EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no. 7
maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen B.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-130785.
Tarieven: $^{1}/_{1}$ pag. *f* 200,—, $^{1}/_{2}$ pag. *f* 110,— en $^{1}/_{4}$ pag. *f* 60,—.

Meetkunde met vectoren VII[1]

(het inwendig produkt)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

In de onderbouw hebben we kennis gemaakt met een speciale realisatie van een vectorruimte. De leerlingen hebben toen de indruk gekregen, dat vectoren per se gerichte lijnstukken (of geordende puntenparen) zijn. In de bovenbouw hebben we profijt gehad van dit voorbereidende werk. We konden daar vrij snel het vectorbegrip generaliseren en zo komen tot de acht axioma's van een vectorruimte.

Helaas wordt in de onderbouw het inwendig produkt van twee vectoren niet behandeld. Het staat althans niet op het programma. Dit heeft als gevolg, dat het me niet mogelijk is meteen op axiomatische wijze het inprodukt in te voeren. De wetenschappelijke weg is: eerst inprodukt invoeren en dan lengte en cosinus definiëren door middel van het inprodukt. De intuïtieve manier is juist andersom: eerst lengte en cosinus definiëren en daarna het inprodukt. Het zou ideaal zijn, als deze intuïtieve kennis in de onderbouw verkregen was en we nu meteen wetenschappelijk tewerk konden gaan.

Nu dit niet het geval is, voer ik het inprodukt intuïtief in, maar wel met de vooropgezette bedoeling het in tweede instantie wetenschappelijk te doen. Ik doe dus een stap terug in methodisch opzicht. Nadat ik de leerlingen geruime tijd erop getraind heb zich los te maken van hun vroegere meetkundige kennis bij het uitvoeren van hun berekeningen en het geven van hun bewijzen, grijp ik hier plots terug op de vroeger verkregen kennis aangaande de lengte van een lijnstuk en de grootte van een hoek. Uitgaande daarvan definieer ik het inprodukt van de vectoren v met uiteinden O en A en w met uiteinden O en B als

$$\text{lengte lijnstuk } OA \cdot \text{lengte lijnstuk } OB \cdot \cos \angle AOB.$$

Een nare definitie. Wie haalt het in zijn hoofd zo iets te bedenken? We moeten toch op zijn minst de leerlingen aanpraten, dat een dergelijke definitie enige zin heeft. Het 'wacht maar tot later' dan zal je het wel begrijpen, gaat tegenwoordig voor de kool en de ooievaar al niet meer op, laat staan voor het inprodukt. We kunnen proberen het duidelijk te maken met het verband tussen arbeid, kracht en

[1] De voorgaande artikelen vindt men in Euclides, 48-1 t/m 6 (de eerste zes nummers van deze jaargang).

weg. Iets beters weet ik niet. Ik heb eenmaal een ander probeersel gezien, maar was daar niet erg enthousiast over. Toch wil het vermelden, omdat sommige collega's waarschijnlijk een andere smaak in deze hebben dan ik.
Neem de vectoren v en w zo, dat ze dezelfde drager hebben en gelijkgericht zijn. Onder hun inwendig produkt verstaan we dan gewoon het produkt van hun lengten. Het produkt van twee lengten kunnen we voorstellen door een oppervlakte. De ene vector draaien we 90°. Zo ontstaat rechthoek *OACB* (fig. 1). De oppervlakte hiervan is het inwendig produkt van v en w.

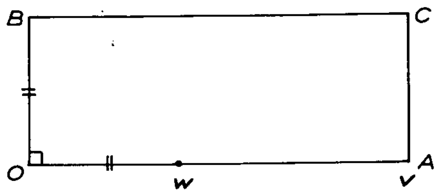


Fig. 1

Laat nu de vectoren v en w een scherpe hoek maken. Draai weer w over 90°. Zo ontstaat parallellogram *OACB* (fig. 2). De oppervlakte hiervan noemen we weer het produkt van v en w.

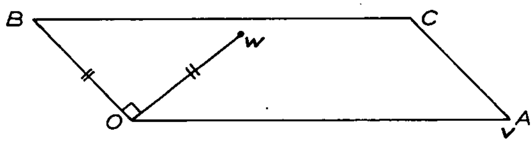


Fig. 2

De rechte hoek geeft geen moeilijkheid. Maken de vectoren een stompe hoek, dan is nog een tekenafspraak aangaande de oppervlakte nodig.

Misschien heeft de tweede methode didactisch nut als versterking van de eerste. Hoe het ook zij, we moeten er iets op verzinnen en ieder moet maar naar eigen inzicht handelen.
De tweede vraag is: hoe noteren we het inwendig produkt? Ik zie geen enkele reden, waarom we niet gewoon $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ zouden schrijven. Deze schrijfwijze zal geen misverstand veroorzaken. Ze is kort. Extra, volmaakt overbodige haakjes worden vermeden.
Als we het inprodukt eenmaal gedefinieerd hebben, moeten we er ook wat mee doen. In de eerste plaats wordt door de term produkt de verwachting gewekt, dat er sprake zal zijn van commutativiteit, associativiteit en distributiviteit. Dat de vectorvermenigvuldiging commutatief is, is evident. Associatief kan ze niet zijn, want $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$ is een zinledige tekencombinatie. Wel geldt een soort gemengde associativiteit, namelijk

$$a\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

Tenslotte is duidelijk, dat in het platte vlak geldt de distributieve eigenschap

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

We moeten nog steeds aannemelijk maken, dat we met het inprodukt ook iets doen kunnen. Mij dunkt, dat we met de volgende drie dingen in dit stadium kunnen volstaan:

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

grootte van de vector $\mathbf{v}$ = lengte van het lijnstuk $OA = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ ($\mathbf{v}$ is de vector met uiteinden O en A)
het bewijs van de stelling van Pythagoras en meer algemeen van de cosinusregel.

Waarbij het laatste van de drie in dit verband wel als shownummer fungeert.
Voor de goede leerling moet de gang van zaken moeilijk verteerbaar zijn. Nadat hem met zorg afgeleerd was van oude meetkundige kennis gebruik te maken, werd hij plots uitgenodigd dit weer wel te doen. Net als in het begin van de cursus kunnen we hem echter vragen het intuïtieve aanloopje alleen maar te beschouwen als een middel om aannemelijk te maken, dat we de volgende axioma's toevoegen:

er is een afbeelding, die aan elk geordend paar vectoren $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ een reëel getal toevoegt, genoteerd $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, waarvoor geldt:

A9 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
A10 $a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
A11 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
A12 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$

Dat $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$ volgt uit A10 (kies $\mathbf{v} = \mathbf{0}$) en dat ook $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$ volgt uit A9.
Na deze voorbereidingen kunnen we definiëren:

Definitie. $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$
Definitie. $\cos \angle (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$ $(\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0})$

Wie het mooier vindt, kan de laatste definitie vervangen door

$$\angle (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$$

Het loont de moeite even niet verder te gaan en de consequenties te overzien van het ingenomen standpunt: met behulp van de vectormethode wordt de meetkunde opnieuw opgebouwd. Ik kan mij heel goed voorstellen, dat verschillende collega's de schrik om het hart slaat en dat zij zeggen zullen: moet het nu werkelijk

zo? Kan het niet wat concreter blijven?
Ja, natuurlijk kan dat. Een ander, zeer goed verdedigbaar standpunt is het volgende. We hebben de planimetrie nu eenmaal. We gaan nu met vectoren werken, die we definiëren als planimetrische begrippen, en met behulp van deze vectoren gaan we verder met het opsporen van planimetrische eigenschappen. Ouderwetse planimetrie en vectormethode mogen elk moment naast elkaar gebruikt worden. Het zijn niet anders dan twee methoden, die elkaar aanvullen, om hetzelfde doel te bereiken, namelijk kennis van het platte vlak. Het opstellen van de axioma's A1-8 is een nodeloze bezigheid; dit zijn immers geen axioma's, maar planimetrische stellingen.
Het grote voordeel van deze methode is, dat we nu het volste recht hebben het inprodukt te definiëren als $|v| \cdot |w| \cos \angle (v, w)$. En daardoor zijn we bevrijd van de ietwat beangstigende noodzaak A9-12 te formuleren.
Het standpunt, dat we zo innemen t.a.v. de vectormeetkunde in het platte vlak is dan analoog aan het standpunt, dat we plachten aan te nemen t.a.v. de analytische meetkunde. Een stukje modernisering is teniet gedaan. Van de structuur van een vectorruimte is geen spoor meer over, althans expliciet. Maar het zou onjuist zijn een dergelijk argument doorslaggevende waarde toe te kennen.
Er is echter een gewichtiger argument, waar we rekening mee moeten houden, en dat is de omstandigheid, dat we ook driedimensionale meetkunde willen bedrijven. En nu kunnen we niet teruggrijpen op een reeds verkregen stereometrische kennis, want die bezitten de leerlingen niet. In het experiment Westermann heeft men toen de volgende oplossing gekozen. Breng de leerling eerst de nodige stereometrische kennis bij. Zorg, dat hun zoveel kennis bijgebracht wordt, dat op grond daarvan de vectoreigenschappen in de ruimte bewijsbaar worden. D.w.z. zorg, dat men kan bewijzen:

de associatieve eigenschap van de optelling,
de ruimte heeft een basis, die uit drie vectoren bestaat,
de parametervoorstelling van het platte vlak

en last but not least

het bovengenoemde axioma A11,

waarover straks meer.
Waar halen we deze stereometrische kennis vandaan? Om kennis uit het niet te doen ontstaan, zoals bij een intuïtieve inleiding in de planimetrie gedaan wordt, zijn de betrokken leerlingen langzamerhand te ver gevorderd. We moeten dus serieuzer hulpmiddelen te baat nemen. Dat betekent, dat we de stereometrie op moeten bouwen uitgaande van enkele axioma's. Nu kan je deze axioma's naar believen kiezen. Als je het op de orthodoxe manier doet, moet je een behoorlijk stuk ouderwetse stereometrie verorberen, voordat je de methode van de vectormeetkunde op de ruimte kan gaan toepassen. Je kan de axioma's ook een beetje naar het doel, waartoe ze bestemd zijn, laten toegroeien en ze dus een beetje handiger kiezen, waardoor de deducties wat minder lang worden. Hoe het ook zij, we gaan in de stereometrie doen, wat we in de planimetrie met zoveel zorg niet meer willen doen: er een axiomatisch deductief systeem van maken. De euclidische methode wordt in ere hersteld. En waarom? Om haar zo gauw mogelijk weer

overbodig te kunnen maken, namelijk op het moment, dat de vier vectorstellingen bewezen zijn. Tegen deze, m.i. op twee gedachten hinkende grondslag van de methode Westermann heb ik bezwaar. Bovendien vind ik haar erg tijdrovend.
Ik geef dus de voorkeur aan het opbouwen van de affiene stereometrie op basis van A1-8 en het later accepteren als axioma's van A9-12.
Rest nog een nader bekijken van het axioma A11. We hebben laten zien, dat het axioma in het vlak een afspiegeling is van intuïtief verkregen voorkennis. Maar we hebben nog niet plausibel gemaakt, dat we dit axioma ook in de ruimte accepteren. Wat zullen we doen? We hebben de keus tussen twee mogelijkheden:
a. Niet over praten. Wetenschappelijk is dit natuurlijk juist. En ik geloof, dat iedere leerling het zal accepteren.
b. Wel plausibel maken. In fig. 3 zijn drie vectoren **u**, **v** en **w** gegeven, die niet in één vlak liggen. De inhoud van A11 komt nu daarop neer, dat

proj. van OA op l + proj. van OB op l = proj. van OC op l,

of korter, dat

proj. van OB op l = proj. van AC op l.

Als het er alleen om gaat de juistheid van A11 plausibel te maken, dan vind ik, dat we daar toch aardig in geslaagd zijn.

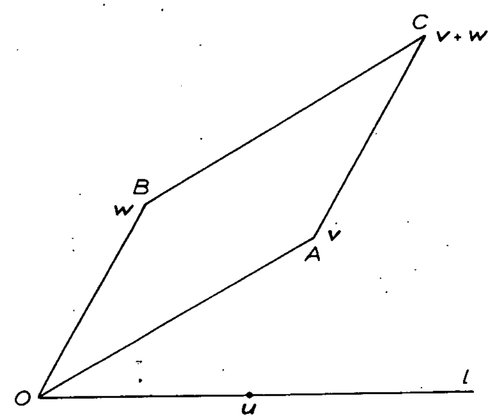


Fig. 3

Tot slot wil ik toch nog nagaan, wat hun te doen staat, die zoveel stereometrie echt willen deduceren, dat A11 bewezen kan worden. In fig. 4 zijn O, A, B, C en l uit fig. 3 overgetekend. Door A is een lijn l' evenwijdig aan l getekend. Nu is

OB'' de projectie van OB op l,
AC'' de projectie van AC op l'

en dus

$AC'' = OB'$.

Verder is

$A'P$ de projectie van AC'' op l

en dus

$A'P = AC''$.

Hieruit volgt, dat

$OB' = A'P$.

