EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Meetkunde met vectoren II*

(affiene planimetrie)

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

In het vorige artikel zijn we uitgegaan van een achttal eigenschappen A1-8. Een verzameling, waarin operaties optellen en vermenigvuldigen met een reëel getal gedefinieerd zijn zo, dat A1-8 van kracht zijn, zullen we een vectorruimte noemen. De eigenschappen A1-8 heten de axioma's van de vectorruimte.
Een voorbeeld van een vectorruimte bleek het vanouds bekende vlak te zijn, mits we de punten vectoren noemen, een van de punten nulvector noemen en dan op de gebruikelijke wijze de optelling en vermenigvuldiging definiëren. We noemen deze vectorruimte het vectorvlak.

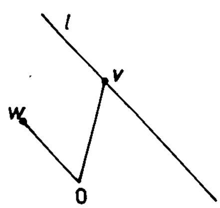


Fig. 1

Om meetkunde te kunnen bedrijven in dit vectorvlak zullen we de planimetrische begrippen moeten vertalen in vectortaal. Het eerste begrip, dat we vertalen, is het begrip rechte lijn. In fig. 1 is een rechte lijn l getekend. Getekend zijn de nulvector **0**, een vector **v** op de lijn l en een vector **w** ($\neq$ **0**) waarvan de drager evenwijdig aan l is. Het is duidelijk, dat l nu de verzameling is van de vectoren

$$\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}, \text{ waarin } \lambda \in \mathbb{R} \text{ **}$$

Duidelijk is dit wel, maar toch is correcter te schrijven:

$$l = \{\mathbf{x} \mid \exists\lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}\}$$

Omdat deze correctie schrijfwijze op de duur wat vermoeiend is, spreken we af te zeggen, dat l de lijn is met parametervoorstelling

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$$

* Het voorgaande artikel is verschenen in Euclides **48**, 1 (aug.-sept. 1972).

** Vectoren behoren voorgesteld te worden door cursieve vette letters. Omdat dit technisch niet mogelijk bleek zijn de vette letters niet cursief gezet.

Hier wil ik de gedachtengang onderbreken om te trachten een veel verbreid misverstand uit de weg te ruimen. We hebben reeds gezien, dat verschillende interpretaties in de meetkunde aan het begrip vector gegeven kunnen worden. Velen geven er de voorkeur aan met vrije vectoren te werken en dat heeft tot zekere hoogte inderdaad voordelen. Vrije vectoren zijn dan ekwivalentieklassen van b.v. gerichte lijnstukken, waarbij de relatie even lang en gelijkgericht de ekwivalentierelatie is. Helaas laten de vrije vectoren ons in de steek, zodra we een rechte lijn vectorieel willen voorstellen. We worden dan verplicht ergens in het vlak een vast punt O aan te nemen. De richting van de lijn kunnen we uitstekend bepalen door de vrije vector w uit fig. 2. Maar om de plaats van de lijn vast te leggen moeten we op de lijn een bepaald punt P kiezen. De plaats van P wordt dan vastgelegd door de plaatsvector OP. Deze noemen we v. De punten op l worden dan vastgelegd door plaatsvectoren $\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$, waarin $\lambda \in \mathbb{R}$.
Het klinkt prachtig en je merkt nauwelijks, hoe raar het is. De vrije vectoren zijn immers vectoren, want ze voldoen aan A1-8. En de plaatsvectoren zijn ook vectoren; het zijn de vectoren, waarmee we in fig. 1 gewerkt hebben en we weten, dat ook deze voldoen aan A1-8. Nu is er een optelling gedefinieerd voor vrije vectoren en ook een optelling voor plaatsvectoren. Op het moment, dat we echter een plaatsvector en een vrije vector bij elkaar optellen, gaat het mis. Op dat moment beschouwen we een nieuwe verzameling $V_1 \cup V_2$, die de vereniging is van de verzameling V_1 van de vrije vectoren en de verzameling V_2 van de plaatsvectoren. Is dit weer een vectorruimte? En hoe is dan de optelling in $V_1 \cup V_2$ gedefinieerd? Is de som van een plaatsvector en een vrije vector een plaatsvector? Als we fig. 2 bekijken, dan blijkt dit de bedoeling te zijn. We zullen dit accepteren en nu vragen op te lossen de vergelijking

$$\mathbf{v}\text{ (plaatsvector)} + \mathbf{x} = \mathbf{w}\text{ (vrije sector)}$$

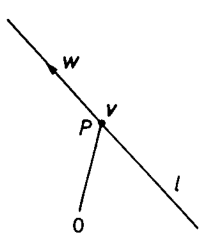


Fig. 2

Hieraan voldoet geen enkele x, noch een vrije vector x noch een plaatsvector x. In het voorgaande artikel hebben we gezien, dat op grond van A1-4 aan een dergelijke vergelijking precies één vector voldoet. Dan voldoet onze zojuist gedefinieerde optelling blijkbaar niet aan A1-4. Nu begint het ons toch te intrigeren, waar de fout zit. Je zou toch zeggen, dat

$$\mathbf{v} + ((-\mathbf{v}) + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) + \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} = \mathbf{w}$$

Helaas is deze **0** de plaatsvector **0** en levert deze opgeteld bij de vrije vector w als som een plaatsvector en niet de vrije vector w. De 'plaatsvector **0**' is dus geen neutraal element van de optelling in $V_1 \cup V_2$. Deze optelling heeft wel een

neutraal element, maar dat is de vrije vector **0**. Nog steeds is er geen fout aan het licht gekomen. Maar nu komt het.
Wat is het tegengestelde van de plaatsvector v? Voor welke x geldt

$$\mathbf{v}\,(\text{plaatsvector}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}\ (\text{vrije vector})?$$

Wel, dit geldt voor geen enkele x, want de som van een plaatsvector en een plaatsvector of vrije vector is weer een plaatsvector en kan dus niet de vrije vector **0** zijn. M.a.w. de plaatsvector v heeft geen tegengestelde. Aan A4 is dus niet voldaan.
Ik hoop, dat dit overtuigend genoeg is om tot de conclusie te komen, dat men beslist niet met vrije vectoren en plaatsvectoren door elkaar moet werken. Met vrije vectoren alleen gaat niet, als men de planimetrie wil opbouwen. En dus blijft ons slechts over consequent met alleen plaatsvectoren te werken. Waarna de term plaatsvector overbodig geworden is en men volstaan kan met te spreken van vectoren.

