog verder te gaan in dat abstractieproces: afbeeldingen en matrices met elkaar te identificeren. Maar voor amateurs in overdrachtelijke zin gaat dat ons te ver. Wij zien dus geen heil in zinnen zoals

A is de afbeelding $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

maar geven de voorkeur aan

A is de afbeelding met matrix $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

En dit leidt dan verder tot vragen zoals bijvoorbeeld

Wat is de matrix van de afbeelding A^{inv}?

zodat wij de term 'inverse matrix' voor examendrukwerk ook niet aanbevelen.

Dit neemt natuurlijk niet weg, dat men ook matrices heel goed van eigennamen kan voorzien. Een opgave zoals

Gegeven zijn de matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Bereken nu de matrix $P \cdot Q$ en ook $Q \cdot P$.

is zeker zinvol. Men zou zelfs kunnen overwegen een aparte notatie te bedenken voor 'de matrix van de afbeelding A'. Maar daar willen wij geen voorstel voor doen.

Wanneer een lineaire ruimte L wordt afgebeeld naar een andere lineaire ruimte, dan noemen we de verzameling van de beelden van de vectoren uit L natuurlijk weer het bereik van de afbeelding. De term 'beeldruimte' willen we reserveren voor het geval waarin we te maken hebben met een lineaire afbeelding.
Die deelruimte van L die gevormd wordt door de vectoren die de nulvector van de beeldruimte als beeld hebben, willen we de 'kern' van de betreffende lineaire afbeelding noemen.
Tenslotte merken we nog op, dat we de termen 'reguliere afbeelding' en 'singuliere afbeelding' bruikbaar en aanbevelingswaardig vinden. En dat we geen behoefte hebben aan de term 'getransponeerde matrix'. De determinant van een matrix P willen wij aanduiden met $\det P$ en niet met $|P|$.

Verslag van de Voorlichtingsvergaderingen V.W.O. Wiskunde

In het najaar van 1972 zijn veertien regionale vergaderingen gehouden, waar het examenprogramma v.w.o.-wiskunde I en II onderwerp van discussie is geweest. Op deze vergaderingen is uitvoerig gesproken over de problemen die zich voordoen bij de invoering van een nieuw, gemoderniseerd leerplan in een periode die samenvalt met de invoering van een nieuwe onderwijsstructuur op basis van de Wet op het Voortgezet Onderwijs.
Een uniform leerplan, door traditie bepaalde exameneisen, neergelegd in een examenprogramma dat aangevuld wordt met series examenopgaven die in de loop van vele jaren zijn verschenen, gaven de docenten een sterk gevoel van zekerheid. Er bestond duidelijkheid ten aanzien van de te behandelen onderwerpen, men wist waar de accenten in de leerstof lagen, terwijl men de kleine verschuivingen in die accenten meestal op redelijke wijze kon voorspellen.
In plaats daarvan heerst nu een grote onzekerheid wat betreft de doelstelling van het gemoderniseerde onderwijs in de wiskunde, de omvang van de leerstof, de accenten in die leerstof, het niveau van behandeling etc.
Op de vergaderingen kwamen telkens aspecten van het onderwijs, voortvloeiende uit die onzekerheid, aan de orde.
Uit de reacties na afloop van de vergaderingen bleek dat velen de gegeven voorlichting op prijs gesteld hebben, hoewel sommigen de discussie nog te vaag en de afspraken nog te weinig concreet vonden.

