EUCLIDES

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

S.M.P. Books A-H

P.G.J. VREDENDUIN

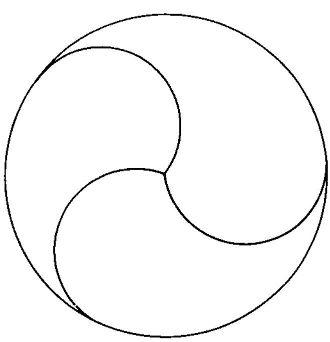
Oosterbeek

De S.M.P. (School Mathematics Project) is de grootste Engelse groep, die zich met de hervorming van het wiskundeonderwijs bezighoudt. Leider van het project is Prof. Thwaites. In 1961 werd het werk van de S.M.P. begonnen. Vijf boeken werden geschreven ter voorbereiding van de leerlingen voor het examen op O-level en nog vier voor A-level. De boeken bleken te moeilijk voor vele leerlingen van de comprehensive schools. De stof was niet te moeilijk, maar wel de presentatie. Vandaar dat in 1967 gestart werd met het maken van een nieuwe uitgave geschikt voor de comprehensive schools. De stof uit de eerste vier boeken werd op nieuwe wijze bewerkt en verdeeld over acht boeken, de boeken A-H. Deze acht boeken heb ik van de uitgever ter recensie meegekregen. Ze zijn te vergelijken met onze mavo-uitgaven.
Omdat dit in een recensie gebruikelijk is, vermeld ik dat de boeken uitgegeven zijn door de Cambridge University Press, een gemiddelde omvang hebben van ongeveer 170 blz. en per stuk gemiddeld 58 p. kosten. In Nederlandse munt kost de gehele serie dus *f* 37,–, hetgeen ons bijzonder goedkoop in de oren klinkt.
Graag wil ik aan de boeken iets meer aandacht besteden dan in een recensie gebruikelijk is en er een kort artikel aan wijden.
In book A valt al direct op, wat de eigenlijke visie van de auteurs is. Ze willen de leerlingen een serie wiskundige waarheden laten ontdekken en daarbij zo concreet mogelijk te werk gaan. Van bewijzen of zelfs van preluderen op bewijsvoering is geen sprake.
Na een inleiding over het spijkerbord, een veel gebruikt hulpmiddel, komen enige onderzoekingen op het gebied van de (positieve) natuurlijke getallen. De getallen worden voorgesteld door stippatronen. We maken kennis met rechthoekige patronen, die getallen voorstellen, die het produkt zijn van twee natuurlijke getallen groter dan 1. Verder met vierkante patronen en ontdekken daaraan dat $2^2 = 1^2 + 3, 3^2 = 2^2 + 5$, enz.
Het volgende hoofdstuk gaat over coördinaten. We spelen het bekende spel, waarbij op een bord met 81 vierkanten slagschepen, kruisers, torpedobootjagers geplaatst worden en een ander op deze schepen schiet door een bepaald veld te noemen waarop hij gericht zou hebben. De noodzaak doet zich voor de velden van

een naam te voorzien en zo ontstaat de benaming (2, 3) voor het veld 2 naar rechts en 3 naar boven. Daarna wordt een kaart getekend met verschillende bijzonderheden erop, zoals 'schat', 'eerste kamp', 'duivelskaap'. Om de plaats hiervan te bepalen wordt op de kaart een netwerk van elkaar loodrecht snijdende lijnen aangebracht en zo is een echt coördinatenstelsel (met niet-negatieve coördinaten) tot stand gekomen. En nu natuurlijk hiermee excerceren.
Rotaties volgen, alweer heel concreet, over een aantal hele draaien, over een halve draai linksom, een kwart draai rechtsom, enz. Daarna hoeken, waarvan de grootte door middel van een draaiing gemeten wordt. Na de draai als hoekmaat volgt de graad als zestigste deel van een-zesde draai. Experimenteel zien we, dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.
We gaan weer terug naar de getallen. De getallenlijn wordt gebruikt als een middel om hoeveelheden te tellen (door toevoeging van de objecten aan de streepjes op de lijn). Optellen en aftrekken worden geoefend op de getallenlijn en daarna ook vermenigvuldiging en deling als herhaalde optelling resp. herhaalde aftrekking. Gerekend wordt in een willekeurig talstelsel. B.v.

$$\begin{array}{cc} 4 & 7 \\ 3 & 9 \\ \hline 8 & 0 \end{array} +$$

Wat zijn de 'headings' boven de kolommen? Antwoord: pounds en ounces. Nu begrijp ik het nadeel van een decimale metriek. Opvallend is het mijden van de basis 2. Daarna wordt de abacus gebruikt met drie spijkers waarom de eenheden, vijftallen en vijfentwintigtallen worden geschoven. Rechts van de eenhedenspijker wordt een extra spijker aangebracht. Zo vindt men op natuurlijke manier de vijftallige schrijfwijze 23,4 voor dertien viervijfde.
Pak nu een stuk papier, gooi er een paar inktmoppen op, vouw het papier dubbel en daarna weer open. Een prachtige eerste aanloop om lijnsymmetrie te demonstreren. Verschillende figuren worden getekend met verzoek de spiegelas te tekenen. Daarna komt de rotatiesymmetrie, gedemonstreerd o.a. met behulp van de volgende figuur:



Het behoeft geen betoog, dat we zo allerleukste opgaven kunnen maken.
De rotatiesymmetrie is een geschikte aanloop voor aanschouwelijke behandeling

van breuken. In bovenstaande figuur wordt de cirkelschijf in drie gelijke delen verdeeld. Neem er twee van en je hebt $\frac{2}{3}$ deel van de cirkel. Het begrip wordt aanschouwelijk gelegd, meer niet.
Een hoofdstuk volgt over polygonen, convex en niet-convex, de som van de hoeken van een veelhoek, regelmatige veelhoeken.
Dan schakelen we weer over naar de getalpatronen: veelvouden en gemeenschappelijke veelvouden worden behandeld op een manier, die weinig indruk op mij maakte. Het begrip priemgetal wordt duidelijk gemaakt. Gejongleerd wordt op leuke wijze met driehoekige, rechthoekige en vierkante getallen. En tot slot worden met behulp van netwerken ruimtelijke figuren gemaakt, zoals de vijf regelmatige veelvlakken, een prisma, een piramide.
Algemene indruk van dit deel: De leerling is vertrouwd geraakt met enkele fundamentele wiskundige begrippen. Hij heeft zijn hersens getraind. De begrippen en de training ermee zijn hem op een zodanige manier gepresenteerd, dat hij erdoor geboeid wordt. In de opgaven ontdekt de leerling zelf een stuk wiskunde en ook de theorie is zo geschreven, dat de lezer dingen ontdekt en niet voorgeschoteld krijgt. Zelfs leverde dit deel twee recreatieopgaven, die u in de desbetreffende rubriek in dit nummer aantreft.

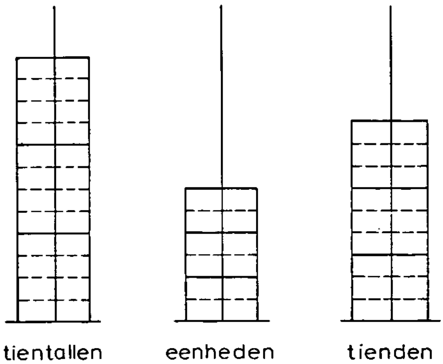
Book B gaat op de ingeslagen weg voort. Alleen het eerste hoofdstuk verraadt iets meer van de wiskundige methode. Daar worden natuurlijke getallen door letters voorgesteld en aan de hand van stipfiguren de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging en de distributieve eigenschap aangetoond en in formulevorm voorgesteld. Gevolgd door opgaven als: wat is het n^e oneven getal? , wat is het verschil tussen het n^e en het $(n-1)^e$ driehoekige getal?
Maar dan gaan we verder weer experimenteel te werk, zij het ook dat de moeilijkheidsgraad wat opgevoerd wordt. Er volgt een hoofdstuk over tegelpatronen. Dan een uitermate nuttig hoofdstuk over meten, voorstellen van een meetresultaat door een decimale breuk, afronden. Een volgend hoofdstuk over het vergelijken en meten van oppervlakken door het aanbrengen van een quadrillage maakt minder indruk op me. Maar dan komt een hoofdstuk over breukrekening, dat zeer belangrijk is. De breuk $\frac{3}{5}$ wordt voorgesteld door het punt met coördinaten (3, 5). Dat $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, wordt door verdelen van b.v. een taart aangetoond. Gelijke breuken blijken in het rooster dan te liggen op lijnen door de oorsprong. Hoe steiler de lijn des te kleiner de (positieve) breuk is. Optellen van breuken geschiedt nu door ze gelijknamig te maken. De lijn $y = 1$ wordt een getallenlijn waarop elk positief rationaal getal zijn plaats vindt. Negatieve gebroken getallen blijven nog buiten beschouwing.
Het hoofdstuk over hoeken wordt weer opgenomen en nu uitgebreid tot de mogelijkheid de plaats van een punt te bepalen door wat wij poolcoördinaten zouden noemen. En daarmee wordt meteen in verband gebracht de bepaling van de plaats van een voorwerp door middel van een radarscherm.
Hierna een inleiding in relaties en afbeeldingen, die voorlopig nog zeer summier is en weinig spectaculairs biedt. Dan wordt de gedachtengang uit boek A weer opgenomen getallen in een willekeurig talstelsel voor te stellen, maar nu met

basis 2. Ingegaan wordt op de praktische betekenis van het binaire stelsel, b.v. door een getal te representeren door een serie wel of niet brandende lampen. Ook de ponskaart komt ter sprake en we zien hoe een woord door een serie gaatjes voorgesteld kan worden, door elke letter door een getal te vervangen en dit binair te ponsen.
Het volgende hoofdstuk gaat over beschrijvende statistiek. We zien hoe een verdeling aanschouwelijk voorgesteld kan worden door een staafdiagram en ook door een 'taartdiagram'. De statistische vraagstellingen zijn in verband gebracht met concrete situaties, b.v. wat voor tellingen zou je verrichten om de overheid ervan te overtuigen, dat op een bepaald punt een voetgangersoversteekplaats aangebracht dient te worden?
De negatieve (gehele) getallen worden ingevoerd door een serie metingen, b.v. van lengten of temperaturen, te doen en dan een bepaald resultaat (de eigen lengte) als referentiepunt (nulpunt) te kiezen. Vanzelf ontstaan zo positieve en negatieve afwijkingen.
Tot slot nog een eerste oriëntatie in topologische gelijkwaardigheid van figuren, waarvan de zin me voorlopig ontgaat.

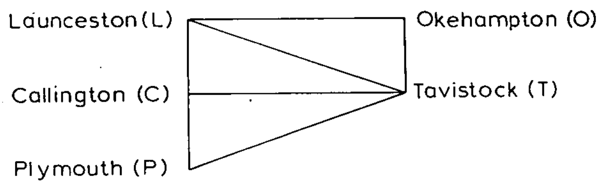
In book C vindt men achtereenvolgens:
– met behulp van een spijkerbord afleiden van de formules voor de oppervlakte van een parallellogram en van een driehoek,
– nader ingaan op positieve en negatieve gehele getallen (optellen en aftrekken),
– grafieken van eenvoudige eerstegraads functies, nog beperkt tot het eerste kwadrant,
– vermenigvuldiging en deling van decimaal voorgestelde getallen,
– negatieve coördinaten,
– spiegeling t.o.v. een wiskundige spiegel, d.i. een spiegel die aan beide zijden reflecteert,
– netwerken met bijbehorende graffen en matrices (zie voorbeeld),
– rotaties,
– de rekenliniaal,
– uitbreiding van de statistiek: modus, gemiddelde en mediaan,
– symmetrievlakken van ruimtelijke figuren.