Als we nu maar wisten, dat P de projectie van C op l is, dan zijn we klaar. We moeten dus nog bewijzen, dat

$CP \cdot l$.

D.w.z. we moeten laten zien, dat

$$\begin{array}{l} CC'' \doteq l \\ C''P \doteq l \end{array} \Rightarrow CP \doteq l.$$

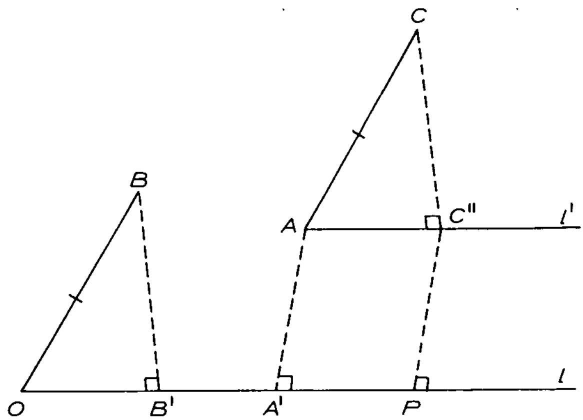


Fig. 4

Dat is de befaamde stelling die zegt, dat als een lijn loodrecht staat op twee snijdende lijnen in een plat vlak staat, hij loodrecht op alle lijnen in dat vlak staat. Als we heus deze stelling eerst deductief uit axioma's willen afleiden, dan moeten we een flink stuk deductief werk verrichten, voordat we gerechtigd worden de vectormethode in de ruimtemeetkunde toe te passen.

Ik heb nu getracht voor- en nadelen van verschillende standpunten te belichten. Ieder moet zelf maar bepalen, wat hem het beste ligt.

Volgende keer gaan we zien, wat we voor profijt hebben van het inprodukt.

Alle hoeken het hoekje om?
ofwel: 'slorde"-ge meetkunde

Drs. A.G.M. DORRESTEIJN en Drs. J.J.P. OLGERS

Werkhoven de Bilt

I In de schoolmeetkunde wordt met het begrip 'orde', de ligging van punten en rechten ten opzichte van elkaar, nogal slordig omgegaan; doorgaans wordt er in het geheel geen aandacht aan geschonken.
Wat te denken van de volgende drie bewijzen: (zie lit. 1, 2 en 3).

1 *Alle hoeken zijn 0°*

Zie figuur 1. Stel*

$$L_{ab_1} \neq L_{ab_2} \quad . \; S^{ab_1} \equiv S^{ab_2} \, ,$$

L_{qt_2} en L_{qt_2} zijn de middelloodlijnen van resp. S^{pb_1} en S^{pb_2}.

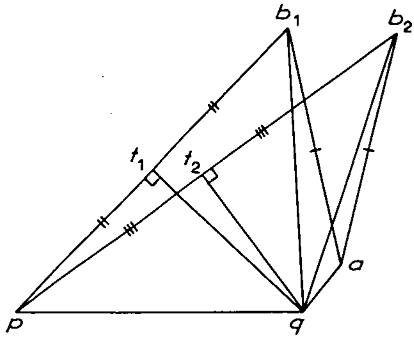


Fig. 1

* De volgende notaties worden gebruikt: kleine letters geven punten aan; S^{ab} is het segment met a en b als randpunten; L_{ab} is de rechte door a en b; Δ^{abc} is de driehoek met hoekpunten a, b en c; H^a_b is de halfrechte met randpunt a, gaande door b; $\angle H^a_b \, H^a_c$ is de hoek met benen H^a_b en H^a_c en '$\equiv$' tenslotte geeft de kongruentierelatie aan.
In II worden de eksakte definities gegeven. Tevens wordt verklaard waarom de indices nu eens boven, dan weer beneden aan de regel geplaatst zijn.

Bewijs:

1 L_{qt_1} is middelloodlijn van $S^{pb_1} \Rightarrow S^{pq} \equiv S^{b_1q}$

2 L_{qt_2} is middelloodlijn van $S^{pb_2} \Rightarrow S^{pq} \equiv S^{b_2q}$

3 uit 1 en 2 volgt: $S^{b_1q} \equiv S^{b_2q}$

4 aangezien de zijden paarsgewijs kongruent zijn geldt: $\Delta^{aqb_1} \equiv \Delta^{aqb_2}$.

5 uit 4 volgt: $\angle H^a_q H^a_{b_1} \equiv \angle H^a_q H^a_{b_2}$

6 uit 5 volgt: $\angle H^a_{b_1} H^a_{b_2}$ is $0°$. #

2 *Elke driehoek is gelijkbenig*

Zie figuur 2. L_{cp} is bissektriese van $\angle H^c_a H^c_b$, L_{tp} is middelloodlijn van S^{ab}.

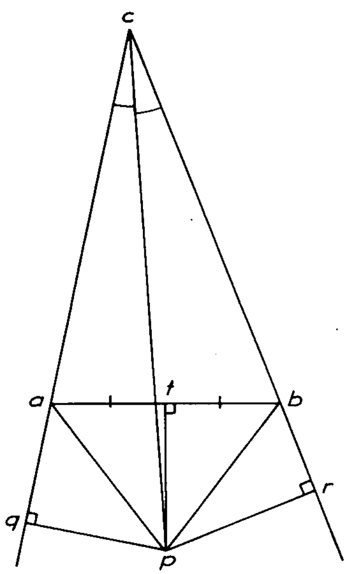


Fig. 2

Bewijs:

1 L_{tp} is middelloodlijn $\Rightarrow$ $S^{pa} \equiv S^{pb}$

2 L_{cp} is bissektriese $\Rightarrow$ $S^{pq} \equiv S^{pr}$

3 Kongruentiegeval ZZH levert: $\Delta^{pqa} \equiv \Delta^{prb}$

4 uit 3 volgt: $S^{qa} \equiv S^{rb}$

5 kongruentiegeval ZZH levert: $\Delta^{pqc} \equiv \Delta^{prc}$

6 uit 5 volgt: $S^{qc} \equiv S^{rc}$

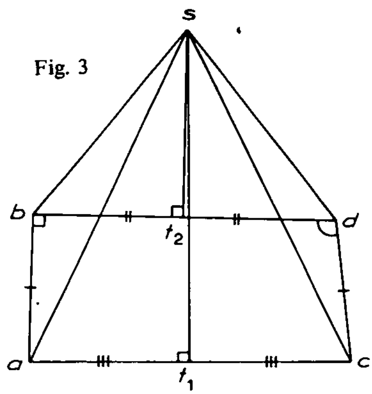
7 uit 4 en 6 volgen: $S^{ac} \equiv S^{bc}$ #

3 *Een stompe hoek is gelijk aan een rechte hoek*

Zie figuur 3: $\angle H_c^d H_b^d$ is stomp, $\angle H_a^b H_d^b$ is recht.

Verder: $S^{ab} \equiv S^{cd}$; L_{st_1} en L_{st_2} middelloodlijnen van resp. S^{ac} en S^{bd}.

Fig. 3



Bewijs:

1 L_{st_1} is middelloodlijn $\Rightarrow$ $S^{as} \equiv S^{cs}$

2 L_{st_2} is middelloodlijn $\Rightarrow$ $S^{bs} \equiv S^{ds}$

3 kongruentiegeval ZZZ impliseert: $\Delta^{abs} \equiv \Delta^{cds}$

4 uit 3 volgt: $\angle H_a^b H_s^b \equiv \angle H_c^d H_s^d$

5 uit 2 volgt: $\angle H_s^b H_d^b \equiv \angle H_s^d H_b^d$

6 uit 4 en 5 volgt: $\angle H_a^b H_d^b \equiv \angle H_c^d H_b^d$

#

II Om te kunnen aangeven welke stap in het bewijs tot een onjuiste uitspraak leidt als gevolg van het niet zorgvuldig omgaan met de orde, wordt een aksiomastelsel gegeven, waarin de orde eksplisiet geformuleerd is. Hieruit wordt een stelling afgeleid (IV) waarmee het eerste probleem 'alle hoeken zijn 0° wordt opgelost.

De stelling is als aksioma opgenomen in de meetkunde van Hilbert. We kiezen echter het aksiomastelsel van Forder, dat grotendeels overeenstemt met dat van Coxeter (zie lit. 4, 5 en 6).

In de afleiding van de stelling worden slechts enkele stappen bewezen. Het is de bedoeling daarmee een indruk te geven, hoe de ordening gedefinieerd is en hoe deze doorwerkt in de meetkunde. Voor de volledige afleiding zij verwezen naar Forder.

Het aksiomastelsel van de Euklidiese meetkunde is te verdelen in vijf groepen: 1 Ordening, 2 Dimensie, 3 Kongruentie, 4 Evenwijdigheid en 5 Kontinuïteit. We kunnen ons hier beperken tot de eerste drie groepen, aangeduid resp. met de letters O, D en C.

V is een verzameling van 'punten', 'vlak' geheten. De punten worden aangeduid met $a, b \ldots$. Op de punten is een orderelatie $[\ldots]$ gedefinieerd, 'tussenrelatie' geheten. Op de deelverzamelingen van V is de 'kongruentierelatie' $\cdot \equiv \cdot$ gedefinieerd. Dan volgen nu de aksioma's.

O_1 Er zijn minstens twee punten.

O_2 $a \neq b \Rightarrow \exists c : [a\,b\,c]$

O_3 $[a\,b\,c] \Rightarrow a \neq c$

O_4 $[a\,b\,c] \Rightarrow [c\,b\,a] \wedge \neg [b\,c\,a]$

Hieruit volgt, dat drie punten, die aan de tussenrelatie voldoen, alle drie verschillend zijn.

Voor $a \neq b$ worden de volgende deelverzamelingen van V gedefinieerd:

I^{ab}	$:=$	$\{p \mid [a\,p\,b]\}$	('interval')
S^{ab}	$:=$	$I^{ab} \cup \{a\} \cup \{b\}$	('segment')
H_b^a	$:=$	$S^{ab} \cup \{p \mid [a\,b\,p]\}$	('halfrechte')
L_{ab}	$:=$	$\{p \mid [p\,a\,b]\} \cup H_b^a$	('rechte')

De bovenindices zijn karakteristiek voor de deelverzameling, zij kunnen niet door andere vervangen worden; de benedenindices zijn 'toevallig', zij kunnen wel vervangen worden.
Het is te bewijzen, dat de punten, waarmee de deelverzamelingen geïndiceerd worden, precies zo'n deelverzameling bepalen.
Bij het bewijs is aksioma O_5 nodig, dat de eenduidigheid van de rechte aangeeft bij twee gegeven punten.

O_5 $c, d \in L_{ab} \Rightarrow a \in L_{cd}$

O_6 $\exists a : a \notin L_{bc}$ ('buiten elke rechte is een punt').

We definiëren:

$\Delta(a\,b\,c) \quad := \quad a \notin L_{bc}$ ('a, b en c vormen een driehoek')

$\Delta^{abc} \quad := \quad S^{ab} \cup S^{bc} \cup S^{ca}$

O_7 $\Delta(a\,b\,c) \wedge [a\,b\,d] \wedge [b\,e\,c] \Rightarrow \exists f : f \in L_{de} \wedge [a\,f\,c]$ ('Pasch') (figuur 4).

D $\exists\, a, b, c : \Delta(a\,b\,c) \wedge (\forall d \; \exists e, f \in \Delta^{abc} : d \in L_{ef}$ ('V heeft dimensie 2') (fig. 5)

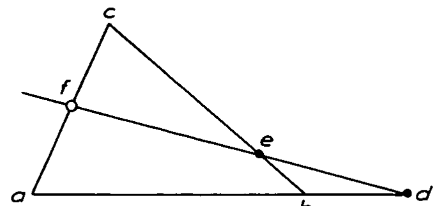


Fig. 4

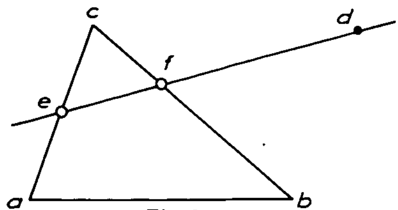


Fig. 5

$C_1 \quad \exists !\ a \in H^b : S^{ab} \equiv S^{cd}$

('op elke halfrechte is op precies één manier vanaf het grenspunt van de halfrechte een segment af te passen') (figuur 6).

$C_2 \quad S^{ab} \equiv S^{cd} \ \wedge \ S^{cd} \equiv S^{ef} \Rightarrow S^{ab} \equiv S^{ef}.$

$C_3 \quad S^{ab} \equiv S^{ab}$

Uit C1, C2 en C3 volgt, dat $\cdot \equiv \cdot$ een ekwivalentierelatie voor segmenten is.