1 *Doelstelling*
Wanneer elke docent bij zijn onderwijs in de wiskunde op scholen voor v.w.o. een duidelijk omschreven doelstelling voor ogen zou hebben, zouden wellicht moeilijkheden bij de interpretatie van het leerplan en het examenprogramma, zo dit algemeen werd aanvaard, nauwelijks voorkomen.
In deze tijd zijn de doelstellingen van het wiskunde-onderwijs zelf in discussie, zodat het slechts mogelijk is op grond van enkele, algemeen aanvaarde doelstellingen een richting aan te geven waarin het onderwijs in de wiskunde zich kan ontwikkelen.
De C.M.L.W. heeft in de Toelichting op het leerplan wiskunde van de bovenbouw van het v.w.o., gedateerd september 1970, bij de bespreking van het probleem inzake de mate van strengheid en exactheid die bij het v.w.o. nagestreefd dient te worden o.a. de vraag gesteld: ‘Hoe kunnen talenten als inventiviteit en fantasie ontwikkeld worden? ’
Daar inventiviteit, creativiteit en fantasie zeer belangrijke factoren zijn die nodig zijn voor een succesvol studeren bij het wetenschappelijk onderwijs, zal de nadruk hierop bij het v.w.o. duidelijk groter zijn dan die was bij het v.h.m.o.
Tegen deze achtergrond zal een training in technische vaardigheden aangevuld moeten worden met het aanbrengen van begrip en inzicht, hetgeen in het verleden niet steeds het geval was. De betrekkelijk geringe omvang van de examenstof bij

het v.h.m.o. opende de mogelijkheid via een langdurige training in het maken van zeer vele examenopgaven, dat leerlingen op grond van hun geheugen tot redelijke prestaties tijdens het schriftelijk examen kwamen, maar bij het mondeling examen waren zij veelaal niet instaat de door hen gekozen oplossingsmethoden te motiveren.

De nieuwe leerstof voor het vak wiskunde bij het v.w.o. bestrijkt een groter terrein, vraagt meer inzicht en daarop gebaseerde vaardigheden en doet derhalve minder een beroep op het geheugen van de leerlingen.

Bij de beoordeling van proefwerken en examenwerk zal niet de goede uitkomst alleen bepalend zijn voor de score, maar meer nog de wijze van oplossing, de juiste hantering van de logica en de gestrengheid waarmede de gedachtengang is weergegeven.

2 *De A-kandidaten*

De wet geeft aan de v.w.o.-leerling de mogelijkheid om een pakket van zeven vakken te kiezen. De W.V.O. gaat daarbij uit van de gelijkheid van de vakken voor alle kandidaten. Van een A-leerling die een zeker vak kiest moet derhalve hetzelfde geëist worden voor dat vak als van de B-leerling, zowel bij het centraal schriftelijk examen als bij het schoolonderzoek.

Dat hierdoor in de vierde klas enige moeilijkheden zouden ontstaan voor de A-leerling die geen wiskunde in zijn examenpakket zal kiezen, was te voorzien. Het zou goed zijn, zo werd op de vergaderingen opgemerkt, het leerplan nog eens te bezien vanuit het gezichtspunt dat de A-leerling in dat jaar nog zoveel mogelijk voor hem nuttige wiskunde moet krijgen. Daarnaast verdient het aanbeveling door ruiling van onderwerpen reeds in de vierde klas een eenvoudige inleiding op de differentiaalrekening alsmede de elementaire daarbijbehorende technieken te geven. Deze stof is immers voor het vak economische wetenschappen onontbeerlijk; tegelijkertijd is dan de B-leerling geholpen die deze stof nodig heeft voor natuurkunde.

Een geheel andere, niet voorziene moeilijkheid is ontstaan door de ontwikkelingen rondom de omnivalentie van de diploma's. De leerlingen bemerken dat vele faculteiten wiskunde-I in het pakket vragen en kiezen op grond daarvan wiskunde als examenvak en niet, zoals de bedoeling van de wetgever was, op grond van capaciteiten en interesse.

Het is voor de docenten bijna onmogelijk om leerlingen met zoveel verschil in aanleg en belangstelling in gelijke tijd op gelijk examenniveau te brengen. Een herverdeling van de leerstof over de vakken wiskunde-I en wiskunde-II, waarbij hoogleraren van andere disciplines worden ingeschakeld, lijkt dan ook noodzakelijk. Al is dit probleem reeds in studie genomen binnen de C.L.M.W., een oplossing op korte termijn kan men hiervan niet verwachten.

Sommige scholen komen enigszins tegemoet aan de moeilijkheden door de atheneum-A kandidaten een uur méér wiskunde te geven. (Het lesrooster voor atheneum-A is het minst krap). De gymnasiale afdelingen kunnen echter niet of nauwelijks op een dergelijke wijze worden geholpen.