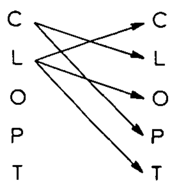
Aan een drietal voorbeelden wil ik toelichten hoe ook hier de inhoud van de theorie niet afgeleid, maar gedemonstreerd wordt.
Rekenen met positieve en negatieve getallen. Neem een strip van 26 rechthoekjes 'geletterd' a tot en met z. Zet een pion op m. Gooi met een dobbelsteen (de auteur neemt een achtvlak) waarop drie groene zijvlakken genummerd 1, 2, 3 en drie blauwe zijvlakken genummerd 1, 2, 3 zijn. Gooit men blauw 3, dan gaat men 3 naar rechts, groen 3 dan 3 naar links. Twee leerlingen doen dit elk met hun eigen strip. Degeen wiens pion het eerst het eind van de strip bereikt of overschrijdt, heeft gewonnen. Van hier naar de optelling van gehele getallen is slechts een kleine stap en ook de aftrekking is daar snel uit afleidbaar, ten minste als men aftrekken ziet als 'de andere kant op gaan'.
Vermenigvuldigen met decimaal geschreven getallen. Voorbeeld: $3 \cdot 42{,}3$. Onder-

staande figuur spreekt voor zichzelf. Wij zouden hier de distributieve eigenschap bij vermelden. De figuur doet dit ook, maar alleen niet expliciet.



Netwerken. Onderstaand netwerk geeft de verbindingswegen van enkele steden. We interesseren ons alleen voor de directe verbindingen.





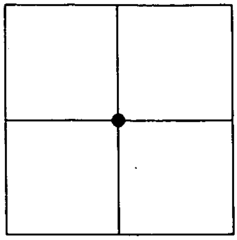
naar

		C	L	O	P	T
	C	0	1	0	1	1
	L	1	0	1	0	1
van	O	0	1	0	0	1
	P	1	0	0	0	1
	T	1	1	1	1	0

We kunnen deze weergeven door een graf (pijldiagram) of door een matrix, zoals hieronder gebeurd is.

Maak nu sommige wegen tot eenrichtingswegen en de symmetrie van de matrix gaat verloren. Verbind sommige steden door meer dan 1 directe weg en in de matrix zullen ook andere getallen dan 0 en 1 optreden. Begin met de matrix en maak een bijbehorend netwerk. Enzovoorts.

Book D begint al direct met een leuk voorbeeld. Teken onderstaand vierkant. Zet je potlood in het midden en voer een van de volgende drie opdrachten uit:



P: verander niets aan het vierkant,
Q: draai het vierkant een kwartslag in de richting van de klok,
R: draai het vierkant een kwartslag in tegengestelde richting.
Maak nu de volgende matrix af betreffende het achter elkaar uitvoeren van twee van deze opdrachten:

		tweede opdracht		
		P	*Q*	*R*
eerste opdracht	*P*	*P*	*Q*	*R*
	Q	*Q*	–	*P*
	R	*R*	*P*	–

Blijkbaar is deze verzameling opdrachten niet gesloten t.o.v. samenstelling. Welke opdracht moeten we toevoegen om een gesloten verzameling opdrachten te krijgen? Teken de bijbehorende matrix.
Het ritme van het boek wordt nu steeds duidelijker. Steeds weer worden oude onderwerpen opnieuw opgenomen en wordt er nader op ingegaan. Zo wordt in dit boek opnieuw ingegaan op breuken en wordt nu de vermenigvuldiging en de deling van gewone breuken onder de loep genomen. Ook de gehele getallen komen opnieuw ter sprake, ditmaal met hun vermenigvuldiging en deling. De grafiek van de eerstegraads functie zien we weer, maar nu in het gehele vlak en niet alleen maar beperkt tot het eerste kwadrant. Ook wordt opnieuw ingegaan op afbeeldingen en de bijbehorende pijldiagrammen. Na het vroegere hoofdstuk over symmetrievlakken in de ruimte zien we de betekenis van rotatiesymmetrie in de ruimte.
Natuurlijk komen ook nieuwe onderwerpen ter sprake. In de eerste plaats moet hier genoemd worden een hoofdstuk over vermenigvuldiging van figuren en een daarmee nauw gelieerd hoofdstuk over verhoudingen.
Verder is een hoofdstuk gewijd aan de associatieve eigenschap in het algemeen. Men vindt opgaven, waarin vergeleken worden b.v.

$(12 : 6) : 2$ en $12 : (6 : 2)$
$(5 \times 4) + 7$ en $5 \times (4 + 7)$
$(14 - 6) - 3$ en $14 - (6 - 3)$

Leuk is de introductie van het vectorbegrip. Een vector komt te voorschijn als weergave van een stel inkopen: 3 kg suiker, 2 kg rijst, 5 kg appels en 1 kg peren wordt weergegeven door de kolomvector

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Optellen van vectoren en vermenigvuldigen van een vector met een scalair krijgen op deze manier gemakkelijk betekenis. Dan wordt overgegaan op verplaatsingen ('journeys'), beschreven t.o.v. een rooster. Zo'n reis kan men beschrijven door een verplaatsing naar rechts en een naar boven, dus b.v. door het paar getallen

2 naar rechts
4 naar boven

En zo kan elke reis voorgesteld worden door een kolomvector. Ten slotte kan een translatie op dezelfde manier door een vector beschreven worden.

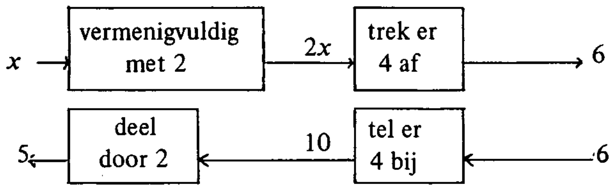
Ook in book E treffen we oude bekenden aan. De statistiek wordt weer opgenomen om te komen tot het begrip fractie successen en later tot de klassieke kansdefinitie. De ponskaarten komen weer ter sprake en ook de rekenliniaal. Schaalvergroting heeft natuurlijk te maken met de vroegere onderwerpen vermenigvuldiging van figuren en verhoudingen. Dan iets over inhouden.
Ook enkele nieuwe dingen. Pythagoras, bewezen met behulp van oppervlakken, en enige tijd later gevolgd door de vierkantswortels. Van deze vierkantswortels zien we nauwelijks meer dan de betekenis ervan en de meetkundige voorstelling door middel van Pythagoras.
Een tweetal opvallende dingen, hoewel niet onbekend. De melkboer verkoopt verschillende huisvrouwen (A, B, C en D) drie soorten melk:

	A	B	C	D
goud etiket	2	0	2	1
rood etiket	0	2	1	3
zilver etiket	0	1	1	1

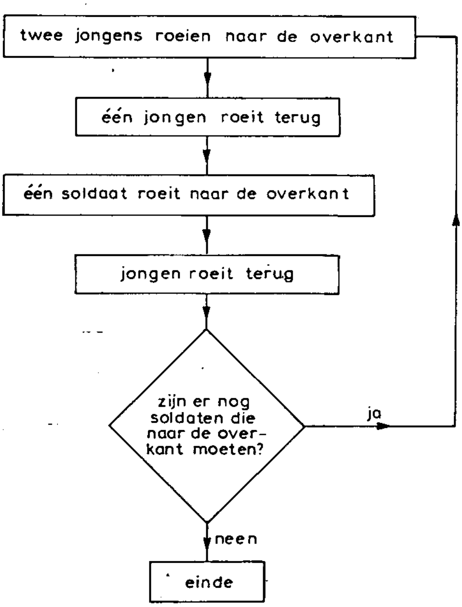
Ziedaar een matrix. Wil de melkboer weten, wat de huisvrouwen in een week kopen, dan telt hij de matrices op.
Drie scholen behalen eerste, tweede, derde en vierde prijzen. De aantallen prijzen worden in matrixvorm weergegeven. De prijzen worden gehonoreerd met resp. 5, 3, 2, 1 punten en uitgerekend wordt hoeveel punten elke school gekregen heeft. Daarna wordt hetzelfde gedaan met een andere waardering, nl. 8, 5, 3, 1 punten. Wel, dat is de matrixvermenigvuldiging:

$$
\begin{array}{lc}
 & \text{punten} \\
 & 1^e\ 2^e\ 3^e\ 4^e \\
\text{school } A & \\
\text{school } B & \\
\text{school } C &
\end{array}
\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\quad
\begin{array}{c} \text{totaal} \\ \begin{pmatrix} 43 & 66 \\ 45 & 68 \\ 44 & 70 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Het oplossen van de eerstegraads vergelijkingen geschiedt als volgt. Denk aan een getal, vermenigvuldig het met 2, trek er 4 af. De uitkomst is 6. Welk getal was dat?
Oplossing:



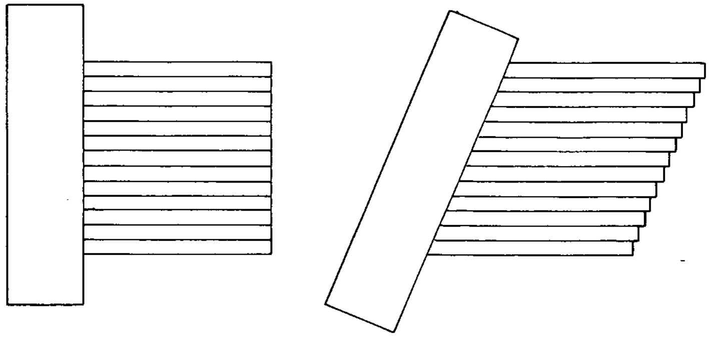
Book F begint met het volgende probleem. Een leger komt aan een rivier. De soldaten willen de rivier overtrekken, maar hebben tot hun beschikking alleen maar een roeiboot, die het eigendom is van twee jongens. De roeiboot kan maximaal tegelijk naar de overzijde brengen de twee jongens of één man, dus niet één man en één jongen. Hoe komen ze aan de overkant?
De oplossing wordt gegeven in de vorm van een flow-diagram:



Natuurlijk vinden we verderop in het boek een alleraardigste eerste inleiding in de computers; het zou te veel plaats in beslag nemen die hier weer te geven.
Verder levert dit deel weinig nieuwe gezichtspunten. De matrices spelen een belangrijke rol in drie hoofdstukken. Kijken we nog eens naar het netwerk in book C, dan kunnen we door middel van matrixvermenigvuldiging vinden op hoeveel manieren men b.v. van L naar O kan gaan en daarbij eenmaal een andere stad passeren. Verder wordt de matrixvermenigvuldiging te hulp geroepen bij het samenstellen van relaties en bij het vinden van het beeld van een vector bij een translatie. De statistiek komt weer ter sprake; ditmaal worden klasse-indelingen en histogrammen behandeld.
Nieuw is in dit boek het starten met de trigonometrie van de rechthoekige driehoek, waarbij gebruik gemaakt wordt van schaalvergroting om de hypotenusa de lengte 1 te geven.
Verbazing zal zonder twijfel wekken, dat nu eerst een hoofdstuk ingelast wordt over het substitueren, b.v.: als $a = 3$ en $b = 4$, waaraan $a^2 + b^2$ dan gelijk?

Book G gaat op de ingeslagen weg voort. De matrixvermenigvuldiging wordt gebruikt bij het samenstellen van translaties. In de statistiek komen som- en produktregel ter sprake en later ook de cumulatieve frekwentie. De trigonometrie wordt iets uitgebreid en we maken kennis met een sinusgolf. Er zijn een hoofdstuk over het lezen van formules en één over het oplossen van vergelijkingen. De rekenliniaal komt weer aan bod.

Nieuw is een hoofdstuk, waarin op experimentele wijze meetkundige verzamelingen gevonden worden. En verder een hoofdstuk over de afschuiving. Het is de moeite waard te ontdekken, hoe deze transformatie gedefinieerd wordt. Neem een stapel lucifers en een lineaal, zoals in de linker figuur is getekend. Draai nu de liniaal om het uiteinde van de onderste lucifer en de rechter figuur ontstaat. Wel, dat is een afschuiving. En op grond van deze 'definitie' gaan we afschuivingen uitvoeren, zien we dat er een invariante lijn is en dat oppervlakten onveranderd blijven.



Het belangrijkste, dat men in book H vindt, is een uiteenzetting over lineaire programmering. Verder is het in hoofdzaak een herhalingsdeel.