Na deze uitweiding keren we naar ons eigenlijke onderwerp terug. We hebben gezien, dat er verschillende vectorruimten bestaan. De punten van het platte vlak vormen een vectorruimte en de inkopen van de huisvrouw vormen ook een vectorruimte. We zouden ons zelfs kunnen beperken tot de punten op een rechte lijn; ook deze vormen een vectorruimte (bij geschikte definitie van optelling en vermenigvuldiging). Is er nu iets specifieks, waardoor de vlakke vectorruimte zich onderscheidt van de rechte lijnen van de inkopen van de huisvrouw?
Laten we beginnen met de rechte lijn. Kies een willekeurige van **0** verschillende vector e. Elke vector van de vectorlijn is te schrijven in de vorm $x\mathbf{e}$ ($x \in \mathrm{IR}$). In het vectorvlak is dit niet meer juist. We kunnen in het vlak twee van **0** verschillende vectoren kiezen, die niet dezelfde drager hebben. Noem deze $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$. Dan blijkt elke vector van het vlak te schrijven te zijn in de vorm $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ ($x_1 \in \mathrm{IR}$, $x_2 \in \mathrm{IR}$). We noemen dan het geordende paar vectoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ een basis van de vectorruimte. Omdat deze basis uit twee vectoren bestaat, noemen we de vectorruimte tweedimensionaal.
De vectorlijn is ook een vectorruimte. Van deze ruimte bestaat de basis uit een enkele vector e. Vandaar dat de rechte lijn een eendimensionale vectorruimte is.
Iedere leerling ziet nu gemakkelijk in, dat de huisvrouw met haar inkopen een vijfdimensionale vectorruimte gecreëerd heeft, waarvan een basis bestaat uit de inkopen van 1 gram suiker en verder niets, 1 gram koffie en verder niets, . . ., 1 gram cacao en verder niets. De inkopen van de huisvrouw zijn (althans in dit stadium) belangrijk gecompliceerder dan de vlakke meetkunde.
Willen we planimetrie bedrijven, dan zullen we aan onze axioma's A1-8 dus moeten toevoegen het 'dimensieaxioma':
D_2. Er zijn twee van **0** verschillende vectoren $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ met verschillende dragers;

$$\forall \mathbf{x}\ \ \exists x_1, x_2 : \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 .$$

Hebben we eenmaal een basis genomen, dan kunnen we elke vector dus vastleggen door een geordend paar reële getallen $(x_1,\ x_2)$. Deze getallen noemen we de kentallen van de vector. Degenen die graag zowel over punten als over vectoren praten, zullen spreken over de vector x met kentallen (x_1, x_2) en ook over het punt X met coördinaten (x_1, x_2). Nu we punt en vector geïdentificeerd hebben, is dit niet meer nodig en kunnen we de punt-coördinaat zegswijze missen. Heeft de vector x de kentallen (x_1, x_2), dan schrijven we

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Ziezo, nu zijn de fundamenten gelegd en kunnen we beginnen onze planimetrische begrippen te vertalen in vectortaal om met behulp daarvan de planimetrie opnieuw op te bouwen. Laat ik daarbij direct opmerken, dat het voor mij essentieel is, dat van nu af aan geen beroep meer gedaan wordt op vroegere planimetrische kennis en dat wat men wil bewijzen dus afgeleid wordt met behulp van vectoriële kennis en niet met behulp van vroeger verkregen inzicht. Eigenlijk hebben we even op twee gedachten gehinkt. We hebben van oude planimetrische kennis gebruik gemaakt om de parametervoorstelling van een rechte lijn af te leiden. Een wiskundeleraar weet, dat hier plausibel gemaakt is de definitie:
onder een rechte lijn verstaan we een vectorverzameling

$$\{\mathbf{x} \mid \exists \lambda : \mathbf{x} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}\}$$

waarin $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.
Dat is voor wiskundeleraren aardig, maar op dit moment voor zijn leerlingen te abstract.
Laten we onszelf als leraar eerst realiseren, welk deel van de meetkunde we op dit moment kunnen beheersen. Dat is nog slechts de affiene meetkunde. Er is immers nog geen lengte en geen hoekgrootte definieerbaar. Hier volgt een lijstje van de uitdrukkingen, die we nu kunnen vertalen in vectortaal:
punt ligt op een lijn, snijpunt van twee lijnen, evenwijdige lijnen, parallellogram, midden van een lijnstuk, verhouding van de delen waarin een lijnstuk door een punt verdeeld wordt, zwaartelijn van een driehoek.
U ziet, het is nog maar een pover geheel. Maar daar zijn we juist blij om, want we worden nu in de gelegenheid gesteld het wezenlijke van de vectoriële methode op een beperkt gebied duidelijk te maken.
De hoofdschotel van hetgeen we kunnen doen bestaat uit het uitvoeren van berekeningen. B.v.
stel de parametervoorstelling op van een lijn door **p** evenwijdig aan de lijn door **q** en **r**.
We doen verstandig ons niet te beperken tot parametervoorstellingen, maar ook uit de parametervoorstelling de vergelijking ven een lijn af te leiden. En dan natuurlijk beide voorstellingswijzen van een lijn in de opgaven te betrekken.
Ik kom op de problemen, die hiermee verbonden zijn, bij de stereometrie terug. De situatie is daar analoog, alleen een stapje gecompliceerder, waardoor de moeilijkheden beter aan het licht komen als ze daar besproken worden. Hier wil ik me ertoe beperken één opgave uit te werken, omdat er een principiële didactische

moeilijkheid in zit.
Gevraagd het snijpunt te vinden van de lijnen l en m met parametervoorstelling resp.

