EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (NB).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Meetkunde met vectoren III[1]

(affiene driedimensionale meetkunde)

door

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Voor het gemak herhaal ik de axioma's A1-8, die we in het vervolg weer nodig zullen hebben.

A1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
A2. $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
A3. de optelling heeft een neutraal element ($\mathbf{0}$):
$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
A4. elk element heeft een tegengestelde ($-\mathbf{v}$):
$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
A5. $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$
A6. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
A7. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
A8. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

vectorvlak, dus als een vectorruimte met een basis die uit twee vectoren bestaat. Het ligt wel erg voor de hand te vermoeden, dat de ruimte opgevat kan worden als een vectorruimte met een basis die uit drie vectoren bestaat.
Wat bedoelen we hiermee? We weten intuïtief, wat we bedoelen met 'de ruimte'. We verbinden hiermee bepaalde voorstellingen. We willen nu laten zien, dat de axioma's A1-8 en ook het dimensieaxioma D_3 in overeenstemming zijn met onze ruimtevoorstelling. Als dat zo is kunnen we zonder bezwaar A1-8 en D_3 als uitgangspunt nemen voor een beschrijving van de ruimte. We hebben dan de zekerheid, dat alle conclusies die we uit deze axioma's trekken, ook voor onze ruimte van kracht zullen zijn. A1-8 en D_3 zijn dan een geschikt uitgangspunt om datgene te beschrijven, dat we min of meer vaag intuïtief ruimte genoemd hebben.[2]
Onze taak is minder omvangrijk dan hij op het eerste gezicht lijkt. In de meeste
De rechte lijn kunnen we opvatten als een vectorlijn, dus als een vectorruimte met een basis die uit één vector bestaat. Het platte vlak kunnen we opvatten als een

[1] De voorgaande artikelen vindt men in Euclides 48, 1 en 2.
[2] Om misverstand te voorkomen: de inhoud van deze alinea is voor de leerlingen bestemd en heeft didactische waarde; wetenschappelijke waarde mag men er niet aan toekennen.

van de axioma's A1-8 komen niet meer dan twee vectoren voor; het zijn dus axioma's uit de vlakke meetkunde. Specifiek ruimtelijk is alleen het axioma A2 en uiteraard het dimensieaxioma D_3.

Om in te zien, dat deze axioma's in overeenstemming zijn met onze ruimtelijke voorstelling gaan we uit van een parallellepipedum (fig. 3). Noem de punten vectoren en noem het punt O de vector $\mathbf{0}$. De vectornamen zijn in fig. 3 bij de punten gezet. Men ziet nu, dat

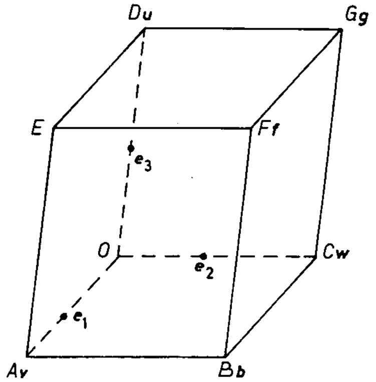


Fig. 3

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{b}$$
$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{f}$$
$$\mathbf{w} + \mathbf{u} = \mathbf{g}$$
$$\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}$$

en dus

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$$

Hiermee is aangetoond, dat A2 klopt met onze ruimteaanschouwing.

Nu D_3. Kies drie punten (vectoren) op de lijnen OA, OC en OD (fig. 3) en noem deze $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_3$. Kies verder een willekeurige vector $\mathbf{f}$.

Nu is

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

Omdat $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{v}$ dezelfde drager hebben, is er een reëel getal x_1, waarvoor $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1$. Evenzo zijn er reële getallen x_2 en x_3, waarvoor $\mathbf{w} = x_2\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{u} = x_3\mathbf{e}_3$. Zodat er reële getallen x_1, x_2 en x_3 zijn, waarvoor

$$\mathbf{f} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Ook D_3 is hiermee plausibel gemaakt.

Na deze voorbereidingen kunnen we de knoop definitief doorhakken. Onder de ruimte verstaan we een driedimensionale vectorruimte. Meetkunde van de ruimte of stereometrie verkrijgen we dus door uit te gaan van de axioma's A1-8 en D_3 en daaruit conclusies te trekken, op precies dezelfde manier als we vlakke meetkunde krijgen uitgaande van A1-8 en D_2.

Hier balanceren we op de rand van de afgrond van de echte wiskunde. Nog één stap zijwaarts en we hebben strenge wiskunde en dan vallen we inderdaad in de afgrond, want dan snapt geen leerling het meer.
We moeten nog even terug naar D_3. Redigeren we D_3 analoog aan D_2, dan luidt D_3. Er zijn drie vectoren e_1, e_2 en e_3, alle $\neq \mathbf{0}$, die niet in één vlak liggen;

voor drie dergelijke vectoren e_1, e_2, e_3 geldt:

$$\forall v \cdot \exists x_1, x_2, x_3 : v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Bekijken we de redactie van het axioma kritisch, dan merken we dat de toevoeging 'alle drie $\neq \mathbf{0}$' overbodig is. Voldoende is te zeggen, dat e_1, e_2 en e_3 niet in één vlak liggen. Wanneer is dat het geval? Laten we liever nagaan, wanneer e_1, e_2 en e_3 wel in één vlak liggen. Dat is het geval, als

$$\exists x_1, x_2 : e_3 = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

Er zijn echter meer mogelijkheden; het is ook het geval als

$$e_1 = \mathbf{0} \text{ of } e_2 = \mathbf{0}$$

Geen erg aanlokkelijk resultaat. We zouden graag een kriterium vinden, dat symmetrisch in e_1, e_2 en e_3. Zoals bekend is dat:

$$\exists x_1, x_2, x_3 : \text{niet } x_1 = x_2 = x_3 = 0 \land x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \mathbf{0}$$

In dat geval noemen we de vectoren e_1, e_2 en e_3 lineair afhankelijk. Kriterium voor lineair onafhankelijk zijn is dus

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Men heeft er veel plezier van direct deze kriteria te geven. Later heeft men ze nodig.
Nu de opbouw van de driedimensionale meetkunde. Onze eerste taak is, analoog aan hetgeen we in de tweedimensionale meetkunde deden, vast te leggen wat we onder een vlak verstaan. We weten reeds, dat

$$x = \lambda w + \mu u$$

(w en u hebben geen gemeenschappelijke drager) de parametervoorstelling is van een vlak door **0** (dit is immers de inhoud van D_2). Een willekeurig vlak krijgen we door een vlak door **0** evenwijdig te verschuiven, dus door bij alle vectoren van het vlak een vector v op te tellen. We krijgen dan:

$$x = v + \lambda w + \mu u$$

Dit is dus de parametervoorstelling van een willekeurig vlak.
We hebben hier nog even gebruik gemaakt van de intuïtieve ruimtevoorstelling, namelijk bij het constateren dat elk vlak door translatie uit een vlak door **0** verkregen kan worden. Zouden we dit willen voorkomen, dan zouden we (1) als

definitie van een vlak moeten aanvaarden en deze abstractie gaat weer boven de momentele mogelijkheden van onze leerlingen uit.
Nu kunnen we verder gaan met vertalen, d.w.z. van het geven van vectoriële definities van meetkundige begrippen net zoals in het platte vlak gebeurd is. We krijgen dan de driedimensionale affiene meetkunde. Hierin is meer te beleven dan in de affiene planimetrie en daarom zullen we er uitvoeriger bij stilstaan.
Als eerste probleem wil ik het afleiden van de vergelijking van een vlak behandelen. Gegeven is de parametervoorstelling van een vlak V:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dat wil zeggen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu : \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = -\lambda + 2\mu \\ x_3 = \lambda + \mu \end{cases}$$

We herleiden het rechter lid van de ekwivalentie als volgt:

$$\exists \lambda, \mu : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = -\lambda + 2\mu \\ x_3 = \lambda + \mu \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu : \left\{ \begin{array}{l} \lambda = x_1 - 1 \\ x_2 = -x_1 + 1 + 2\mu \\ x_3 = x_1 - 1 + \mu \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda, \mu : \left\{ \begin{array}{l} \lambda = x_1 - 1 \\ \mu = -x_1 + x_3 + 1 \\ x_2 = -x_1 + 1 - 2x_1 + 2x_3 + 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow {}^{*)}$$

$$x_2 = -x_1 + 1 - 2x_1 + 2x_3 + 2 \Leftrightarrow 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$

Eindresultaat:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$

Het is niet moeilijk de juistheid van de verschillende overgangen te begrijpen. Alleen de overgang gemerkt met *), waarin plots twee regels in het niet verdwijnen en daardoor ook λ en μ verdwijnen, veroorzaakt in het begin weerstand bij de leerlingen. En juist deze overgang is degene, waar het om gaat. Het boven gevolgde proces heet elimineren van λ en μ.
Om het precies te zeggen (preciezer dan ik op school durf): elimineren van λ en μ uit een uitspraak A wil zeggen, dat men een uitspraak B zoekt, ekwivalent met $\exists\ \lambda, \mu$: A, waarin de kwantoren $\exists\ \lambda$ en $\exists\ \mu$ niet meer voorkomen. Nu ziet men, dat het beslissende moment in de herleiding de met *) gemerkte overgang is. Immers op dat punt verdwijnen de beide existentiekwantoren.

Het bovenstaande rekenwerk zet ik inderdaad in deze vorm mijn leerlingen voor. Ik geef toe, dat ze het moeilijk vinden. Graag wil ik uiteenzetten, waarom ik het desondanks doe. Het staat natuurlijk ieder vrij het hiermee niet eens te zijn.
Laten we eens nagaan, waar het om gaat. De parametervoorstelling van V is

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

betekent

$$\mathbf{x} \in V \Leftrightarrow \exists\lambda, \mu : \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

of, anders geschreven

$$V = \{\mathbf{x} \mid \exists\lambda, \mu : \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\} \qquad (1)$$

Goed begrip hiervan is essentieel. Heeft men dit niet, dan vervalt men in rekenwerk, waar geen begrip achter schuilt (vgl. het voorbeeld aan het eind van het vorige artikel).
Nu de vergelijking. De vergelijking van V is

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$

betekent

$$\mathbf{x} \in V \Leftrightarrow 3x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

of, anders geformuleerd

$$V = \{\mathbf{x} \mid 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3\} \qquad (2)$$

Onze taak was te laten zien, dat deze tweede schrijfwijze van V afgeleid kan worden uit de eerste. We moesten dus aantonen, dat de verzameling (2) inderdaad dezelfde is als de verzameling (1). Dit geschiedt op de gebruikelijke manier door aan te tonen, dat

$$\exists\lambda, \mu : \mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$$

En dat is juist wat we hierboven gedaan hebben. We hebben hiermee de spijker dus wel op de kop geslagen.
Blijft over de vraag, die bij velen zal opkomen: kan het ook wat minder koppig? En allicht vraagt men zich dan af: hoe deden we het ook al weer 'gewoon' en was

dat dan zo slecht? Laten we het eens proberen. Ik zeg van te voren, dat het mee zal vallen. We schrijven op

$$x_1 = 1 + \lambda \qquad (1)$$
$$x_2 = -\lambda + 2\mu \qquad (2)$$
$$x_3 = \lambda + \mu \qquad (3)$$

We lossen λ op uit (1) en substituren de uitkomst in (2) en (3).
Dit levert

$$\lambda = x_1 - 1 \qquad (4)$$
$$x_2 = -x_1 + 1 + 2\mu \qquad (5)$$
$$x_3 = x_1 - 1 + \mu \qquad (6)$$

Nu lossen we μ op uit (6) en substitueren de uitkomst in (5).

$$\mu = -x_1 + x_3 + 1 \qquad (7)$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \qquad (8) \quad \text{(na herleiding)}$$