$C_4 \quad [a\,b\,c] \ \wedge \ [a'\,b'\,c'] \ \wedge \ S^{ab} \equiv S^{a'b'} \ \wedge \ S^{bc} \equiv S^{b'c'} \Rightarrow S^{ac} \equiv S^{a'c'}$

('de kongruentie voor segmenten is additief') (figuur 7)

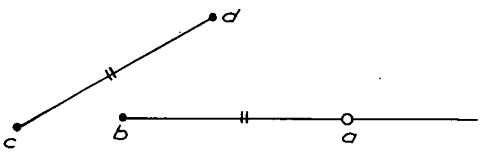


Fig. 6

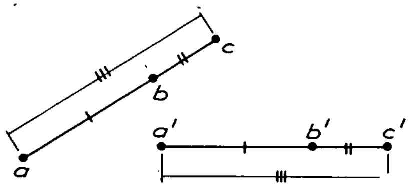


Fig. 7

We definiëren:

$$\Delta^{abc} \equiv \Delta^{a'b'c'} := S^{ab} \equiv S^{a'b'} \ \wedge \ S^{bc} \equiv S^{b'c'} \ \wedge \ S^{ca} \equiv S^{c'a'}$$

('als de zijden twee aan twee kongruent zijn')

$C_5 \quad \Delta^{abc} \equiv \Delta^{a'b'c'} \ \wedge \ [b\,c\,d] \ \wedge \ [d'\,c'\,b'] \ \wedge \ S^{bd} \equiv S^{b'd'} \Rightarrow S^{ad} \equiv S^{a'd'}.$

(figuur 8)

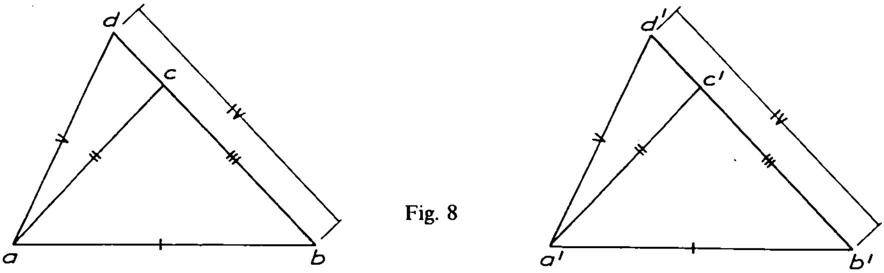


Fig. 8

De definitie van 'hoek' luidt:

$$\angle H_b^a H_c^a := H_b^a \cup H_c^a .$$

H_b^a en H_c^a zijn de 'benen' van de hoek.
De kongruentie van hoeken wordt als volgt gedefinieerd:

$$\angle H_b^a H_c^a \equiv \angle H_{b'}^{a'} H_{c'}^{a'} :=$$

$$\exists\, p \in H_b^a,\ q \in H_c^a,\ p' \in H_{b'}^{a'},\ q' \in H_{c'}^{a'} : \Delta^{apq} \equiv \Delta^{a'p'q'}.$$ (zie figuur 9)

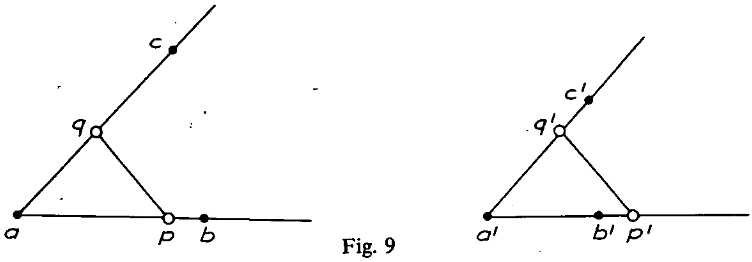


Fig. 9

C_6 Zij $\angle H_q^p H_r^p$ een hoek en H_c^a een halfrechte. Dan zijn er niet meer dan twee halfrechten

H_b^a en $H_{b'}^a$

zodat

$$\angle H_c^a H_b^a \equiv \angle H_c^a H_{b'}^a \equiv \angle H_q^p H_r^p$$ (fig. 10).

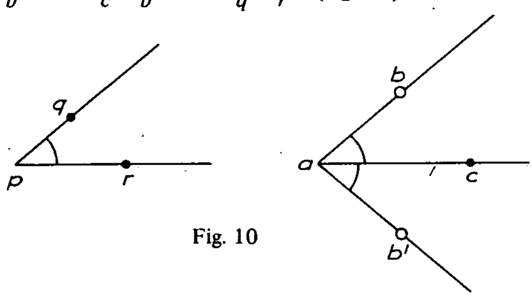


Fig. 10

Een 'rechte hoek' wordt gedefiniëerd als een hoek, die kongruent is met een nevenhoek.
Twee hoeken heten 'nevenhoeken', wanneer ze één been gemeenschappelijk hebben en de andere benen op dezelfde rechte liggen.

C_7 Alle rechte hoeken zijn kongruent.

III We beperken ons eerst tot de aksioma's O en D en schetsen het begin van de ordeningsmeetkunde van Forder. Hierdoor wordt het verband gelegd tussen de ordeningsaksioma's en de uiteindelijk af te leiden stelling.
De meeste stellingen sommen we slechts op, waarbij we er ook nog eens vele in algemene bewoordingen samenvatten. Maar ook vooral aan het eind zullen we er enige nader uitwerken.

1 Allereerst zijn er dan enige rechtstreekse gevolgen uit het aksiomastelsel zoals:

$$[abc] \Rightarrow [cba] \wedge \neg[bca] \wedge \neg[cab] \wedge \neg[bac] \wedge \neg[acb].$$

2 Vervolgens stellingen over segmenten, intervallen, rechten, halfrechten zoals deze als door de notatie worden verondersteld, b.v.: door 2 verschillende punten a en b gaat precies één rechte L_{ab}.

3 Stelling: liggen 3 punten a, b en c op één rechte, dan geldt

$[abc]$, $[bca]$ òf $[cab]$.

4 In de formulering van aksioma O_7 geldt $[def]$.

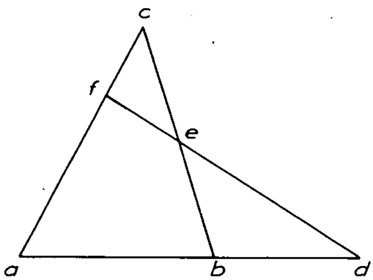


Fig. 11

Bewijs
Zie fig. 11. O_7 luidde:

$$\Delta(abc) \wedge [abd] \wedge [bec] \Rightarrow \exists f: f \in L_{de} \wedge [cfa].$$

Volgens 3 geldt dus: $f = d \vee f = e \vee [efd] \vee [edf] \vee [def]$.

$f = d \vee f = e$ is in strijd met 2 en $\Delta(abc)$.

Stel $[efd]$; $\Delta(dbe) \wedge [bec]$, dus uit O_7 volgt
$\exists x: x \in L_{ef} \wedge [dxb]$. Uit 2 volgt dan $x = a$;
dan geldt $[dab]$, hetgeen volgens 1 in strijd is met $[abd]$.
Eenzelfde soort redenering geldt voor het geval $[edf]$. Dus geldt $[def]$.

5 Tussen twee verschillende punten ligt een punt (gevolg van O_7).

6 Een punt op een rechte verdeelt de rechte in twee oneindige disjunkte deelverzamelingen.

7 Stellingen over de ordening op een rechte, uitmondend in de definitie

$[abcd] := [abc] \wedge [acd]$

en de uitbreiding hiervan $[p_1\ p_2\ \dots\ p_n]$ met alle voor de hand liggende eigenschappen.
Hieronder: $[abc] \wedge [bcd] \Rightarrow [abd]$

$[abc] \wedge [acd] \Rightarrow [bcd]$.

8 Stellingen over de machtigheid van deelverzamelingen van het vlak, b.v.: tussen 2 punten liggen oneindig veel punten.

9 Een rechte, die een zijde van een driehoek en het verlengde van een andere zijde snijdt, snijdt ook de derde zijde.

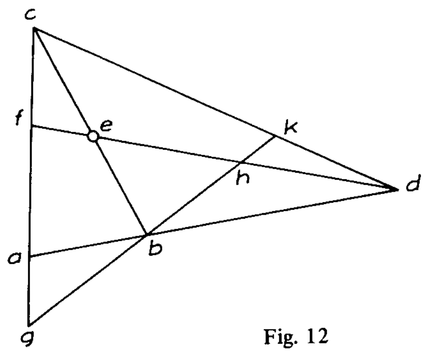


Fig. 12

Bewijs

Voor het geval, getekend in fig. 11, geldt dit volgens aksioma O_7.
Bewezen moet nog worden:

$\Delta(abc) \wedge [abd] \wedge [cfa] \Rightarrow \exists\, e : e \in L_{df}[bec]$.

Zie fig. 12.

$\exists\, g : [fag]$ volgens aksioma O_2.

Uit 2 en $\Delta(abc)$ volgt $\Delta(afd)$.

$[abd]$, volgens O_7 en 4: $\exists\, h : [gbh] \wedge [dhf]$.

Uit 2 en $\Delta(abc)$ volgt $\Delta(cfd.)$

Uit 7: $[cfa] \wedge [fag] \Rightarrow (cfd)$.

Dus uit O_7 en 4: $\exists\, k : [ghk] \wedge [dkc]$

Uit 2 en $\Delta(abc)$ volgt $\Delta(ckb)$

Uit 7: $[gbh] \wedge [ghk] \Rightarrow [bhk]$

Dus uit O_7 en 4: $\exists\, e : [dhe] \wedge [bec]$.

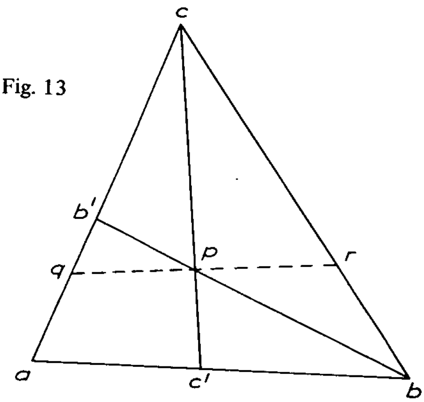
Definitie: een punt heet een inwendig punt van een driehoek, als het tussen twee punten van de driehoek op verschillende zijden in ligt.

10 Een inwendig punt van een driehoek ligt tussen elk hoekpunt en een punt van de tegenoverstaande zijde.

Bewijs:

Zie fig. 13
Zij $q, r \in \Delta^{abc}$, zodat $[qpr]$ en neem aan $q \in I^{ac}$ en $r \in I^{bc}$;
Volgens 9 is er een snijpunt b' van L_{bp} en I^{ac} en ook een snijpunt a' van L_{ap} en I^{bc}
L_{cp} snijdt $I^{bb'}$ en het verlengde van $I^{ab'}$, dus ook I^{ab}; het snijpunt is c'.

Fig. 13

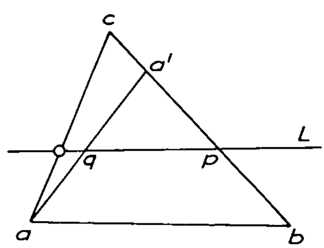


11 Een rechte door een inwendig punt van Δ^{abc} en een punt van Δ^{abc} snijdt Δ^{abc} in een ander punt.

Bewijs:

Zie fig. 14. Volgens 10 is er een punt a' op I^{bc} met $[aqa']$. $[ca'b]$, dus als $a' \neq p$: $[ca'p]$ of $[ba'p]$ volgens 7.
Uit 9 toegepast op resp. $\Delta^{aa'c}$ of $\Delta^{aa'b}$ volgt dan het gestelde.

Fig. 14



12 Een rechte lijn L die Δ^{abc} in een punt snijdt, snijdt Δ^{abc} nog in een ander punt, als het eerste punt geen hoekpunt is.

Bewijs:

Zij $q \in L$. $q \neq p$. Volgens aksioma D zijn er punten $r, s \in \Delta^{abc}$, zodat $q \in L_{rs}$. Zie fig. 15.

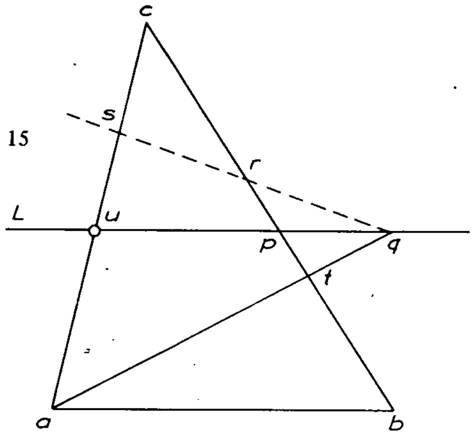
Als $q \in \Delta^{abc}$, q inwendig punt van Δ^{abc} is, of r of s een hoekpunt van Δ^{abc} is, is de stelling bewezen in 11 of volgt uit 9.

Veronderstel nu $[qrs]$ met $r \in I^{bc}$, $s \in I^{ca}$.

L_{cr} snijdt I^{qs} en het verlengde van I^{as}, dus volgens 9 ook I^{aq}, dus $\exists\, t : t \in I^{bc} \wedge [atq]$.

Daar $p \in I^{bc}$, geldt als $p \neq t$: $[cpt]$ of $[bpt]$ volgens 7. Toepassing van 9 op resp. Δ^{atc} of Δ^{atb} geeft ($\exists\, u \in I^{ca}$ òf $\exists\, u \in I^{ab}$) $\wedge$ $u \in L$.