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

De leerling, die voor het eerst een dergelijk vraagstuk ziet, schrijft het volgende op:

$$\begin{aligned} 3 - 2\lambda &= -5 + \lambda \\ 1 + 4\lambda &= -3 + 3\lambda \end{aligned}$$

en ontdekt, dat de lijnen geen snijpunt hebben. Ze zijn ook niet evenwijdig en zo raakt hij in de knoop. De fundamentele oorzaak is daarin gelegen, dat men rekent zonder zich te realiseren of de opgeschreven formules wel een adequate vertaling zijn van het gestelde meetkunde probleem. Laten we eens proberen het goed te doen.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ligt op $l \Leftrightarrow$ er is een λ, waarvoor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ligt op $m \Leftrightarrow$ er is een λ, waarvoor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2)

Stellen we nu de eis, dat $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zowel op l als op m ligt, dan moeten er waarden van λ gevonden worden, die aan (1) resp. aan (2) voldoen. Dit behoeft echter niet noodzakelijk twee keer dezelfde waarde van λ te zijn. Zodat we vinden

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ligt op l en $m \Leftrightarrow$ er is een λ_1 en een λ_2, waarvoor

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 2\lambda_1 && (3) \\ x_2 &= 1 + 4\lambda_1 && (4) \\ x_1 &= -5 + \lambda_2 && (5) \\ x_2 &= -3 + 3\lambda_2 && (6) \end{aligned}$$

(3) – (6) is gelijkwaardig met

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - 2\lambda_1 && (3) \\ x_2 &= 1 + 4\lambda_1 && (4) \\ 3 - 2\lambda_1 &= -5 + \lambda_2 && (7) \\ 1 + 4\lambda_1 &= -3 + 3\lambda_2 && (8) \end{aligned}$$

Dit levert

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 4, \ x_1 = -1, \ x_2 = 9.$$

Het punt $\begin{matrix}-1\\9\end{matrix}$ is dus het gevraagde snijpunt.

De vergelijkingen (7) en (8) komen dus in de plaats van de door de leerlingen opgeschreven foute vergelijkingen. Veelal schrijft men in (5) – (8) λ en μ i.p.v. λ_1 en λ_2. En nu komt het: sommige docenten schrijven deze λ en μ dan meteen maar in de gegeven parametervoorstellingen van l en m, om te vermijden dat de leerling fouten gaat maken.

Dit laatste is de reden, waarom ik het vraagstuk zo uitvoerig behandeld heb. In de klas zou ik het voor de leerlingen, die net beginnen, wat minder formeel, maar niet minder correct doen. En ik zou er beslist bezwaar tegen hebben het de leerlingen wat makkelijker te maken door de opgaaf zo te formuleren, dat ze, als ze slecht denken, er toch komen. Per slot van rekening hebben we hier te maken met een stuk wiskunde voor hen, die extra tijd en energie aan wiskunde willen besteden. Laten we deze tijd dan ook ons ten nutte maken door ervoor te zorgen, dat een goed begrip de leerlingen bijgebracht wordt en dat ze leren zuiver te redeneren en zich bij elke stap ervan te vergewissen, dat deze stap verantwoord is.

Ten slotte is het mogelijk in dit stadium enkele eenvoudige stellingen te bewijzen, zoals

in een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor;

in een driehoek gaan de zwaartelijnen door één punt en verdelen elkaar in reden 1 : 2;

de verbindingslijn van de middens van twee zijden van een driehoek is evenwijdig aan de derde zijde.

M.i. moet men zoveel mogelijk dergelijke stellingen bewijzen en er de leerlingen op wijzen, dat keuze van een geschikte basis de uit te voeren berekeningen aanmerkelijk eenvoudiger kan maken. Zo zal men in de derde opgave b.v. de basis zo kiezen, dat de hoekpunten van de driehcek worden

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Hiermee wil ik mijn opmerkingen over de affiene planimetrie afsluiten en volgende keer beginnen met de driedimensionale meetkunde.

De 13e Internationale Wiskunde Olympiade

PROF. DR. J.H. VAN LINT

Eindhoven

De in de titel genoemde, vorig jaar te Zilina gehouden Olympiade bestond uit 6 vraagstukken. Voor elk van deze vraagstukken geven we hieronder één of meer oplossingen en eventueel enig commentaar. Vooral de laatste opgave geeft nog volop gelegenheid tot verder onderzoek. Uit de oplossingen zal blijken dat, behalve vernuft, van de deelnemers ook meer kennis verwacht wordt dan nodig is voor het eindexamen. Wat betreft resultaten en ander commentaar verwijzen we naar Pythagoras 11, No. 2.

Opgave I. n is een natuurlijk getal, groter dan 2. Bewijs dat de bewering:

'Voor elke n-tal reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geldt

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \geqslant 0\text{'}$$

waar is voor $n = 3$ en voor $n = 5$, maar voor alle andere waarden van n fout is.