De meest slordige (leerling) zegt nu, dat we er zijn. De iets voorzichtigere bekijkt het geheel nog eens. Als een punt x ligt in het vlak V dat door de parametervoorstelling gegeven was, dan is voldaan aan (1), (2) en (3). Uit (1) – (3) volgen achtereenvolgens (4), (5), (6), (7), (8). En dus zullen de componenten van x inderdaad aan (8) voldoen.
Zijn we er nu? De kritische (leraar) ontdekt, dat de zaak nog niet rond is. Als x $\in V$, dan zullen de componenten van x aan (8) voldoen. Maar misschien zijn er buiten V ook nog wel punten, waarvan de componenten aan (8) voldoen. En dan zou (8) niet de vergelijking van vlak V zijn. We moeten dus nog aantonen:
als de componenten van een vector x aan (8) voldoen, dan geldt x $\in V$.
Dat is niet zo moeilijk. Onderstel de componenten van x voldoen aan (8). Kies nu λ en μ zo, dat aan (4) en (7) voldaan is. We zien dan, dat aan (1), (2) en (3) voldaan is en dat x dus inderdaad in V ligt.
Aan welke manier zullen we de voorkeur geven? Aan de tweede, dus aan de praatmanier? Of aan de eerste, de formalistische? Dat moet natuurlijk ieder voor zich bepalen. Ik kan alleen zeggen, waarom ik de voorkeur geef aan de formalistische.
Men kan het onderwijs in meetkunde met vectoren op twee manieren opvatten. Men kan zich als doel stellen de leerlingen rekentechnieken bij te brengen, waardoor ze bepaalde vraagstukken al rekenend tot een goed einde kunnen brengen. Men kan ook primair stellen, dat men precies begrijpt wat men doet. Volgens mij heeft het vak alleen maar zin, als het niet alleen gebruikt wordt om berekeningen te maken (die vaak verre van belangrijk zijn), maar als men ermee ook een typisch mathematische denktraining mee verbindt. D.w.z. vertaal elk probleem nauwkeurig in algebraïsche taal. En zorg ervoor, dat de herleidingen stap voor stap verantwoord zijn.
De eerste eis heeft als gevolg, dat het gebruik van existentiekwantoren onmisbaar is. En de tweede dat men bij herleidingen bij elke stap zal moeten nagaan of het volgende wel ekwivalent met het vorige is.

Als men het met deze zienswijze eens is, komt het mij voor dat men verstandig doet zo spoedig mogelijk de leerlingen te wennen aan de denkwijze die men principieel wil volgen. Vanuit dit gezichtspunt bekeken wint de formalistische methode het zonder enige twijfel van de praatmethode. Bij de formalistische methode wordt de ekwivalentie stap voor stap gecontroleerd. Bij de praatmethode wordt aanvankelijk onkritisch gerekend. Eerst achteraf wordt (hopelijk) geverifieerd, dat het onkritische gereken tot een goed resultaat geleid heeft. Wel, onkritisch rekenen leren we onze leerlingen gemakkelijk genoeg. Maar ze wennen er niet gemakkelijk aan achteraf na te gaan of het onkritische gereken verantwoord geweest is.
Nog een laatste opmerking over formalistiek. Misschien zal men denken, dat ik eerst gelukkig ben, als alles geformaliseerd is. Dat is stellig niet mijn opvatting. Ik zou willen verdedigen, dat formaliseren nuttig is, zolang de formalisatie leidt tot beter inzicht. Zodra formalisering wordt tot een moeizaam spel, dat de essentie van uitspraken schuil doet gaan achter gewichtige formules, schiet ze haar doel voorbij. Bij de afleiding van de vergelijking van een vlak meen ik, dat hier de formalisering voor de leerling, in de ontwikkelingsfase waarin hij verkeert, misschien nog eerder belemmerend dan verhelderend werkt. Maar dat het door de zure appel heenbijten toch nuttig is, omdat het op den duur wel tot de gewenste verheldering leidt.
Genoeg voor deze keer. Volgende keer hoop ik verder te gaan met de affiene driedimensionale meetkunde.

Mogelijke didaktische aanpak van het inprodukt; speciaal voor de MAVO-leerling?

P.I.A. KNOPS

Heerlen

I In bulletin *Van A tot Z* no. 6, maart 1972 plaatsen de schrijvers van deze methode enige opmerkingen over het inprodukt. Zoals bekend is men hierover op het mavo niet zo enthousiast geweest. Op bijeenkomsten kwam dit onderwerp vaak genoeg aan haar trekken. Misschien is dit een van de oorzaken geweest, dat de schrijvers van de methode *Van A tot Z* er in dit bulletin iets over zeggen. Hierover later meer.

II Welke didaktische 'wegen' staan ons bij de behandeling ter beschikking en welke 'weg' is voor de mavo-leerling het meest aanvaardbaar?

Men kan het inprodukt van de vektoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ op twee manieren definiëren:

I. $\langle \vec{a}\,;\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\alpha$

II. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{a}\,;\vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

In beide gevallen zullen de leerlingen moeilijkheden met het begrip inprodukt en speciaal nog met het woord produkt hebben. Ze zullen dit laatste woord los moeten maken van de vermenigvuldiging van de reële getallen. De nu volgende didaktische opmerkingen zijn misschien interessant genoeg om een en ander in een mavoklas te proberen.

Indien men zonder enige voorbereiding het inprodukt van a en b definieert als:

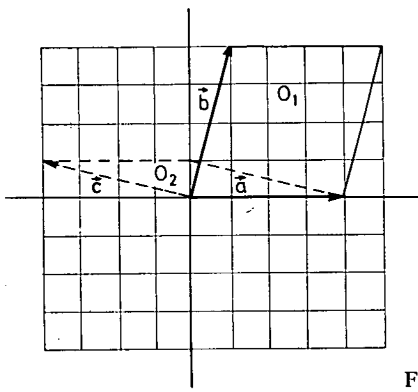
$$\langle \vec{a}\,;\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\alpha \quad \vec{a}\,;\vec{b} \neq 0 \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

dan dient men er rekening mee te houden, dat men voordien het begrip cosinus dient aan te brengen. De mogelijkheden om dit begrip bij te brengen zijn bekend. Waarom heeft men nu juist het begrip cosinus nodig? Van de goniometrische funkties is de cosinus het meest geschikt nl. de sinus is op het genoemde interval

niet een-eenduidig bepaald nl. sin $(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ de tangens en de cotangens zijn door de vertikale asymptoten niet bruikbaar.
Een andere manier om het inprodukt te demonstreren is met behulp van de natuurkunde met name het begrip arbeid uit de mechanica. Wanneer men 'een tekening wil van een inprodukt' dan kan men dit onder andere vinden in de methode *Moderne Wiskunde,* deel 7v, pagina 24. In de bovenbouw zeker een gepaste en bevattelijke manier.

Het is ook mogelijk eerst de cosinus-regel te behandelen om vervolgens tot het begrip inprodukt te komen. In verschillende methodes voor de bovenbouw wordt deze methode gebruikt.

We kunnen ook nog gebruik maken van het uitwendig produkt gedefinieerd door H. Grassmann 1844. Men gaat hierbij uit van het gegeven, dat twee vektoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een parallellogram 'opspannen'. De oppervlakte van dit parm. kan men aangeven als het uitwendig produkt (produkt in de zin van voortbrengsel, resultaat van een of andere bewerking). Dit uitwendig produkt wordt weergegeven door een reëel getal. We kunnen de leerlingen een aantal van dergelijke parm. laten 'opspannen' en het uitwendig produkt laten bepalen. Om nu tot het inwendig produkt (skalairprodukt) te komen laten we de leerlingen van een der beide gegeven vektoren de nevenvektor (normaalvektor) tekenen. De oppervlakte van het parm. 'opgespannen' door een der beide gegeven vektoren en de nevenvektor van de andere vektor noemen we het inprodukt. Ook dit is weer een getal. Enige voorbeelden ter verduidelijking:



$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

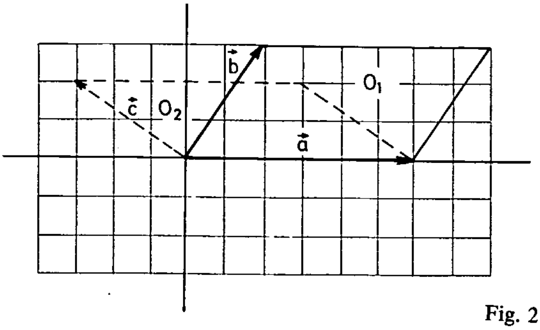
$\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{c} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fig. 1

$$\left.\begin{array}{l} \langle \vec{a}\,;\vec{b} \rangle = 4 \times 1 + 0 \times 4 = 4 \\ O_2 \quad 4 \times 1 = 4 \end{array}\right\} \text{ inwendig produkt}$$

O_1 uitwendig produkt



$\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{c} \perp \vec{b}$

$\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Fig. 2

$\left.\begin{array}{l} < \vec{a}\,;\vec{b} > \; = 6 \times 2 + 0 \times 3 = 12 \\ O_2 = 6 \times 2 = 12 \end{array}\right\}$ inwendig produkt

O_1 uitwendig produkt

Het voordeel voor de mavoleerling is dat het geheel nu ontstaat met het plaatje erbij. Deze methode, die een beroep doet op de aanschouwing schijnt nogal aan te slaan bij deze leerlingen. De leerlingen zullen zich afvragen waarom we juist de nevenvektor nemen. In een later stadium wanneer de begrippen sinus en cosinus funktioneren kunnen we het uitwendig produkt definiëren als

$$< \vec{a}; \vec{b} > \; = \; \| \vec{a} \| \, . \, \| \vec{b} \| \sin \alpha .$$

We kiezen de nevenvektor omdat $\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos \alpha$.

Het inprodukt kan ook nog gedefinieerd worden als:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad < \vec{a}\,;\vec{b} > \; = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Wanneer de leerlingen het op deze manier weer berekenen, dan blijkt weer dat dit gevonden reële getal, als oppervlakte fungeert van het parm 'opgespannen' door de vektor $\vec{a}$ en de nevenvektor van vektor $\vec{b}$.

III Wat vinden we in de verschillende methodes?

Van A tot Z door P.M. van Hiele ea. Uitgave: Muusses Purmerend.

De enige methode, die voor het mavo het inprodukt invoert n.l. als

$$< \vec{a}; \vec{b} > \; = \; \| \vec{a} \| \, . \, \| \vec{b} \| \cos \alpha .$$

Het doet dienst om later de goniometrische funkties te behandelen. Sinus en cosinus worden gedefinieerd als inprodukten van eenheidsvektoren. Ook in de havo- en vwo-delen wordt dit voortgezet.

NOTATIE: $\vec{AB}.\vec{BC} = \| \vec{AB} \| \, . \, \| \vec{BC} \| \cos \alpha$.

Moderne Wiskunde door G. Krooshof ea. Uitgave: Wolters-Noordhoff.
In de mavo-editie komt het begrip inprodukt niet voor. In deel 7v geeft men een behandeling met behulp van de mechanica nl.:

$$< \vec{a} ; \vec{b} > = \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \| \cos \alpha \ .$$

Verderop volgt dan de definitie

$$< \vec{a} ; \vec{b} > = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

NOTATIE: $(\vec{a} ; \vec{b}) = | \vec{a} | \ . \ | \vec{b} | \ . \cos \alpha$

$(\vec{a} , \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Getal en ruimte door K. de Bruin ea. Uitgave: Educaboek Culemborg.
In deel 4V2 wordt het begrip inprodukt behandeld. Ook hier volgen weer de beide definities.

NOTATIE: $(\underline{a} . \underline{b}) = \underline{a} \ . \ \underline{b} \ \cos \angle (\underline{a}, \underline{b})$

$(\underline{a} . \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Meetkunde met vectoren I. door L. Westermann Uitgave: Wolters-Noordhoff.
Het inprodukt wordt gedefinieerd met behulp van de cosinusregel. Dit gebeurt in hoofdstuk 2. In hoofdstuk 5 wordt de cosinus als inprodukt gedefinieerd.

NOTATIE: $(\bar{a}, \bar{b}) = \| \bar{a} \| \cdot \| \bar{b} \| \cos \varphi \ (\bar{a} . \bar{b})$

Vectormeetkunde deel I door A. v. Dop e.a. Uitgave: Wolters-Noordhoff
Eerst de cosinus en daarna het inprodukt.