De suggestie om voor de A-kandidaten een vak wiskunde-III in te voeren, lijkt minder acceptabel:
a Als dit vak het stempel van gemakkelijker, minder diepgaand moet dragen, zou het voor de universiteit geen waarde hebben, zolang deze van mening blijft dat wiskunde-I onverkort geëist moet worden.
b De keuzemogelijkheid voor de leerling tussen wiskunde-I en wiskunde-III zou impliceren dat het moment van studiekeuze weer naar voren gebracht zou worden.

3 *Wiskunde-II*
De hierboven gesignaleerde ontwikkeling heeft ook gevolgen voor wiskunde-II. Het vak wordt, vanwege de beperking tot ten hoogste twee voorgeschreven vakken per faculteit of subfaculteit, voor geen·enkele studierichting geëist. Teneinde hun toekomstige studiemogelijkheden zo ruim mogelijk te houden zullen de leerlingen de neiging hebben om vakken, die niet geëist worden, te laten vallen.
Het vak blijft overigens bedoeld voor de leerlingen die zowel aanleg als interesse voor de wiskunde hebben en daarom een groter deel van hun tijd voor dat vak willen reserveren. Het zullen in het algemeen leerlingen zijn die hun vervolgstudie ook in de mathematische sector zien liggen (wiskunde, natuurkunde, technische wetenschappen).
Men kan zich afvragen of de onderwerpen die in wiskunde-II ter sprake komen de meest geschikte zijn. De reeds eerder genoemde bezinning op een eventuele herverdeling van de stof zal hiermede rekening moeten houden.
Het z.g. 'keuzeonderwerp' is bij uitstek geschikt voor deze leerlingen. Zoals bekend, is het de bedoeling dat aan het keuzeonderwerp veertig à vijftig lesuren worden besteed. In de aanlooptijd zal men mogelijk met minder moeten volstaan teneinde de onderwerpen voor het schriftelijk eindexamen de eerste jaren voldoende aandacht te kunnen geven. Binnen de kring van de in het programma genoemde onderwerpen is de docent geheel vrij in de keuze van de leerstof. De door het I.O.W.O. aangeboden boekjes zijn bedoeld als handreiking, niet als voorschrift. Wel is men verplicht tenminste één proef van het schoolonderzoek aan het keuzeonderwerp te wijden. Het lijkt wenselijk deze proef schriftelijk af te nemen, zodat het gemakkelijker is om van buiten de scholen kennis te nemen van wat er op dit gebied zich binnen de scholen ontwikkelt.

4 *Urentabellen*
Veel docenten zouden graag zien dat er meer uniformiteit zou komen in de aantallen uren die voor wiskunde worden uitgetrokken.
De gronden waarop in de ene school de wiskunde een bevoorrechte, in de andere een nadelige positie kreeg, zijn voor hen zeer onduidelijk.
De wet laat echter het geven van voorschriften van de zijde van het ministerie niet toe.
Hoe men in een school ook over deze materie denkt, men dient drie zaken met elkaar in evenwicht te houden:
a de normen bij toelating, determinatie en bevordering in de onderbouw;
b de keuzevoorlichting die de school(dekaan) geeft;

c het aantal uren dat in de lessentabel voor elk vak wordt uitgetrokken.
Elke school zal op basis van zijn eigen doelstellingen het onderwijs moeten inrichten op een wijze die terzake van deze drie aspecten verantwoord is.

Veel docenten meenden nu al onvoldoende tijd te hebben om de gehele leerstof te behandelen en maakten zich zorgen over de situatie die zal ontstaan als bovendien het onderwerp 'waarschijnlijkheidsrekening en statistiek' aan wiskunde-I wordt toegevoegd.
Hoewel op dit moment nog niet met zekerheid te bepalen is of het programma dan haalbaar of te ambitieus zal zijn, moet men wel bedenken dat elke docent na een inwerkperiode minder tijd nodig zal hebben dan de eerste keer, vooral ook omdat hij er kijk op krijgt welke delen van het gebruikte boek in aanmerking komen om summier behandeld of overgeslagen te worden.
Docenten van experimenterende v.w.o.-scholen hebben dit duidelijk ondervonden.
Het gevaar om terug te vallen in het aanleren van technieken in plaats van het aankweken van begrip en inzicht, is bij een krap aantal uren bijzonder groot. Op grond van de gestelde doeleinden dient alles in het werk gesteld te worden om een dergelijke ontwikkeling te voorkomen.