In onderstaande oplossingen schrijven we

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (a_i - a_j).$$

In alle oplossingen nemen we (zonder verlies van algemeenheid)

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n .$$

Oplossing I. Met alleen maar volharding en schrijfwerk is deze opgave als volgt op te lossen:

(i) $n = 3$. Er geldt

$$F_3(a_1, a_2, a_3) = \tfrac{1}{2} \{(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2\} \geqslant 0.$$

(ii) $n = 5$. Voer in $b_i := a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dan is

$$F_5(a_1, a_2, \ldots, a_5) = b_1(b_1 + b_2)(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) -$$

$$- b_1 b_2(b_2 + b_3)(b_2 + b_3 + b_4) + (b_1 + b_2) b_2 b_3(b_3 + b_4) -$$
$$- (b_1 + b_2 + b_3)(b_2 + b_3) b_3 b_4 +$$
$$+ (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(b_2 + b_3 + b_4)(b_3 + b_4) b_4.$$

Het is duidelijk dat iedere term in de uitwerking van het tweede produkt ook voorkomt in de uitwerking van het eerste produkt en wel met verschillend teken. Zo ook voor het vierde en vijfde produkt. Tenslotte blijven dus alleen termen met een + teken over en daar alle $b_i \geqslant 0$, is $F_5(a_1, a_2, \ldots, a_5) \geqslant 0$.

(iii) $n \geqslant 4, n$ even. Kies

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-4} = -1, \; a_{n-3} = 0, \; a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = 1$$

(als $n = 4$ vervalt de eerste serie). Dan is $F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -1$.

(iv) $n \geqslant 7, n$ oneven. Kies

$$a_1 = a_2 = a_3 = -1, \; a_4 = 0, \; a_5 = a_6 = \ldots = a_n = 1.$$

Dan is $F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -1$.

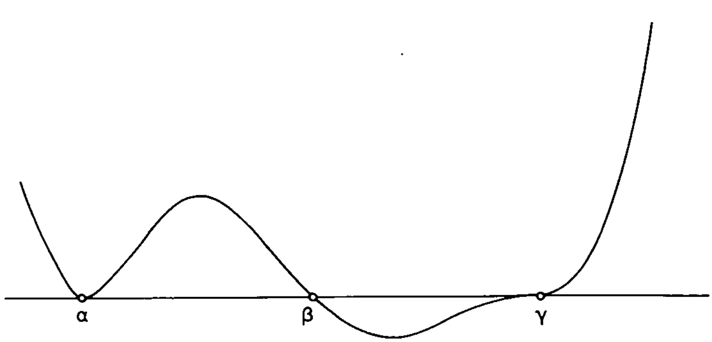
Oplossing 2. Voer in

$$f(x) := (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Dan zijn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de nulpunten van de veelterm f en

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f'(a_i).$$

Om nu te bereiken dat $F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$ kiezen we de nulpunten zó dat $f'(a_i) = 0$ voor alle i op één na en in dit uitzonderingspunt zorgen we dat de afgeleide negatief is. Voor n even, $n \geqslant 6$, gaat dit als in figuur 1.



Figuur 1

Met $\alpha < \beta < \gamma$ kiezen we

$$f(x) = (x - \alpha)^{n-4}(x - \beta)(x - \gamma)^3.$$

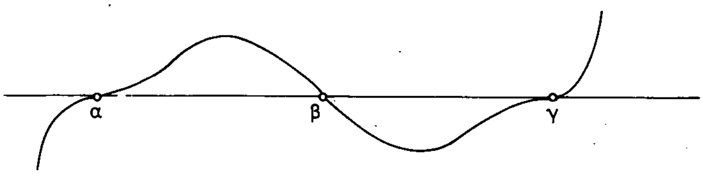
Dan is

$$f'(\alpha) = f'(\gamma) = 0 \quad \text{en } f'(\beta) = (\beta - \alpha)^{n-4}(\beta - \gamma)^3 < 0.$$

Voor n oneven, $n \geqslant 7$, kiezen we

$$f(x) = (x - \alpha)^3 (x - \beta)(x - \gamma)^{n-4}$$

als in figuur 2.



Figuur 2

Merk op dat oplossing 1 en oplossing 2 in feite hetzelfde zijn.
We beschouwen nu $n = 3$. Neem de eerste twee termen samen:

$$F_3(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geqslant 0.$$

In onze terminologie betekent dit dat de som van de waarden van de afgeleide van

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

in de nulpunten niet negatief is. Dit geldt ook voor

$$g(x) := x^3 + px^2 + qx + r$$

als deze slechts één reëel nulpunt heeft.
Voor $n = 5$ schrijven we $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)g(x)$. Dan is

$$f'(a_1) = (a_1 - a_2)g(a_1) \quad \text{en} \quad f'(a_2) = (a_2 - a_1)g(a_2).$$

Daar g monotoon toenemend is voor $x \leqslant a_3$ vinden we

$$f'(a_1) + f'(a_2) \geqslant 0.$$

Evenzo is

$$f'(a_4) + f'(a_5) \geqslant 0.$$

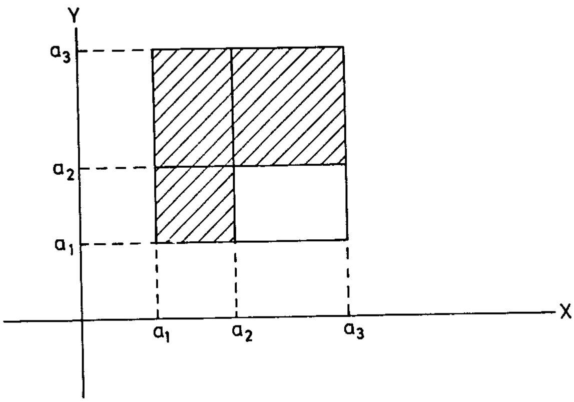
Verder is $f'(a_3) \geqslant 0$ omdat als a_3 een enkelvoudig nulpunt van f is, de functie in een linkeromgeving van a_3 negatief is en in een rechteromgeving positief.

Oplossing 3. (i) Als n even is bestaat iedere term in de som uit een oneven aantal factoren. Dus is

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -F_n(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n).$$

Daar F_n niet identiek 0 is volgt het gestelde.