NOTATIE: $(\bar{a}, \bar{b}) = \| a \| \ . \ \| b \| \ . \cos \varphi$

$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Opbouw door R. Bens e.a. Uitgeverij AD. Wesmael-Charlier NV. Namen
In deel 3 gaat men uit van het inprodukt van twee eenheidsvektoren. Verderop geeft men hiervan een aantal eigenschappen. Tenslotte volgt het inprodukt van twee willekeurige vektoren en tevens weer een aantal eigenschappen ervan.

NOTATIE: $\vec{a} \cdot \vec{b} = | \vec{a} | \cdot | \vec{b} | \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)$

De Rij 43 door A. Permentier. Uitgeverij de Ned. Boekhandel, Antwerpen.
Via orthogonale vektoren en eenheidsvektoren van het vlak komt men tot het scalair-produkt van evenwijdige vektoren. Daarna volgt het scalair-produkt van niet evenwijdige vektoren. (*Van A tot Z* gaat ook uit van evenwijdige vektoren.)

IV Vragen

1 Welke waarde moeten we hechten aan een aanschouwelijke behandeling van het inprodukt en dan nog speciaal voor mavo-leerlingen?

2 Hoe zou deze aanschouwelijke behandeling te combineren zijn met de methode *Van A tot Z?* (In dit verband zouden de denkniveau's van P.M. van Hiele een rol kunnen spelen.)
3 Indien dit werkelijk effekt zou hebben, dan blijkt maar al te zeer dat de aanschouwing bij de leerling een voorname rol speelt.
4 Zijn de voordelen voor de aanstaande havo-leerlingen werkelijk zo groot, als ze op de mavo met inprodukten hebben gewerkt en voor de mavo-mts-leerling?

Literatuur

Bulletin A tot Z, no. 6, maart 1972.
P.G.J. Vredenduin: Vektoren, Euclides, jrg 45, pag. 377 ev.
L.R.J. Westermann: Meetkunde en vektorruimte, Euclides, jrg 46, pag 207 ev.
W.J. Brandenburg: Verslag cursus meetkunde met vektoren 1966-1967.
G. Steller: Zur Einführung des skalaren Produktes. Praxis der Mathematik, jrg 9, 43 ev.
B. Hornfeck u. L. Lucht: Einführung in die Mathematik, Berlin 1970, pag 51 ev.
Rechenstab-Brief, no 14/'71. A.W. Faber-Castell. Stein/Nürnberg.

Computerkunde in het algemeen voortgezet en voorbereidend wetenschappelijk onderwijs (AVO en VWO)

Een verslag van de Amsterdamse Werkgroep Computerkunde*
door W. van den Camp, H.B. Emanuels, J.B. Lubke en P.Th.J. Ploeger

INHOUD

I INLEIDING

Alvorens te beginnen met een beschouwing over 'het projekt Computerkunde Amsterdam' meent de werkgroep dat het nuttig is eerst vast te stellen wat onder computerkunde moet worden verstaan en waarom computerkunde in het AVO en VWO zou moeten worden gegeven. Het is echter niet de bedoeling aan deze twee vragen een uitvoerige *analyse* te wijden, aangezien velen reeds het nodige hierover hebben gezegd en het nauwelijks mogelijk is hieraan nieuwe gezichtspunten toe te voegen. Bovendien zal de werkgroep zich beperken bij het *beantwoorden* van de twee gestelde vragen.

* Dit verslag is ook afgedrukt in INFORMATIE, maart 1972.

Wij definiëren het vak Computerkunde, binnen het kader van de mogelijkheden die het AVO en VWO op dit ogenblik bieden (één jaaruur in de derde klas) als: een sterk maatschappijgerichte kennismaking met computer en automatisering aan de hand van enkele veel voorkomende toepassingen.
Voor een uitwerking van deze definitie wordt verwezen naar de behandeling van de leerstof (III).
Blijft over de vraag waaróm het vak computerkunde in het AVO en VWO behandeld moet worden.
Uit allerlei publikaties inzake het aantal in gebruik zijnde computers blijkt dat dit aantal bijna dagelijks stijgt. De invloed van de automatisering op onze maatschappij wordt steeds meer merkbaar en het is zeer onwaarschijnlijk dat deze ontwikkeling zal worden afgeremd. De komst van de computer heeft niet alleen economische en wetenschappelijke gevolgen, maar ook op cultureel en sociaal gebied is of wordt zijn invloed merkbaar.
Dit betekent in concreto dat een vak als computerkunde in het AVO en VWO gewenst en noodzakelijk is. Op deze wijze is het dan ook mogelijk helderheid te brengen in de waas van geheimzinnigheid, die hangt rond computer en automatisering. *Ongegronde vrees kan worden weggenomen; tegen gegronde vrees kan men zich beter wapenen.* Een andere factor die van belang is om computerkunde op te nemen in het AVO en VWO, is de voorbereiding die dit vak geeft op latere studie en loopbaan.
Het tekort aan automatiseringsdeskundigen zal hierdoor – er vanuitgaande dat er betrouwbaar vakonderwijs tot stand wordt gebracht – in de toekomst kunnen verminderen.
Tenslotte dient nog te worden opgemerkt, dat computerkunde het analytisch denken kan stimuleren; men moet nauwkeurig en volledig leren formuleren, en een zeker vermogen tot organiseren ontwikkelen. De ontwikkeling van deze vaardigheden is ook voor andere disciplines van groot belang. Wellicht is het met computerkunde mogelijk de vakkenintegratie in het onderwijs te bevorderen.

Veel van bovenstaande overwegingen hebben geleid tot het projekt Computerkunde Amsterdam.
Op welke wijze dit projekt (moeizaam) tot stand is gekomen en heeft gefunktioneerd zal onder II worden geschetst.

II ONTWIKKELING VAN HET PROJEKT

De oorsprong van het projekt computerkunde ligt op de Osdorper Schoolgemeenschap te Amsterdam.
Daar werd reeds in het cursusjaar 1967-1968 op bescheiden schaal ‘les in computerkunde’ gegeven. In september 1968 kwam een wat uitgebreidere proef tot stand. Bij deze proef werd gebruik gemaakt van de methode Computerkunde voor AVO en VWO van Görts, v.d. Meulen, v.d. Sluis en Zweerus.
Aangezien de ervaringen met deze methode niet bevredigend waren – de geboden stof was te moeilijk – zocht de initiatiefnemer naar andere wegen. In de cursus 1969-1970 werd de werkgroep geformeerd. Doelstellingen en leerstof stonden de

werkgroep aanvankelijk echter nog niet duidelijk voor ogen.
Men was wel van mening dat de werking van de computer globaal zou moeten worden behandeld.
Als uitgangspunt werd een keuze gemaakt uit binnenlandse en buitenlandse methoden.

Vooral *Computer Methods in Mathematics* van Albrecht, Linberg en Mara en *Basic Computer Studies* van Barker en Beveridge kregen de aandacht: een bewerking van de eerstgenoemde methode werd overwogen, maar op grond van de volgende bezwaren werd hiervan afgezien:
- maatschappijgerichte problemen kwamen niet aan de orde;
- de aanpak was te technisch.

Bij de tweede methode werden zelfs gesprekken met de auteurs tot stand gebracht, teneinde hun ervaringen te vernemen.
De werkgroep maakte daarna een voorlopige Nederlandse bewerking. Uiteindelijk bleek echter dat ook deze methode voor de werkgroep niet aanvaardbaar was. De bezwaren richtten zich op de programmaverwerking die pas aan het eind van de cursus plaats kon vinden. Daarnaast was de behandeling van de stof te gedetailleerd en daardoor te omvangrijk voor behandeling in één jaaruur.
De werkgroep vond het voorts van essentieel belang, dat een vak als computerkunde ook op MAVO-niveau gegeven moest kunnen worden. Geen van de onderzochte of beproefde methoden voldeed naar de mening van de werkgroep hieraan.
Op grond van bovenstaande kwam de werkgroep tot de conclusie, dat een eigen methode zou moeten worden ontwikkeld.
Er ontstond zodoende steeds meer behoefte aan het formuleren van doelstellingen. Het uiteindelijke resultaat vindt u in III en in aanhangsel B.

Door kontakten die inmiddels met de Stichting het Nederlands Studiecentrum voor Informatica (NSI), het Nederlands Opleidings Instituut voor Informatica (NOVI) en het Gemeentelijk Centrum voor Elektronische Informatieverwerking (GCEI) te Amsterdam werden gelegd, lukte het de werkgroep voor de cursus 1970-1971 de volgende *werkvorm* te vinden:

leerstof	de werkgroep stelde syllabi samen;
leerlingen	ongeveer 400 leerlingen uit derde klassen van het AVO en VWO namen aan het projekt deel;
organisatie	de organisatie van het experiment werd verzorgd door de werkgroep;
begeleiding	het NOVI verzorgde een cursus voor de docenten;
evaluatie	deze werd verricht door de werkgroep, in samenwerking met docenten en leerlingen. een toets werd ontworpen en afgenomen;
programma-verwerking	Algol programma's van leerlingen werden verwerkt door het GCEI;
financiering	een subsidie-aanvraag van de werkgroep bij de Gemeente

Amsterdam voor de verwerking van programma's op de computer, werd voor één jaar gehonoreerd.

Aangezien de evaluatie en organisatie volledig op de schouders van de werkgroep rustte, moest vaak worden geïmproviseerd. Teneinde hierin verbetering te brengen, werden inmiddels kontakten gelegd met het Bureau Onderwijskundige Begeleiding (BOB) van de Gemeente Amsterdam en de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW). Daar de CMLW wegens capaciteitsgebrek niet in staat was het projekt te begeleiden, nam het BOB deze taak (voorlopig) voor één jaar op zich.
Voor de cursus 1971-1972 werd nu de volgende *werkvorm* gevonden:

leerstof	in plaats van stencils werd uitgegaan van de experimentele boekjes 'Elementaire Computerkunde' voor MAVO, HAVO en VWO, deel 1 en 2; uitgave Meulenhoff Educatief N.V., samengesteld door de werkgroep;
leerlingen	het aantal deelnemende leerlingen was ongeveer 250. Het aantal MAVO-leerlingen nam in verhouding toe;
organisatie **begeleiding** **evaluatie**	het BOB nam deze taken op zich. Het NOVI verzorgde in samenwerking met het BOB opnieuw een cursus voor de docenten;
programma-verwerking	Algol en SERA programma's werden bij het GCEI verwerkt;
financiering	de Gemeente Amsterdam subsidieerde voorlopig de programmaverwerking opnieuw. Voor de continuïteit van het projekt zou een Rijks-subsidie te prefereren zijn.

Tenslotte moet worden opgemerkt dat voor de cursus 1972-1973 de begeleiding van de methode en de financiering van de programmaverwerking helaas een onzekere zaak is.

De landelijke situatie
Het officieel landelijk projekt onder auspiciën van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) werkt volgens een andere methode.
Deze methode heeft volgens de werkgroep de volgende nadelen:
- er wordt een te gering aantal op de maatschappij gerichte problemen behandeld;
- een en ander is teveel gericht op behandeling door wiskunde-docenten;
- er wordt gebruik gemaakt van de eigen taal ECOL, in plaats van de algemeen ingevoerde programmatalen, zoals ALGOL, COBOL of FORTRAN.

Naast het Amsterdamse en het landelijke projekt zijn er in Nederland nog enkele lokale experimenten computerkunde gaande. Hierover zijn weinig gegevens bekend.
Het is wenselijk, dat ook deze experimenteergroepen hun zienswijze kenbaar maken:

binnen het vak computerkunde moet ruimte zijn voor meerdere methoden, en zo mogelijk niet alleen in de wiskundige richting.

Om dit te bereiken zou een overkoepelende organisatie de verschillende methoden in Nederland moeten evalueren en coördineren.

III DE DOELSTELLINGEN EN DE LEERSTOF VAN DE METHODE ELEMENTAIRE COMPUTERKUNDE

A Doelstellingen

1 Voorbereiding op de maatschappij; in het bijzonder op de rol die de computer daarin speelt. Inzicht in de sociale aspecten van de automatisering.
Dit wordt gerealiseerd door een analyse van een aantal praktijkproblemen, waarbij de computer een belangrijke rol speelt.