5 *Leerboeken*
De leerboeken zijn, vrijwel onafhankelijk van elkaar, geconcipieerd op een tijdstip waarop nog weinig vaststond van de exameneisen. Naast het ontwerp leerplan voor de rijksscholen was slechts een toelichting van de zijde van de C.M.L.W. voorhanden. Elke schrijversgroep heeft zodoende een eigen interpretatie gegeven van het voorgestelde leerplan. Dit veroorzaakte enige divergentie van de diverse methodes.
Het is in het algemeen, maar zeker in het licht van het bovenstaande, op dit moment voor de docent belangrijk kennis te nemen van de verschillende in gebruik zijnde boeken, om zich zodoende een beter oordeel te kunnen vormen over het gewicht, de vorm en de uitgebreidheid van een onderwerp dat hij bezig is te behandelen. Langzamerhand zullen in dit opzicht de gebruikte boeken wel naar elkaar toegroeien.
Het ligt in de bedoeling om representanten uit de schrijversgroepen van de meest gebruikte boeken te betrekken bij de samenstelling van de opgaven voor de examens, zodat er een garantie is dat de opgaven aansluiten bij het gegeven onderwijs.

6 *Nomenclatuur*
In de loop van 1973 hoopt de nomenclatuurcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren haar eindrapport uit te brengen.[1] Het ligt in de bedoeling om bij de redaktie van de examenopgaven zoveel mogelijk de adviezen van deze commissie te volgen. Bij controversiële punten zal men b.v. door het gebruik van woorden in plaats van omstreden symbolen ervoor dienen te zorgen dat geen der kandidaten benadeeld wordt. Het betrekken van enige auteurs van

[1] Het rapport is afgedrukt op p. 241 ev. van dit nummer

leerboeken bij het opstellen van de opgaven geeft ook hierbij de nodige garanties.

7 *Oefenmateriaal*
Het bij Wolters-Noordhoff verschenen boek 'Opgaven voor Wiskunde I en II', samengesteld door een commissie van de Vereniging van Wiskundeleraren, geeft enig idee van het te verwachten niveau.
Niet alle opgaven uit het boek zijn als examenopgaven geschikt.
Zowel te moeilijke als te eenvoudige vraagstukken komen daarin voor.
Voorlopig zullen op de examens geen opgaven voorgelegd worden, zoals die van hoofdstuk 4 van het genoemde boek.

8 *Diverse opmerkingen*

8.1 Rijen, reeksen en reeksontwikkelingen zullen niet gevraagd worden op het centraal schriftelijk eindexamen

8.2 Het begrip 'groep' behoort niet tot de verplichte leerstof van wiskunde-I

8.3 De leerlingen dienen de cyclometrische functies met grafieken en afgeleiden te kennen. Ze zijn belangrijk bij het primitiveren.
Verder kan men zich bij de behandeling grote beperkingen opleggen. Het ligt niet in de bedoeling dit onderwerp een geheel eigen leven te doen leiden

8.4 Het is niet noodzakelijk dat de leerlingen een systematische behandeling van het oplossen van differentiaalvergelijkingen wordt voorgezet. Hoewel uiteraard wel gevraagd kan worden om een differentiaalvergelijking op te lossen, is het belangrijker dat de leerlingen begrijpen wat een differentiaalvergelijking voorstelt en, zonder de vergelijking op te lossen, conclusies kunnen trekken.