Fig. 15



13 Met 12 wordt bewezen: elk drietal punten, dat niet op één rechte ligt, kan de rol van a, b en c vervullen in aksioma D; dus

$$\forall\, p\ \forall\ x, y, z : (\Delta\,(yzx) \Rightarrow \exists\ q, r \in \Delta^{xyz} : p \in L_{qr}).$$

14 Een rechte, waarop geen hoekpunt van Δ^{xyz} ligt en die gaat door een punt van Δ^{xyz} of een inwendig punt van Δ^{xzy}, snijdt Δ^{xyz} in precies twee punten.

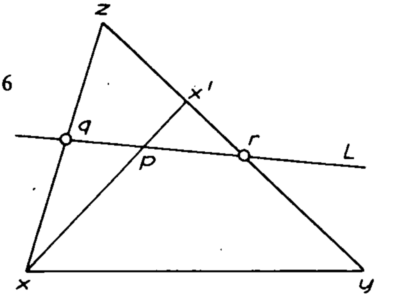
Bewijs:

Zie fig. 16. Als $p \in L$ en $p \in \Delta^{xyz}$, dan volgt de stelling uit 12, die wegens 13 op Δ^{xyz} toepasbaar is.

Als p inwendig punt is, geldt volgens 10 en wegens 13: $\exists\, x' \in I^{yz} : [xpx']$.

Toepassing van 12 op $\Delta^{xx'z}$ en $\Delta^{xx'y}$ geeft $q \in I^{zx}$ en $r \in I^{yz}$ met $q, r \in L$.

Fig. 16



15 Een rechte verdeelt het vlak in twee konvekse, disjunkte deelverzamelingen, zodat tussen twee punten uit verschillende deelverzamelingen altijd een punt van de rechte ligt. Een deelverzameling heet konveks, als met twee punten ook alle tussenliggende punten tot de deelverzameling behoren.

Bewijs:

Zie fig. 17. Zij $x \notin L$.

Zij $X = \{p \mid S^{xp}$ bevat geen punt van $L\}$

Zij $Y = \{p \mid S^{xp}$ bevat geen punt van $L\}$;

dan: X en Y zijn disjunkte deelverzamelingen van het vlak V en $X \cup L \cup Y = V$.

Zij $q, r \in X$ en s, zodat $[qsr]$; uit de toepassing van 14 op Δ^{xqr} volgt:

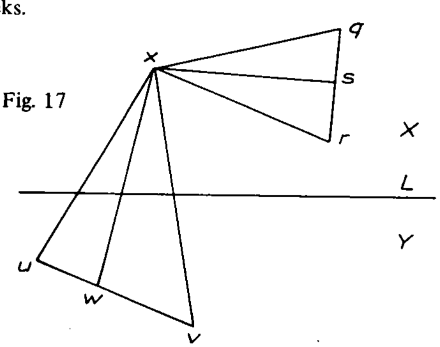
L snijdt I^{qr} niet, dus ook I^{qs} niet.

Toepassing van 14 op Δ^{xsq} geeft: L snijdt I^{xs} niet. Dus $s \in X$ en dus is X konveks.

Zij $u, v \in Y$ en W, zodat $[uwv]$; uit 14 volgt: L snijdt I^{uv} niet, daar I^{xu} en I^{xv} reeds door L gesneden worden. Dus L snijdt I^{uw} niet.

Uit 14 volgt dan weer, dat I^{xw} door L gesneden wordt, dus $w \in Y$.
Dus ook Y is konveks.

Fig. 17



IV Steunend op stelling 15 van deel III vermelden wij in dit deel eerst 3 stellingen over ordening en 3 stellingen, waarin ook de kongruentieaksioma's zijn gebruikt. Deze 6 stellingen dienen als gegevens, waaruit tenslotte direkt de 7e stelling kan worden afgeleid. Deze 7e stelling is de aangekondigde stelling, waarmee wij ons uitgangsprobleem kunnen oplossen.
De eerste 3 stellingen vermelden wij slechts. De stellingen over de kongruentie, die vóór het tweede drietal stellingen behandeld zouden moeten worden, vermelden wij niet, daar het ons gaat om de orde.

Allereerst een definitie.

H_x^o ligt binnen $\angle H_a^o H_b^o$,

als er een a', b' en x' zijn, met

$a' \in H_a^o$, $b' \in H_b^o$, $x' \in H_x^o$

en $[a'x'b']$. Zie fig. 18

1 Als H_x^o binnen $\angle H_a^o H_b^o$ ligt en $a' \in H_a^o$, $b' \in H_b^0$, dan is er een $x' \in H_x^o$ met $[a'x'b']$. Zie fig. 18.

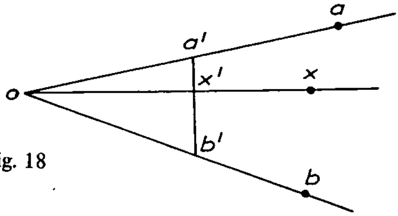


Fig. 18

2 Als b en x aan dezelfde kant van $L_{aa'}$ liggen (d.w.z. in dezelfde deelverzameling van V, zoals bepaald in stelling 15 van deel III) en $o \in L_{aa'}$, dan ligt H_x^o binnen $\angle H_a^o H_b^o$ òf binnen $\angle H_{a'}^o H_b^o$, tenzij $H_x^o = H_b^o$.
Zie fig. 19.

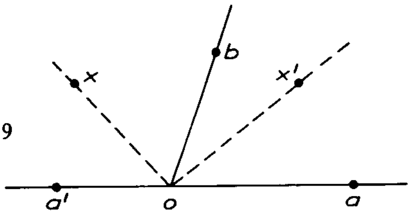


Fig. 19

3 Als H_x^o binnen $\angle H_a^o H_b^o$ ligt en H_y^o binnen $\angle H_x^o H_a^o$, dan ligt H_y^o binnen $\angle H_a^o H_b^o$.
Zie fig. 20.

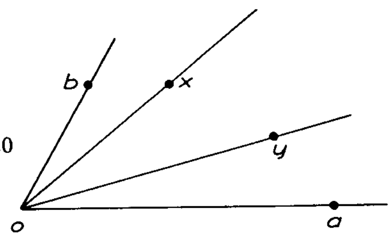


Fig. 20

4 Als $S^{ac} \equiv S^{a'c'}$ en $b \in S^{ac}$, dan is er een $b' \in S^{a'c'}$ met $S^{ab} \equiv S^{a'b'}$.

5 Als $\Delta^{abc} \equiv \Delta^{a'b'c'}$, $[bdc]$, $[b'd'c']$ en $S^{bd} \equiv S^{b'd'}$, dan ook $S^{ad} \equiv S^{a'd'}$.

Bewijs:

Zie fig. 21

(1) $O_2 : \exists\, p : [bcp]$.

(2) $C_1 : \exists !\ p' \in H_{c'}^{b'} : S^{bp} \equiv S^{b'p'}$

(3) $C_5 : S^{ap} \equiv S^{a'p'}$

(4) Uit (2) volgt met C_1 en C_4: $S^{pc} \equiv S^{p'c'}$

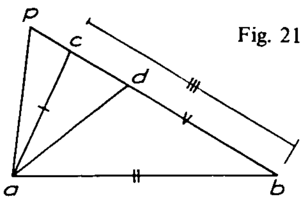
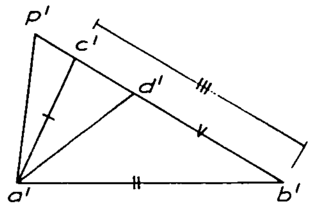


Fig. 21



(5) Uit (2) en het gegeven $S^{bd} \equiv S^{b'd'}$ volgt met C_1 en C_4 : $S^{pd} \equiv S^{p'd'}$

(6) (3), (4) en (5) geven met C_5: $S^{ad} \equiv S^{a'd'}$

6 Als voor Δ^{abc} en $\Delta^{a'b'c'}$ geldt: $S^{ab} \equiv S^{a'b'}$, $S^{bc} \equiv S^{b'c'}$ en $\angle H_a^b H_c^b \equiv H_{a'}^{b'} H_{c'}^{b'}$, dan geldt ook $S^{ac} \equiv S^{a'c'}$ en dus $\Delta^{abc} \equiv \Delta^{a'b'c'}$ (ZHZ).

Bewijs:

Zie fig. 22

$\angle H_a^b H_c^b \equiv \angle H_{a'}^{b'} H_{c'}^{b'}$ betekent:

$\exists\ p, q, p', q'$: $\Delta^{pbq} \equiv \Delta^{p'b'q'}$.

Uit stelling 5 volgt $S^{qa} \equiv S^{q'a'}$.

Uit stelling 5 volgt $S^{ac} \equiv S^{a'c'}$.

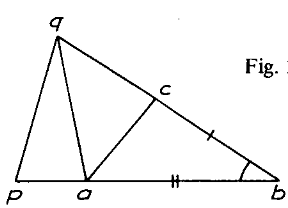
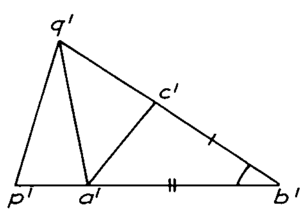


Fig. 22



Nu kan stelling 7 worden bewezen.

7 Als $\angle H_c^a H_b^a \equiv \angle H_c^a H_{b'}^a$, dan liggen b en b' aan verschillende kanten van L_{ac} (zoals bepaald door stelling 15 van deel III).

Bewijs:

Zie fig. 23.

(1) Het is geen beperking te veronderstellen dat $S^{ab} \equiv S^{ab'}$.

(2) Volgens stelling 5 geldt $\Delta^{cab} \equiv \Delta^{cab'}$, dus $S^{bc} \equiv S^{b'c}$.

Veronderstel nu: b en b' aan dezelfde kant van L_{ac}.

(3) Uit 2 volgt: H_b^a ligt binnen $\angle H_{b'}^a H_c^a$ òf $H_{b'}^a$ ligt binnen $\angle H_b^a H_c^a$. We veronderstellen het laatste. In het andere geval geldt aan analoog bewijs.

(4) Uit 1 volgt: $\exists\ e \in I^{ab'}$: $[ceb]$.

(5) Daar $S^{bc} \equiv S^{b'c}$ en $[ceb]$ geldt, volgt met 4: $\exists\ f \in l^{b'c} : S^{cf} \equiv S^{ce} \wedge [cfb']$.

(6) Daar $\Delta^{cab} \equiv \Delta^{cab'}$ geldt dus $\angle H^c_a H^c_{b'} \equiv \angle H^c_a H^c_b$, of ook $\angle H^c_a H^c_f \equiv \angle H^c_a H^c_e$.

(7) Uit 6 volgt: $\Delta^{acf} \equiv \Delta^{ace}$, dus $\angle H^a_c H^a_{b'} \equiv \angle H^a_c H^a_f$.

(8) H^a_f ligt binnen $\angle H^a_c H^a_{b'}$, wegens $[cfb']$

$H^a_{b'}$ ligt binnen $\angle H^a_c H^a_b$ wegens $[ceb]$.

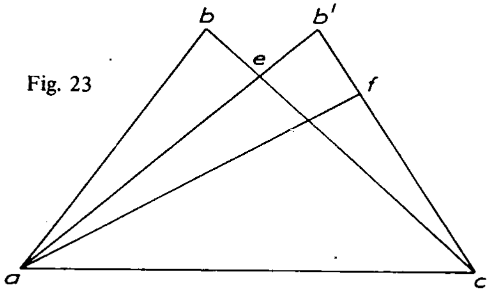
Met 3 geldt dan: H^a_f ligt binnen $\angle H^a_c H^a_b$. Dus $H^a_f \neq H^a_b$ en $H^a_f \neq H^a_{b'}$.

(9) Uit het gegeven, uit (7) en (8) volgt: $\angle H^a_c H^a_f \equiv \angle H^a_c H^a_{b'} \equiv \angle H^a_c H^a_b$ en deze hoeken zijn alle drie verschillend.

(10) Dit is in strijd met aksioma C_6.

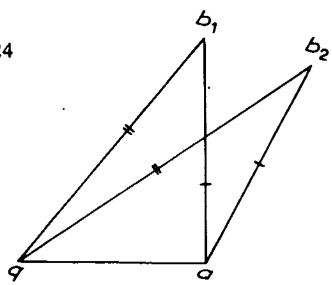
De gemaakte veronderstelling is dus onjuist. Dus b en b' liggen niet aan dezelfde kant van L_{ac}.

Fig. 23



We keren terug naar ons eerste probleem: 'alle hoeken zijn 0°'.
Bewezen kan worden, dat elk segment te halveren is en dat uit elk punt een loodlijn neer te laten is op een gegeven rechte. Daarmee is de middelloodlijn gedefinieerd.
In het eerste probleem was verondersteld: $H^a_{b_1} \neq H^a_{b_2}$. Zie fig. 24.

Fig. 24



Uit aksioma C_7 en met stelling 6 wordt, evenals in het begin, inderdaad bewezen:

$$\angle H^a_{b_1} H^a_q \equiv \angle H^a_{b_2} H^a_q.$$

Uit stelling 7 moet men dus de konklusie trekken: b_1 en b_2 liggen aan verschillende kanten van L_{aq}. Dus het plaatje is fout. De tegenspraak volgde dus het feit, dat men op grond van een 'onzuiver' plaatje, een verkeerde orde veronderstelde.