2 Ontwikkelen van vaardigheden die 1 bevorderen.
Dit omvat:
- 2.1 een algoritmisch en analytisch gedeelte (Het lineair verwerken; het onderscheidend element; het herhalend element; hierbij wordt gebruik gemaakt van stroomschema's)
- 2.2 Een operationeel gedeelte (Het toepassen van aanwezige kennis. Het (in teamverband) communiceren met de computer m.b.v. de probleemgerichte taal ALGOL)
- 2.3 Een organisatorisch gedeelte (Het organiseren van eigen werk; het verzamelen van informatie; het ontwerpen van modellen)

3* Werking van de computer
Behandeling van de machine-gerichte taal SERA, nadat een voorafgaande computermodel is geïntroduceerd.

Voorbeeld:
De leerling dient te tonen dat hij de verschillende aspekten in hun juiste onderlinge samenhang ziet; hij moet b.v. zo overzichtelijk mogelijk kunnen vertellen wat er gebeurt wanneer iets met een girobetaalkaart wordt gekocht.
Dit geldt voor alle onderwerpen waarvan in de leerstof een vereenvoudigd model wordt gepresenteerd. In aanhangsel B is een lijst van deel-doelen genoemd, die bereikt moeten worden.

B Leerstof

Van de volgende onderwerpen wordt een vereenvoudigd model gepresenteerd:
- een salarisadministratie;
- een girodienst;
- een bevolkingsregister;
- een energiebedrijf;
- een statistisch onderzoek;
- de sociale aspekten van de automatisering;
- de computer.

* bedoeld als uitbouw

Daarnaast komen verschillende andere onderwerpen aan de orde, zoals rente- en percentageproblemen, een algoritme voor worteltrekken, bepaling van de doorsnede van twee verzamelingen en tekenen van grafieken.
Een uitvoeriger opsomming van de leerstof is in de inhoudsopgave van de methode Elementaire Computerkunde te vinden. Deze is opgenomen in aanhangsel C. In aanhangsel D wordt getoond, welke verschillende mogelijkheden er zijn om de leerstof te doorlopen.
Uitgangspunt is een noodzakelijk basisgedeelte, waarna er verschillende mogelijkheden bestaan om te komen tot een samenhangend geheel van onderwerpen.
Twee van deze mogelijkheden zijn uitgewerkt in het reeds genoemde aanhangsel D, namelijk een administratief en een wiskundig georiënteerde richting. Voorts zijn vele andere combinaties mogelijk.

IV DE LEERSTOF IN RELATIE TOT DE MODULE BASISKENNIS INFORMATICA (Module I1)

In het voorstel van de Opleidingsadviescommissie (OAC) van de N.S.I. voor Nieuwe Examens in de Informatica wordt een opleidingsstructuur gepresenteerd die uitgaat van bepaalde leerstofeenheden (modulen).

Het bovengenoemde voorstel gaat er vanuit dat voor alle automatiseringsopleidingen bij het niet regulier beroepsonderwijs een basiskennis informatica wordt vereist, zoals omschreven in:

"MODULE I1 – Basiskennis informatica
Het doel van deze module is het overdragen van basiskennis omtrent de informatica. Hieronder wordt verstaan de gemeenschappelijke kennis die nodig is voor allen die direct of zijdelings betrokken zijn bij werkzaamheden op het terrein van de automatisering. In concreto komt deze doelstelling hierop neer dat de cursist in deze opleiding:
- enige elementaire kennis van de informatica zal moeten verwerven;
- zal moeten leren om algoritmisch te denken;
- enige ervaring zal moeten opdoen in het schrijven en op de computer testen van programma's.

Bij het vergelijken van het leerstofpakket van de methode Elementaire Computerkunde, met de module I1, blijken er op enkele punten verschillen te zijn.
De volgende onderwerpen worden in de methode niet behandeld:
1 voorstelling van gegevens;
2 interne computer-organisatie;
3 informatiesystemen en systeemontwerp.

De werkgroep is van mening dat deze onderwerpen niet noodzakelijkerwijze in een basiscursus thuishoren, maar eerder in een hoger leerjaar.
Indien de module I1 definitief door het Ministerie van Onderwijs wordt aanvaard als zijnde de leerstof die in het AVO en VWO moet worden behandeld, zal de

werkgroep de methode dienovereenkomstig moeten aanpassen.
Een ander punt waarbij de werkgroep is afgeweken van de richtlijnen uit de module I1, is dat in plaats van de programmeertaal BASIC, de programmeertaal ALGOL is gekozen.
De mogelijkheid tot verwerking op grote schaal, eventueel decentraal, van leerlingen-programma's, is bepalend geweest voor deze keuze. Ook waren van belang de ervaringen, opgedaan met de eerdergenoemde methode Barker-Beveridge. Eventuele vervanging van ALGOL door BASIC – of een andere programmeertaal – is in principe mogelijk.
Er dient opgemerkt te worden dat bij het verschijnen van het voorstel van de OAC de methode Elementaire Computerkunde reeds was ontwikkeld. Geheel in overeenstemming met de opvattingen van de werkgroep bleken ook de andere onderzochte methoden de stof van de module niet integraal te behandelen.

V SLOTOPMERKINGEN

1 De werkgroep is van mening dat het vak computerkunde zo spoedig mogelijk verplicht moet worden gesteld in het AVO en VWO.
De basismodule en het leerstofpakket dienen zodanig samengesteld te zijn, dat diegenen die computerkunde gevolgd hebben, vrijstelling krijgen voor de basismodule I1 bij het niet regulier onderwijs.
Het is bovendien wenselijk dat onderzocht wordt of bestaande methoden geschikt zijn voor het lager en middelbaar beroepsonderwijs. Daardoor zou invoering van Computerkunde ook in dit onderwijs, kunnen worden versneld.

2 De mogelijkheid dient te worden onderzocht, of computerkunde als examenvak moet worden opgenomen.

3 Het vak computerkunde heeft tot nu toe voornamelijk gestalte gekregen door mensen met een wiskundige achtergrond. Ook wordt dit vak bijna altijd door wiskunde-leraren gegeven. De werkgroep zou graag zien dat ook uit andere en met name uit de administratief-economische disciplines, meer belangstelling en inbreng zou komen.

4 Aan de verwerking van leerlingen-programma's zijn grote kosten en organisatorische problemen verbonden, hetgeen een remmende factor is voor de ontwikkeling van dit onderwijs, temeer als wordt gedacht aan meer jaaruren in het derde leerjaar en/of introductie van computerkunde in de bovenbouw.

5 Rijkssubsidie voor iedere leerling ter bestrijding van de kosten van computerverwerking van programma's, is noodzakelijk, onafhankelijk van de gebruikte methode.
Dit naar analogie van een soortgelijke situatie bij b.v. het natuurkunde-onderwijs. Bovendien behoort de overheid faciliteiten voor programmaverwerking te bieden.
In feite krijgen alleen degenen die de methode Görts e.a. volgen, een dergelijke subsidie en soortgelijke faciliteiten voor computerkunde!

6 Tot slot wil de werkgroep verwijzen naar een rapport van de International Federation for Information Processing (IFIP):
Computer Education for Teachers in Secondary Schools.

AANHANGSEL A: GERAADPLEEGDE LITERATUUR

Albrecht – Linberg – Mara: Computer methods in mathematics / Addison-Wesley publ. company, California 1969
Barker, P.J. en Beveridge, W.T.: Basic Computer Studies / Oliver & Boyd, Edinburgh, 1970
Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde: Rapport over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van computerwiskunde in het onderwijs voor MAVO, HAVO en VWO, oktober 1968.
Cozijnsen H.J. en R.J. van Biene: De leer van de Informatica, Programmeren/Wolters – Noordhoff 1971
Dijkman, L.G.: Computers, deel 1, 2, 3 / N. Samsom N.V., 1969
Euwe, M.e.a.: Computer en onderneming / N. Samsom N.V., 1968
Euwe, M.: Inleiding tot computer en automatisering / N. Samsom N.V., 1966
Fahry, Dieter, e.a.: Der Schlüssel zum Computer / Econ, Düsseldorf 1969
Görts, v.d. Meulen, v.d. Sluis, Zweerus: Computerkunde voorlopige uitgave 2 delen/ Wolters – Noordhoff N.V., 1969; definitieve uitgave 2 delen/Wolters – Noordhoff N.V., 1971
Goudvis: Eenvoudige Computerkunde / J. Rijshoek, Den Haag
Hagen, T.J.: Mini-SERA 69 / NSI, Amsterdam, 1970
Hewlett Packard: A Guide to HP Educational Basic / August 1970
IBM, ICL, Siemens: Algol – Manuals
IFIP Technical Committee for Education TC3, Working group on Secondary School Ed. WG3.1: Computer Education For Teachers in Secondary Schools (revised edition – september 1971)
Ledley, Robert S.: Programming and Utilizing Digital Computers / McGraw Hill, New York, 1962
Matusow, H.: Beest in Bedrijf / Elsevier 1970
Michie, Donald e.a.: Computer Programming for Schools. First Steps in Algol / Oliver & Boyd, Edinburgh, 1968
Naur, P. editor: Revised Report on the Algoritmic Language Algol-60, Copenhagen 1964
OAC: Nieuwe examens in de informatica, I Inleiding, II Beschrijving van de modulen NSI, Amsterdam. 1971
Organisation for Economic Co-operation and Development: Seminar on computer sciences in secondary education, Final recommandations
Van der Poel, W.L.: SERA Definiërend rapport / NSI, Amsterdam 1969
Scottish Education Department: Computer and the Schools, Edinburgh 1969
Seidel, J.J. red.: Computerwiskunde / Aula 407, Utrecht, 1969
Senior, C.: Commercial computers for students and managers/Longmans 1969
Van der Sluis, A.: Onderwijs in computerkunde / Stencil voor een docentencursus
Vonk, G.: Werkschrift Computerkunde / IOWO, Utrecht, 1971.

AANHANGSEL B: OPSOMMING VAN DE DOELEN

Bij de leerstof zijn de volgende modellen behandeld:

1 – een salarisadministratie
2 – de sociale aspekten van de automatisering
3 – een energiebedrijf
4 – een girodienst
5 – een bevolkingsregister
6 – een statistisch onderzoek
7 – de computer

Iedere rubriek is in twee delen verdeeld. In deel A worden de hoofddoelen genoemd, in deel B telkens de daarvoor noodzakelijke beperktere doelen.

ad 1 *De basisstof; een salarisadministratie*

*A*1 Het overzien van een sterk vereenvoudigde salarisadministratie, zoals in opdracht 57 (deel II blz. 38 e.v.)
2 De begrippen gegevenscontrole of datacontrole kennen (deel II blz. 40)
*B*1 Begrippen mechaniseren – automatiseren a.d.h. van voorbeelden deel I blz. 9
2 Het lineair schrijven van formules bv. opdr. 10 deel I blz. 12
3 Schema van de hoofdonderdelen van een computer I 14
4 Funkties van de hoofdonderdelen (simpel) I 15, 16
5 Begrip Informatiestroom I 14
6 Begrip informatiedrager I 15
7 Begrip Algoritme I 21
8 Lineair stroomschema (SS) kunnen maken bv. 36 I 27
9 Daarbij een schema van de inhouden van gp's kunnen maken b.v. 34 I 27
10 Invoersymbool, uitvoersymbool I 30
11 Leesblok, schrijfblok I 32
12 Eenvoudige SS met een vraagblok kunnen opstellen 78 I 44
13 Gegeven SS kunnen doorlopen (met vertakking) 82 I 46
14 Begrip cyclus I 47
15 SS met cyclus zelf kunnen opstellen (eenv.) 91 I 50 16
SS met cyclus correct kunnen doorlopen 94 I 50
17 Teller-probleem doorzien 98 I 51
18 Rekenkundig probleem kunnen omzetten in SS met cyclus b.v. rekenkundige rij 102 I 53
19 Sluitgetal kunnen toevoegen, indien nodig. 108 I 54
20 Begrip naam 2 II 10
21 Begrip rekeninstruktie 4 II 10
22 Begrip operator (enkele kunnen noemen)
23 Declaraties: doel ervan 10 II 13
24 Decimale punt II 13
25 READ, PRINT; eenvoudig programma zelf kunnen doorlopen 14 II 16
26 Funktie van COMMENT II 17, 18
27 Vorm van een programma II 18
28 Volgorde bij verwerking van programma's II 20
29 Begrip ponsdokument II 21
30 Iedere leerling (ll) moet 19 II 21 aan het draaien kunnen krijgen
31 Programma met WRITETEXT, SPACE en NEWLINE kunnen doorlopen II 23
32 Programma ermee kunnen maken. Iedere ll moet 23 II 23 draaiend krijgen.
33 PSS met vertakking kunnen omzetten in ALGOL A II,24
34 idem B II 24
35 idem C II 24
36 idem D II 24
37 Controle kunnen verrichten op ALGOL-vertakking 30 II 26

38 Probleem numeriek maken; analoog WENS II 31
39 PSS met twee vraagblokken in ALGOL vertalen; analoog II 31, 32
40 Begrippen Label en Spronginstruktie II 32
41 Begrip sluitkaart II 39
42 Kombineren van PSS doorzien; kunnen doen II 50

ad 2 *Sociale aspecten van de automatisering*
*A*1 Enige kennis van een aantal van deze aspecten
*B*1 Begrip drie generaties II 95, 96
2 Naam Charles Babbage kunnen plaatsen II 94
3 Begrip terminal II 97
4 Begrip Data-bank II 99
5 Toepassingen van computers in het dagelijks leven II 99
6 Begrip privacy II 100
7 Namen van enige funkties in de automatisering: systeemontwerper en -analist, programmeur, in- en uitvoerverzorger, ponstypist(e), operateur II 101, 102
8 Weten wat in principe wel en wat niet kan met de opleiding die nu wordt gevolgd II 105

Het is gewenst dat een en ander in een klassegesprek aan de orde komt.