8.5 Het gehele officiële examenprogramma is voor 1974 van kracht met uitzondering van het onderdeel 'waarschijnlijkheidsrekening en statistiek' bij wiskunde I, waarover niet voor 1976 op het centraal schriftelijk examen zal worden gevraagd

8.6 Het is niet uitgesloten dat bij wiskunde I vragen gesteld zullen worden met een iets meetkundig karakter: raaklijnen aan grafieken; verzamelingen van snijpunten (eliminatieproces!) e.d.
Zie b.v. opgave 1 b van het herexamen wiskunde I in 1972[1]

8.7 Waar dit op de bijeenkomsten ter sprake kwam, bleken de meeste docenten er voorstander van te zijn om het tekenen van grafieken op het examen te doen berusten op berekende uitkomsten (tekenschema van de functie en de afgeleide functie, onderzoek naar asymptoten). Dit opent de mogelijkheid om aan de aldus gemaakte grafieken bewijskracht te ontlenen

8.8 Bij wiskunde II moet men waken tegen het ontwikkelen van een rekentechniek zonder enig meetkundig beeld.
Hoewel geen stereometrie gevraagd wordt, is elementaire stereometrie on-

[1] Afgedrukt in Euclides, 48, 4 (dec. 1972), p. 148.

ontbeerlijk voor een goed begrip van de vectormeetkunde in R_3

8.9 Bij wiskunde II wordt op het examen de theorie van de kegelsneden niet bekend verondersteld. Dus geen raaklijnformules. Geen pooltheorie. De kegelsneden komen, in eenvoudige vorm, b.v. bij de relaties wel aan de orde

8.10 Meerkeuzevragen zijn voorlopig niet op de examens v.w.o. te verwachten. De ontwikkeling van deze toetsingstechniek op het niveau bovenbouw v.w.o. moet in Nederland nog een begin nemen

drs. W.E. de Jong
drs. B.J. Westerhof

Bijlage

Discussienota wiskunde v.w.o.[1]
Deze discussienota bestaat uit twee delen: enkele gegevens betreffende de vakken wiskunde I en wiskunde II en tevens enige discussievragen.

I *Gegeven*
a Het examenprogramma voor deze vakken is opgenomen in publicatie nr. 92 in de serie 'Wetten en Bestuursmaatregelen Onderwijs en Wetenschappen', 2e bijgewerkte druk, uitgegeven door de Staatsdrukkerij te 's Gravenhage.

b De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft in brochure nr. 5 een toelichting gegeven op het leerplan wiskunde van de bovenbouw van de v.w.o. Deze brochure is in 1970 aan alle scholen toegezonden.

c De inspectie van het voortgezet onderwijs heeft in een brief van januari 1972 aan de scholen medegedeeld dat het onderdeel 'Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek' van het vak wiskunde I geen verplichte examenstof is voor de v.w.o.-examens in 1974 en 1975.

d In een brief van 14 maart 1972 is aan de scholen bericht gezonden dat het keuze-onderwerp bij het vak wiskunde II in de hoogste twee leerjaren van het v.w.o. gedurende 40 à 50 lesuren gegeven dient te worden.

e Bij Wolters-Noordhoff N.V. te Groningen is een bundel wiskunde-opgaven voor het examen v.w.o. verschenen, samengesteld door een commissie ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

II *Gevraagd*
a Welke doelstellingen kent het v.w.o., in het bijzonder geldend voor de vakken wiskunde I en wiskunde II?

b Is er een duidelijk verschil aan te wijzen tussen het onderwijs in de wiskunde bij het oude v.h.m.o. en bij het nieuwe v.w.o.?
Waaruit bestaat dat verschil behalve in examenprogramma's?

Welke methodische en didactische verschillen kenmerken de opleidingen voor wiskunde bij het h.a.v.o. en v.w.o.?