V Het is in de schoolmeetkunde algemeen gebruikelijk de orde uit het plaatje af te leiden. De kans, dat deze orde de juiste is, is meestal groot. In het eerste van de drie problemen uit I zijn echter vier passerkonstruksies nodig bij het tekenen van het plaatje en vier maal moet een verbindingslijn getrokken worden. Dat de fout bij elk van deze bewerkingen het resultaat kan bederven, volgt wel uit figuur 25; bij 'redelijk' gebruik van passer en lineaal komt punt q in het gearseerde gebied te liggen.

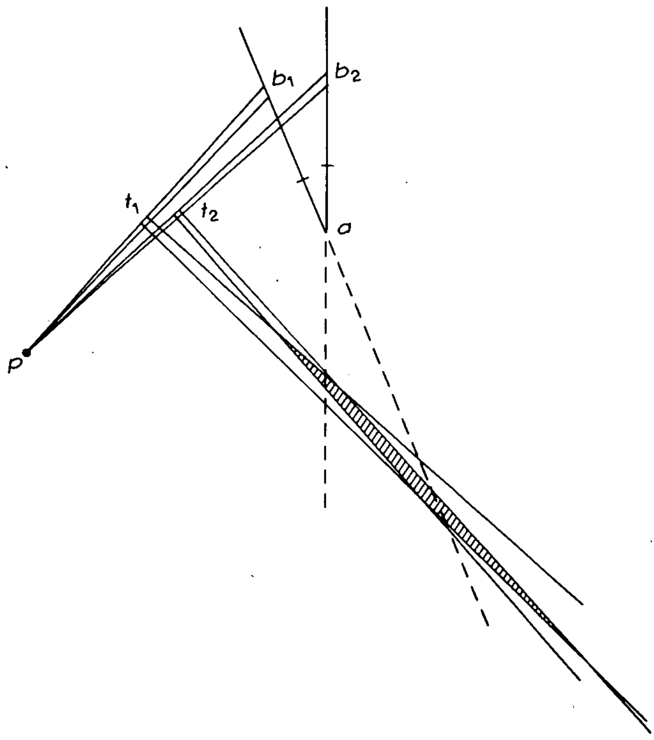


Fig. 25

Aangezien men op school niet de orde gebruikt in zijn bewijzen, maar de 'slorde'; zijnde de orde afgeleid uit het plaatje, kan men deze meetkunde klassifiseren als 'slorde'-ge meetkunde.
Het zal echter duidelijk zijn, dat de geordende meetkunde een te uitgebreid en te abstrakt gebied is voor de school. Misschien zouden er wel gedeelten als afzonderlijke eenheden aan de orde kunnen komen.

Literatuur

1 Lietzmann:	Wo steckt der Fehler. (Teubner – Stuttgart)
2 Bradis e.a.:	Lapses in mathematical reasoning. (Oxford enz. Pergamon Press enz.)
3 Maxwell	Fallacies in Mathematics (Cambridge University Press)
4 Hilbert:	Grundlagen der Geometrie (Teubner – Stuttgart)
5. Forder:	The foundations of euclidian geometry (Cambridge University Press)
6. Coxeter:	Introduction to geometry (John Wiley & Sons Inc., New York).

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verslagen van de bestuursvergaderingen op 25 oktober en 19 december 1972

25 oktober 1972

1 De laatste voorbereidingen voor de jaarvergadering worden getroffen.
2 De bibliotheek van oude tijdschriften van de vereniging wordt aan de lerarenopleiding Ubbo Emmius te Groningen geschonken.
3 De auteursrechten van 'Opgaven wiskunde I en II' worden aan Wolters-Noordhoff overgedragen.
4 Op de jaarvergadering zullen de leden gepeild worden over het wiskunde-onderwijs op de onderbouw havo (één of twee stromingen).
5 Er zullen verslagen van bestuursvergaderingen in Euclides gepubliceerd worden.
6 Over vervanging van aftredende redactieleden van Euclides wordt nagedacht.
7 Aan de Raad van Vakgroepen zal worden medegedeeld dat het bestuur van de N.V.v.W. van mening is dat de R.v.V. niet zelfstandig naar buiten mag optreden maar alleen als adviescollege voor het NGL en het Mavo-verband zal optreden.
8 De conferentie van de didactiekcommissie zal op 16 en 17 februari 1973 plaats vinden. Uit het fonds publikaties wordt subsidie verleend.

19 december 1972

1 Naar aanleiding van de jaarvergadering zal het bestuur zich bezinnen over de geringe opkomst. Heeft een andere vorm meer belangstelling?
2 De wiskundewerkgroep van het WVO blijft zelfstandig bestaan.
3 Ondanks verzoeken van leden meent het bestuur geen uitspraken te kunnen doen over leerboeken.
4 De nomenclatuurcommissie heeft op 24 januari slotvergadering.
5 De ledenadministratie wordt besproken.
6 Er wordt uitvoerig gesproken over de exameneisen voor wiskunde I en de eisen van verscheidene faculteiten om wiskunde I in het examenpakket te hebben.

Achterstallige contributie

Ondanks dringende en toch ook wel vriendelijke verzoeken is er nog een groot aantal leden, dat hun contributie (*f* 20,– inclusief Euclides) nog niet heeft voldaan. En dat terwijl het verenigingsjaar al ruim zeven maanden voorbij is.
De penningmeester verzoekt u nogmaals te onderzoeken of u tot dezulken behoort, en mocht dat het geval zijn per ommegaande het verschuldigde bedrag over te maken op giro 143917, t.n.v. Ned. Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam.
U bezorgt de ledenadministratie veel moeite, zorg en ergernis, en uzelf *f* 2,– administratiekosten als u binnen veertien dagen na verschijnen van dit nummer nog steeds bij uw vereniging in het krijt staat. Bovendien loopt u de kans dat uw abonnement op Euclides geschorst wordt en dat zou u toch niet willen?

Elektro, spel zonder wiskundegrens?

(een verslag over een hulpmiddel)

A. LEURS

Zwijndrecht

Elke leraar zal zich min of meer bezighouden met de didactiek en de methodiek van zijn vak. Hij zal zich in het algemeen laten leiden door de auteurs van het ingebruik zijnde leerboek met hier en daar een eigen inbreng.

Een van de problemen, die niet door het leekboek opgelost wordt en ook in de didactische literatuur spaarzaam wordt besproken is: Hoe helpt men leerlingen die bij een proefwerk of test blijk gaven van onvoldoende kennis?
In het omvangrijke boek van Dr. Joh.H. Wansink 'Didactische oriëntatie voor wiskunde leraren' wordt uitvoerig gesproken over testen, proefwerken, foutenanalyse en klassegesprek, maar dan is het ook afgelopen. Het zwaarste werk begint dan pas n.l. het 'bijwerken' van de leerlingen, die een onvoldoende hadden.

Er zijn vele mogelijkheden. Het in de handel zijnde Elektrospel bracht mij op de volgende mogelijkheid.
Sinds twee jaar ben ik bezig met een zelfvervaardigd elektrospel voor wiskunde. Het bestaande spel heeft volgens mij een aantal nadelen bij 'wiskundig' gebruik.

- a Het aantal vragen en antwoorden is 24 en dit zijn er in de meeste gevallen erg veel voor het herhalen van een begrip.
- b De beschikbare ruimte is vooral voor meetkunde opgaven erg klein.
- c Het maken van de kaarten is moeilijk wegens de gaatjes in het midden.
- d De stevigheid van de dozen laat te wensen over bij intensief gebruik door leerlingen.
- e Het steeds vernieuwen van batterijen.
- f Het branden van het lampje is in zonnige lokalen niet duidelijk genoeg zichtbaar.

Vele van deze bezwaren zijn bij machinale produktie natuurlijk op te lossen maar op school zijn we daartoe niet in staat.

Om deze nadelen op te vangen heb ik het volgende gedaan.

A De kaarten
Allereerst zijn de kaarten van stevig tekenpapier op kwartoformaat gemaakt.

Hierdoor was het mogelijk de kaartindeling te laten stencilen. Zelf heb ik twee indelingen ontworpen (zie figuur 1 en 2), maar ieder kan de indeling aanpassen aan zijn wensen.

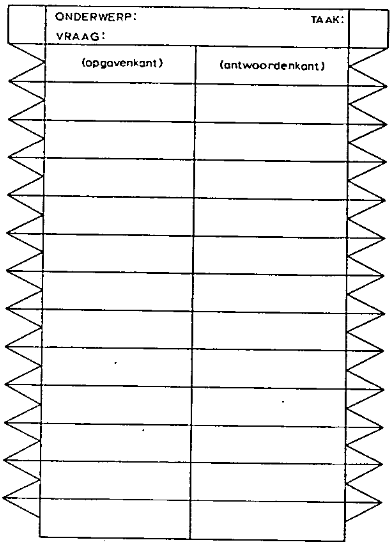


Fig. 1

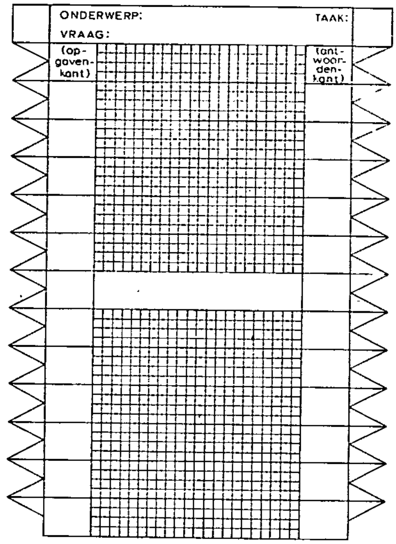


Fig. 2

In het kopgedeelte staat het onderwerp, eventueel de tekst van de vraag en het taaknummer. Dit taaknummer is noodzakelijk voor het snel opzoeken en opbergen van de kaart. Aangezien dit hulpmiddel naast de methode 'Moderne wiskunde' wordt gebruikt is het taaknummer als volgt samengesteld. Allereerst het leerjaar, daarna het deelnummer van het boek, dan het hoofdstuk en paragraaf en daarachter eventueel een volgnummer. Zo heeft b.v. de sinusregel taaknummer 4673.

De zijkanten van de kaarten zijn getand om de kontakten duidelijk te zien. In het begin hebben we geprobeerd of gaatjes gemaakt met een perforator ook voldoende kontaktmogelijkheden geven. Al spoedig bleek, dat het moeilijkheden opleverde. Allereerst omdat het nauwkeurig ponsen veel tijd vroeg en we niet de beschikking hadden over een perforator, die in een keer alle gaten sloeg. Ten tweede kwam het voor dat de tekst niet precies in het midden van het blad of iets schuin stond, waardoor de gaten niet op de juiste plaats kwamen. Ten derde kunnen de leerlingen de tanden, vooral als ze voorgedrukt zijn, in zeer korte tijd uitknippen.

Onder het kopgedeelte bevinden zich verder 13 combinaties.

Het maken van de opgaven kan gespreid worden over het hele jaar. Men kan b.v. uitsluitend die kaarten maken, die men voor een behandeld hoofdstuk nodig heeft. Als men bovendien een mal maakt waarop men direkt kan zien waar het antwoord moet komen, heeft men maar weinig tijd per kaart nodig. Op het ogenblik heb ik de beschikking over ongeveer honderd kaarten.

B. De controle-eenheid

Dit gedeelte bestaat uit twee delen, n.l. de bakjes en het elektrische gedeelte. Hier kom ik later nog op terug.

De bakjes waar de kaarten op komen te liggen zijn in de beginfase door leerlingen tijdens de handenarbeidles van houtbord gemaakt. De lampjes, draden en transformator waren geleend van de natuurkundeleraar. Nu zijn de bakjes gemaakt van triplex. In een plaatje triplex zijn koperen bekledingsspijkers geslagen, die aan de achterkant met behulp van dun scheldraad zijn verbonden. Deze kant is weer met een plaatje triplex met een randje afgedekt (zie fig. 3). Ook dit is tijdens een handenarbeidles gedaan.

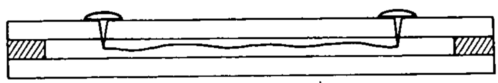


Fig. 3

Op het ogenblik heb ik twee verschillende verbindingsschema's in gebruik. Gezien mijn ervaring zou ik willen stellen, dat in het begin één voldoende is, maar om bij veel gebruik automatisme te voorkomen is het beter om na de aanloopperiode verschillende bakjes te maken. Op de kaarten moet dan worden aangegeven bij welke bakjes ze horen b.v. door een letter voor het taaknummer. Het elektrische gedeelte heb ik apart genomen, omdat dan volstaan kan worden met een eenheid met meerdere aansluitmogelijkheden. Voordelen zijn:

a minder materiaal, want anders moet men bij ieder bakje draden, lampje en stroombron hebben.

b de bakjes zijn eenvoudiger en dunner.

c het aantal bakjes is geringer bij klassikaal gebruik.