Voor de onderdelen 3 tot en met 8 is het nodig om een gedeelte (afhankelijk van het gekozen onderwerp) van de volgende doelen te bereiken.

Kennis van ALGOL
*A*1 Het kunnen bereiken van de doelen genoemd onder 3 t/m 8.
*B*1 PSS cyclus kunnen omzetten in een FOR-statement. 71 II 45
2 Progr. maken bij PSS bv. zoals in 78 II 47
3 Begrip rij kennen II 52 en bv. 94 II 54
4 Rij getallen in array inlezen PSS9 II 53
5 Rij kunnen declareren II 53 en bv. 95 II 54
6 Werk met meer rijen overzien bv. 110, 111 II 60
7 Iedere ll die iets aan de rij heeft gedaan: 121 II 63!!

ad 3 *Een energiebedrijf*
*A*1 Overzicht van de werking van een energiebedrijf
2 Een programma van een eenvoudig model kunnen laten werken II 56
*B*1 Indeling Ponskaart in velden II 57
2 Verbruik bepalen II 55.

ad 4 *Een girodienst*
*A*1 Overzicht van de werking van de giro.
2 Inzicht in het betalingsverkeer, schema II 65
3 Klassegiro laten werken 134 II 69
*B*1 Begrip betaalkaart II 64
2 Begrip mutatie 122b II 64

3 Intern geheugen, extern geheugen, kunnen plaatsen bv. 130 II 67 (ook voor ll-en die in andere hoofdstukken met deze geheugens in aanraking komen!!)
4 Overzicht met informatiestroom zelf kunnen opzetten II 67
5 Begrip bestand 132 II 68

ad 5 *Een bevolkings-register en selecties*
*A*1 Enig overzicht van wat een bevolkingsregister is en doet
2 Zelf selecties en eenvoudige bijwerkingen verrichten 177, 178 II 86
*B*1 Begrip selectie II 83
2 Sorteren versus selecteren: 173 II 85
3 Inzicht in praktijk situaties: 172 II 85
4 Numeriek maken van gegevens 174 II 86
5 Herkennen van een selectie 175 II 86

ad 6 *Een statistisch onderzoek*
*A*1 Overzien van de grote lijnen bij een onderzoek
2 Zelf een onderzoekje opzetten bv. II 91
*B*1 Kennis van de nodige terminologie II 87 e.v.
2 Kennis van de wiskundige hulpmiddelen II 89

ad 7 *De computer*
*A*1 Model van de computer iets meer concretiseren
2 Zelf met deze concretisering kunnen werken
*B*1 Werken met Hotel als computermodel 23 I 19
2 Begrippen operatiecode en adrescode kennen I 29
3 De elementaire codes kennen. I 30 ev., 38
4 Eenvoudige omzetting PSS programma en vice versa 49 I 35
5 Eenvoudig programma kunnen controleren vb. 7 I 34
6 Een eenvoudig programma kunnen maken 56 I 36
7 Eenvoudige programma's met meerdere variabelen kunnen controleren 66 I 39
8 Probleem als 68 I 40 moet iedere ll aan het draaien kunnen krijgen
9 Bekendheid met de noodzaak van declaraties etc. I 41, 42
10 Verwerkingsprocedure globaal kennen I 42
Eventueel:
11 Vergelijk- en sprong-codes kennen I 55 ev.
12 Begrip label kennen I 56
13 Iedere ll die H1 1I doet, moet 117 I 59 of dergelijke rond krijgen

ad 8 *Wiskundiger gerichte probleempjes*
*A*1 Kennismaken met een aantal mogelijkheden op wiskundig gebied
2 Toepassing in concrete problemen zelf proberen (zie ook 8)
*B*1 Doorsnede: 168 II 82
2 Wortel iteratie als voorbeeld van een iteratief proces 149 II 74

AANHANGSEL C: DE INHOUD VAN DE BEIDE DELEN ELEMENTAIRE COMPUTERKUNDE

Inhoud deel I

Inhoud deel 2

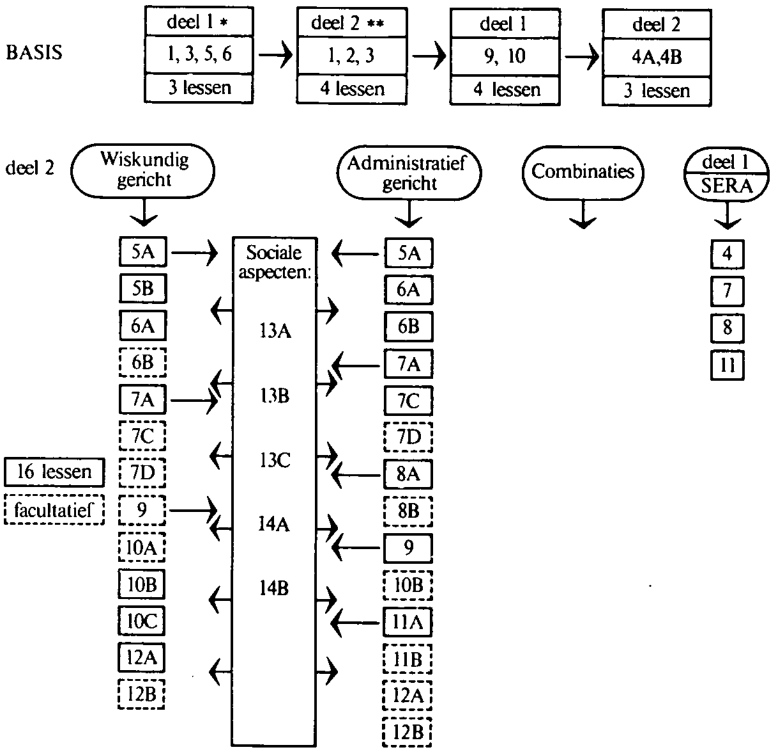
Opmerkingen: De met een vette stip aangegeven onderdelen zijn bedoeld voor VWO-leerlingen.
Ditzelfde geldt voor de opgaven met een vette stip uit beide delen.

AANHANGSEL D: SCHEMA VAN DE OPBOUW VAN DE METHODE ELEMENTAIRE COMPUTERKUNDE

In het onderstaande schema zijn, na het gemeenschappelijk basisstuk, twee hoofdrichtingen aangegeven, die gekozen kunnen worden bij de behandeling van de stof. Eén is iets meer op de wiskunde gericht, bijvoorbeeld het benaderen van wortels. De andere richting is iets meer administratief georiënteerd, bijvoorbeeld het bevolkingsregister en de giro.
De basis omvat 14 lessen. De stof die in de omlijnde blokken staat, kan uitgaande van een 'gemiddelde' havo-leerling vermoedelijk in een jaaruur worden behandeld. De andere paragrafen zijn facultatief. Het is vanzelfsprekend mogelijk om verschillende elementen uit de methode op andere manieren te combineren. Het is aan te

bevelen de hoofdstukken 13 en 14, de sociale aspecten van de automatisering, in het tweede gedeelte van de stof te integreren.

Het SERA-gedeelte is een op zichzelf staande eenheid. Nadat de eerste drie lessen gegeven zijn, kan dit gedeelte in principe op elk gewenst moment worden behandeld, afhankelijk van de behoeften die bij de leerlingen leven.



* Het eerste schema op blz. 14 moet worden overgeslagen.
Ook dienen de begrippen 'operator' en 'lineaire schrijfwijze' te worden behandeld (zie blz. 11 en 12).

** Ook dienen de in- en uitvoersymbolen en de in- en uitvoerblokken te worden behandeld (zie blz. 30 en 31 van deel I).

Franse invloed op de schoolmeetkunde in Nederland

Dr. JOH.H. WANSINK

Arnhem

1 In het traditionele meetkunde-onderwijs (oude stijl) hier te lande was het gebruikelijk uit te gaan van een beperkt aantal axioma's die geacht werden voor een deductieve opbouw van het vak een bevredigende grondslag op te leveren.
Vergelijken we het werk van diverse auteurs van de laatste honderd jaar, dan worden we getroffen door een verregaande overeenstemming voor wat betreft het aantal en de inhoud van de axioma's.
Hoe is deze overeenstemming te verklaren? Niet alle auteurs leggen verantwoording af van de bronnen, waaruit ze bij het schrijven van een schoolboek putten. Naar mijn mening is hier echter duidelijk sprake van een Franse beïnvloeding.

2 In zijn *'Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire"* (1) schreef Hoüel in 1867:

> La géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentable de la solidité ou de l'invariabilité des figures. Elle comprunte, en outre, à l'expérience un certain nombre de données qu'on appelle axiomes.
> Nous verrons que les axiomes de la géométrie peuvent se réduire à quatre (2).
> . . . . .
> Axiome I Trois points suffisent, en général, pour fixer dans l'espace la position d'une figure.
> . . . . .
> Axiome II Il existe une ligne, appellée ligne droite, dont la position dans l'espace est complètement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne peut s'appliquer exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs.
> . . . . .
> Axiome III Il existe une surface telle qu'une ligne droite, qui passe par deux quelconques de ses points, y est renfermée tout entière, et qu'une portion quelconque de cette surface peut être appliquée exactement sur la surface elle-même, soit directement, soit après qu'on l'a retournée, en lui faisant faire une demi-révolution autour de deux de ses points. Cette surface est le plan.

. . . . .

Axiome IV Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.

3 Gravelaar heeft erop gewezen (3), dat deze vier axioma's in 1894 reeds meer dan 20 jaar lang de ronde hadden gedaan in onze Nederlandse leerboeken, ondanks het feit dat ze geenszins toereikend waren om er de andere eigenschappen van de meetkunde uit af te leiden zonder daarbij een beroep te doen op onze aanschouwing. Hij schrijft o.a.:
'Als men het b.v. nodig acht om met Hoüel het bestaan van rechte lijnen en platte vlakken te postuleren, moet dan niet eveneens door axioma's worden uitgedrukt dat er lichamen, vlakken, lijnen en punten bestaan?
En op welke wijze overtuigt men zich, dat een bewegend punt een lijn beschrijft, enz. anders dan door zijn voorstellingen te raadplegen? '
Gravelaar denkt er echter niet aan om jonge leerlingen een beter gefundeerd axiomastelsel voor te zetten. Hij wil hen niet lastig vallen met de behandeling van onderwerpen die hun ontwikkeling verre te boven gaan en die eerder voor meergevorderden punten van nauwgezet onderzoek zouden kunnen uitmaken. Hij bepleit juist een extreme soberheid voor wat betreft het introduceren van axioma's in de schoolmeetkunde. Alleen het evenwijdigheidspostulaat is in zijn ogen nog onmisbaar, hetzij dan in de vorm door Euclides gegeven, hetzij in een van de nevenvormen. Eigenlijk zou hij nog liever de gehele theorie van de evenwijdige lijnen zonder bewijs geven om zo spoedig mogelijk te kunnen overgaan tot de behandeling van onderwerpen die een minder abstract karakter dragen.
In verband hiermee wijzen we erop, dat de eerste stelling die hij in zijn boek een bewijs waard keurt, luidt:
'Een buitenhoek van een der hoeken van een driehoek is gelijk aan de som van de twee andere hoeken' (5),
een stelling die onmiddellijk gevolgd wordt door die over de hoekensom in een driehoek.
Uit de hieraan voorafgaande beschouwingen citeren wij:
'Zonder bewijs nemen wij aan op grond alleen van wat onze voorstellingen ons leren:
Stellingen. Twee rechten die door een derde gesneden worden zijn evenwijdig:
1 als twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn;
2 als twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn;
3 als twee verwisselende buitenhoeken gelijk zijn;
4 als twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn elkanders supplementen zijn;
5 als twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn elkanders supplementen zijn' (6), mèt de vijf omkeringen van deze stellingen.