Kort wil ik nog samenvatten, wat het meest typerende van de gehele uitgave is.
Er worden geen mathematische problemen langs abstracte weg benaderd. Elk probleem wordt gekoppeld aan een praktische situatie en in relatie daarmee uiteengezet.
Onderwerpen worden nimmer uitputtend behandeld. Men gaat op een bepaald onderwerp in een hoofdstuk van hooguit 15 blz. in en laat het dan vallen. Later in hetzelfde deel of meestal in een volgend deel duikt het weer op en wordt het nader uitgewerkt. Het zou interessant zijn na te gaan in hoeverre dit een meer doeltreffende manier is dan het uitvoerig ingaan op een bepaald onderwerp.
Gevolg van het voorgaande is, dat van een systematische opbouw van de wiskunde geen sprake is.
Wat leert men niet? Het algebraïsche rekenwerk, waarvan de beheersing ons onmisbaar voorkomt, ontbreekt vrijwel geheel. Uitvoeren van vermenigvuldigingen, ontbinden in factoren, rekenen met machten, rekenen met breuken vindt men nergens, d.w.z. wel met concrete getallen maar niet met algebraïsche vormen. De meetkunde bestaat uit een kennis nemen van figuren en een opereren daarmee zonder dat van enig systematisch bewijzen sprake is.
Om kort te gaan: de leerling leert geen eigenlijke wiskunde, maar leert uitstekend wat men met wiskunde doen kan.
Uiteraard is het een zinloze bezigheid vanuit ons gezichtspunt stelling te nemen of te waarderen. Wel zou ik willen zeggen dat ik de grootste waardering heb voor de wijze waarop deze boeken samengesteld zijn. De leerling zal er met plezier uit werken en, al leert hij dan misschien volgens ons niet zo erg veel, wat hij leert zal ook zijn eigendom kunnen worden. Ik ben ervan overtuigd dat wij van deze opzet veel kunnen leren.
De boeken zijn bestemd voor de leeftijdsgroep van 11^+ tot 16 jaar en leiden op voor het C.S.E. (common school examination). Het O-level wordt eerst bereikt op 18-jarige leeftijd. Het aantal leerlingen waarvoor deze methode gebruikt wordt, neemt steeds toe (ook relatief). Vandaar dat er behoefte bestaat aan een cursus, waardoor de gebruikers van A-H na afloop verder gebracht worden en opgeleid worden voor het O-level. Er zijn daarom een drietal boeken in voorbereiding, die aansluiten op book G en deze functie krijgen.
De lezer heeft zich waarschijnlijk afgevraagd of veel van hetgeen in deze boeken geboden wordt al niet met vrucht geïncorporeerd kan worden in het programma voor de basisschool. Inderdaad is de S.M.P. momenteel bezig met de hervorming van het basisonderwijs. Of, om preciezer te zijn, met het onderwijs op de middenschool, waarop men de leerlingen van hun 8e tot hun 13e jaar les denkt te geven. In afwachting van het nieuwe programma voor de jaren 8-13 laat men momenteel het programma voor de jaren 11^+ tot 16 resp. 18 jaar ongewijzigd. Men is dus niet bezig de boeken A-H en evenmin de boeken voor O- en voor A-level te herzien en wil daarmee wachten, totdat de hervorming aan de basis zijn beslag heeft gekregen.

Ondertussen begrijpt u dat ik met spanning uitzie naar de boeken 1-5 en hoop daar t.z.t. op in te kunnen gaan.

Meetkunde met vectoren VI[1]

(determinanten)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Op het programma staan expliciet vermeld de determinanten. Zouden we genoodzaakt zijn op het programma te bezuinigen, dan zouden zonder twijfel de determinanten in aanmerking komen om weggelaten te worden. Nu ze er echter eenmaal staan, moeten we proberen ze op een redelijke manier in te voeren en er een passend, maar niet overdreven gebruik van te maken.
Het komt me voor, dat we voor het eerst behoefte kunnen hebben aan determinanten, als we de onderlinge stand van drie vlakken onderzoeken, dus bij het oplossen van drie vergelijkingen met drie veranderlijken. Het ligt voor de hand, om een geschikte introductie te krijgen, dat we dan eerst het oplossen van twee vergelijkingen met twee veranderlijken nog eens onder de loep nemen.
Gevraagd op te lossen de vergelijkingen met veranderlijken x_1 en x_2

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_3 \qquad (1)$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 = b_3 \qquad (2)$$

Het gewone recept is: vermenigvuldig beide leden van de eerste vergelijking met b_2 en beide leden van de tweede met $-a_2$ en tel daarna op. We krijgen

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_1 = (a_3b_2 - a_2b_3) \qquad (3)$$

Enige voorzichtigheid is geboden. Als $a_2 = b_2 = 0$ moet men deze bewerking maar liever niet uitvoeren. Onderstel, dat b.v. $a_2 \neq 0$. Dan ziet men gemakkelijk in, dat

$$(1) \wedge (2) \Leftrightarrow (2) \wedge (3)$$

Als er met (3) dus niets bijzonders aan de hand is, heeft $(1) \wedge (2)$ één oplossing. Voorwaarde hiervoor is

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

1. De voorgaande artikelen vindt men in de nrs. 1 t/m 5 van deze jaargang.

(Wie ervan houdt alles tot het laatst uit te pluizen, zal ontdekken, dat dit resultaat ook nog klopt voor het geval $a_2 = b_2 = 0$.)

Wiskundigen hebben de voor het moment onbegrijpelijke gewoonte $a_1b_2 - a_2b_1$ anders te schrijven, namelijk

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Het stelsel vergelijkingen (1), (2) heeft precies één oplossing – is dus gelijkwaardig met

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Nu gaan we van het platte vlak naar de ruimte. We vragen op te lossen het stelsel vergelijkingen met veranderlijken x_1, x_2, x_3

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4 \qquad (1)$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4 \qquad (2)$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_4 \qquad (3)$$

We trachten zoveel mogelijk analoog aan het voorgaande te werk te gaan. We hebben zojuist door vermenigvuldigen en optellen de veranderlijke x_2 laten verdwijnen. Nu trachten we door vermenigvuldigen en optellen x_2 en x_3 te laten verdwijnen. Dus:
vind drie getallen p_1, p_2, p_3 zo, dat als we beide leden van (1) met p_1, beide leden van (2) met p_2, beide leden van (3) met p_3 vermenigvuldigen, de veranderlijken x_2 en x_3 in het resultaat niet meer voorkomen. Met andere woorden: vind p_1, p_2, p_3 zo, dat

$$p_1a_2 + p_2b_2 + p_3c_2 = 0$$
$$p_1a_3 + p_2b_3 + p_3c_3 = 0$$

Hieruit vinden we

$$p_1(a_2c_3 - a_3c_2) + p_2(b_2c_3 - b_3c_2) = 0$$

Om kort te gaan: we vinden

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(tenzij deze drie determinanten alle drie gelijk aan 0 zijn).
Noem gemakshalve deze determinanten resp. A, B en C. Vermenigvuldig beide leden van (1) met A, beide leden van (2) met B, beide leden van (3) met C en tel

op. We krijgen

$$(a_1 A + b_1 B + c_1 C) x_1 = a_4 A + b_4 B + c_4 C$$

Het stelsel (1), (2), (3) heeft precies één oplossing – is dus gelijkwaardig met

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C \neq 0$$

(Wie gevoel voor detail heeft, kan nagaan dat dit ook juist is, als $A = B = C = 0$.)
We schrijven het linker lid van de gevonden voorwaarde onverkort over:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

We maken de afspraak dit gecompliceerde bouwsel kort als volgt te schrijven

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Kort kunnen we dus schrijven: (1), (2), (3) hebben precies één oplossing – is gelijkwaardig met

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

waarmee op een aanvaardbare wijze de determinant met drie rijen en kolommen tevoorschijn is gekomen.
We gebruiken deze determinant om na te gaan of drie vlakken precies één punt gemeen hebben. We zouden met behulp van determinanten ook de kentallen van dit punt kunnen uitrekenen (regel van Cramer). Het lijkt mij niet aan te bevelen dit te doen, omdat het niet verstandig is een rekenregel te introduceren, die in de loop van de cursus gemist kan worden.
Er doet zich nu al een tweede mogelijkheid voor de determinanten produktief te maken, namelijk bij het nagaan of drie vectoren lineair onafhankelijk zijn.

u, **v** en **w** zijn lineair afhankelijk $\Leftrightarrow$

$$(x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v} + x_3 \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0)$$

Anders gezegd: **u**, **v** en **w** zijn lineair onafhankelijk – is gelijkwaardig met:
het stelsel vergelijkingen met veranderlijken x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} x_1 u_1 + x_2 v_1 + x_3 w_1 &= 0 \\ x_1 u_2 + x_2 v_2 + x_3 w_2 &= 0 \\ x_1 u_3 + x_2 v_3 + x_3 w_3 &= 0 \end{aligned}$$

heeft als enige oplossing

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Dat dit één oplossing is, is evident. Het is de enige oplossing, wil dus zeggen dat het stelstel vergelijkingen precies één oplossing heeft, dus dat

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dus:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ zijn lineair onafhankelijk} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Gelukkig kunnen we de determinanten nog vaker gebruiken. Ze bewijzen opnieuw hun nut bij de behandeling van de oppervlakte van een driehoek en de inhoud van een viervlak en bij het nagaan of een lineaire afbeelding van een vectorruimte singulier is.

Het ligt voor de hand die eigenschappen van determinanten, die we later nodig hebben, bij eerste kennismaking met het begrip determinant af te leiden. Niet zozeer, omdat het zo gewenst is alles wat men later nodig heeft, maar direct te leren. Want ik zou in principe eerder geneigd zijn het tegengestelde te beweren. Maar om het begrip determinant wat leven in te blazen, is het gewenst er een beetje mee te jongleren. En laten we dan zo jongleren, dat het voor de toekomst nuttig is.
Allereerst moeten we een determinant een beetje handig kunnen uitrekenen. Om

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

uit te rekenen, schrijven we op

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

We nemen nu alle produkten van drietallen verbonden door strepen, die naar rechts beneden lopen en tellen deze op. Verder nemen we de produkten van drietallen verbonden door strepen, die naar rechts boven lopen en trekken die van de verkregen uitkomst af. Het dan verkregen getal is gelijk aan de determinant.
Gevolg:
als alle getallen van een kolom 0 zijn, is de determinant gelijk aan 0,
als we twee kolommen verwisselen, verandert de determinant in zijn tegengestelde,

en dus:
als twee kolommen van een determinant hetzelfde zijn, is de determinant gelijk aan 0.
Verder kunnen we bewijzen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2 & b_3 \\ c_1' & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_1' & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_1' & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_1' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + pa_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 + pb_1 & b_3 \\ c_1 & c_2 + pc_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

Met als toepassing:

u, **v**, **w** zijn lineair onafhankelijk $\Leftrightarrow$ **u**, **v** $+ p$**u**, **w** zijn lineair onafhankelijk

Later, bij de berekening van de oppervlakte van een driehoek en van de inhoud van een viervlak, kunnen we profijt van deze stellingen hebben.
En hiermee zijn we aan het eind gekomen van de beschouwingen over de driedimensionale affiene meetkunde. Om verder te komen zullen we een inprodukt moeten definiëren. Maar daarover de volgende keer.

Some thoughts on instructional sequencing in mathematics

LARS C. JANSSON

The Pennsylvania State University
University Park, Pennsylvania

Of major concern in mathematics curriculum development and in research into mathematics learning abilities is the notion of *instructional sequencing.* On the assumption that we have explicitly defined process and concept objectives, we can then make decisions regarding the instructional steps that will enable a specified group of learners to attain those objectives.

The teacher in the classroom must begin, in fact can only meaningfully begin, at a point not beyond the current understanding of his pupils. Thus the teacher, as well as the designer of the curriculum he follows, must be intimately aware of the competencies required for a new skill or concept he wishes to impart. He must have a thorough comprehension of the knowlegde structure with which he is dealing. Much of the work in this area has been based on Gagné's (3) concept of a learning *hierarchy.* Such a hierarchy is used to illustrate the way in which intellectual skills are ordered. For example, some understanding of addition of natural numbers is a prerequisite knowledge to understanding the same operation with integers.

One approach to developing an understanding of competencies prerequisite to a new competency is to perform what is referred to as a 'task-analysis'. This notion is based on Gagné's learning hierarchy, but may be accurately described as a task or competency hierarchy. As the word hierarchy implies, we then have not only an ordered sequence of intellectual competencies, but a subsumation of each skill by succeeding skills. A short example is shown in Figure 1.

The performance of such a task-analysis requires that various competencies be put into some sort of sequence based on the fact that certain understandings must precede others as the subject is learned. The task analysis for a simple competency like that shown may not be too difficult, but the more complex the ultimate goal, the more difficult the analysis becomes.

Before pursuing this matter of a task-analysis it must be pointed out that the way in which goals or objectives are stated can make a tremendous difference in the amount of work required. The final objective must be stated in behavioral terms, i.e., it must specify, without ambiguity, what it is that the pupil will be able to do upon completion of an instructional sequence [see, for example, (5)]. It is assumed that the reader is familiar with this notion and its implications for individualized instruction and evaluation.