[1] Deze nota was door de inspectie bij de aankondiging van de regionale vergaderingen aan de scholen toegezonden.

d Hoe wordt de overgang van het v.w.o. naar het w.o. voor wiskunde I en voor wiskunde II optimaal bewerkstelligd?
Over welk inzicht en welke vaardigheden dienen de examenkandidaten te beschikken?

e Het vak wiskunde I is een verplicht vak in een B-pakket en een keuzevak in een A-pakket. Heeft dit gevolgen voor de opleiding? Zo ja, welke?

f Het vak wiskunde II komt niet voor in de rij van vakken die noodzakelijk zijn bij de toelating tot een of meer studierichtingen bij het w.o. Voor wie is dit vak bestemd?

g De C.M.L.W. heeft de volgende urenverdeling voorgesteld:

klas	I	II	III	IV	V	VI
voor wiskunde I	4	4	4	2	3	3
voor wiskunde II				2	3	3

Is het aantal wekelijkse lesuren in de klassen V en VI wel voldoende?

Het Negende Nederlandse Mathematisch Congres

Het congres zal worden gehouden op *donderdag 26 en vrijdag 27 april 1973* in het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Leiden.

Programma
Het wetenschappelijk programma omvat:
1 De 'Brouwer Memorial Lecture 1973'. Deze zal gehouden worden door Prof. A. Robinson (Yale Un.) Titel: Standard and Nonstandard Number Systems.
2 Een algemene uurvoordracht door Prof. J.H.B. Kemperman (Un. of Rochester, tijdelijk Universiteit van Amsterdam), getiteld:
Polynomen en daarmee samenhangende functionaalvergelijkingen op Abelse groepen.
3 Sectievoordrachten van maximaal 30 minuten, gevolgd door 10 minuten discussie.
Op 26 april omvat het programma verder de uitreiking van de Brouwer medaille aan Prof. A. Robinson, en de jaarvergadering van het Wiskundig Genootschap.

Organisatie
Het congres wordt georganiseerd door de vakgroepen wiskunde van de Rijksuniversiteit te Leiden onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap en zijn sectie toegepaste wiskunde. Voor alle informatie wende men zich tot de secretaris van de organisatiecommissie:
Adres: C.B. Huijsmans
Mathematisch Instituut
Wassenaarseweg 80
Leiden
tel. 01710-48333, tst. 5077.

JOHN VENN

Dr. A.J.E.M. SMEUR

Dorst

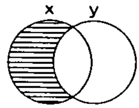
Op 4 april is het 50 jaar geleden, dat John Venn overleden is. Zijn naam is sinds enkele jaren in ons onderwijs een begrip geworden. Hij is geboren in Drypool, bij Hull, op 4 augustus 1834. Van 1853 tot 1857 studeerde hij wiskunde te Cambridge. In 1859 werd hij geestelijke der Anglikaanse kerk. Na enige jaren zielzorg keerde hij 1862 terug naar Cambridge, nu als lector in moraalwetenschap. Zijn belangstelling ging echter voornamelijk uit naar de studie der logica. In 1883 trad hij uit als bedienaar der Anglikaanse kerk en wijdde zijn aandacht verder aan de logica. In datzelfde jaar behaalde hij zijn doctorsgraad en werd hij gekozen tot lid der Royal Society. Zijn zeer omvangrijke boekenverzameling over logica schonk hij in 1888 aan de bibliotheek der universiteit. Sinds 1890 publiceerde hij ook nog over de geschiedenis der universiteit. Hij stierf in 1923 te Cambridge en werd begraven te Trumpington, een plaatsje in de naaste omgeving.
Venn's belangstelling voor logica was gewekt door de werken van zijn landgenoten De Morgan, Boole en Stuart Mill. Augustus De Morgan (1806-1871), wiskundige, logicus en bibliograaf, is in de logica bekend gebleven door de naar hem genoemde wetten, die we schrijven kunnen als:

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q \quad \text{en} \quad \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

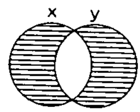
(*Formal Logic,* 1847). George Boole (1815-1864), de grondlegger der moderne logica, ontwikkelde de symbolische logica en paste er de regels der algebra op toe (*Mathematical Analysis of Logic,* 1847 en *An Investigation of the Laws of Thought,* 1854). John Stuart Mill (1806-1873), filosoof en econoom, heeft ook over logica geschreven (*The System of Logic,* 2 delen, 1843).
Venn's werken over logica zijn: *The Logic of Change* (1886), *Symbolic Logic* (1881) en *Principles of Empirical Logic* (1889). De diagrammen komen voor in *Symbolic Logic.* Venn geeft ze zo, dat in principe alle beweringen mogelijk zijn om dan met een arcering aan te geven wat bij een gegeven bewering vervalt:

> What we do, then, is to ascertain what combinations or classes are negatived by any given proposition, and proceed to put some kind of mark against these in the diagram. For this purpose the most effective means is just to shade them out.