4 Gravelaar stelt daarna een elftal axioma's op met als laatste Euclides' parallellenpostulaat, niet als model voor een behandeling van de schoolmeetkunde, maar uitsluitend om ermee te accentueren, hoezeer het viertal axioma's waarmee Nederlandse auteurs in navolging van Hoüel hun theorie laten steunen in gebreke

blijft voor een verantwoorde opbouw van de theorie.
Het spreekt vanzelf dat voor Gravelaar, die zijn artikel schreef vijf jaar voor Hilberts *'Grundlagen der Geometrie'* (1899) verscheen, de menselijke aanschouwingsruimte uitdrukkelijk als object van de schoolmeetkunde beschouwde, zoals uit de vorige paragraaf reeds duidelijk blijkt.

5 Het eerste meetkundeboek in ons land waarin we Hoüels axioma's aantreffen is het *'Leerboek der Vlakke Meetkunde'* van J. Versluys, dat twee jaar na Hoüels publikatie verscheen. De auteur wijst er in zijn Voorrede op, dat hij de axioma's waarop de meetkunde steunt scherper heeft geformuleerd dan te doen gebruikelijk is. Hij verwijst voor nadere informatie inzake de grondslagen der meetkunde naar vier auteurs: Lobatschewsky, Baltzer, Hoüel en Duhamel.
De door hem geformuleerde axioma's luiden:
I Een of twee punten zijn in 't algemeen onvoldoende om de stand van een meetkundige figuur vast te stellen.
II Door elke twee punten kan men altijd één en niet meer dan één lijn laten gaan, die zich naar twee kanten onbepaald ver kan uitstrekken, en waarvan geen enkel punt van plaats verandert, als men de lijn om die twee punten laat wentelen.
Die lijn noemt men rechte lijn.
III Er bestaat een vlak, hetwelk de eigenschap bezit, dat elke rechte lijn die er twee punten mee gemeen heeft, er geheel in valt.
Zulk een vlak noemt men een plat vlak.
IV Door een punt buiten een lijn kan maar één lijn getrokken worden, die met de eerste evenwijdig is.
In zijn *'Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak'*, dat in 1874 verscheen, komt de betekenis van de axioma's voor de opbouw van de meetkunde niet ter sprake. Ook de naam Hoüel komt er niet in voor.
Dat Hoüels axioma's het in de Nederlandse schoolmeetkunde bijkans een eeuw uitgehouden hebben, kan ieder gemakkelijk verifiëren door enige leerboeken van de laatste decennia na te slaan. We volstaan met een verwijzing naar het *'Leerboek der Vlakke Meetkunde'* van Molenbroek in de herziening van Wijdenes uit 1955.
Hierin zijn opgenomen:
Axioma I Door twee verschillende punten gaat één en niet meer dan één rechte lijn.
Axioma II Door drie punten die niet op één rechte lijn liggen, gaat één en slechts één vlak.
Axioma III Als een rechte lijn met een vlak twee verschillende punten gemeen heeft, ligt de rechte lijn geheel in het vlak.
Axioma IV Twee verschillende rechten die evenwijdig zijn met een derde rechte, zijn onderling evenwijdig.
Dit laatste axioma is een voor ons onderwijs bruikbare nevenvorm van Euclides' parallellenpostulaat.

6 Voor wat de meetkunde betreft in het wiskunde-onderwijs nieuwe stijl kunnen we opmerken dat daar de axioma's hun op de voorgrond tredende plaats hebben verloren. Er wordt in het beginonderwijs hier te lande niet langer gestreefd naar een quasi-deductieve opbouw. Zelfs Euclides' parallellenpostulaat gaat daarbij de mist in.

Lectuurverwijzingen

1 J. Hoüel (1823-1886), *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des Eléments d'Euclide Paris, Gauthier-Villars, 1867.*
2 t.a.p., p. 37
3 N.L.W.A. Gravelaar (1851-1913), *Over de axioma's der meetkunde,* Vriend der Wiskunde, negende jaargang, p. 58-61.
4 t.a.p., p. 58
5 N.L.W.A. Gravelaar, *Leerboek der planimetrie,* 1907^3, Wolters, Groningen.
6 t.a.p., p. 6.
7 J. Versluys (1845-1920), *Leerboek der Vlakke Meetkunde,* eerste druk 1869; Wolters, Groningen.
8 Dr. P. Molenbroek, *Leerboek der Vlakke Meetkunde,* twaalfde druk, 1955; Noordhoff, Groningen.
Aan dit boek, herzien door P. Wijdenes (1872-1972), is een door K. Harlaar geschreven aanhangsel opgenomen over het axiomastelsel van Van der Waerden. Dit axiomastelsel heeft echter de structuur van het handboek niet beïnvloed.

Mathematica & Paedagogia

Zoals bekend kunnen de lezers van Euclides tegen gereduceerd tarief een abonnement verkrijgen op het Belgische tijdschrift Mathematica & Paedagogia. Willen zij, die een abonnement hebben hun contributie voor het komende kalenderjaar voldoen door *f* 11,– te storten op girorekening 933434 t.n.v. de penningmeester van de redactie van Euclides te Oosterbeek?
Graag voor 1 december.
Men kan zich als nieuw abonnee opgeven door voor 1 december het abonnementsgeld te voldoen per giro onder vermelding 'nieuwe abonnee'. En men kan bedanken door voor 1 december dit te laten weten aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.
Dringend verzoek indien men van de reductie gebruik maakt het abonnementsgeld niet rechtstreeks naar België te zenden.

P.G.J. Vredenduin

Mannoury's stijl [1]

TJ. S. VISSER †
Amsterdam

Elke wetenschap moet zijn banden
met de algemene cultuur behouden.
E. Schrödinger[2]

1 Vóór mij een dictaat: wijsbegeerte der wiskunde, lente 1924. Bijgehouden door mijn vrouw; ikzelf was toen werkstudent aan de prille economische faculteit Amsterdam. Wij kenden Mannoury door onze 'B'-studie[3], waar hij de principes des ruimtemeetkunde prettig en helder wist te etaleren (om je daarna moederziel alleen te laten bij de vraagstukken). Wij waren, als zoveel anderen[4] enthousiast. Maar de wijsbegeerte viel tegen[5]: te veel van de hak op de tak, cocq – à l'âne. Hier volgt het een en ander van wat hij zo terloops in de marge er bij gaf:
– Een cirkel is: de definitie van een cirkel[6]. Hoeveel cirkels raken aan drie gegeven cirkels? Acht, als ik me niet vertèl[7]. Doch 'cirkel' kan ook zijn: kromme van de tweede klasse die raakt aan de stralenwaaiers door de isotrope punten. En de vraag wordt: hoeveel C_2 raken er aan *5* klassekegelsneden? 3624, maar hier van de multipliciteit 453, dus 8 'in zekere zin'.
– Vier punten in het vlak. Een leek ziet vier punten. De wiskundige echter ziet de ene parabool die er door bepaald wordt.
– De zwakheid der euclidische methode[8] geïllustreerd: 'Een vierhoek, waarvan 2, overstaande, zijden gelijk zijn, is een trapezium'(!). Stel $AD = BC$; middelloodlijn in M op CD, in N op AB; die snijden elkaar in S. Congruenties: SMD en SMC; SNA en SNB; dus SAD en SBC. Derhalve hoek D = hoek C, q.e.d.! – Men kan n.l. de figuur drie maal fout tekenen, dan lukt dit grapje; en een maal goed, dan is het uit[9].
– De variant van Weyl op de Cretenser-paradox. Een woord dat de eigenschap heeft welke het uitdrukt (kort; deutsch; vijflettergrepig) hete *autoklities* = a; anders hete het *heteroklities* = h. Is heteroklities nu zelf a of h? Geen van beide! Dus noch a, noch non-a[10].

2 Dit alles, hoe aardig ook, toont nog niet Mannoury's stijl. Daarvoor moet ge naar het hoofdwerk uit zijn jeugd[11], en naar zijn intreerede[12] uit 1917 (net voor de Bolsjewiki de macht wonnen in Petersburg) en naar zijn groene brochure uit 1919: 'Wiskunst, filosofie en socialisme'. Ja, en naar het oude Nieuw Archief 1897-1900: o.a. surfaces-images. Hij was toen 31. Zijn Significa[14] bezit ik wel maar dat ligt mij niet.

3 Mannoury's stijl worde hier geïllustreerd:
(α) Waarom is algemeenheid onhoudbaar? Omdat een zandhoop meer delen heeft dan eenheden[15].
(β)[16] Is 1 eindig? [17]

(γ) Wiskunst is: zuinig zijn met denken om beter te denken[18].

(δ) Nettenknopen staat tot vissenvangen als de wiskunst tot de empirie[19].

(ϵ) Is twee maal twee vier? Hoeft niet. Waarom niet? Omdat in sommige dozijnen dertien gaan, en acht dagen niet veel anders is dan een week. Omdat er mensen zijn die stotteren, en potloden zonder punt. In één woord, omdat de noodzakelijkheid die in wiskunst ligt, niet van ijzer is maar van papier[20]. – En:

(π) Een kegelsnede die in een isotroop punt raakt aan de oneigenlijke rechte, heeft slechts 4 reële punten. Deze vormen een orthocentrisch systeem[21].

(ζ) .....inzicht in het verband tussen denken en zijn, waartoe de grondslagenleer der wiskunde een belangrijke bijdrage levert[22].

(σ) Een weten dat het vragen verleerd heeft, is het weten niet waard[23]

(φ) Dit moeten discipel en meester beide allereerst weten: dat het niet-begrijpen een moeilijker kunst is dan het begrijpen[24].

(ψ) Alle oorzaak en alle gevolg spelen hun eeuwig wisselspel. Vergeten wij dit niet ten opzichte van onszelf, van óns woord, en van óns voorbeeld. Laten wij weten dat wij 'gevolg' zijn; en bescheiden wezen. Maar laten wij ons ook 'oorzaak' weten en onwankelbaar zijn[25].

Tot zover Mannoury. De laatste woorden (ψ), werden geciteerd door Brouwer aan het eind van zijn toespraak tot Mannoury bij diens ere-promotie, 1946. (Brouwer schoof daardoor tevens sierlijk opzij de geijkte en voorgeschreven moraliserende formule bij hoofdstedelijke promoties. Ook dat was stijl!)

4 Is mijn bekwaamheid in het belichten van Mannoury's stijl niet toereikend, dan toch wel mijn belangstelling[26]. Het was onder het poseren, en luisterend naar Bach's Musikalisches Opfer, dat mij inviel: ik moest eens over Mannoury schrijven, de zachtmoedige[27].

Het lijkt me gepast, hier af te sluiten met een woord van Freudenthal[28]:

... la force douce de l'éducation ne se fait sentir que le long d'une série de générations humaines. Par le fait que nous sommes éducateurs de l'humanité, même si nous nous vouons aux mathématiques les plus abstraites, nous travaillons pour un avenir où la raison est le régulateur des relations humaines...