To summarize and restate our concern, we wish to develop an instructional sequence which will lead pupils to a specified goal. Along the way various prerequisite competencies must be either assumed or, if testing shows them to be absent in the target population, explicitly taught for. In either case, if the student is to attain the final objective, he must possess these competencies as demonstrated through criterion-referenced testing procedures.

Certain problems arise, however, as soon as one begins task-analyzing a complex mathematical behavior. Attempts at developing a hierarchy of competencies for the complex behavior of proving a mathematical proposition indicated that there are at least four distinck types of sequences involved. These sequences might be called the *logical,* the *use,* the *learning,* and the *instructional* sequences.

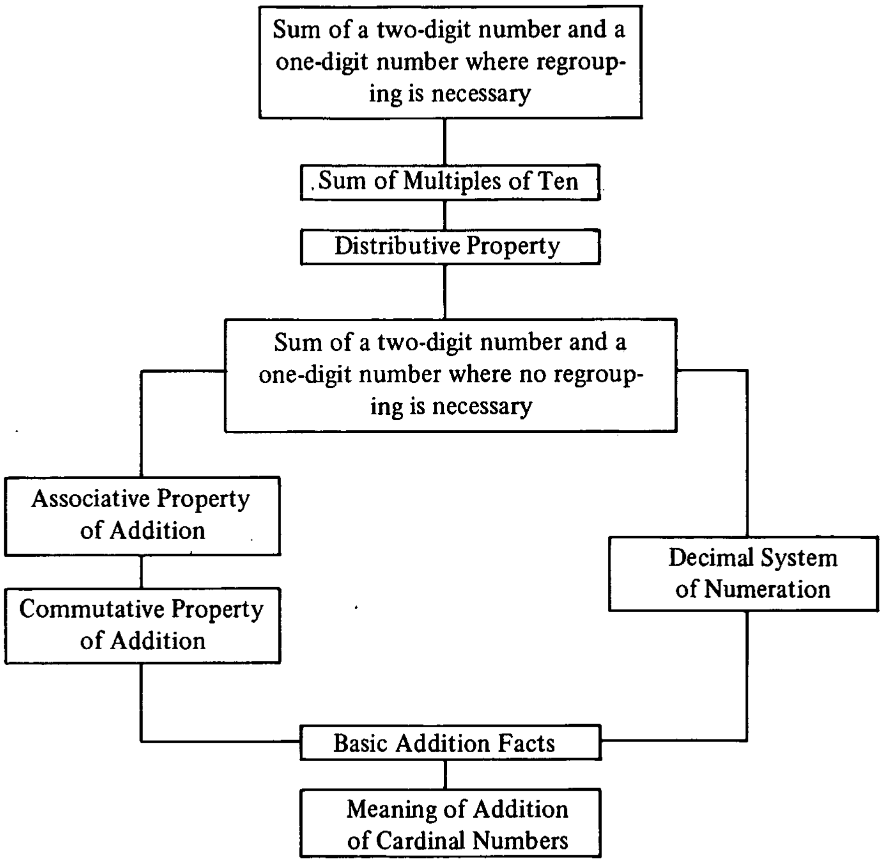


Figure 1: A Simple Task Hierarchy

Before examining each of these in turn we first define more explicitly what is meant by 'competency'. A competency is the ability to demonstrate the understanding of either a concept or a process by doing something which we agree shows the required understanding. In a practical sense, this could mean meeting criterion* on a behavioral objective.

One further type of sequence related to mathematics and mathematics learning is the historical one. Mathematical discoveries have taken place in chronological sequence. If we think of these discoveries as mathematical formalizations of prior intuitive notions, it is clear that the learning of a series of tasks occurs in a different order from the mathematical recognition and formalization of those skills and concepts. What is more important is the logical interrelationships among mathematical concepts.

By the logical sequence is meant the sequence of formalized mathematical development from the basic axioms and primitive (undefined) terms up to (in a deductive manner) the concepts, theorems, definitions and algorithms used in the task under consideration. This sequence forms one of the two components of the structure of a discipline identified by Schwab (6). Schwab's second component consists of the methodology employed by a discipline in verifying or accepting results into its logical structure. Thus in mathematics is an overlap of these two components. We do not learn mathematics in a strict logical sequence, but rather in a more intuitive or psychological fashion. The program of Z.P. Dienes in elementary school mathematics is an attempt to base the curriculum on this notion that children learn even complex structures (e.g., group, vector space) in an intuitive way and only much later actually formalize it (2). Thus the logical sequence plays an important, although indirect role in the initial learning of mathematical topics except in small, self-contained units. Much of our learning appears to take place in a spiral manner, which in itself denies that the learning sequence is identical with the logical sequence of a fully developed mathematical system.

In considering a complex behavior such as proving, the *use* sequence can be looked at in two different ways. First, it should be obvious that in proving a theorem or solving a problem, the order in which we use various elements of the logical structure is distinct from both the logical developmental order of those elements and the order in which they were learned. This is one of the factors which makes a difficult problem difficult. It also underlies the distinction made by Avital (1) between problems classified as open search or algorithmic and those designated as knowledge level. It is not simply that more facts or concepts are called upon, but that they are called upon in a new (though not necessarily unique) sequence. The point here is that the use sequence for a given task is also distinct from the learning sequence, i.e., from the sequence in which the component skills were initially, or could best be, encountered or learned. At first look this appears obvious, but it is less so when one begins the task of actually trying to construct a hierarchy of competencies. The natural approach is to analyze how one does a problem of the type under consideration, but this leads in the first steps to a use sequence and therefore requires still further modification.

* When an objective is agreed upon, items may be written to test attainment of that objective. Criterion is the proportion of those items which we agree a student must get correct before we can say he has attained mastery of that objective.

Note, however, that a second dimension has been added to the notion of a use sequence and that this notion corresponds to Schwab's second structural component. In other words, there is an established methodology by which elements of the logical components are employed to justify, verify, or derive new information called for by the problem under consideration. (The extent to which these verifications lend themselves to algorithmic procedures needs further study). Thus it can occur that in proving two different propositions, the methodological sequence of conjecturing, analyzing, deducing, and so on, remains constant, while the sequence of logically derived components used are obviously different.

Third, there may be an optimal order in which to learn the necessary mathematical competencies for purposes of later complex problem solving. It is also possible that the optimal learning sequence is different for different individuals and for other ultimate aims. If, however, problem solving, proving or some other similarly complex behavior is the goal, the learning sequence must be such that it tends to maximize the restructured use of the various competencies learned.

Finally we are in a position to discuss the nature of an instructional sequence as it applies to a complex behavior. Ideally this instructional sequence should parallel the optimal learning sequence. It is clearly distinct from the logical and use sequences of competencies.

The development of a task analysis for a complex behavior requires that we examine the competencies necessary for the goal task – this may be done by examining the skills and knowledges used in doing particular types of tasks. Notice here, as suggested above, that we begin with a use sequence which we must then modify to a task (learning) hierarchy which in theory should tell us how to proceed with the instructional development. Thus even *if* we can produce a (it is not necessarily unique) use sequence for a given behavior, the transition to an instructional sequence is not immediate.

Clearly, mathematical competencies are hierarchically structured (the logical sequence), but the relationships among the logical structure of the discipline, the associated learning hierarchies and presentation (instructional) sequences had not been adequately explored (4). It is clear, however, that some sequences of concepts are inherently impossible to learn, while others are merely inefficient, and furthermore, unless it can be stated precisely what it is that an instructional sequence is attempting to teach, we have no means of assessing the efficacy of that instruction.

In summary it can only be stated that much work remains to be accomplished. To date we still know little about the best sequence in which to teach various mathematical topics – much of our curriculum is based on historical accident rather than sound research. Mathematics educators today are attacking these questions in a rigorous fashion unthinkable before the advent of modern computer technology. The revolution in mathematics education is just beginning.

Bibliography

1 Avital, S.M., & Shettleworth, S.J. *Objectives for Mathematics Learning,* Bulletin No. 3, Toronto: Ontario Institute for Studies in Education, 1968.

2 Bart, W.M. 'Mathematics Education: The Views of Zoltan Dienes,' *School Review* (May, 1970), 355-372.

3 Gagné, R.M. *The Conditions of Learning* (2nd Ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston, 1970.

4 Heimer, R.T. 'Conditions of Learning in Mathematics,' *Review of Educational Research,* 39 (October, 1969) 493-508.

5 Mager, R.F. *Preparing Instructional Objectives.* Palo Alto, California: Fearon, 1962.

6 Schwab, J.J. 'Problems, Topics, and Issues,' in S. Elam (Ed.) *Education and the Structure of Knowledge.* Chicago: Rand McNally, 1964.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXXVI Gelijke hoektransversalen in een driehoek

1 Een (hoek)transversaal van de driehoek $A_1A_2A_3$ is een rechte die A_i verbindt met een punt B_i op de overstaande zijde en A_iB_i is de lengte van de transversaal. Door *G. Brocard*[1]) is de vraag gesteld en volledig beantwoord of er punten P bestaan zodanig dat de transversalen door P even lang zijn. Er blijken, alles geteld, twaalf van deze punten te bestaan maar acht daarvan zijn triviaal: de twee isotrope punten en drie paren op de zijden gelegen. Van de vier wezenlijke oplossingen zijn twee reëel en twee imaginair en het blijken de brandpunten van de ellips van Steiner van de driehoek.

Onlangs heeft men, onkundig van deze resultaten, het probleem op andere wijze benaderd door eerst de vraag te stellen naar de meetkundige plaats der punten P waarvoor *twee* transversalen evenlang zijn; dat blijkt een kubische kromme te zijn met tal van merkwaardige eigenschappen[2]. De uiteindelijk gevraagde punten worden daarna verkregen door twee dezer krommen te snijden.

2 In het volgende wordt het duale probleem gesteld: zijn er drie transversalen van gelijke lengte d mogelijk waarbij de uiteinden B_i op een rechte l liggen? Het resultaat is eenvoudiger dan boven: afgezien van triviale oplossingen die ook hier voorkomen zijn er *twee* dergelijke rechten l. Helaas zijn zij altijd imaginair, waarbij als een zekere troost kan gelden dat de afstand d, althans voor scherphoekige driehoeken reëel is.

3 Wij volgen dezelfde gedachtengang als boven door eerst de verzameling V der rechten l te onderzoeken waarvoor *twee* transversalen gelijk zijn. Als l de zijden A_3A_1 en A_3A_2 respectievelijk in B_2B_1 snijdt dan moet dus gelden $A_1B_1 = A_2B_2$. Als de cirkel $(A_2;a_2)$ de zijde A_1A_3 in B_2' en B_2'' snijdt dan is $A_1A_3 = A_2B_2'$ en ook $A_1A_3 = A_2B_2''$, waaruit volgt dat de zijde A_1A_3 tot V behoort en wel twee maal, zodat A_1A_3 een dubbelraaklijn zal zijn van de klassekromme V.