(ii) Voor $n = 3$ beschouwen we figuur 3:



Figuur 3

Het is nu voldoende op te merken dat $F_3\ (a_1, a_2, a_3)$ de oppervlakte is van het gearceerde gedeelte.

(iii) $n = 5$. In de som $F_5\ (a_1, a_2, \ldots, a_5)$ zijn de tweede en vierde term $\leqslant 0$ en de andere drie $\geqslant 0$. Daar

$$a_3 - a_2 \geqslant a_3 - a_2, a_4 - a_1 \geqslant a_4 - a_2, a_5 - a_1 \geqslant a_5 - a_2 \text{ is}$$

$$|(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) \geqslant$$

$$\geqslant |(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)| \,.$$

Evenzo voor de vierde en vijfde term. Dus is $F_5\ (a_1, a_2, \ldots, a_5) \geqslant 0$.

(iv) $n \geqslant 7, n$ oneven. Kies

$$a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = y.$$

Dan is bij geschikte keuze van het $(n - 3)$-tal

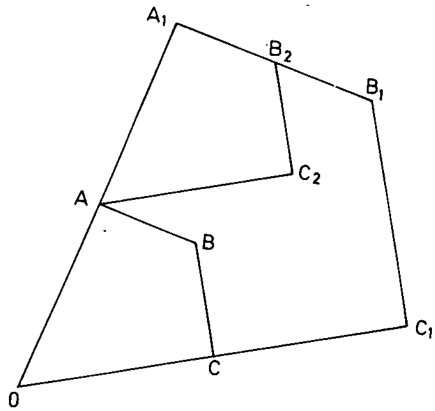
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}) \text{ de functie } F_n\ (a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, y, y, y)$$

een veelterm van de graad 3 (dit geldt niet voor $n = 5$); immers de coëfficiënt van y^3 is $- F_{n-3}\ (a_1, a_2, \ldots, a_{n-3})$ en voor $n \geqslant 6$ is dit niet identiek 0.
Een veelterm van de graad 3 neemt negatieve waarden aan.

Opgave II. Gegeven is een convex veelvlak P_1 met precies 9 hoekpunten A_1, $A_2, \ldots, A_9$. Met P_i $(i = 2, 3, \ldots, 9)$ wordt het veelvlak aangeduid, dat uit P_1 ont-

staat door de translatie (evenwijdige verschuiving) toe te passen, die A_1 op de plaats van A_i brengt.
Bewijs, dat tenminste twee van de veelvlakken $P_1, P_2, \ldots, P_9$ gemeenschappelijke inwendige punten hebben.

Oplossing. Om een idee te vinden voor de oplossing van dit probleem beschouwen we een analoog probleem in 2 dimensies. Zij $OABC$ een convexe vierhoek in $\mathbb{R}^2$ (waarvan we één hoekpunt in de oorsprong hebben gekozen). (Zie figuur 4)



figuur 4

Laat de gelijkvormige vierhoek $OA_1B_1C_1$ uit $OABC$ ontstaan door vermenigvuldiging met 2 vanuit O. Translatie van $OABC$ zó dat O in A terechtkomt voert $OABC$ over in $AA_1B_2C_2$ waarbij A_1B_2 langs A_1B_1 valt. We zien dat $OABC$ en de 3 daarmee congruente vierhoeken die ontstaan door translatie van O naar resp. A, B en C alle geheel binnen $OA_1B_1C_1$ liggen.
Nu is de oplossing van het gestelde probleem duidelijk en we zien ook waarom juist 9 hoekpunten zijn genomen! We kiezen nu A_1 als oorsprong en vermenigvuldigen het gegeven veelvlak vanuit A_1 met 2 waardoor $A_2', A_3', \ldots, A_9'$ ontstaan. We noemen dit veelvlak P'. Zij I de inhoud van het veelvlak P_1. Voor $i = 2, 3, \ldots,$ 9 heeft ook P_i inhoud I terwijl de inhoud van P' gelijk is aan $8I$. Dus moeten er twee veelvlakken P_i en P_j zijn $(1 \leqslant i < j \leqslant 9)$ die inwendige punten gemeen hebben, daar iedere P_i in P' is bevat.
Merk op dat het analogon in $\mathbb{R}^n$ geldt voor convexe lichamen met $k = 2^n + 1$ hoekpunten.

Opgave III. Bewijs, dat men uit de rij $t_k = 2^k - 3$ $(k = 2, 3, \ldots)$ een oneindig aantal termen kan kiezen zo, dat elk tweetal gekozen termen onderling ondeelbaar is.

Oplossing 1. Zoals gebruikelijk schrijven we $m|n$ als het gehele getal m een deler is van het gehele getal n. Verder ook $a \equiv b \pmod{n}$ voor $n|(a - b)$ en we geven met (m, n) de grootste gemene deler van m en m aan. We gebruiken de stelling van Euler-Fermat in de vorm

Is p een priemgetal en $(a, p) = 1$, dan is $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Om de gevraagde deelrij te construeren beschouwen we eerst $n = 2^k - 3$ en een priemgetal p met $p|n$ (dus $p \neq 2, p \neq 3$). Uit $2^k \equiv 3 \pmod{p}$ volgt voor m geheel, $m > 0$:

$$2^{mk(p-1)} \equiv (3^{p-1})^m \equiv 1 \pmod{p}.$$

(Hierbij gebruiken we het feit dat uit $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ en $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$ volgt $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{m}$.)
Kies nu t zó dat voor iedere p met $p|n$ geldt $(p-1)|t$. Dan is voor elk dezer priemgetallen p

$$2^{tk} \equiv 1 \pmod{p}, \text{ d.w.z. } 2^{tk} - 3 \not\equiv 0 \pmod{p},$$

m.a.w.

$$(n, 2^{tk} - 3) = 1.$$

Definieer nu

$$n_1 := 2^3 - 3 = 5 \quad \text{en} \quad k_1 := 3,$$

$$k_{i+1} := k_i \prod_{p|n_i} (p-1) \qquad (i \geqslant 1),$$

$$n_{i+1} := 2^{k_{i+1}} - 3 \qquad (i \geqslant 1).$$

Uit het bovenstaande volgt dat voor $i \neq j$ geldt $(n_i, n_j) = 1$. Hiermee is de gevraagde deelrij geconstrueerd. De door ons gedefinieerde rij begint met $n_1 = 2^3 - 3 = 5$, $n_2 = 2^{12} - 3 = 4093, \ldots$.