For instance the proposition 'all x is y' is interpreted to mean that there is no such class of things in existence as 'x that is not-y', or $x\bar{y}$. All that we have to do is to scratch out that subdivision in the two-circle figure, thus:



If we want to represent 'all x is all y', we take this as adding on another denial, viz. that of $\bar{x}y$, and proceed to scratch out that division also; thus

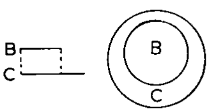


On the common Eulerian plan we should have to begin with a new figure in each of the two cases respectively, viz. 'all x is y' and 'all y is x'; whereas here we start with the same general outline in each case, merely modifying it in accordance with the varying information given to us.

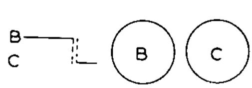
Het diagram laat de mogelijke proposities met de termen x en y toe. Op overeenkomstige wijze is het voor twee verzamelingen A en B te gebruiken; zonder arcering: sommige elementen van A zijn element van B, en na arcering:

$$A \subset B,\ B \subset A,\ A = B,\ A \cap B = \phi.$$

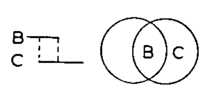
In onze schoolboeken worden hiervoor als regel telkens afzonderlijke figuren gegeven met verschillende onderlinge ligging van A en B.
Venn geeft ook zo'n algemeen diagram voor alle mogelijkheden bij 3, 4 en meer klassen (vanaf 5 geeft dat nogal moeilijkheden), die dan als raam voor bijzondere beweringen dienen.
Zoals bekend is was Venn niet de eerste, die in de logica van een aanschouwelijke voorstelling gebruikt maakte. Sommige maken uit Aristoteles' (384-322) taalgebruik op, dat hij logische regels aanschouwelijk voorstelde. Ook de zogenaamde 'boom van Porphyrius' (233-304) en de elkaar overlappende cirkels in de *Ars Magna* van Raymundus Lullus (1236-1315) kunnen genoemd worden. De eerste echter, die systematisch diagrammen gebruikte was Leibniz (1646-1716). Naast cirkeldiagrammen heeft hij ook figuren met parallele lijnstukken. De vier standaardproposities worden:



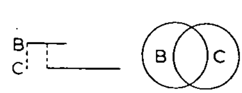
elke B is C



geen B is C



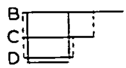
sommige B is C



sommige B is niet C

Hiermee kan hij elke logische modus met een diagram verduidelijken, bijvoorbeeld de bekende vorm Barbara:

elke *C* is *B*
elke *D* is *C*
---
elke *D* is *B*

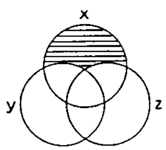


De diagrammen van Leibniz komen voor in aantekeningen, die pas in 1903 in druk verschenen zijn. Toch zijn de cirkeldiagrammen al veel eerder bekend geworden en wel door Euler (1707-1783), die ze al gebruikte, echter alleen ter verduidelijking van syllogismen, zonder enige wiskundige beschouwing (*Lettres à une Princesse d'Allemagne*, 1768). In de logica spreekt men nog steeds van cirkels van Euler. Venn verwijst herhaaldelijk naar die cirkels, zoals al in het gegeven citaat. Even verder vervolgt hij:

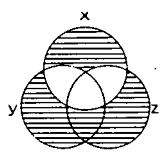
> How widely different this plan is from that of the old-fashioned Eulerian diagrams will be readily seen. One great advantage consists in the ready way in which it lends itself to the representation of successive increments of knowledge as one proposition after another is taken into account, instead of demanding that we should endeavour to represent the net result of them all at a stroke.