Bij 'klassikaal' gebruik laat ik de leerlingen op hun plaats de antwoorden noteren, en ze moeten daarna aan een aparte tafel waarop de eenheid en de bakjes staan hun antwoorden controleren. In de eenheid zit een 6 volts transformator en 6 lampjes met snoertjes. In een klas van 24 leerlingen zijn nog nooit zes leerlingen praktisch tegelijk klaar geweest.

C Het gebruik

De kaarten worden op de volgende manieren gebruikt:

1 Het individueel herhalen van de stof van een bepaald hoofdstuk of paragraaf na het behalen van een onvoldoende.
De leerlingen doen dit op een tussenuur of een vrij uur, na schooltijd of thuis. Al was dit de hoofdreden van de invoering van dit hulpmiddel, de mogelijkheden blijven hierdoor niet beperkt.

2 Het hierboven al genoemde 'klassikaal' herhalen van de gehele stof door de leerlingen van de 4e klas nadat ze de examenopgaven van voorafgaande jaren

hebben gemaakt. De leerlingen moeten de onderdelen, die ze niet goed beheersten opschrijven en de daarbij behorende taken maken tijdens een van de wekelijkse lessen. Vorig jaar heb ik daar de tweede wiskundeles op dezelfde dag voor gebruikt.

3 Als extra opgaven voor minder goede leerlingen. Ze krijgen dan bovendien het idee waar het in een bepaald hoofdstuk of paragraaf om draait en hoe het gevraagd wordt.

4 Als extra opgaven voor alle leerlingen, d.w.z. alle leerlingen hebben dezelfde taak al of niet in een andere volgorde. De kaarten die ik voor echt klassikaal gebruik heb gaan over vectoren, ontbinden in factoren en het aflezen van functiewaarden uit de grafiek van een kwadratische functie.

5 Als overzicht van een gedeelte van de stof b.v. alle eenvoudige puntverzamelingen bijelkaar.
Deze mogelijkheid zit natuurlijk voor een gedeelte al verwerkt in de reeds eerder genoemde mogelijkheden. Daarnaast is het ook mogelijk om met behulp van een kaart een overzicht te geven van de belangrijkste delen van een hoofdstuk.

Bij een aantal taken is 13 opgaven erg veel b.v. toepassing cosinusregel. Het is gebruikelijk dat de leerling er een aantal maakt en controleert. Zijn ze goed dan kan hij of zij een andere taak komen vragen, zijn ze niet goed dan wordt de fout opgespoord en weer een aantal opgaven gemaakt.
Evenals bij elk hulpmiddel moet men een aantal leerlingen zodanig beïnvloeden, dat ze inderdaad de opgaven maken en niet gaan zitten raden. Dit is ook een van de redenen geweest om de controle-eenheid uit twee delen te laten bestaan. De leerlingen moeten uitdrukkelijk naar een aparte tafel voor het controleren en het valt direkt op of een leerling maar wat zit te proberen of inderdaad controleert. Ook eis ik, indien mogelijk, de tussenberekeningen op een kladblaadje.

Tot slot wil ik wel zeggen, dat als u er eenmaal aan begonnen bent er geen houden meer aan is. De leerlingen vragen steeds nieuwe opgaven. Bovendien gaat u zelf meer eisen stellen aan de kaarten, b.v.:

a de antwoorden zodanig onder elkaar, dat ze gemakkelijk op de kaart teruggevonden worden.

b de antwoorden zodanig dat raden praktisch onmogelijk is omdat het meer een dertienkeuze vraagstuk is geworden.

De kinderziekten van dit hulpmiddel heb ik nu langzaam maar zeker overwonnen en dit verslag wil voor anderen dan ook een beschermende inenting zijn om onnodig tijdverlies te voorkomen en tevens een aansporing om het eens anders te doen.
Gaarne hou ik mij aanbevolen voor uw op- en aanmerkingen, vooral van leraren die ook met een soortgelijk hulpmiddel bezig zijn, misschien is er gezamenlijk nog meer te verwezenlijken.

Toelichting op examenprogramma wiskunde H.A.V.O.[1]

1 *Herhaling verzamelingen, relaties en functies*

Het verband tussen:

verzamelingen	en logica	
gelijkheid van twee verzamelingen	en ekwivalentie	($\Leftrightarrow$)
deelverzameling	en implicatie	($\Rightarrow$)
doorsnede	en conjunctie	($\wedge$)
vereniging	en disjunctie	($\vee$)
complement	en negatie	($\neg$)

De relatie van V naar W als deelverzameling van $V \times W$;
het domein van een relatie;
het bereik van een relatie;
de grafiek van een relatie.

De functie;
de eerstegraadsfunctie met grafiek;
de tweedegraadsfunctie met grafiek;
eerste- en tweedegraadsvergelijkingen (wortelformule, formules voor som en produkt der wortels) en ongelijkheden.

2 *Rationale functies: differentiaalrekening*

Het differentiequotiënt i.v.m. steilheid en richtingscoëfficiënt. Het limietbegrip (geen espilontiek); het differentiaalquotiënt; de definitie van het stijgend (dalend) zijn van een functie op een interval; stellingen hierover i.v.m. het differentiaalquotiënt.

De afgeleide functie, de begrippen differentieerbaar en continu toegelicht met eenvoudige voorbeelden, het differentiëren van som, verschil, produkt en quotiënt van twee functies; de stelling:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

De kettingregel.

Differentiëren van rationale functies, het berekenen van extreme waarden van rationale functies zonder gebruik te maken van de tweede afgeleide (ook randextrema).

Grafieken van rationale functies en in verband daarmee: snijpunten met de x-as, verticale en horizontale asymptoten (geen scheve); uiterste waarden.

Vergelijkingen en ongelijkheden.

3 *Uitbreiding en functies*

Absolute waarde.
Eenvoudige wortelfuncties, differentiëren van wortelfuncties, eenvoudige wortelvergelijkingen en -ongelijkheden.
De exponentiële functie, het invoeren van 'oneigenlijke machten', grafiek van de exponentiële functie, eenvoudige exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden.

De logaritmische functie, grafiek van de logaritmische functie, logaritmentafel en rekenliniaal, berekeningen met logaritmen, enkele eigenschappen van logaritmen, eenvoudige logaritmische vergelijkingen en ongelijkheden.

[1] Zie de brief van de Inspectie afgedrukt in het februarinummer. De oorspronkelijke versie van deze toelichting is te vinden in Euclides, 47, juni/juli 1972, p. 391.

4 *Goniometrie*

De algemene definities van sin α, cos α en tan α, de radiaal als hoekmaat, de formules voor

$$\sin(-\alpha),\ \cos(-\alpha) \text{ en } \tan(-\alpha),$$
$$\sin(\alpha \pm \beta),\ \cos(\alpha \pm \beta) \text{ en } \tan(\alpha \pm \beta),$$
$$\sin 2\alpha,\ \cos 2\alpha \text{ en } \tan 2\alpha.$$

De functies sinus, cosinus, tangens met bijbehorende grafiek, uiterste waarden, asymptoten, periodiciteit.

De functie

$$x \to a \cos x + b \sin x + c.$$

De limieten

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \text{ en } \lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha} = 1$$

en in verband hiermee voor kleine α: $\sin \alpha \approx \alpha$ en $\tan \alpha \approx \alpha$.

Het differentiëren van goniometrische functies, grafieken van goniometrische functies.

Eenvoudige goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden.

5 *De ruimte R_2*

Herhaling van de grafieken t.o.v. een rechthoekig assenstelsel van de relaties

$$\{(x,y) \mid ax + by + c \gtreqless 0\} \text{ en } \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \gtreqless r^2\}.$$

Berekening van de afstand van twee punten.

De cirkel

$$\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\},$$

de puntenverzamelingen

$$\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \gtreqless r^2\}.$$

De vergelijkingen van de lijnen door de oorsprong, de vergelijkingen van de lijnen door het punt (x_0, y_0), de vergelijkingen van de lijnen evenwijdig met een der coördinaatassen, de vergelijking van de lijn door twee gegeven punten.

De hoek van twee lijnen, loodrechte stand.

De vergelijking van de raaklijn in een punt van een cirkel.

De verzameling $\{P \mid d(P,F) = d(P,l)\}$, waarin F een gegeven punt en l een gegeven lijn is, de begrippen brandpunt en richtlijn, de parabolen $y^2 = 2px$ en $x^2 = 2py$.

De puntenverzamelingen

$$\{(x,y) \mid (y-b)^2 \gtreqless 2p(x-a)\}$$

$$\{(x,y) \mid (x-a)^2 \gtreqless 2p(y-b)\}$$

De vergelijking van de raaklijn in een punt van een parabool.

Eenvoudige opgaven over puntverzamelingen.

Vectoren in R_2, een basis in R_2, de lengte van een vector, het inwendig produkt van twee vectoren, de hoek van twee vectoren, vectorvoorstelling van een lijn, normaalvector van een lijn, de afstand van een punt en een lijn.

De afbeeldingen:

Translatie, spiegeling t.o.v. de x-as, spiegeling t.o.v. de y-as, puntspiegeling t.o.v. O, spiegeling t.o.v. $y = x$ of $y = -x$, rotatie om O over φ, waarbij $\varphi = \frac{1}{2} k \pi$, vermenigvuldiging t.o.v. O met de factor f.

6 *De ruimte R_3*
Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.

Hoek van twee lijnen, van twee vlakken en van lijn en vlak.

Berekeningen m.b.v. stelling van Pythagoras, sinus- en cosinusregel.

Kubus, piramide, recht prisma.

Enkele verzamelingen van punten en van lijnen, rechthoekig assenstelsel, aanduiding van punten: (x, y, z), de afstand van twee punten, het midden van een lijnstuk, vergelijking van een vlak.

Vectoren in R_3, een basis in R_3, de lengte van een vector, het inwendig produkt van twee vectoren, vectorvoorstelling van een lijn, vectorvoorstelling van een vlak, normaalvector van een vlak, de hoek van twee vlakken met normaalvectoren, de afstand van een punt en een vlak.

7 *Statistiek en kansrekening*
a Beschrijvende statistiek: histogram, lijndiagram, cirkeldiagram, klassenindeling, modus, mediaan, gemiddelde, spreiding.

Berekenen van gemiddelde en standaarddeviatie, ook volgens verkorte methode.
Gebruik van de vuistregel: gemiddelde $\pm$ 2 $\times$ standaarddeviatie.

Aandacht dient besteed te worden aan het verwerken van en het trekken van conclusies uit gegeven of zelf verzameld statistisch waarnemingsmateriaal.

b Eenvoudige kansrekening: begrip kans, somregel, complementaire kans, onafhankelijkheid van gebeurtenissen, produktregel.

1 Een functie f: $x \to \sin 2x$ heeft als domein het interval $< 0, \pi >$.

Geef een volledige afleiding van $f'(\frac{\pi}{2})$, uitgaande van de definitie van afgeleide.

2 De functie f is gedefinieerd door $f(x) = -2x^3 + 6x^2$ en de functies g_p door $g_p(x) = px$ waarbij $p \in \mathbb{R}$.
a Teken de grafiek van f.
b Voor welke p hebben de grafieken van f en g_p drie verschillende punten gemeen?

3 Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ en $C(-1, -2)$.

a Bewijs dat de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ de bissectrice is van hoek BAC.

b Bereken de coördinaten van de punten P op l met de eigenschap: $PB \perp PC$.

4 a De produktie van een fabriek bedroeg in

1965	2100 stuks
1966	2400 ,,
1967	2400 ,,
1968	2000 ,,
1969	2600 ,,

b De vervuiling van de lucht boven een bepaalde stad wordt veroorzaakt door:

het verkeer	voor 48%
fabrieken	voor 30%
huisverwarming	voor 16%
andere oorzaken	voor 6%

c Het temperatuurverloop op zeker etmaal was:

4 uur:	12° Celsius
8 uur:	13.4° ,,
12 uur:	18.2° ,,
16 uur:	18.1° ,,
20 uur:	15.4° ,,
24 uur:	13.1° ,,

Kies voor elk van de verzamelingen waarnemingsgetallen onder a, b en c een geschikte methode voor grafische weergave. Verklaar je keuze.

5 Gegeven zijn het vlak V: $2x + y - z = 3$ en de punten $A(3, 1, 0)$ en $B(1, 1, -2)$. Benader de hoek van de lijn AB en het vlak V.

6 Gegeven de verzameling

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

en de verzamelingen

$$W_p = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - 2y + p = 0\}$$

waarbij $p \in \mathbb{R}$.
a Bereken de elementen van $V \cap W_5$.
b Voor welke p is $V \cap W_p$ niet leeg?
c Als de verzameling $V \cap W_p$ uit twee elementen (x_1, y_1) en (x_2, y_2) bestaat, voor welke p is dan $x_1 x_2 y_1 y_2 > 0$?