Oplossing 2. We geven een variant op bovenstaande oplossing waarbij de stelling van Euler-Fermat niet wordt gebruikt. Zij p een priemgetal, $p \neq 3$. We delen de termen van de rij $3, 3^2, 3^3, \ldots$ door p en vinden als resten $r_1, r_2, \ldots$. Daar er slechts $p - 1$ mogelijke resten zijn is er een i en een $j > i$ zó dat $r_i = r_j$, d.w.z. $p|(3^j - 3^i)$ en dus $p|(3^{j-i} - 1)$.
Hiermee is aangetoond dat er een kleinste natuurlijk getal $e(p)$ is zó dat $3^{e(p)} \equiv 1 \pmod{p}$. Dan is ook

$$3^{ne(p)} - 1 = (3^{e(p)} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} 3^{e(p)i} \equiv 0 \pmod{p}$$

voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Zij nu

$$\psi(n) := \prod_{p|n} e(p).$$

Kies

$$n_1 := 2^3 - 3 = 5, \quad k_1 := 3,$$

$$k_{i+1} := \psi(n_1)\ \psi(n_2) \ldots \psi(n_i), \qquad (i \geqslant 1),$$

$$n_{i+1} := 2^{k_{i+1}} - 3, \qquad (i \geqslant 1).$$

Is $j > i$ en $p n_i$ dan volgt uit de constructie dat $n_j \equiv -2 \pmod p$.
Dus is $(n_i, n_j) = 1$.

Opmerking: Het 'complementaire' probleem heeft ook een eenvoudige oplossing. Zij φ de indicator van Euler, d.i.

$$\varphi(n) := n \prod_{p \mid n} (1 - p^{-1}).$$

Dan is, als n oneven is, $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ (Euler-Fermat). Definieer nu

$$n_1 := 2^3 - 3 = 5, \qquad k_1 := 3,$$

$$k_{i+1} := k_i + \varphi(n_i) \qquad (i \geqslant 1),$$

$$n_{i+1} := 2^{k_{i+1}} - 3 \qquad (i \geqslant 1).$$

Dan is

$$n_{i+1} = 2^{k_i}(2^{\varphi(n_i)} - 1) + (2^{k_i} - 3) \equiv 0 \pmod{n_i}.$$

De zo geconstrueerde deelrij heeft de eigenschap dat iedere term veelvoud is van al zijn voorgangers.

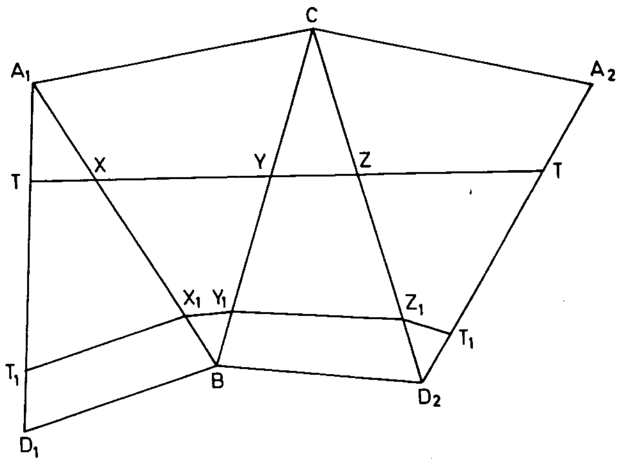
Opgave IV. $ABCD$ is een viervlak, waarvan alle zijvlakken scherphoekige driehoeken zijn.
We beschouwen alle gesloten, gebroken lijnen $XYZTX$, die als volgt gedefinieerd worden:

X is een punt van de ribbe AB, dat niet met A of B samenvalt.
Evenzo zijn Y, Z, T inwendige punten van de ribben BC, CD en DA (in deze volgorde).

Bewijs:
(a) Als de som van de hoeken DAB en BCD ongelijk is aan de som van de hoeken ABC en CDA, dan bevindt zich onder die gesloten gebroken lijnen geen kortste.

(b) Als de som van de hoeken DAB en BCD wel gelijk is aan de som van de hoeken ABC en CDA, dan zijn er oneindig veel kortste gebroken lijnen $XYZTX$ en deze hebben allemaal de lengte $2\,AC \sin \frac{\alpha}{2}$, waarin α de som van de hoeken BAC, CAD en DAB voorstelt.

Oplossing. (a) Beschouw onderstaande uitslag van het viervlak (figuur 5).



Figuur 5

We nemen aan dat er onder de genoemde gebroken lijnen $TXYZT$ een kortste is. Zo'n lijn kan niet de ligging hebben van $T_1X_1Y_1Z_1T_1$ in de figuur. Daar immers T_1, X_1, Y_1 niet op één rechte liggen en X_1 inwendig punt van AB is kan door verplaatsing van X_1 de gebroken lijn verkort worden. Een kortste gebroken lijn (dat is een *gesloten geodeet* op het viervlak) is in de uitslag dus een lijnstuk $TXYZT$. Een kleine verplaatsing van T in de richting van A of D zal de lengte van $TXYZT$ verkleinen tenzij in de uitslag A_1D_1 en A_2D_2 evenwijdig zijn. In het laatste geval hangt de lengte niet af van de plaats van T op AD. De eis $A_1D_1//A_2D_2$ is vervuld als de som van de hoeken ABC en CDA gelijk is aan de som van de hoeken DAB en BCD.