Ook A_2A_3 behoort tweemaal tot V. De rechte A_1A_2 behoort ten duidelijkste ook tot V, maar slechts in één situatie. Voorts bevat V ook de oneigenlijke rechte l_0, waarvoor de beide transversalen oneindig lang zijn. Bij een analytische behandeling zal men dus verstandig doen het coördinatenstelsel aan te passen aan de drie zijden en de oneigenlijke rechte, waarbij de zijden A_1A_3 en A_2A_3 zich in elk geval als coördinaatassen opdringen. Daar blijken zal dat ook l_0 een dubbelrechte van V is besluiten wij tot een affien (scheef-

hoekig) assenstelsel met A_3 tot oorsprong, terwijl A_1A_3, A_2A_3 en l_0 de vergelijkingen $x_1 = 0, x_2 = 0$ en $x_3 = 0$ krijgen en A_1A_2 door $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ wordt voorgesteld. De rechte met vergelijking $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ wordt bepaald door de homogene lijncoördinaten (u_1, u_2, u_3). Dus $A_1A_3 = (1,0,0)$, $A_2A_3 = (0,1,0)$, $l_0 = (0,0,1)$ en $A_1A_2 = (1,1,1)$. De puntcoördinaten van A_1, A_2, A_3 zijn resp. $(0,-1,1)$, $(-1,0,1)$ en $(0,0,1)$.
Een rechte $l(u_1, u_2, u_3)$ snijdt A_2A_3 in B_1 $(-u_3, 0, u_1)$, waaruit volgt dat

$$A_3B_1 = \frac{u_3}{u_1} a_1, \quad B_1A_2 = \frac{u_1 - u_3}{u_1} a_1,$$

zodat volgens de formule van Stewart

$$d_1^2 = A_1B_1^2 = u_1^{-2} \left(a_2^2 u_1^2 - 2a_1 a_2 \cos\alpha_3 \,.\, u_1u_3 + a_1^2 u_3^2 \right), \qquad 3.1$$

terwijl overeenkomstig geldt

$$d_2^2 = A_2B_2^2 = u_2^{-2} \left(a_1^2 u_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\alpha_3 .\, u_2 u_3 + a_2^2 u_3^2 \right). \qquad 3.2$$

De rechten l waarvoor $d_1 = d_2$ voldoen dus aan

$$K_3 \equiv (a_2^2 - a_1^2) u_1^2 u_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\alpha_3 .\, u_1 u_2 u_3 (u_1 - u_2)$$
$$+ (a_1^2 u_2^2 - a_2^2 u_1^2) u_3^2 = 0. \qquad 3.3$$

Voor het algemene geval dat $a_1 \neq a_2$ is de verzameling V der rechten l dus *een kromme van de vierde klasse.* Daar de termen met u_1^4, u_1^3, u_2^4 en u_2^3 niet voorkomen zijn de zijden A_1A_3 en A_2A_3 inderdaad dubbelrechten, zoals wij reeds wisten.
Maar ook de termen u_3^4 en u_3^3 ontbreken en dus is ook l_0 een dubbelrechte.
De klassekromme is derhalve *rationaal*, daar zij het maximale aantal van drie dubbelrechten bevat.
De raakpunten S_2' en S_2'' met A_1A_3 voldoen aan de vergelijking

$$a_2^2 u_3^2 - 2a_1 a_2 \cos\alpha_3 .\, u_3 u_2 + (a_1^2 - a_2^2) u_2^2 = 0, \qquad 3.4$$

waaruit volgt voor hun coördinaten

$$x_1 = 0\,,\; x_2 = -a_1 \cos\alpha_3 \pm \sqrt{a_2^2 - a_1^2 \sin^2 \alpha_3}\,, x_3 = a_2\,, \qquad 3.5$$

zodat $A_3 S = a_1 \cos\alpha_3 \pm \sqrt{a_2^2 - a_1^2 \sin^2 \alpha_3}$. 3.6

De raakpunten zijn dus de boven ontmoete punten B_2' en B_2'' waar de cirkel $(A_2\,; a_2)$ de zijde $A_1\,A_3$ snijdt.
De raakpunten met l_0 volgen uit

$$a_1^2 u_2^2 - a_2^2 u_1^2 = 0; \qquad 3.7$$

het zijn de oneigenlijke punten van de binnen- en de buitenbissectrice van A_3. Daar de raakpunten op de drie dubbelrechten dus in het algemeen verschillend zijn, vindt men vervolgens de formule van *Plücker* voor de graad van de kromme $4.3 - 3.2 = 6$. De rechten l omhullen dus *een (rationale) kromme van de zesde graad.*
Aan 3.3 voldoet ook de rechte (1,1,1), wat bevestigt dat de zijde $A_1\,A_2$ tot V

behoort; zij is een enkelvoudige raaklijn. In het bijzondere geval van de gelijkbenige driehoek met $a_1 = a_2 = a$ gaat 3.3 over in

$$2 \cos \alpha_3 \, u_1 u_2 u_3 (u_1 - u_2) + (u_2^2 - u_1^2) u_3^2 = 0 , \qquad 3.8$$

zodat de figuur ontaardt in drie delen

$$u_3 = 0 , u_1 - u_2 = 0 , - 2 \cos \alpha_3 u_1 u_2 + (u_1 + u_2) u_3 = 0, \qquad 3.9$$

die respectievelijk zijn: de waaier door de top A_3, de rechten evenwijdig aan de basis A_1A_2 en de raaklijnen van de parabool met de hoogtelijn uit A_3 tot as en die aan A_1A_3 en A_2A_3 raakt; is bovendien $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ dan is de parabool nog weer ontaard in $u_3 = 0$ en $u_1 + u_2 = 0$, dus in de waaier met top A_3 en die van de met de hoogtelijn uit A_3 evenwijdige rechten.

4 Het oorspronkelijke vraagstuk een rechte te bepalen waarop de uiteinden van *drie* gelijke transversalen liggen, zou nu opgelost kunnen worden door de kromme (3.3) te combineren met een der beide analoge voor de andere hoekpunten. Men verkrijgt dan in eerste instantie $4 \times 4 = 16$ oplossingen, maar daaronder zijn ten duidelijkste een aantal triviale. De kromme K_1, analoog met K_3, heeft A_2A_3 als enkelvoudige rechte en voorts l_0 , A_1A_2 en A_1A_3 tot dubbelrechte en bovendien op A_1A_3 dezelfde twee raakpunten als K_3. Tot de gemeenschappelijke rechten van K_1 en K_3 behoren dus: l_0 vier maal, A_1A_2 en A_3A_2 elk tweemaal en A_1A_3 zes maal, zodat veertien rechten afvallen. Wij kunnen dus *twee* wezenlijke oplossingen van ons probleem verwachten. Deze uitkomst wordt bevestigd door de directe bepaling van de gemeenschappelijke lengte d der drie transversalen, waarbij wij *mutatis mutandis* de elegante methode toepassen door *Brocard* bij de oplossing van zijn probleem gevolgd. Is $A_2B_1 = p_1$, $B_1A_3 = q_1$ dan is volgens Stewart

$$a_1 A_1B_1^2 = a_1 d^2 = p_1 a_2^2 + q_1 a_3^2 - p_1 q_1 a_1 , \qquad 4.1$$

of wel als $p_1 = xq_1$ en dus

$$p_1 = \frac{a_1 x}{1+x} , \; q_1 = \frac{a_1}{1+x} :$$

$$(a_2^2 - d^2) x^2 + 2 (a_2 a_3 \cos \alpha_1 - d^2) x + (a_3^2 - d^2) = 0 . \qquad 4.2$$

Als verder $A_3B_2 = p_2$, $B_2A_1 = q_2$, $A_1B_3 = p_3$, $B_3A_2 = q_3$ en voorts $p_2 = yq_2$, $p_3 = zq_3$, dan geldt evenzeer

$$(a_3^2 - d^2) y^2 + 2 (a_3 a_1 \cos \alpha_2 - d^2) y + (a_1^2 - d^2) = 0 , \qquad 4.3$$

$$(a_1^2 - d^2) z^2 + 2 (a_1 a_2 \cos \alpha_3 - d^2) z + (a_2^2 - d^2) = 0 . \qquad 4.4$$

Terwijl bij het vraagstuk van drie concurrente transversalen volgens *Ceva* geldt $x y z = 1$, is voor ons geval volgens *Menelaus*

$$x y z = - 1. \qquad 4.5$$

Uit 4.2, 4.3, 4.4 en 4.5 moeten x,y en z worden geëlimineerd om een vergelijking voor d^2 te verkrijgen.
Zijn x_1 en x_2 de wortels van 4.2, y_1 en y_2 die van 4.3, z_1 en z_2 die van 4.4, dan is ten duidelijkste $x_1 x_2 y_1 y_2 z_1 z_2 = 1$. Dus als x_1, y_1, z_1 aan 4.5 voldoen, dan ook x_2, y_2, z_2. Daaruit volgt

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) =$$

$$= -2 + x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1 + x_2 y_1 z_1 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_2 z_1 + x_1 y_1 z_2 =$$

$$= -2 - \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) - \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1}\right) - \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right) =$$

$$= 4 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - \frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} - \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} \qquad 4.6$$

Na substitutie van de sommen en produkten der wortels met behulp der drie vierkantsvergelijkingen komt er

$$-8\,(a_2 a_3 \cos\alpha_1 - d^2)(a_3 a_1 \cos\alpha_2 - d^2)(a_1 a_2 \cos\alpha_3 - d^2) =$$

$$4\,(a_1^2 - d^2)(a_2^2 - d^2)(a_3^2 - d^2) - 4\,(a_1^2 - d^2)(a_2 a_3 \cos\alpha_1 - d^2)^2 -$$

$$-4\,(a_2^2 - d^2)(a_3 a_1 \cos\alpha_2 - d^2)^2 - 4\,(a_3^2 - d^2)(a_1 a_2 \cos\alpha_3 - d^2)^2\,, \qquad 4.7$$

waarmee de eliminatie gelukt is en een vergelijking voor d^2 verkregen. Op het eerste gezicht is zij van de derde graad, maar men ziet spoedig dat de term d^6 nul wordt en dat ook de term d^4 verdwijnt. Achteraf behoeft dat niet te verwonderen, want wij weten uit de vorige beschouwingen dat $d = \infty$ een meervoudige oplossing van ons probleem is.
Vergelijking 4.7 wordt tenslotte, als F de oppervlakte van de driehoek aangeeft,

$$4F^2 d^2 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \,(1 - \cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_3 + 2\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3) \qquad 4.8$$

waaruit tenslotte volgt: *als een rechte l de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ in B_1, B_2, B_3 zodanig snijdt dat $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = d$ dan moet gelden*

$$d^2 = 16\,R^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3\,. \qquad 4.9$$

5 Hoewel aan dit resultaat een zekere elegantie niet kan worden ontzegd leidt het toch niet tot een *happy ending*. Om te beginnen is d voor een stomphoekige driehoek (zuiver) imaginair en voor een rechthoekige gelijk aan nul. Maar ook in een scherphoekige driehoek komt geen reële configuratie tot stand want het lijnstuk d blijkt in het algemeen te kort om de overstaande zijde te bereiken. Is B_1 een snijpunt van de cirkel $(A_1;d)$ met A_2A_3 en A_1' de projectie van A_1 dan is

$$A_1'B_1^2 = 16\,R^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - 4\,R^2 \sin^2\alpha_2 \sin^2\alpha_3 =$$

$$= -4\,R^2\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3)^2\,, \qquad 5.1$$

waaruit volgt dat de beide punten B_1 vrijwel altijd imaginair zijn. De enige uitzondering is het geval waarbij $\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 = 2$, of wel $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3$. Zo'n bijzonderheid kan zich echter maar ten aanzien van één hoekpunt voordoen, zodat bij een reëel punt B_1 de punten B_2 en B_3 toch altijd imaginair zijn.

6 Ons rest nog te onderzoeken of de punten B_1, B_2 en B_3 die door het omcirkelen van d ontstaan inderdaad op een, zij het dan imaginaire rechte, l kunnen liggen, dus of er onder de acht mogelijke drietallen zulke zijn die aan de conditie van *Menelaus* voldoen. Men heeft met onze vroegere notatie

$$x = \frac{p_1}{q_1} = \frac{A_2B_1}{B_1A_3} = \frac{A_2A'_1 + A'_1B_1}{B_1A'_1 + A'_1A_3} = \frac{\sin\alpha_3 \cos\alpha_2 \pm i(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3)}{\mp i(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3) + \sin\alpha_2 \cos\alpha_3} \tag{6.1}$$

en analoge betrekkingen voor y en z. Het blijkt nu uit een eenvoudige maar tijdvergende berekening dat $xyz = -1$ als men in de drie tellers telkens het + teken of telkens het −teken kiest. Er zijn dus twee gunstige drietallen. Daar de andere zes elk uit een gunstige combinatie ontstaan door op een zijde de twee punten B te verwisselen waardoor de collineariteit verloren gaat, zijn deze alle ongunstig. Ons eindresultaat is: *er zijn in het vlak van de driehoek $A_1A_2A_3$ twee toegevoegd imaginaire rechten l die de zijden in B_1, B_2, B_3 snijden, zodanig dat $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$.*

1) *G. Brocard*, Centre de transversales angulaires égales, Mathésis (2), VI (1896), 217-221; *J. Neuberg*, Note sur l'article précédent, id. 221-225.

2) *O. Bottema*, On some remarkable points of a triangle, N. Arch. v. W. XIX (1971), 46-57.

3) *G.R. Veldkamp*, Gelijke, concurrentie hoektransversalen in een driehoek, N. Tijds. v. Wisk 59 (1971), 67-76.