7 Gegeven zijn het vlak V: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

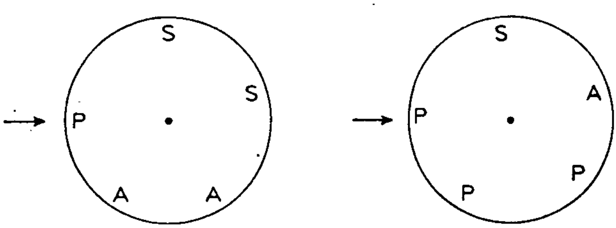
en de punten $A(1, -2, -4)$ en $B(1, 4, 0)$.
a Bewijs dat $A'(0, 1, -3)$ de projektie van A op V is.
b Geef een vectorvoorstelling van de projektie op V van de lijn door A en B.

EXAMEN II

1 In R_3 zijn gegeven drie onafhankelijke vectoren $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ en $\vec{OC}$.
Z is het zwaartepunt van ΔABC.
Bewijs: $3\,\vec{OZ} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

2 De functie f is op het interval $< 0, 2\pi >$ gedefinieerd door $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$.
a Los op: $f(x) = -1$.
b Wat is het bereik van f?

3 Een speelmachine heeft twee schijven, die men onafhankelijk van elkaar kan laten draaien. Op beide schijven liggen vijf vruchten regelmatig verdeeld over de omtrek van de schijven. Op de eerste schijf zijn dat twee sinaasappels, twee appels en een peer. Op de tweede schijf zijn dat een sinaasappel, een appel en drie peren.



Als zo'n schijf uitgedraaid is, wijst hij één van de vijf vruchten aan.
Hoe groot is de kans dat de twee schijven na het draaien
a allebei bij een sinaasappel stoppen?
b allebei bij eenzelfde vrucht stoppen?
c bij verschillende vruchten stoppen?

4 De functie f met domein $\mathbb{R}^+$ is gedefiniëerd door

$$f(x) = -x + 2\sqrt{x}.$$

a Teken de grafiek van f op het interval $< 0, 9 >$.
b Los op: $f(x) > -1{,}25$.
c De punten $A(1, a)$ en $B(4, b)$ liggen op de grafiek van f. De raaklijnen in A en B aan de grafiek van f snijden elkaar in S. Bereken de koördinaten van het punt S.

5 Gegeven is de kubus $OABC\,DEFG$, waarbij

$$O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), C = (0, 1, 0) \text{ en } D = (0, 0, 1).$$

P ligt op het verlengde van CG zó, dat $GP = CG$.
Q is het midden van de ribbe OA.
a Bewijs, dat de lijnen FQ en AP elkaar kruisen.
b Bereken de afstand van de lijnen FQ en AP.
c Geef een vectorvoorstelling van de lijn door B, die parallel is met het vlak ADC en die de lijn AP snijdt.

6 Van een aantal waarnemingsgetallen is het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaarddeviatie s.
Wat gebeurt er met $\bar{x}$ en s als men alle waarnemingsgetallen met 10 vermeerdert?
En wat als men alle waarnemingsgetallen halveert?

7 Teken de grafiek van de relatie

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \log x + \log y = \log (x + y)\}.$$

8 Beschouw voor $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ en $p \in \mathbb{Z}$ de relaties

$$R_p = \{(x, y) \mid x - y = p\},$$
$$S = \{(x, y) \mid y^2 \leqslant 4x + 4\}$$
en $$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}.$$

a Noem de elementen van de verzameling $R_2 \cap S \cap T$.
b Voor welke p is de verzameling $R_p \cap S \cap T$ niet leeg?

EXAMEN III

1 Gegeven zijn de punten $A(a, a-1)$, $B(2a, a-3)$ en $C(a^2, 4-2a)$, waarbij $a \in \mathbb{R}$.
Voor welke waarde(n) van a liggen A, B en C op één rechte lijn?

2 Gegeven de verzamelingen

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 5\}$$
en $$W = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y > 4\}.$$

Leid m.b.v. de grafiek van $V \cap W$ af hoe groot het maximum van $x^2 + y$ is.

3 In een doos zitten 100 kaartjes, aldus genummerd:
00, 01, 02, 03, ..., 10, 11, 12, ..., 99.
Iemand trekt één kaartje uit de doos.
Hoe groot is de kans dat tenminste één van de twee cijfers op het kaartje even is?

4 Gegeven zijn de cirkel

$$C\colon (x+2)^2 + y^2 = 5$$

en de lijnen

$$l\colon 3x - y = -11 \text{ en } m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a Bereken de lengte van het lijnstuk, dat door C van l wordt afgesneden.
b Het beeld van m bij de translatie over de vector $\begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}$ is een raaklijn aan C. Bereken a.

5 Teken de grafiek van de relatie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 2^y) \cdot ({}^x\log y - 2) = 0\}.$$

6 Op het interval $[0, \pi]$ zijn de functies f en g_p gedefiniëerd door

$$f(x) = \sin x \text{ en } g_p(x) = p + \cos x.$$

a Los op: $f(x) = g_1(x)$.

b Voor welke $p \in \mathbb{R}$ raken de grafieken van f en g_p elkaar?

c Voor welke $p \in \mathbb{R}$ hebben de grafieken van f en g_p geen enkel punt gemeen?

7 Los op: ${}^{\frac{1}{2}}\log x > -1$.

8 Gegeven zijn de vlakken V: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b-2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b \\ a \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

en W: $x - 2y + z = 4$.

a Voor welke a, b en c geldt: $V \cap W = \phi$?

b Voor welke a, b en c vallen V en W samen?

EXAMEN IV

1 Gegeven is de kubus $OABC\,DEFG$, waarbij

$$O = (0, 0, 0), A = (2, 0, 0), C = (0, 2, 0) \text{ en } D = (0, 0, 2).$$

P is het midden van de ribbe AE en Q ligt op het verlengde van de ribbe OD zó, dat $DQ = OD$.

a Bewijs dat het vlak PCQ de vergelijking $3x + 4y + 2z = 8$ heeft.

b Bereken de koördinaten van het snijpunt van het vlak PCQ en de ribbe AB van de kubus.

c Benader de hoek van het vlak PCQ en het grondvlak $OABC$ van de kubus.

2 Gegeven is de functie f: $x \to \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}$ met domein $\mathbb{R}$.

a Onderzoek of de grafiek van f een asymptoot heeft.

b Bereken het bereik van f.

c Bij welke elementen van het bereik van f behoort slechts één element van het domein?

3 Iemand moet op weg naar zijn werk vier verkeerslichten passeren.
Hij heeft door ervaring geleerd dat de volgende kansen bestaan:

de kans op 0 keer rood is gelijk aan 0,05;
de kans op 1 keer rood is gelijk aan 0,25;
de kans op 2 keer rood is gelijk aan 0,36;
de kans op 3 keer rood is gelijk aan 0,26.

Bereken de kans op tenminste twee keer rood licht.

4 De grafiek van de functie

$$f : x \to 2x^3 - 3x^2 - 12x + p$$

raakt de x-as.
Bereken p.

5 Gegeven de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en het punt $A\,(1, 2)$.

Van het parallellogram $ABCD$ liggen B en C op ℓ en ligt D op de y-as.
a Bereken de koördinaten van D.
b Bereken de koördinaten van B en C als bovendien gegeven is dat de vierhoek $ABCD$ een ruit is.

6 De functie f is op het interval $< 0, 2\pi >$ gedefiniëerd door

$$f(x) = \frac{1 - 2 \sin x}{2 + \sin x}.$$

a Los op $f(x) < \frac{4}{3}$.
b Teken de grafiek van f.

7 Gegeven zijn het vlak V: $2x + y - z = 3$ en de punten $A(3, 1, 0)$ en $B(1, 1, -2)$. Geef een vectorvoorstelling van de verzameling in V gelegen punten P met de eigenschap: $PA = PB$.

8 Gegeven de volgende frekwentieverdeling:

x_i	86	87	88	89	90	91	92	93
f_i	1	2	4	8	10	10	9	6

Van deze waarnemingsgetallen x_i is het gemiddelde $\bar{x}$.
We verminderen alle getallen x_i met 90 en noemen de uitkomsten y_i.
Van de getallen y_i is het gemiddelde $\bar{y}$.
a Bewijs dat voor de gegeven frekwentieverdeling geldt: $\bar{y} = \bar{x} - 90$.
b Bereken voor de gegeven verdeling de standaarddeviatie.

Vragen en reacties van lezers

'Nieuwe niet-euclidische meetkunde'

Euclides 48,1 blz. 13)
In de eerste paragraaf komt een aanhaling vóor uit een werk (van 1968) van prof. Bruins: . . . 'en honneur du grande géomètre Zénon de Sidon'. Hierbij plaatst prof. Freudenthal de volgende noot: 'Dat deze Zenoon – niet te verwarren met die van Elea – iets met meerkunde uitstaande zou hebben, is een origineel idee van Bruins.'
In George Sarton, A history of Science, Hellenistic science and culture in the last three centuries B.C., lees ik op blz. 291: 'Zenon of Sidon was probably the head of the Garden before Phaidros . . . He discussed the preliminaries of Euclid's *Elements,* claiming that they omplied unproved assumptions.' (Dit werk is van 1955.)
Gezien de jaartallen 1955 (Sarton) en 1968 (Bruins) kan de bewering dat deze Zenoon iets met meetkunde uitstaande zou hebben, m.i. geen origineel idee van Bruins zijn!
J.F. Hufferman
Zeist

Mijnheer van Dalen I

Geachte Heer Van Hiele,
In vervolg op ons telefoongesprek wil ik U nogmaals schriftelijk de kwestie voorleggen. Het gaat over een publicatie van het Centraal instituut voor toetsontwikkeling CITO Arnhem no 21, oktober 1972.

Op blz. 29 van genoemde publicatie komt het volgende voor:
'vermenigvuldigen en delen van links naar rechts; vermenigvuldigen noch delen hebben voorrang op elkaar.'
Aan het einde van de eerste kolom van dezelfde bladzijde:
'Bovenstaande regels worden in het onderwijs nog niet algemeen aanvaard. Veel scholen gebruiken nog "Mijnheer Van Dalen". In verband hiermee heeft de commissie besloten geen opgaven op te nemen die het kunnen toepassen van de regels toetsen.'
Mijn vraag is of inderdaad in het onderwijs deze genoemde regel al wordt aanvaard? En in welk onderwijs?
Gaat van deze publicatie de suggestie uit om genoemde regel te gaan toepassen? Is het een doelstelling van het Cito suggesties op dit gebied te doen? Wat is dan de rol van Wiskobas en de rol van de Commissie Modernisering Leerplan wiskunde vwo-havo-mavo?
Nu is dit misschien een detail, de tijd ontbreekt mij om na te gaan in hoeverre in het geheel het Cito stuurt i.p.v. toetst. Het zou interessant zijn om na te gaan of we naast alles er nog een 'sluipende' schooladviesdienst of iets dergelijks bij hebben gekregen.
In de hoop de kwestie naar genoegen onder Uw aandacht te hebben gebracht, met vriendelijke groeten en de meeste hoogachting,

G.J. Leus, directeur
R.K. Mavoschool, Winterswijk

8 januari 1973

Mijnheer Van Dalen-II

Zeer geachte heer Timmer,

De heer Van Hiele heeft mij verzocht U namens hem het volgende te schrijven:
Over het algemeen heb ik bijzonder veel waardering voor de toeten van het C.I.T.O. Omdat het hier een zeer principiële kwestie betreft voel ik mij genoodzaakt één keer van mening te verschillen.
Van de heer Leus, direkteur van de R.K. Mavo te Winterswijk vernam ik dat in de publikatie van het C.I.T.O. no. 21, oktober 1972, op blz. 29 staat
'vermenigvuldigen en delen van links naar rechts; vermenigvuldigen noch delen hebben voorrang op elkaar.'
Aan het einde van de eerste kolom van dezelfde bladzijde:
'Bovenstaande regels worden in het onderwijs nog niet algemeen aanvaard. Veel scholen gebruiken nog "Mijnheer Van Dalen". In verband hiermee heeft de commissie besloten geen opgaven op te nemen die het kunnen toepassen van de regels toetsen.'
De vraag of men al of niet 'Mijnheer Van Dalen' wenst te handhaven lijkt mij van weinig belang.
Waar ik de aandacht voor wil vragen is de kwestie of er opgaven zoals

$$25 : 5 . 2 : 3$$

in een toets zouden moeten voorkomen. Deze toets immers richt zich geheel niet op een verkregen inzicht, maar onderzoekt slechts of een (toevallige) afspraak gekend wordt. Dit mag toch nooit het doel van een toets zijn! Men kan iedere kans op vergissingen opheffen door te schrijven

$(25 : 5) . 2 \quad : 3$ of $25 : (5 . 2) : 3$

Om dezelfde reden moeten wij ook een toets afwijzen waarin gevraagd wordt 'in welk kwadrant twee door hun vergelijkingen gegeven rechten elkaar snijden'. (zie Mavo-examen 1972).
Immers een leerling zou in twijfel kunnen zijn of de kwadranten linksom of rechtsom genummerd worden. Zo is het ook te betreuren dat in een verzameling van eindexamenopgaven de schrijfwijze $\sqrt{}8x$ voorkomt, want nu kan een leerling niet weten of het gaat om de wortel uit het produkt van 8 en x of het produkt van $\sqrt{8}$ en x.
Kort en goed:
men behoort er voor te zorgen dat een toets begrip of inzicht onderzoekt en *niet* kennis van een afspraak.
Met vriendelijke groeten,

hoogachtend,
uitgeverij Muusses
W.A. van Eek

12 januari 1973

Boekbespreking

Charles Dixon, *Applied Mathematics of Science and Engenering,* John Wiley and Sons, London, N.York, etc. 1971; 489 blz; £ 8.–.