(b) We nemen nu aan dat aan de conditie van (a) is voldaan. Er zijn dan oneindig veel gesloten geodeten $TXYZT$. De lengte van deze geodeet is de lengte van A_1A_2 en dat is $2\,AC \sin \frac{\beta}{2}$ waarin β de som van de hoeken ACB, BCD en DCA is. Het gestelde volgt direkt uit de relatie $\alpha + \beta = 360^\circ$.

Opmerking. We wijzen op de behandeling van een verwant probleem, nl. dat van oneindige geodeten op een viervlak, in K.A. Post, Geodesic lines on a bounded closed convex polyhedron, Studia Scientiarum Math. Hungarica *5* (1970), p 411-416.

Opgave V. Bewijs, dat er bij elk positief geheel getal m een niet lege, eindige puntenverzameling S in het vlak bestaat met de volgende eigenschap: elk punt van S ligt op afstand 1 verwijderd van precies m andere punten van S.

Oplossing. We geven de punten van het vlak aan in vectornotatie. De lengte van $\underline{x}$ geven we aan met $|\underline{x}|$. Voor $m = 1$ is $S_1 := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$ waarin $|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| = 1$ een oplossing van het probleem. Als $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ een gelijkzijdige driehoek vormen ($|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| = |\underline{x}_2 - \underline{x}_3| = |\underline{x}_3 - \underline{x}_1| = 1$) dan is $S_2 := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\}$ een oplossing

van het probleem voor $m = 2$. We geven de oplossing met volledige inductie. Laat voor zekere $m \geqslant 2$ de verzameling $S_m := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n(m)}\}$ een oplossing zijn. We willen nu $\underline{y}$ zó kiezen dat $S_{m+1} := S_m \cup \{\underline{x}_1 + \underline{y}, \underline{x}_2 + \underline{y}, \ldots, \underline{x}_{n(m)} + \underline{y}\}$ een oplossing is voor $m + 1$.
Hiertoe nemen we $|\underline{y}| = 1$. We eisen dat géén der n(m) nieuwe punten $\underline{x}_i + \underline{y}$ met een punt van S_m samenvalt, d.w.z.

$$\underline{x}_i + \underline{y} \neq \underline{x}_j \quad \text{voor alle } i \text{ en } j. \tag{1}$$

We eisen verder dat elk der nieuwe punten afstand 1 tot precies één van de punten van S_m heeft, dus

$$|\underline{x}_i + \underline{y} - \underline{x}_j| \neq 1 \quad \text{als } i \neq j. \tag{2}$$

Door de eisen (1) en (2) worden slechts eindig veel vectoren y met lengte 1 uitgesloten. Bij (1) is dit triviaal. Bij (2) volgt dit uit het feit dat de twee cirkels

$$\{\underline{y} \mid |\underline{y}| = 1\} \quad \text{en} \quad \{\underline{y} \mid |\underline{a} + \underline{y}| = 1\}$$

als $\underline{a} \neq 0$ ten hoogste twee punten gemeen hebben. Daar er oneindig veel vectoren $\underline{y}$ zijn met $|\underline{y}| = 1$ kunnen we inderdaad $\underline{y}$ zó kiezen dat aan alle eisen is voldaan. Het is nu duidelijk dat S_{m+1} een oplossing van het probleem is.
Het gestelde is hiermee bewezen waarbij S_m voor $m \geqslant 2$ uit $3 \cdot 2^{m-2}$ punten bestaat.

Opmerking. Een aardige opgave is om na te gaan of er oplossingen met minder punten zijn te vinden.

Opgave VI. We beschouwen een vierkante (n bij n) tabel niet-negatieve gehele getallen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

die de volgende eigenschap heeft:

voor elke i en elke j geldt: als $a_{ij} = 0$ dan is de som van de elementen in de i-de rij plus de som van de elementen in de j-de kolom tenminste gelijk aan n.

Met a_{ij} wordt hierin bedoeld het element, dat in de i-de rij en in de j-de kolom van de tabel staat.
Bewijs, dat de som van alle elementen van de tabel niet kleiner is dan $\frac{1}{2}n^2$.

Oplossing. 1. Van alle rijen en kolommen beschouwen we er één met minimale som. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat dit de eerste rij is en verder dat $a_{1j} = 0$ voor $1 \leqslant j \leqslant r$, $a_{1j} > 0$ voor $r < j \leqslant n$. Laat s de som van de eerste rij zijn, dus $s \geqslant n - r$. Is $s \geqslant \frac{1}{2}n$, dan is het gestelde triviaal. Neem dus aan dat $n - 2s > 0$ is. Voor $1 \leqslant j \leqslant r$ is gegeven dat de som s_j van de j-de kolom groter of gelijk is aan $n - s$. Voor $j > r$ is de som van de j-de kolom groter of gelijk aan s. Dus is

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_j \geqslant r(n-s) + (n-r)s =$$

$$= (n - 2s)r + ns \geqslant (n-2s)(n-s) + ns =$$

$$= 2(s - \tfrac{1}{2}n)^2 + \tfrac{1}{2}n^2 \geqslant \tfrac{1}{2}n^2.$$

Oplossing 2. Het verwisselen van twee rijen (of kolommen) van de matrix (= tabel) verandert de som van de elementen niet en aan de voorwaarden van het vraagstuk blijft voldaan. Neem nu aan dat zulke verwisselingen worden uitgevoerd tot het aantal nullen op de hoofddiagonaal (dat is $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$) maximaal is. Noem dit aantal s en laat $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{ss} = 0$ zijn. Dan moet voor $i > s, j > s$ gelden $a_{ij} \geqslant 1$ en bovendien voor $1 \leqslant i \leqslant s, s < j \leqslant n$ gelden $a_{ij} + a_{ji} \geqslant 1$, daar in beide gevallen anders een verwisseling te vinden is die het aantal nullen op de hoofddiagonaal vergroot. Gegeven is dat voor $t \leqslant s$ geldt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} \geqslant n. \tag{1}$$