HAVO-wiskunde examens 1973

Aan de Rectoren/Directeuren van de scholen voor havo is onderstaande brief verzonden.
De in de brief genoemde toelichting op het examenprogramma en de vier series proefopgaven zullen in het maartnummer worden afgedrukt. De wijzigingen t.o.v. de discussienota en de examenopgaven afgedrukt in het juni/julinummer van de vorige jaargang zijn overigens niet groot.

Inspectie
algemeen voortgezet onderwijs

Arnhem, januari 1973
Bakenbergseweg 108
tel. 085-432398

Aan de Rectoren/Directeuren
van de scholen voor havo

Onderwerp:
havo-examens wiskunde 1973

Namens de inspectie van het algemeen voortgezet onderwijs verzoek ik U het volgende ter kennis te brengen van de docenten wiskunde die aan Uw school werkzaam zijn.

A Op het schriftelijk examen havo wiskunde 1973 wordt aan de kandidaten een syllabus voorgelegd met twee series opgaven. De eerste serie is bestemd voor de kandidaten die opgeleid zijn volgens het definitieve examenprogramma, de tweede serie is bestemd voor de kandidaten die opgeleid zijn volgens het havo-programma dat in de jaren 1968-1972 voorgeschreven was.
Voordat de syllabus wordt uitgereikt, dient elke kandidaat te weten welke serie voor hem bestemd is. Derhalve moeten de examenkandidaten van te voren hierover ingelicht worden.

B In opdracht van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde zal het I.O.W.O. te Utrecht U één dezer dagen toezenden:
1 Een toelichting op het examenprogramma havo, zoals die door de inspectie van het voortgezet onderwijs is vastgesteld.
In het najaar heeft de Nederlandse Vereniging van Wiskunde-Leraren (N.V.v.W.) een aantal regionale vergaderingen belegd waar de gewijzigde discussienota, die U in juni j.l. is toegezonden, besproken is.
Mede op grond van de binnengekomen schriftelijke opmerkingen zijn er enige wijzigingen aangebracht in de discussienota, die U in deze toelichting kunt terugvinden.

2 Een viertal herziene series proefopgaven voor het examen havo 1973 volgens het definitieve examenprogramma. Een aantal drukfouten kwamen in de opgaven voor en enige opgaven zijn vervangen door andere, minder theoretisch gerichte vragen.

C Ten overvloede zij vermeld dat bij het examen havo in 1973 en volgende jaren beschrijvende statistiek en eenvoudige kansrekening wel binnen het examenprogramma vallen.
De inspectie heeft vóór de aanvang van het schooljaar 1972-1973 geen verzoeken ontvangen om één of meer onderwerpen niet aan de orde te stellen, zodat met ingang van 1973 het gehele examenprogramma van kracht is.

D Op de regionale besprekingen in het najaar 1972 zijn verschillende vragen aan de orde gesteld, waarvan de beantwoording voor alle docenten van belang is.

1 Rijen behoren niet tot het examenprogramma; ze behoren wel in de onderbouw van de havo, zij het summier, behandeld te worden.

2 Logaritmische en exponentiële functies behoeven niet, wortelfuncties wel gedifferentieerd te kunnen worden.

3 De examenopgaven zullen geformuleerd worden overeenkomstig de voorstellen van de nomenclatuurcommissie, ingesteld door de N.V.v.W.
Het definitieve rapport van de nomenclatuurcommissie zal in 1973 gepubliceerd worden. Zolang dit rapport niet verschenen is, worden de voorstellen, die in de twee interimrapporten zijn neergelegd, gevolgd voor zover het geen controversiële punten betreft die nog in discussie zijn. In de laatstgenoemde gevallen worden de opgaven met 'enige omhaal van woorden' geformuleerd. Tevens wordt verwezen naar de u toegezonden proefexamens wat betreft de nomenclatuur.

4 Op het schriftelijk examen zullen geen vragen gesteld worden die geheel theoretisch van aard zijn, zulks in tegenstelling tot de gegevens die u in juni j.l. van de subcommissie van de C.M.L.W. ontving.

5 De onderwerpen logica en verzamelingen zullen voorlopig geen aanleiding geven tot zelfstandige vraagstukken. Uiteraard zullen de oplossingen van de opgaven logisch verantwoord en met behulp van de begrippen uit het onderwerp verzamelingen gemaakt moeten worden.

6 Opgaven over lineair programmeren, uitgaande van een tekst in proza, zullen de eerste jaren niet aan de orde komen; wel kunnen optimaliseringsproblemen, in wiskundige formuleringen vervat, aan de kandidaten voorgelegd worden.

7 Matrices behoren niet tot de verplichte examenstof; rotaties over een willekeurige hoek φ evenmin.

8 De opdracht 'Teken de grafiek van f' houdt in een onderzoek naar het gedrag van de functie *voor zover mogelijk* aan de hand van

a. het tekenschema van $f(x)$;

b. het tekenschema van $f'(x)$;

c. onderzoek naar horizontale en verticale asymptoten.

De opdracht 'Teken in één figuur de grafieken van f en g' houdt mede in dat de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch wordt opgelost.

9 Tijdens het schriftelijk examen is het gebruik van passer en geodriehoek, alsmede van rekenliniaal, logaritmentafel in 4 decimalen en goniometrische tabellen in halve graden en honderdste radialen toegestaan.

Namens het College van
inspecteurs van het a.v.o.,
drs. W. E. de Jong
drs. B. J. Westerhof

Problemen van Pythagoras

of: zo creatief hoeft u nou ook weer niet te zijn

(Oproep van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.)

Er bestaat in Nederland een wiskunde-tijdschrift voor jongeren *Pythagoras.*
Daarover gaat deze oproep.
Eerst iets over de reden van ontstaan van het blad.

Het Wiskundig Genootschap is een vereniging van wiskundigen in Nederland. Ook leraren zijn er lid van. Het is begrijpelijk dat het W.G. interesse in het beoefenen van wiskunde door jongeren wil bevorderen. Daarvoor heeft het een commissie: *de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde (NOW).* Deze probeert haar doel op verschillende manieren te bereiken, zoals het uitgeven van de Torusreeks (in samenwerking met de firma Wolters-Noordhoff), organiseren van de jaarlijkse Wiskunde-Olympiade en uitgave van het wiskunde-tijdschrift voor jongeren Pythagoras (ook met de medewerking van Wolters-Noordhoff).

Wie ooit iets over het uitgaven van wiskunde-tijdschriften voor jonge mensen heeft gehoord weet dat Pythagoras uniek is in de wereld. In de eerste plaats al door de grootte van de oplaag: elk jaar zo rond de 25.000 (toen Pythagoras opgericht werd hoopte men op een oplage van 5.000) en in de tweede veel belangrijkere plaats om de hoge kwaliteit van het blad.

Het eerste houdt natuurlijk verband met het tweede, want juist door de goede inhoud van Pythagoras voelen leraren zich elk jaar weer geroepen hun leerlingen een abonnement aan te bevelen.

De kwaliteit van het blad is natuurlijk het gevolg van de bijzondere kwaliteiten van de redacteuren. Op de een of andere manier zien zij al jaren lang telkens weer kans in de roos te schieten. Men hoeft zich dan ook niet zozeer te verwonderen over de constantheid van de oplaag door de jaren heen, dan wel over de creativiteit die de redactie al zo lang weet op te brengen.

Maar zelfs de beste bron raakt op den duur droog als er te veel in korte tijd uit wordt geput. Redacteuren van Pythagoras zijn ook mensen, die zich veel het hoofd moeten breken over de vraag hoe zij hun blad kunnen vullen op de manier die hun lezers gewend zijn. Daarom doet de NOW via deze oproep een beroep op de lezers van Euclides. Het is een drietraps oproep.

Eerste trap: Het mooiste zou natuurlijk zijn als er een paar mensen redacteur zouden willen worden en zich daarmee medeverantwoordelijk zouden weten voor de inhoud van Pythagoras.

Tweede trap: De redactie zou echter al erg blij zijn met geschikte artikelen. De Nederlandse wiskunde-leraar lijdt aan schrijfangst. Veel mensen zijn zo bang voor de openbaarheid van een artikel, dat zij hun licht onder de korenmaat laten.

Derde trap: Als ook dit te veel gevraagd is, doordat u niet de tijd kunt vinden en daarmee het geduld op kunt brengen voor het schrijven van een artikeltje, dan kunt u de redactie toch helpen aan ideeën, suggesties, aanwijzingen.
Helpt u de redactie aan ideeën. Heeft u ooit ergens eens iets gelezen waarvan u denkt, dat het de moeite waard zou kunnen zijn voor jongeren, schrijft u dat dan. Hoort of ziet u wel eens zoiets, noteer het dan en geef het door. Hebt u een idee, waarvan u alleen maar vermoedt dat het misschien wel eens de moeite waard zou zijn om te proberen het uit te werken, en heeft u daar zelf de tijd niet voor, of denkt u dat u er de talenten niet voor heeft, maak dan een paar korte notities en stuur die naar de redactie.

Ook verwijzingen naar literatuur in boeken of tijdschriften zijn welkom. De redactieleden zien dan wel kans het boek of het artikel ergens op te scharrelen.

U merkt het: zo creatief hoeft u nou ook weer niet te zijn dat u niet zou kunnen helpen om mee te werken aan het voortbestaan van Pythogoras, een blad waar buiten Nederland vele collega's ons om benijden.

Het redactieadres is: Kamperfoelieweg 44, Paterswolde (Gr.).

Cryptogram - Oplossing

(de opgave werd geplaatst in het vorige nummer)

Horizontaal:
1 Partieelbreuk; 8 LI; 10 Ileratie; 11 Stier; 12 Ut; 13 Alibi; 14 Boei; 16 Gen; 17 Normeren; 20 Abel; 22 Lemma; 23 Vier; 25 Alternerend; 29 El; 30 Leer; 31 Enen; 32 Ring; 34 Le; 35 Lijn; 36 Egale; 38 Hei; 39 Dit; 40 Lint; 43 Differentiaal.

Verticaal:
1 Priemgetallen; 2 Riemann; 3 Imaginair; 4 Elimineren; 5 Lie; 6 Rust; 7 Uniform; 9 Ordinaalgetal; 12 Uur; 14 Beeldrij; 15 Eem; 18 o.l.; 19 ML; 21 Benen; 23 Ver; 24 Een; 26 Leeg; 27 Te; 28 Rechte; 29 En; 33 India; 35 List; 37 Elf; 41 i.e.; 42 Nr.

Boekbespreking

drs. W. van den Camp, H.B. Emanuels, J.B. Lubke en P.Th.J. Ploeger, *Elementaire computerkunde voor MAVO en HAVO,* deel I, bestemd voor de derde klassen, 62 blz., *f* 7,90, Uitg. Meulenhoff Educatief, Amsterdam.

Deze uitgave is ontstaan uit een experiment op een Osdorper Schoolgemeenschap. Een vijftal Amsterdamse scholen hebben de syllabus gebruikt en via evaluatievergaderingen is het nu een boek geworden, dat bestemd is voor mavo- en havoleerlingen.
In dit eerste deel komen onder andere ter sprake:
de gewone rekenmachine, de computer, het algoritme, stroomschema's, de SERA-BABY code en de verwerking van de SERA-programma's.
Na een korte introduktie moeten de leerlingen opdrachten maken.
In totaal zijn er 11 hoofdstukken en 118 opdrachten.
Er is zoveel mogelijk gebruik gemaakt van kleine eenheden leerstof, die veelal verwerkt zijn in opdrachten. Door deze benadering kunnen leerlingen grote delen van de stof zelfstandig doorwerken.
De nodige differentiatie wordt geboden door de met vette punt gemerkte paragrafen en opdrachten waarin het basismateriaal wordt uitgebreid.
Het is voor de wiskundedocent de moeite waard met dit boek kennis te maken.
Na het verschijnen van deel II hopen de schrijvers de beide delen in de toekomst tot één uitgave om te werken.