Na een korte toelichting op het voorgaande volgt dan:

> As another very simple illustration of the contrast between the two methods, consider the case of the disjunction, 'All *x* is either *y* or *z*'. It is very seldom even attempted to represent such propositions diagrammatically, (and then, so far as I have seen, only if the alternatives are mutually exclusive), but they are readily enough exhibited when we regard the one in question as merely extinghuishing any *x* that is neither *y* or *z*, thus:



> If to this were added the statement that 'none but the *x*'s are either *y* or *z*' we should meet this fresh assertion by the further abolition of *xy* and *xz*, and thus obtain:



> And if, again, we erase the central, or *xyz* compartment, we have then made our alternatives exclusive; i.e. the *x*'s, and they alone, are either *y* or *z* only.
> Now if we tried to do this by the aid of Eulerian circles we should find at once that we could not do it in the only way in which intricate matters can generally be settled, viz. by breaking them up into details, and taking these step by step, making sure of each as we proceed. The Eulerian figures have to be drawn so as to indicate at once the final outcome of the knowledge furnished.

Deze citaten spreken voor zichzelf. Ze maken de betekenis van Venn's diagrammen zeer duidelijk. De voordelen ervan boven de cirkels van Euler zijn onmiskenbaar. De diagrammen, die wij vanaf de eerste lessen in de brugklas gebruiken zijn, zoals men bemerkt, niet die van Venn uit zijn *Symbolic Logic.* De naam venndiagram mag men echter, terecht, zien als een eerbetoon aan John Venn.

Vragen en reacties van lezers

Overbodige luxe

In een tweetal didactische bijeenkomsten voor het vak wiskunde, georganiseerd door het Mavo-verband Friesland, kwam de regelmatig groeiende hoeveelheid wiskundemethodes voor Mavo ter sprake. Bijna unaniem was men het er over eens dat in 1968 *de* kans er was geweest het aantal methodes te beperken. Nog is het niet te laat, maar er dient spoedig ingegrepen te worden, anders stijgen de prijzen van onze leerboeken onnodig tot schandalige hoogte. Na discussie werd de volgende motie aangenomen en de gespreksleider opdracht gegeven deze ter kennis van diverse instanties te brengen.

'36 wiskundeleraren van Mavo-scholen in Friesland, kennis nemend van een steeds groeiend aantal wiskundemethodes, spreken hun verontrusting uit over deze ontwikkeling, achten het in het belang van het onderwijs dat er hoogstens een 3 à 4-tal didactisch uitnemend verantwoorde, wetenschappelijk begeleide methodes komen en gaan over tot de orde van de dag.'

Bergum

J.P. Aldershof
gespreksleider

Iedereen is verzekerd tegen ziektekosten. Maar Ambtenaren betalen daar minder voor.

Bij de Ambtenaren Centrale althans.

De Ambtenaren Centrale is in feite uw eigen verzekeringsmaatschappij tegen ziektekosten. In 1924 al opgericht voor en door Ambtenaren. AC biedt u: een betere dekking tegen lagere premie. Aanzienlijk lager. Bovendien: de polis wordt toegesneden op uw strikt persoonlijke omstandigheden. En de uitkeringen zijn snel, probleemloos. Alles over AC-verzekeringen leest u in de uitgebreide folder. Die ligt voor u klaar. Hier is uw bon.

Onderlinge Waarborg Maatschappij tegen gevolgen van Ziekte en Ongeval De Ambtenaren Centrale

Coupon

Verklaar u nader en stuur mij fluks de folder over uw unieke ziektekostenpolis.

Mijn naam: ______________________

Adres: ______________________

Plaats: ______________ Tel.nr.: ______________

Functie: ______________________

AC Stuur deze coupon in ongefrankeerde envelop aan: de Ambtenaren Centrale, Antwoordnr. 2831 Amsterdam. Of vraag telefonisch aan: 020-62231

Tussenpersoon: N.V. Verzekering-Maatschappij VZVZ, Keizersgracht 369, Amsterdam, tel. 020-62231.

INHOUD