Dit boek behandelt de bekende onderwerpen die in alle boeken over toegepaste wiskunde voorkomen, o.a.:
vectoroperatoren, fysische velden, fourierreeksen, oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van reeksen, Besselse functies, polynomen van Legendre, de vergelijking van Laplace, de warmtegeleidingsvergelijking, de golfvergelijking en de toepassingen van de conforme afbeelding.
De inhoud van het zeer bekende boekje 'Einführung in die Differentialgleichungen der Physik' is, dacht ik, zelfs nog omvangrijker.
De kracht van het boek zetelt in de uitvoerige behandeling zonder te diep in te gaan op de wiskundige theorie, de presentatie van vele voorbeelden, en de grote van antwoorden voorziene verzameling vraagstukken.
Studerenden en ook zij die behoefte hebben aan voorbeelden van wiskundige toepassingen zullen veel genoegen aan het boek kunnen beleven.

J.J. Wouters

Israël Grossman et Wilhelm Magnus, *Les groupes et leurs graphes,* Dunod, Paris 1971, IX + 218 blz., 29 F. Oorspronkelijke titel: Groups and their Graphes.

Groepentheorie komt volgens de schrijvers veelal eerst laat ter sprake bij de mathematische opleidingen, terwijl het een aantrekkelijk onderwerp is waarmee men zeer goed bij de aanvang van een wiskundige studie al kan kennismaken. Om deze opmerking niet mis te verstaan moet men weten, dat de schrijvers Amerikanen zijn.
Doelstelling van de auteurs is dus de groepentheorie toegankelijk te maken op een zo min mogelijk abstracte manier. Men vindt in dit boek dan ook wel de onmisbare axioma's van de groepentheorie. De schrijvers hebben zich echter geen moeite getroost zich daarbij tot een minimum te beperken. En ook hebben ze geen deductieve groepentheorie ontwikkeld.
Wat dan wel? Centraal staat bij hen de betekenis van de groepentheorie in de toepassing. De fundamentele begrippen van de theorie worden dan ook uitgelegd aan de hand van concrete voorbeelden uit de getallentheorie, de meetkunde en de topologie. Min of meer spelenderwijs, maar toch correct, wordt men in aanraking gebracht met tal van begrippen, zoals: vrije groep, deelgroep, homomorfisme, normale deler, homotopie, definitie van een groep door een stelsel generatoren en relaties, graf van een groep. Van het begin tot het einde kan men het boek geboeid lezen.
Ik kan ieder, die een speelse behandeling van wiskundige problemen op prijs stelt, sterk aanraden dit boek eens ter hand te nemen. Voorkennis is niet vereist.

P.G.J. Vredenduin

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht
XXIV⁶ – XXV⁸, september 1971-december 1972.

H.J. Vollrath, Eine Analyse der Betragsfunktion;
J. Rist, Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Quinta;
R. Huth, Ein wenig bekanntes Modell eines endlichen Körpers und zweier isomorphen Gruppen;
H. Jung, Ein altes Multiplikationsverfahren.

H. Stork, Die unbewältigte Technik; die Technik in die Sicht Herbert Marcuses;
H.G. Bigalki, Zehn Thesen zur Gründung eines überregionalen zentralen Instituts für Didaktik der Mathematik;
H. Athen, Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen und statistische Beurteilung;
H. Lindner, Programmiertes Lernen.

G. Alefeld en anderen, Über neuere Gesichtspunkte beim numerischen Rechnen;
H. Meissner, Geschlitzte Inzidenzgeometrien;
W. Palm, Nuffield und wir?

H. Wolgast, Boolesche Algebra;
A. Faust, Modell einer rentablen Qualitätskontrolle;
H. Tietz, Die Raumhöhe des Tetraeders;
W. Ness, Die Oberfläche der Kugel;
W. Pelkmann, Die Keplergleichung;
Fr. S. Wagner, Mengenlehre, Liebling der Lehrprogrammierer.

F. Krafft, Archimedes von Syrakus als Ingenieur und Physiker;
G. Pickert, Boolesche Algebren;
J. Küster, Modell eines programmierbaren Computers aus Simulog-Bausteinen.

A. Kirsch, Ein didaktisch orientiertes Axiomsystem der Elementargeometrie;
E. Schmidt, Abbildungen und Klassen von n-Ecken;
Kl. Bosmanns, Eine Bemerkung zur Konvergenz von Funktionen.

G. Jörgensen, Humangenetische Probleme in der modernen Umwelt;
G. Pickert, Erzeugung Boolescher Algebren;
H. Wolgast, Der Einsatz von Tischcomputern im Mathematikunterricht;
D. Wode, Endliche Geometrien im Gymnasialunterricht.

H. Hering, Optimierung von Darstellungen natürlicher Zahlen in Stellenwertsysteme als Extremwertaufgabe;
W. Kosswig, Der Erwartungswert einer Zufallsgrösse;
A. Strobel, Entwicklung eines Programms zum Beweisen aussagenlogischer Sätze;
H. Lindner, Mengenlehre in der Grundschule.

H. Zeitler, Inzidenzgeometrie, ein Thema für die Schule?
H. Zeitler, Kleincomputer für die Schule;
K. Schwalbe, Schwedische Hochschulen fordern mehr Rechenfertigkeiten;
J. Schönbeck, Endliche Gruppen;
Kl. Dormann, Zur Einführung des Isomorphiebegriffs;
F. Vollendorf, Ein einfaches Beispiel für ein nichtassoziatieves Gruppoid.

Amerikaanse studie- en praktijkprogramma voor Nederlandse leerkrachten

Voor leerkrachten bij het middelbaar en lager onderwijs wordt een interessant programma geboden voor een verblijf van ± 18 maanden in de Verenigde Staten, het z.g. *International Work-Study Program for Teachers from Abroad,* door de University of Hartford, West Hartford, Connecticut, U.S.A.

Het *doel* van het programma is een groep jonge buitenlandse leerkrachten in de gelegenheid te stellen kennis te maken met de Amerikaanse samenleving en de verschillende onderwijssystemen door middel van studie, gevolgd door een periode van praktisch werken, bezoeken aan diverse culturele instellingen, excursies, verblijf bij Amerikaanse families.

Het programma bestaat uit een studie- en een werkperiode. De eerste maanden vormen een goede voorbereiding voor het daarop aansluitende jaar lesgeven op een lagere of middelbare school.
De studieperiode duurt drie maanden en omvat een zeer gevarieerd programma, waaronder instructie in de Engelse taal, lezingen over het Amerikaanse onderwijs en de Amerikaanse samenleving. *De werkperiode* bestaat uit twee gedeelten: a) deelname aan een zomerkamp, een zomer Recreation Program, het 'Headstart Program' e.d. b) het lesgeven gedurende een volledig schooljaar.

De data van de programma's zijn als volgt:
STUDIEPERIODE: 3 maart t/m mei 1974
WERKPERIODE: juni t/m juli 1974; schooljaar sept. '74-juni '75.

De *aanvankelijke kosten* bedragen $ 1600 voor het verblijf op de University of Hartford, waarbij komen de retourkosten van de reis. De kosten van levensonderhoud gedurende het schooljaar worden geraamd op minimum $ 4000. Hiertegenover staan inkomsten van minimum $ 7300 voor het werk in de kampen en het lesgeven op school, maar kunnen ook aanmerkelijk hoger zijn. Gewoonlijk wordt er genoeg verdiend, dat men nog geld over heeft om al reizend veel van de Verenigde Staten te zien.

Vereisten: Voltooide opleiding en daarna tenminste *drie jaar* ervaring in het lesgeven op een lagere of middelbare school; leeftijd van 23 tot ± 35 jaar, goede kennis van de Engelse taal. De voorkeur gaat uit naar ongehuwden of gehuwden zonder kinderen. Een Nederlandse Selektie Commissie bepaalt wie voor dit programma aanbevolen zal worden.

Volledige bijzonderheden en aanvraagformulieren dienen zo spoedig mogelijk aangevraagd te worden, en dienen ingevuld vóór 1 april 1973 teruggestuurd te worden naar:
Het Nederland-Amerika Instituut
Afdeling Studievoorlichting
Prinsengracht 919
Amsterdam
Telefoon: 020-23 94 25

Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek

De voorjaarsvergadering zal zijn op zaterdag 28 april te Dordrecht (bezoek aan het Lipsslotenmuseum) en Gorkum en zondag 29 april, te Gorkum.
Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en voor toezending van het programma wenden tot de secretaris, Dr. A.J.E.M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

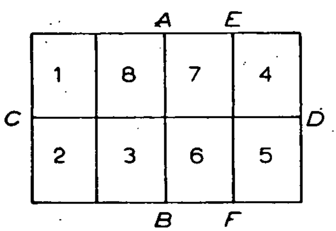
292 V is de verzameling van de natuurlijke getallen met zeven cijfers (tientallig geschreven) waarin de cijfers 1 tot en met 7 voorkomen. Zoek twee elementen uit V waarvan de som ook tot V behoort.

293 Gegeven is een strook papier. Deze moet in n congruente delen verdeeld worden. Daartoe mag men de volgende bewerkingen uitvoeren:
1. vouwen zo, dat de vouwrichting loodrecht op de lengterichting van de strook valt,
2. doorknippen in de richting loodrecht op de lengterichting van de strook,
3. alle reeds verkregen stukken op elkaar leggen.

Gevraagd wordt het minimale aantal bewerkingen, dat nodig is om de strook in 9 congruente delen te verdelen.
Zelfde vraag voor $n = 100$.

Oplossingen

290 Bijgaande kaart moet zo gevouwen worden, dat de bladen op volgorde komen.



Vouw de kaart eerst om AB. Daarna om CD zo, dat blad 7 tegen 6 komt. Nu komt de narigheid. Pak de bladen 4 en 5 tussen duim en wijsvinger en vouw deze om EF naar binnen zo, dat ze tussen de bladen 3 en 6 komen; nodig is hierbij dat de kaart van soepel materiaal is (maar dat was gegeven). Tot slot vouwen we de kaart dicht zo, dat 2 tegen 3 komt.

291 Een flatgebouw heeft n verdiepingen. Volgens het toeval verdeeld maken personen van de lift gebruik. Ze laten de lift daar, waar ze uitstappen. Wat is de gemiddelde weg die de lift per keer aflegt?
Als voorbereiding berekenen we de gemiddelde afstand tussen lift en persoon, als beide zich op een etage bevinden. We onderscheiden de volgende mogelijkheden:

persoon etage 1, lift etage n — afstand $n - 1$ etages
persoon etage n, lift etage 1 — afstand $n - 1$ etages

dus 2 mogelijkheden met afstand $n - 1$ etages.
Evenzo vinden we:

4 mogelijkheden met afstand $n-2$ etages
6 mogelijkheden met afstand $n-3$ etages

...

$2n-2$ mogelijkheden met afstand $n-(n-1)$ etages
n mogelijkheden met afstand 0 etages

Gemiddeld levert dit

$$2\,\frac{1(n-1)+2(n-2)+\ldots+(n-1)(n-(n-1))}{n^2}\ \text{etages}$$

Hierin is

$$(1+2+\ldots+n-1)\,n=\tfrac{1}{2}(n-1)n^2$$

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=(1^2+2^2+\ldots+n^2)-n^2=$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-n^2=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)$$

Zodat we vinden:

$$\frac{n^2-1}{3n}$$

Er zijn nu vier mogelijkheden:

de persoon bevindt zich op een etage en de lift eveneens; het aantal af te leggen etages is dan gemiddeld

$$\frac{n^2-1}{3n}+\frac{1}{2}(n+1)$$

de persoon bevindt zich op een flat en de lift is beneden; het aantal af te leggen etages is gemiddeld

$$n+1$$

de persoon bevindt zich beneden en de lift ook; het aantal af te leggen etages is gemiddeld

$$\frac{1}{2}(n+1)$$

de persoon bevindt zich beneden en de lift bevindt zich bij een flat; het aantal af te leggen etages is gemiddeld

$$n+1$$

De kans op elk van deze vier mogelijkheden is $\frac{1}{4}$. De gemiddelde af te leggen weg is dus

$$\frac{5}{6}n+\frac{3}{4}-\frac{1}{12n}\ \text{etages}$$

INHOUD

P. G. J. Vredenduin: Meetkunde met vectoren VII 241

A. G. M. Dorresteijn en J. J. P. Olgers: Alle hoeken het hoekje om? ofwel: „slorde"-ge meetkunde 247

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 262

A. Leurs: Elektro, spel zonder wiskundegrens 263

Toelichting op Examenprogramma wiskunde-havo 267

Vragen en reacties van lezers 274

Boekbespreking 276

Didactische literatuur 277

Berichten 278

Recreatie 279