J.F. Christophe

Drs. W. van den Camp, H.B. Emanuels, J.B. Lubke, P.Th.J. Ploeger, *Elementaire computerkunde voor MAVO, HAVO en VWO,* deel 2, 109 pagina's, prijs *f* 13,90, Meulenhoff Educatief, Amsterdam.
Deze uitgave is het vervolg op het eerste deel, dat volgens de titel alleen voor MAVO en HAVO bestemd was. Dit deel gaat logischerwijs veel verder.
De werkwijze komt overeen met die van deel 1. Na een korte introductie moeten de leerlingen opgaven maken.
Aan de orde komen achtereenvolgens: het maken en verwerken van ALGOL-programma's, de vertakking, de cyclus, de rij, de giro, wiskundige toepassingen, selecties, statistische onderzoekingen en de sociale aspecten van de automatisering. In totaal zijn er veertien hoofdstukken met 191 opdrachten. Doordat zoveel mogelijk gebruik is gemaakt van kleine hoeveelheden leerstof, kunnen de leerlingen grote delen van de stof zelfstandig doorwerken.
De behandelde stof in beide delen is zeer zeker bijzonder aantrekkelijk voor de leerlingen van deze schooltypen. Vastgesteld moet echter worden dat deze stof buiten het Wiskunde-examenprogramma valt en dus moeilijk aan de hele groep leerlingen aangeboden kan worden, tenzij men het vak Computerkunde als niet-examenvak op het rooster heeft staan. Voor de leerlingen met interesse en aanleg (logisch denken is zeer belangrijk) is het een verrijking van aangeboden stof, maar voor de MAVO-leerling zal de hele stof niet verwerkt kunnen worden in verband met de duur van zijn opleiding. (Alleen het derde en vierde leerjaar komen maar in aanmerking.)
Toch is het aan te bevelen, ook de leerlingen kennis te laten maken met beide delen, bijvoorbeeld door ze een plaatsje te geven in de schoolbibliotheek.

J.F. Christophe

K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P.C. Schnetz, H. Steur, A.H. Syswerda en R.A.J. Vuyk, *Getal en ruimte,* deel 4M IV-1, wiskunde voor de vierde klas MAVO, 144 blz., *f* 8,90, Uitg. Tjeenk Willink-Noorduyn N.V., Culemborg.

Met dit deel is de behandeling van de onderwerpen, genoemd in het Rijksleerplan, voltooid.
Dit deel 1 bestaat uit een achttal hoofdstukken, waarin behandeling plaats vindt van: relaties, beschrijvende statistiek, kwadratische functies en ongelijkheden, trigonometrie, getallenrij, berekeningen in de ruimte.
Een ruim aantal opdrachten en opgaven geeft de docent de gelegenheid te controleren of alle stof begrepen is.
Aan het eind van het boek vindt men een samenvatting van de behandelde stof van elk hoofdstuk, gevolgd door een lijst van tekens en afkortingen en een trefwoordenregister.
Ter completering sluit de leergang af met het deel 4M IV-2 dat samenvattingen geeft van alle behandelde onderwerpen uit het examenprogramma, en waarin tal van herhalings- en examenopgaven zijn opgenomen.
Een niet te gemakkelijk boek, wat echter aan alle eisen van het wiskundeprogramma voldoet en voor de wiskundedocenten zeker de moeite waard is er kennis van te nemen.
De gehele leergang voor het Mavo bestaat uit:

B 1		Algebra voor de Brugklas.
B 2		Meetkunde voor de Brugklas.
2 MIV 1	2 MIV 2	voor het tweede leerjaar.
3 MIV 1	3 MIV 2	voor het derde leerjaar.
4 MIV 1	4 MIV 2	voor het vierde leerjaar.

J.F. Christophe

Drs. Chr. Boermeester, B. Burger en Dr. P.M. van Hiele, *Van A tot Z,* deel M4-4b, voor de vierde klas Mavo, 101 blz., *f* 9,50, Uitg. J. Muusses N.V., Purmerend.

Dit werkboek der wiskunde is bestemd voor het tweede halfjaar van het vierde leerjaar MAVO-4.
In de Lessen 21 t/m 25 worden de volgende onderwerpen behandeld: oneigenlijke machten, vierkantsvergelijkingen, grafieken en ongelijkheden in de goniometrie, statistiek, vectoren.
Hierna beginnen de voorbereidingen op het schriftelijk examen in de vorm van twee voorbeelden (de Lessen 26 en 27), waarna in de Lessen 28 t/m 36 tal van examenopgaven gegeven worden, waaronder de volledige MAVO-4 examens van 1970 en 1971.
Zoals de voorafgaande delen is ook dit deel weer echt aangepast aan de capaciteiten van de doorsnee MAVO-leerling en zeker geschikt voor gebruik op de MAVO-scholen.
Hieronder nog een overzicht van de gehele leergang voor het MAVO.

M^4H – 1A	en	M^4H – 1B	Brugklas Mavo
		H – 1c	aanvulling Brugklas Havo.
M^4H – 2a	en	M^4H – 2b	tweede leerjaar Mavo
		H – 2c	aanvulling tweede leerjaar Havo.
M^4 – 3a	en	M^4 – 3B	derde leerjaar Mavo.
M^4 – 4a	en	M^4 – 4B	vierde leerjaar Mavo.

J.F. Christophe

Papy, *Nombres et vectoriel plan réels,* Collection Frédérique 5, Presses Universitaires de Bruxelles, 1971, XII + 97 blz.

Het boek behelst een vereenvoudigde herziening van delen van Mathématique Moderne 1 en 2.
De affiene meetkunde wordt gebaseerd op de vanouds bekende axioma's:
Het vlak π is een verzameling punten.
Elke rechte lijn is een echt deel van π en bevat minstens twee punten.
Bij elk tweetal punten bestaat er precies één rechte lijn, die deze punten bevat.
De verzameling rechte lijnen is niet leeg.
Elke richting is een partitie van het vlak (axioma van Euclides).
Nu volgt de definitie van een 'couple paralié':

$$(a, b) \;\square\; (c, d) \overset{\text{df}}{=} \text{er zijn twee verschillende richtingen } X \text{ en } Y, \text{ waarvoor}$$

$$(a, b) \;//\; X \;//\; (c, d) \text{ en } (a, c) \;//\; Y \;//\; (b, d);$$

een definitie van ekwipollentie:
de ekwipollentie is de kleinste ekwivalentierelatie die de paraliaison omvat;
en de definitie van een vector:
een vector is een ekwivalentieklasse van de ekwipollentie.
Waarna het verrassende axioma volgt:
Elke vector is een functie.
Dit axioma is in wezen het axioma van Desargues. Het houdt in, dat voor elke vector v er bij elk punt a precies één punt b bestaat, waarvoor $\vec{ab} = \vec{v}$.

Een essentieel verschil met MM1 is, dat de vectoren hier vrije vectoren zijn en dat we dus niet meer behoeven uit te gaan van een vlak, waarin één punt 'uitverkoren' is.
De volgorde wordt geregeld door het enkele axioma:
Droites et directions sont monotales et isomorphes par incidence (axioma van Pasch).
Dit ietwat kryptische axioma beweert, dat zowel rechte lijnen als richtingen op twee manieren totaal geordend zijn en dat deze twee ordeningen elkaars inverse zijn. Snijd bovendien een rechte lijn met de rechte lijnen van een richting en de ordening van de snijpunten correspondeert met die van de rechte lijnen van de richting.
Een model van deze meetkunde is de meetkunde, die bestaat uit 4 punten en 6 lijnen, waarbij elk puntenpaar een van de rechte lijnen is. Om dit model onbruikbaar te maken, wordt het oneindigheidsaxioma toegevoegd:
Er is een rechte lijn die meer dan twee punten bevat.
Nu reeds zijn alle rechte lijnen noodwendig oneindige verzamelingen geworden. De structuur van deze verzamelingen wordt dan nog nader geregeld door het axioma van Cantor, dat inhoudt dat elke tot nul inkrimpende intervalrij een niet lege doorsnede heeft (bij Papy iets anders geredigeerd).
Hierna worden de reële getallen ingevoerd door middel van duale graduaties, en de vermenigvuldiging ervan door middel van homothetieën. De behandeling doet denken aan die in MM2, maar is eenvoudiger.

P.G.J. Vredenduin

Prof. Dr. Z.P. Dienes, drs. C.A.J. Boermeester en drs. B. van der Krogt, *Opdrachten logica,* L.C.G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 102 blz. + 6 diagrammen, *f* 37,50. Oorspronkelijke titel: Logique élémentaire, OCDL, Parijs 1971.

Dienes heeft een methode ontworpen om kinderen de beginselen van de verzamelingsleer en van de propositielogica bij te brengen door middel van logiblokken. Dit zijn 24 blokken, die elk
groot of klein zijn (gr of k),
driehoekig, rechthoekig, vierkant of rond (△, ▭, □ of ○),
geel, rood of blauw (g, r of b)
en alle verschillend zijn.
De toegevoegde diagrammen zijn (echte) diagrammen van Venn.
Door middel van manipulaties met de blokken wordt de leerlingen duidelijk gemaakt de betekenis van $\bar{A}$ (complement van A), $A \subset B$, $A \cap B$ en $A \cup B$. Parallel daarmee worden de logische symbolen $\bar{\ }$ (niet), $\wedge$ en $\vee$ ingevoerd. Dit echter op een ietwat ongebruikelijke wijze. Onder g wordt verstaan de eigenschap 'niet-groen', onder g $\wedge$ ▽ de eigenschap 'groen en driehoekig', onder g $\vee$ △ de eigenschap 'groen of driehoekig'. In strijd met het normale gebruik worden deze symbolen dus gebruikt als connectieven tussen eigenschappen en niet als connectieven tussen proposities.
Daarna volgt de implicatie. Deze kwestie vind ik zo belangrijk dat ik er uitvoerig op wil ingaan. Neem
het grote blauwe vierkante blok,
het kleine blauwe vierkante blok,
het grote rode driehoekige blok,
het grote blauwe rechthoekige blok,
het kleine blauwe ronde blok,
het kleine rode driehoekige blok.
Iemand doet over deze 6 blokken de volgende uitspraak: 'Als ik een vierkant blok pak, dan is het blauw.' Deze uitspraak is juist.
Nu wordt een zevende blok toegevoegd. Als de genoemde uitspraak niet meer juist is, dan wordt het terzijde gelegd, en anders wordt het definitief aan de zes blokken toegevoegd. Zo gaat men door. Men krijgt dan de verzameling van de blokken met de eigenschap 'als vierkant, dan blauw', of korter in wiskundige taal: de verzameling van de blokken met de eigenschap $\square \Rightarrow b$. Daarna wordt de opdracht gegeven de verzameling te vormen van de blokken met de eigenschap $\bar{\square} \vee b$. Dit blijkt dezelfde verzameling te zijn.
Nog even recapituleren: voor de oorspronkelijke verzameling met 6 elementen gold: als ik een vierkant blok pak, dan is het blauw. Dit is echter nog lang niet de verzameling $\square \Rightarrow b$. De verzameling $\square \Rightarrow b$ is de maximale verzameling logiblokken, waarvoor de genoemde uitspraak juist is. Een meesterlijke vondst, als men zich ten doel stelt de implicatie op één lijn te stellen met conjunctie en disjunctie.
Analoog aan $\Rightarrow$ wordt daarna $\Leftrightarrow$ behandeld.
Nu volgt in het tweede deel van de opdrachtenserie de inferentie, die parallel loopt met $\subset$. Als een blok de eigenschap $r \wedge \square$ heeft, dan volgt daaruit dat dit blok behoort tot de verzameling van de blokken met de eigenschap r (de redactie is blijkbaar aangepast aan het niveau van de leerlingen). We noteren deze redenering

$$\frac{r \wedge \square}{r}$$

Opmerking verdient, dat nu $r \wedge \square$ en r symbolische voorstellingen van uitspraken zijn en niet, zoals vroeger, van eigenschappen. Men kan hiermee eindeloos jongleren en een aardig stuk propositielogica ontwikkelen. Zo wordt b.v. aan het eind van het boek gevraagd, welke van de volgende deducties juist zijn:

$$\frac{\square \vee k}{\square \Rightarrow k}, \quad \frac{\square \Rightarrow k}{\bar{\square} \Rightarrow \bar{k}}, \quad \frac{\square \vee k}{\bar{\square} \Rightarrow k}, \quad \frac{\square \Rightarrow k}{\bar{k} \Rightarrow \square}, \quad \frac{\bar{\square} \Rightarrow k}{\square \vee k}, \quad \frac{k \Rightarrow \square}{k \vee \square}$$

En nu vraag ik mij af: is het didactisch verantwoord om dergelijke subtiele verschillen tussen implicatie en inferentie te proberen de leerlingen bij te brengen. Het verschil is zo subtiel, dat het in het normale denken en trouwens ook in het normale schoolprogramma verdoezeld wordt. Als ik het mag samenvatten, dan is $p \Rightarrow q$ de maximale verzameling, waarbinnen $\frac{p}{q}$.
En nu vind ik een kind erg knap, als hij het snapt. Daarom wordt het dan ook veel kinderlijker geformuleerd. Maar de echte formulering demonstreert, hoe moeilijk het in wezen is.
Met deze kritiek wil ik geenszins pogen afbreuk aan het boek te doen. Ik wil veeleer de auteurs ertoe brengen, als ze het niet met mij eens zijn, hun mening te verdedigen. Dat kan tot een aardige discussie (in Euclides) leiden.
Tot slot mijn grote bewondering voor het werk. Op een werkelijk meesterlijke manier worden de leerlingen tot logisch inzicht gebracht.
Het boek is bedoeld voor studielessen in de brugklas op niveau vwo-havo en zou ook dienst kunnen doen (voor een deel) aan het einde van de basisschool.