M. zou glimlachend ja geknikt hebben. Die stille glimlach hoorde tot zijn stijl. En wat was hij van zijn geloof? Als wiskundige: formalist[29]; mathesis is een wel geregeld spel met tekens, en daarmee uit[30]. Als wijsgeer was hij relativist: 'niets is geheel waar' (en ook die vier woorden niet, want de uitsluitingsnegatie (niets) behoort men te vermijden).

NOTEN

1 G. Mannoury, 1867-1956. Van Dantzig schreef over Mannoury's significance for mathematics and its foundations, in N.A.v.W. 1956/7. Portret blz. 8. Zie ook N.A.v.W. 1959/60: In memoriam D. van Dantzig, waar Freudenthal tevens licht werpt op M.; blz. 59-60 en 62.

Loopbaan: 1885 eind HBS; dan m.o. wiskunde A; hoofdakte; m.o. boekhouden; m.o. mechanica; 1902 m.o. wiskunde B en 1903! privaat-docent (wijsbegeerte der wiskunde, hij behandelt o.a. exacte logica, en sets;

toehoorders o.m. Brouwer en mijn leraar dr. ir. Th. v.d. Waerden); 1907 staatsexamen A; 1909 zijn hoofdwerk verschijnt, hij is dan 41. Stomverbaasd toen hij in 1917, leraar te Vlissingen, werd benoemd tot hoogleraar te Amsterdam (tot 1937). Eredoctor 1946. En 1947/8 Significa I en II.
Zijn vader was zeekapitein. Hij heeft enige tijd de accountacy beoefend. Freudenthal noemt deze autodidact 'een Socrates-figuur, die sterke menselijke invloeden kon uitoefenen op anderen, maar in wiens werk wij niets bespeuren van vruchtbare beinvloeding dóór anderen'.

2 Erwin Schroedinger, geciteerd door J. Popken in zijn oratie 1957.

3 K.V.

4 Jb Amsterdamse Un. 1946/7: toespraak van L.E.J. Brouwer tot Mannoury (ere-promotie).

5 We hadden ons slecht voorbereid, niet gelezen zijn Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik (herdrukt 1946).

6 Hegelen of cijferen? (De Beweging, 1915).

7 Fraaie figuur in Wijdenes' Meetkunde, blz. 268.

8 Bv.E.W. Beth, Moderne logica, blz. 46.

9 De lijnen-paren (SA, SB) en (SD, SC) moeten elkaar scheiden.

10 H. Weijl is na 1921 aanhanger geweest van Brouwers intuitionisme ('Symposion', I, 1930).

11 Zie 5).

12 Over de sociale betekenis van de wiskundige denkvorm (1917).

13 N.A.v.W., 1897-1900.

14 Handboek der analytische significa; I (1947), II (1948). In II, 19, de beruchte uitsluitingsnegatie, b.v. nooit krijgt een man een kind, maar het zeepaardje dan?

15 Zie 6). (Mijn poging tot begrijpen: een set van n elementen heeft 2^n delen (de macht-set). Bij onbeperkte aanwas leidt dit voor n tot de vriendelijke oneindigheid der natuurlijke getallen; voor 2^n tot de tomeloze oneindigheid van het continuum, b.v. alle positieve reële getallen geschreven in het tweetallig stelsel: $x = \Sigma a_i 2^i$, $i = N, N\text{-}1 \; .... \; -\infty$; $a_i = 0$ of 1. De werkelijkheid der wereld nu gelijkt het continuum; hoe kan daar iets algemeens van gezegd worden?)

16 In Dialectica had Van Dantzig gevraagd: is 10 met exponent (10 tot de macht 10) eindig? Mannoury gaf lachend deze tegenvraag.

17 (Mijn poging tot begrijpen: 1 is vaststaand en bepaald enkel als lid van de rij 1, 2, 3... , een menselijk bedenksel. Maar is de wereldoceaan 1 of oneindig?)

18 Zie 6).

19 De Groene Amsterdammer, 22-11-1914. Toevallig schreef veel later Freudenthal in datzelfde weekblad geestig over 'Viskunde', 23-12-1961.

20 Zie 6). Daar ook: wiskunst is zuivere logiek, dus zinneloos.

21 Wiskundige opgaven WG, deel VIII no. 89 (1900?). Elk punt is hoogtepunt voor de drie andere.

22 N.T.v.W. dl. VI blz. 411 waar M. bespreekt het proefschrift V.U. van D.H.Th. Vollenhoven: De wijsbegeerte der wiskunde van theïstisch stand-

punt (1918).

23 Hoe treffend vertaalt M. de titel van Cusanus (1401-1464), De docta ignorantia: Het welgeweten nietweten (Significa, I, par. 27).

24 Zie 19).

25 'Voor Wibaut', De Tribune, 6-4-1912.

26 Zwaluw en Pijlriet (1959), blz. 121: Over Mannoury – Ook mijn intreerede, Amsterdam 1957, in De Economist.

27 Onlangs verscheen in Den Haag een vertaling van Nigel Calder: Technopolis, waarin deze Brit vraagt om zachtmoedige leiders (verg. Lucas Reijnders in NRC 22-1-1971).

28 In Mathematica & Pedagogia, no. 15, 1957/8.

29 Dit woord heeft geen scheldbetekenis!
Tegenover het formalisme staat vooral het platonisme: begrippen bestaan: , en ook buiten onze geest. H.B. Curry (in Outlines of a formalist philosophy of Mathematics; 1958; Ch.III), formalist als Mannoury, heeft leuk uiteengezet waarom hij toch het platonisme niet nonsensicaal vindt: –One can make a good case even for Platonism on somewhat the following lines. On what grounds do we infer the reality say of the table on which I am writing? I understand that one can consistently maintain the view, called solipsism, that physical objects have no reality, i.e. that the sole reality is my sensations. In fact, one does not prove the existence of an external world, one postulates it. Even so (precies zo), one can postulate a reality of a different sort for the concepts of mathematics. I see nothing absurd or nonsensical about this. But the point is that the question involved is not a mathematical one.–

30 Wijlen de grote romancier Franz Werfel, onwiskundige, schrikke niet zo ik hém hier citeer, uit zijn laatste roman, Stern der Ungeborenen (H.XII): 'das Schachspiel hat alle Zeiten überdauert weil es in sich wahr ist, und obwohl es ausser sich weder wahr noch unwahr ist.'

Met Mannoury's stijl plaatsen wij hier nog een artikel van de heer Tjerk Sines Visser, die in de loop van de jaren menige bijdrage in zijn eigen karakteristieke stijl voor Euclides schreef.
Hij overleed in november van het vorige jaar.
Nog één opstel van zijn hand is in portefeuille. Daarna zullen we zijn artikelen moeten missen.

Red.

Boekbespreking

Beiträge zum Mathematikunterricht.
1968: Vorträge auf der 2. Tagung der Fachvertreter der Mathematik in Frankfurt am Main. 248 Seiten, DM 26,80.
1969: *Vorträge auf der 2. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Ludwigsburg:* Teil 1, 271 Seiten; DM 26,80, Teil 2,243 Seiten; DM 26,80. Hermann Schroedel Verlag, Hannover, 1969 en 1970.

Deze royaal uitgegeven congresverslagen bevatten een imposante reeks van bijdragen over onderwerpen uit de didaktiek van de wiskunde, die betrekking hebben op het onderwijs aan de meest uiteenlopende schooltypen 'van kleuterschool tot aan de universiteit'. Het hoofdaccent valt op de onderwijzersopleiding, zoals die gegeven wordt aan de Duitse Pädagogische Hochschulen, maar in feite worden er onderwerpen aan de orde gesteld, die mede door het niveau van behandeling voor alle docenten bij het voortgezet onderwijs waardevol documentatiemateriaal bevatten. Volledigheidshalve wijzen we erop, dat ook het verslag van de conferentie, die in 1967 te Osnabrück werd gehouden onder de titel 'Zum Mathematikunterricht in der Hauptschule', in het Hermann Schroedel Verlag is opgenomen, terwijl in 1970 en 1971 Bundestagungen in Keulen en Bayreuth hebben plaatsgevonden.
De Konferenz der Kultusminister heeft in 1968, 'Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen' vastgesteld en deze richtlijnen zijn een stimulans gebleken tot didactische bezinning over de problematiek van een vernieuwd wiskundeonderwijs, temeer doordat er bij de richtlijnen is uitgegaan van de opvatting, dat de komende modernisering alle schooltypen zou moeten omvatten, terwijl tevens de richtlijnen vóor alle bondslanden verbindend werden verklaard. Het streven naar uniformisering van de modernisering wordt hierdoor sterk geaccentueerd.
De inhoud van de verslagen is ook voor de Nederlandse leraar van betekenis. Weliswaar krijgen de problemen van het onderwijs aan Grund- und Hauptschule het hoofdaccent, maar vele thema's betreffen eveneens de Realschulen en de Gymnasia. Uitgegaan wordt van de gedachte, dat iedereen die wiskundeonderwijs geeft, onverschillig aan welk schooltype, georiënteerd dient te zijn ten aanzien van het gehele wiskunde-onderwijs en niet slechts met betrekking tot dat van zijn dagelijkse werkterrein, zij het uiteraard voor wat de vakkennis betreft met een aan het schooltype aangepast niveau.

De omvang van de rapporten, waarin meer dan 80 verslagen zijn opgenomen, maakt het onmogelijk hier een volledige opsomming te geven van de behandelde onderwerpen. We doen er een greep uit.
Wesen und Wissenschaftlichkeit der Didaktik der Mathematik und ihr Studium an Universität und Pädagogischer Hochschule (Bierbaum);
Aufbau einer Psychologie bei der Erforschung mathematischer Prozesse (Laux);
Der Kölner Versuch zur Gestaltung des Erstrechenunterrichts nach Z.P.Dienes (Picker);
Programmierter Unterricht (Kröpelin; Viet);
Boolesche Algebra (Beisswanger).

Naast bovenstaande onderwerpen uit de conferentie van 1968 noemen we uit die van 1969:
Das Wesen des Mathematikunterrichts als Leitbild einer Schulreform (Lambacher);
Computer als Werkzeuge des Mathematikunterrichts (Gunzenhäuser);
Aufgaben und Pläne des Zentrums für Didaktik der Mathematik in Karlsruhe (Steiner);
Über das Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (Wäsche);
Der mathematische Funktionsbegriff und seine operative Auslegung im Elementarunterricht (Krücken);
Zahl und Zeichen (Winter);
Mengen und Venndiagramme (Papy en Dieschbourg);
Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren (Kirsch);

Die ganzen Zahlen als Abbildungen (Pickert);
Die Motivierung der Multiplikation ganzer Zahlen (Siemon);
Teilbarkeitslehre unter Benützung des ebenen Gitters (Pickert);
Anwendung der Gruppentheorie in der Elementarmathematik (Siemon);
Elementares numerisches Rechnen (Wigand);
Systematik der affinen Abbildingen der reellen Ebene (Hänke)
Der Kollineationsgruppe der 7-Punkte-Ebene (Walter);

Deze opsomming moge voldoende zijn om de belangstelling te wekken van de collega's in ons land, die zich interesseren voor wat er in Duitsland plaatsvindt.
Joh.H.Wansink

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Praxis der Mathematik XIII, 7-12 en XIV, 1-7; juli 1971-juli 1972.

L. Kienle, Umkehrung des Euler-Polyedersatzes;
H.H. Lammerich, Strukturbetrachtungen mit dem DOMINO-Spiel;
H. Töpfer, Darstellende Geometrie.

R. Rose en J.C. Binz, Modelle zweistelliger Relationen;
M. Luoma, die Euler-Gleichung;
K.H. Schrödter, Akustische Symbole für beliebige Zahlendarstellungen;
I. Paasche, Vierte Dreieckstücke als Linearverbindung dreier Funktionen.

H. Zeitler, Über Klassen spezieller Blockpläne;
H. Bauer, Die besonderen Aussentransversalen des Dreiecks;
F. Hohenberg, Zwei Konstruktionen von Quadraten aus Lagebedingungen;
B. Schlotter, Rechenproben in Stellenwertsystemen.

F. Barth en R. Haller, Zur Umkehrung der trigonometrischen Funktionen;
P. Dallmann, Dorothea von Schlözer und die Mathematik.