P.G.J. Vredenduin

Opgaven voor wiskunde I en II, samengesteld door een commissie, ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, o.l.v. dr. ir. B. Groeneveld, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1970, 102 blz., *f* 9,–.
Naast de vermelding van de examenprogramma's v.w.o. en wiskunde L.O. vindt men samengebracht:

98 opgaven algebra en analyse
64 opgaven vectormeetkunde
25 opgaven statistiek en waarschijnlijkheidsrekening
54 opgaven van bijzondere soort
84 examenopgaven van de laatste jaren.

Een antwoordenlijst is toegevoegd.
De commissie bestond uit 12 leden.
Enkele opmerkingen bij 2.7*b* en 2.9*d* zijn de uitkomsten onjuist. In 2.12 is bij *b* het gegeven $l \perp m$ weggevallen. Voegt men het toe dan blijft er weinig vectormeetkunde voor het antwoord nodig.
In 4.56 is mij de betekenis van $\alpha^3 - 2\alpha^2 - 10\alpha - 7i$ niet duidelijk. Bedoelt men $A^3 - 2A^2 - 10A - 7I$?
In de uitkomst staat abusievelijk dat $A^2 = A$ terwijl de uitkomst van *c* onjuist is.

In 4.57 in *B* van de gedaante $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$

Met dit algemene voorbeeld kan men de vorm van B^k wel ontdekken, maar met een getallenvoorbeeld moet eerst even 'spieken' in de uitkomstenlijst.

Burgers

Kemény-Schleifer-Snell-Thompson: *Finite Mathematics with business applications*, in het Duits vertaald door Prof. H. Zimmerman onder de titel *Mathematik für die Wirtschaftspraxis*, W. de Gruyter, Berlin, 1972, 490 p., 2e dr., DM 48.
Voor docenten die op de hoogte willen blijven van de eisen die op wiskundig gebied aan economen gesteld kunnen worden is kennismaking met dit boek aan te bevelen.
Een korte inhoudsopgave moge een eerste indruk geven.
Na een inleiding in de formele logica, toegelicht met waarheidstabellen en elektrische schakelingen volgen klassenlogica, waarschijnlijkheidsrekening, lineaire programmering (simplex-

methode) en speltheorie, alles toegespitst op de praktijk.
De uitvoering is, zoals we gewend zijn, uitstekend.

Burgers

ONTVANGEN BOEKEN

H. Behnke e.a., *Grundzüge der Mathematik, IIB*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1971, 2e dr., 478 blz., DM 60.
In de 40ste jaargang, blz. 124 is een uitvoerige bespreking door Dr. A. Gloden opgenomen. De eerste druk is opnieuw bewerkt en uitgebreid o.a. met differentiaalmeetkunde en topologie. In feite zijn de eerste vier hoofdstukken nieuw gezet. Deel II bestaat nu uit IIA en IIB, waarvan het eerste reeds eerder verscheen.

Dr. Joh. H. Wansink, *Didactische Oriëntatie voor wiskundeleraren I*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1971, 2e dr., 340 blz., *f* 28,50.
De nodig geachte wijzigingen in de oorspronkelijke tekst zijn aangebracht. De paragrafen over studietoetsen zijn onder de verantwoordelijkheid van de heer J. Timmer opgenomen.

Dr. W.A.M. Burgers en Drs. B.J. Westerhof, *Nieuwe wiskundeopgaven voor lo en vhmo*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1972, 2e dr., 129 p., *f* 10,50.
De planimetrische vraagstukken zijn komen te vervallen. De examenopgaven zijn aangevuld.

Drs. Chr. Boermeester e.a., *Van A tot Z*, werkboek der wiskunde voor het brugjaar, deel 1a, geheel herziene 4e druk, 160 p., *f* 9,50.

Dr. P.M. van Hiele e.a., *Van A tot Z*, werkboek der wiskunde voor havo-vwo, deel HV4b, 2e dr., 139 p., *f* 16,50;
werkboek der wiskunde voor het brugjaar deel 1c, 3e dr., 158 p., *f* 7,50;
werkboek der wiskunde voor havo-vwo, deel H5a, 1e dr., 101 p., *f* 17,50;
Uitg. J. Muusses, Purmerend, 1972.

Drs. B.J. Jacobs e.a., *Moderne wiskunde*, deel 1 voor de brugklas, 4e herziene druk, Wolters-Noordhoff, Groningen 1972, 228 p., *f* 10,90.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

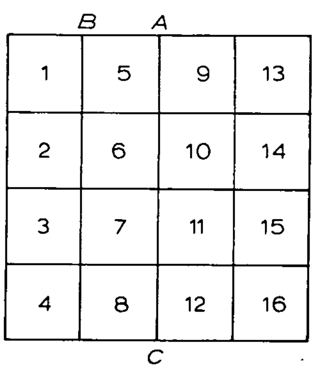
290 Vouw de hier getekende papieren kaart zo, dat de bladen op volgorde komen, 1 voorop, 8 achteraan. Er wordt geen verschil gemaakt tussen de voorkant en de achterkant van de bladen. (S.M.P. Book D)

1	8	7	4
2	3	6	5

291 De ingang van een flatgebouw is gelijkvloers; daar begint de lift. Erboven bevinden zich n verdiepingen. Volgens het toeval verdeeld gaan personen met de lift naar boven of van de een of andere verdieping naar beneden. Verkeer met de lift tussen de verdiepingen sluiten we uit. Ieder laat de lift daar, waar hij uitstapt. Gevraagd wordt de gemiddelde weg die de lift per keer dat hij gebruikt wordt, aflegt (J.H. van der Vlis).

Oplossingen

288 Op hoeveel manieren kunnen we een vierkant bestaande uit 4 x 4 vierkantjes door een lijn in twee delen verdelen, die elk acht vierkantjes bevatten? De beide delen moeten samenhangend zijn; samenhang in een punt is verboden.



Nummer de vierkantjes zoals in de figuur is aangegeven. We beschouwen eerst de verdelingen door een lijn die in A begint. We krijgen de volgende mogelijkheden. Het ene deel bestaat uit de vierkantjes

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	10
1	2	3	4	5	6	7	11
1	2	3	4	5	6	8	10
1	2	3	4	5	6	8	12
1	2	3	4	5	7	8	11
1	2	3	4	5	7	8	12
1	2	3	4	5	6	10	11
1	2	3	4	5	8	11	12
1	2	3	4	5	8	12	16
1	2	3	5	6	7	10	11

en de spiegelbeelden t.o.v. de lijn AC van de laatste tien. In totaal dus 21 mogelijkheden.
Nu beginnen we de lijn in B.
Dit levert de volgende mogelijkheden:

1	2	3	4	6	7	8	10
1	2	3	4	6	7	8	11
1	2	3	4	6	7	8	12
1	2	3	4	6	7	10	11
1	2	3	4	6	8	10	12
1	2	3	4	6	8	12	16
1	2	3	4	7	8	10	11
1	2	3	4	7	8	11	12
1	2	3	4	7	8	12	16
1	2	3	4	8	10	11	12
1	2	3	4	8	11	12	16
1	2	3	4	8	12	15	16

Dus 12 mogelijkheden.
Er zijn vier randpunten gelijkwaardig met A en acht met B. Zodat we $4 \cdot 21 + 8 \cdot 12 = 180$ mogelijkheden krijgen. Elk echter twee keer geteld. Het antwoord op de vraag luidt dus 90.

289 Teken drie punten in een vlak zo, dat geen drie afstanden van deze punten alle drie verschillend zijn.
Noem de twee afstanden a en b. Neem de punten A, B en C als hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met zijde a. Punt D kan dan:

tot A, B en C de afstand b hebben en is dus het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC,

tot A en B afstand a hebben en tot C afstand b, waardoor een ruit ontstaat,

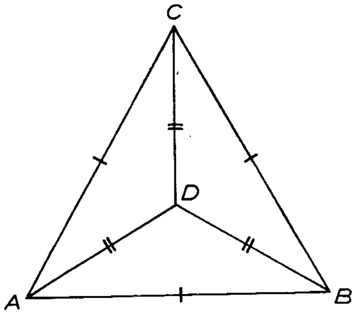
tot A de afstand a en tot B en C de afstand b hebben (twee mogelijkheden).

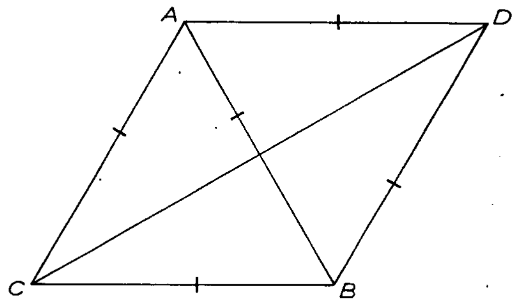
Neem nu de punten A, B en C als hoekpunten van een gelijkbenige driehoek met $AB = AC = a$ en $BC = b$. Punt D kan dan:

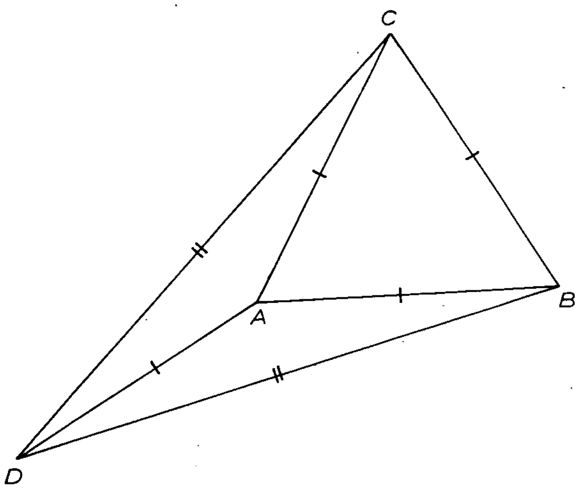
tot B en C afstanden a hebben en tot A de afstand b, waardoor een vierkant ontstaat,

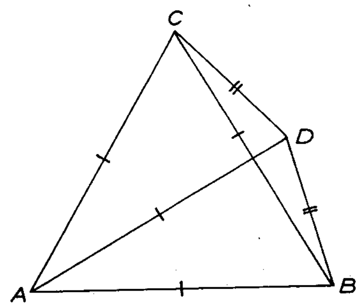
tot A en C de afstand b hebben en tot B de afstand a, waardoor een gelijkbenig trapezium ontstaat met basishoeken van 72°.

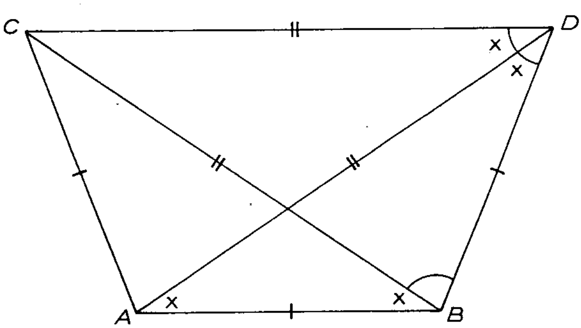
In onderstaande figuren is dit toegelicht.

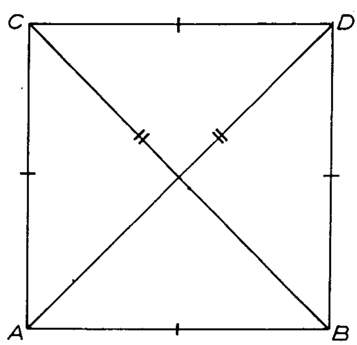












INHOUD