K. Ulshöfer, Zur Unabhängigkeit der Gruppenaxiome;
Bundeswettbewerb Mathematik 1971/72;
Kl. Wigand, Kegelschnitt-Tangenten indirekt;
Fr. Padberg, Teilergraphen.

G. Schrage, Ein Paradox der Wahrscheinlichkeitsrechnung?
E. Domkowitsch, Stechzirkelkonstruktionen der Ellipse;
K.D. Schmidt, Modell eines räumlichen Koordinatensystems;
J.E. Hofmann, Johannes Kepler als Mathematiker.

K. Ulshöfer, Schlichtere Gruppenaxiome;
K. Jaworek, Dreizentren Konstruktion der Ellipse;
G. Lessner, Beispiel zu einem Grenzwertsatz;
J.E. Hofmann, 16e mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach.

K.D. Schmidt, St. Gereon in Köln und die Vektorgeometrie im R_3;
H. Hagenkötter, Würfel-, Quader- und Tetraedernetze;
A. Maret, Sehnen- und Tangentensteigungen an einer Parabel;
Kl. Wigand, Computer-report 1972.

Kl. Kursawe, Monotone Funktionen ohne Steigerungsintervalle;
W. Böhme, Eine Hüllkonstruktion für die Ellipse;
E. Joachim, Verallgemeinerte Folgen in der Analysis;
H. Gorenflo, Uber die Axiomatik des Aquivalenzbegriffs.

A. Langkavel, Das russische Rechenbrett;
Fr. Haeberlen, Eine Minimaleigenschaft des Dreiersystems;
R. Strehl, Natürliche Zahlen und vollständige Induktion;
Kl. Wigand, Vorsicht bei Ungleichungen;

R. Schorn, Geometrisches Modell einer endlichen Inzidenzebene;
Fr. Hohenberg, Zwei geometrische Extremaufgaben;
J.E. Hofmann, Behandlung einer Aufgabe Fermats;
Kl. Wigand, Pieter Wijdenes †.

H. Kippels, Nicht-triviale Körper in Restklassenringen;
R. Rose, Nichtkommutative unendliche Gruppen;
P. Klein und J.F. Hoeren, Geodetische Übungen in der Schule mit einfachen Geräten;
K. Ulshöfer, Ein widerspruchsvolles Axiomensystem.

G. Limperg, Zur Praxis der Extremwertbestimmung;
G. Schostack, Gleichschenklige schenkelgleiche Dreiecke;
Fr. Haeberlen, Irrationalität von $\sqrt[3]{2}$;
Fr. Padberg, Teilbarkeitsregeln in verschiedenen Stellenwertsystemen;
J. Kofler, Teilbarkeitsregeln;
Kl. Wigand, Fördervereinstagung in Köln, Ostern 1972.

R. Rose, Unstetigkeiten und Ableitungslücken;
W. Köhnen, Masstheorie bei Abzählbarkeitsfragen;
R. Hermann, Einsatzmöglichkeiten der Minicomputer;
Kl. Wigand, Didaktik- Tagung in Kiel;
H. Töpfer, Der Euklid- Algorithmus als Operator.

Redactieverslag 47e jaargang — Euclides

Aan de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de WVO.

In het vorige verslag werd gewezen op de wijziging die in de samenstelling van de inhoud t.o.v. die van voorafgaande jaren merkbaar was. De verandering heeft zich gestabiliseerd: van de 414 pagina's die de 47e jaargang telde waren er 228 aan didactische, methodische of schoolorganisatorische zaken dan wel aan schoolwiskunde gewijd. Voor de leraar belangrijke rapporten en verslagen (nomenclatuurcommissie en commentaren) en examenopgaven namen nog eens 72 bladzijden in.
Speciaal vermeld mag hier worden het nummer dat geheel door stafleden van het IOWO verzorgd werd en dat bijzonder goed werd ontvangen.
Helaas liet de regelmaat in de verschijning — die in de 46e jaargang juist weer bereikt was — te

wensen over, terwijl moeilijkheden van druktechnische aard de redactie veel werk bezorgden. Het laat zich aanzien dat een en ander nu overwonnen is.
De redactie betreurt het dat zij maar zeer weinig in staat wordt gesteld om de leden van de NVWL te informeren over de activiteiten binnen de vereniging. Zij is van mening dat regelmatige publikatie van besluiten van het bestuur, van vorderingen der commissies enz. de leden zeer zullen interesseren.
Inspecteur Drs. B.J. Westerhof nam in de loop van het jaar de door zijn gepensioneerde collega Dr. D.N. van der Neut opengekomen plaats in de redactie in. De heer Ch. Krijnen is uitgetreden. Zijn plaats is nog niet weer bezet. Tenslotte mogen we er hier aan herinneren dat in zijn 100ste levensjaar de heer P. Wijdenes, die in 1924 de stoot gaf tot de oprichting van Euclides, op 17 februari j.l. is overleden.

28 september 1972.

Namens de redactie
G. Krooshof, voorzitter
A.M. Koldijk, secretaris

American Host Program
voor Nederlandse leerkrachten

Het Nederland-Amerika Instituut deelt mede, dat de American Host Foundation, Inc., te New York, voor de zomer 1973 met zijn AMERICAN HOST PROGRAM wederom de gelegenheid biedt tot kennismaking met het Amerikaanse leven aan een groot aantal Nederlandse leerkrachten, in de vorm van een gastvrij verblijf van één maand in de Verenigde Staten.

De deelnemers gaan per vliegtuig naar New York, waar men twee à drie dagen verblijft. Daarna logeert men vier weken bij een of twee Amerikaanse gezinnen.

Voorlopige vertrekdata:
GROEP I – 4 juli 1973 naar New York, 5 augustus 1973 uit New York
GROEP II – 18 juli 1973 naar New York, 19 augustus 1973 uit New York
GROEP III – 1 augustus 1973 naar New York, 2 september 1973 uit New York.

De aan het programma verbonden kosten variëren al naar gelang van het gedeelte van de Verenigde Staten, waaraan men de voorkeur geeft:

a het Oostelijke gedeelte	\$ 350
b het Middenwesten en/of het Zuiden	\$ 450
c het Westen	\$ 625

Deze bedragen dekken alle kosten (inclusief het verblijf in New York), behalve zakgeld (± \$ 200)

Nadere inlichtingen en formulieren betreffende dit programma kunnen tot uiterlijk 31 januari 1973 worden aangevraagd bij:
NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT
Afdeling Studievoorlichting
Museumplein 4
Amsterdam, tel. 020-72 22 80

Na **1 november 1972** luidt het nieuwe adres als volgt:
NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT
Afdeling Studievoorlichting
Prinsengracht 919
Amsterdam, tel. 020-23 94 25

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

284 Voor welke waarden van n is de volgende bewering juist: elke koordenvierhoek kan in n koordenvierhoeken verdeeld worden? (A.J. van Tooren)

285 De 2.000.000.000e machten van alle even natuurlijke getallen, die niet op een 0 eindigen, eindigen op dezelfde tien cijfers. Bewijs dit. Welke zijn deze tien cijfers? (B. Kootstra).

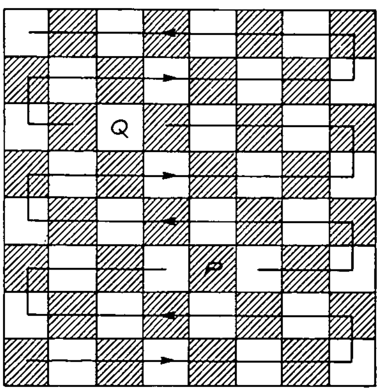
Oplossingen

282 a Gevraagd werd te onderzoeken of een vierkant bord dat in 81 congruente vierkantjes verdeeld is, overdekt kan worden met rechthoekjes die elke twee naast elkaar gelegen vierkantjes kunnen bedekken, als daarbij één van de te voren aangewezen vierkantje onbedekt moet blijven.

b. Dezelfde opgave voor een schaakbord waarbij twee van te voren aangewezen vierkantjes onbedekt blijven.

a We denken ons de velden om de andere wit en zwart; de vier hoekvelden zwart. Er zijn dan 41 zwarte en 40 witte velden. De rechthoekjes, die bij het overdekken gebruikt worden, bedekken elk één zwart en één wit veld. Het overblijvende veld moet dus een zwart veld zijn. Kies nu een willekeurig zwart veld en stel de eis, dat dit niet bedekt wordt. Doorloop het bord, te beginnen bij een hoekpunt, zigzag. Vanaf het beginveld tot aan veld Z doorlopen we dan een even aantal velden. Deze serie velden kan door een aantal van de rechthoekjes overdekt worden. Na Z tot het eindveld doorlopen we weer een even aantal velden. Ook deze serie kan dus door een aantal van de rechthoeken overdekt worden. De overdekking is dus steeds mogelijk, als we een zwart veld aangewezen hebben.

b In dit geval moeten we een zwart en een wit veld aanwijzen. We doorlopen het bord weer zigzag, te beginnen bij een zwart hoekveld, op zodanige wijze, dat daarbij het zwarte aangewezen veld eerst en het witte daarna bereikt wordt. We krijgen dan drie series van een even aantal velden, die elk door een aantal van de rechthoekjes overdekt kunnen worden. Zie de figuur; P en Q zijn de aangewezen velden.



283 Uit een college worden commissies (van meer dan twee personen) gevormd, die elke éénmaal vergaderen. Elk tweetal personen vergadert juist één keer samen; niemand vergadert meer dan één keer op een avond.

a Hoeveel commissies zijn er minimaal?

b Op hoeveel avonden wordt minimaal vergaderd?

a Als men de personen door punten en de commissies door lijnen voorstelt, ziet men al spoedig, dat het minimale aantal personen 7 en het minimale aantal commissies 7 is (zevenpuntsmeetkunde van Fano; zie fig. 1). Het aantal vergaderingen bedraagt nu 7 en daar elke twee commissies een lid gemeen hebben, wordt op 7 avonden vergaderd.

b Kunnen we op andere wijze nog het aantal avonden verminderen? Daarvoor is nodig, dat er minstens twee commissies zijn, die geen lid gemeen hebben. Men kan dan volstaan met 4 avonden. De bijbehorende meetkunde bestaat uit een configuratie van 4 maal 3 evenwijdige lijnen, die 9 snijpunten hebben (zie fig. 2). Het is de tweedimensionale analytische meetkunde in het lichaam van de restklassen modul 3.

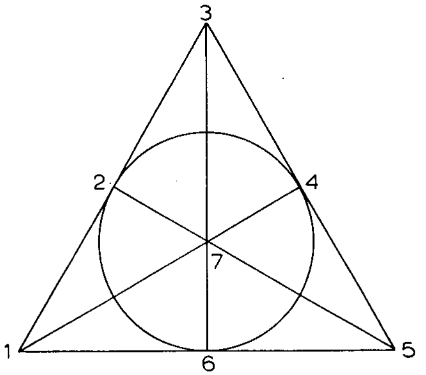


Fig. 1.

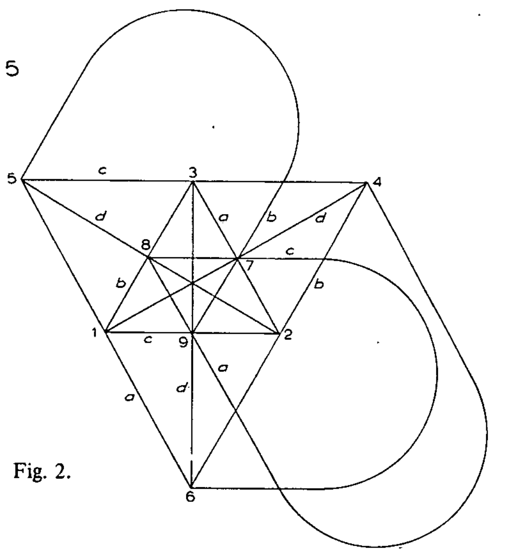


Fig. 2.

LIWENAGEL

Van de secretaris van Liwenagel ontvingen wij bericht dat deze groep op 29 september 1972 met het Genootschap van Leraren aan Nederlandse Gymnasia, Lycea en Athenea is opgeheven. Vooruitlopend hierop was de naam Liwenagel al van de omslag van Euclides weggelaten bij het eerste nummer van de lopende jaargang.

INHOUD