Uit het bovenstaande volgt verder dat voor $t > s$ geldt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} \geqslant s + 2(n-s) = 2n - s. \tag{2}$$

Uit (1) en (2) volgt

$$2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{tj} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant ns + (n-s)(2n-s) = n^2 + (n-s)^2 \geqslant n^2.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Tot slot van dit artikel willen we nader ingaan op de achtergronden van het laatste vraagstuk en een generalisatie noemen die nog onopgelost is.
Een mogelijke verklaring voor mutaties is in de genetica gezocht in het toekennen van diverse 'coderingen' aan de aminozuren en wel zó dat steeds slechts één wijziging nodig is om een codering van een aminozuur in die van een gegeven ander aminozuur om te zetten. (Dit is helaas niet het geval.) Deze veronderstelling heeft geleid tot de theorie van 'error-distributing codes' die we in het kort op meetkundige wijze introduceren.
Beschouw in $\mathbb{R}^k$ de punten $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ waarvan alle coördinaten uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ zijn gekozen. Noem deze verzameling V_n^k. Als een voorbeeld zouden

we kunnen denken aan een schaakbord waarin ieder vak van coördinaten is voorzien. Hier is $k = 2$, $n = 8$. We noemen V_n^k een 'k-dimensionaal schaakbord met zijde n'. De situatie bij het gewone schaakbord generaliserend definiëren we een *torengebied* $T_{\underline{x}}$ als $\underline{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in V_n^k$ door

$$T_{\underline{x}} := \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_n^k \mid y_i = \underline{x}_i \text{ voor alle } i \text{ op één na}\} \cup \{\underline{x}\}.$$

We zullen zeggen dat een toren in $\underline{x}$ alle punten van $T_{\underline{x}}$ '*ziet*'. Het bovengenoemde probleem komt nu neer op het volgende. We kennen aan iedere $\underline{x} \in V_n^k$ een kleur A_i uit een verzameling kleuren $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ toe zó dat iedere $\underline{x} \in V_n^k$ voor een toren in $\underline{x}$ *alle* verschillende kleuren tenminste éénmaal ziet. De grootste waarde van r waarvoor dit mogelijk is noemen we $w(k, n)$. We laten aan de lezer over om de volgende eenvoudige beweringen te bewijzen:

(a) $w(k, n) \leqslant 1 + k(n-1)$

(b) $w(1, n) = n$,

(c) $w(k, 1) = 1$,

(d) $w(k, n)$ is monotoon niet-dalend in k en n,

(e) $w(2, n) = n$.

Een veel lastiger opgave die we ook aan de lezer overlaten is het construeren van voorbeelden waaruit blijkt dat

(f) $w(3, n) \geqslant 2n$ als n even is,
$w(3, n) \geqslant 2n - 1$ als n oneven is.

Beschouw nu een 3-dimensionaal schaakbord met zijde n, dat zoals boven beschreven is gekleurd. Zij A één van de kleuren. Voor $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ definiëren we

$$a_{ij} := \text{het aantal punten } (i, j, t) \in V_n^3 \text{ met kleur } A.$$

Stel $a_{ij} = 0$. Een toren geplaatst in (i, j, t) ziet kleur A. Deze kleur behoort dus bij een punt (i', j, t) of een punt (i, j', t). Dit geldt voor iedere waarde van t. Dan is dus

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} + \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \geqslant n.$$

In opgave VI is bewezen dat hieruit volgt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geqslant \tfrac{1}{2} n^2.$$

Dit geldt voor iedere kleur A. In combinatie met (f) hebben we dan bewezen:

$$\textit{Stelling. } w(3,n) = \begin{cases} 2n & (n \text{ even}), \\ 2n-1 & (n \text{ oneven}). \end{cases}$$

Ter bestudering van $w(k, n)$ zou nu de volgende generalisatie van opgave VI nuttig zijn:

*Opgave VI**. Laat f een functie zijn gedefinieerd op V_n^k met als functiewaarden niet-negatieve gehele getallen.
Laat f de volgende eigenschap hebben:

$$\text{Als } f(\underline{x}) = 0, \text{ dan is } \sum_{\underline{y} \in T_{\underline{x}}} f(\underline{y}) \geqslant n.$$

Bewijs dat

$$\sum_{\underline{x} \in V_n^k} f(\underline{x}) \geqslant \frac{n^k}{k}$$

Merk op dat opgave VI het geval $k = 2$ is.
Helaas is deze opgave een nog onopgelost probleem! Wel is door A.W. Hales bewezen dat dit vermoeden juist is als f alleen de waarden 0 en 1 aanneemt (cf. A.W. Hales, Cubes with Zeros and Ones, JPL Space Programs Summary, 37-16 (1962), p. 35-36). Hoewel het algemene probleem nog niet is opgelost slaagde E. Rodemich (Coverings by Rook Domains, verschijnt in Journal Comb. Theory) er onlangs in te bewijzen dat

(g) $w(k, n) \leqslant (k-1)n.$

(Merk op dat wij hierboven (g) hebben bewezen voor $k = 3$ met behulp van opgave VI.)
Een zeer lezenswaardig artikel over deze en samenhangende problemen is: S.W. Golomb and E.C. Posner, Rook Domains, Latin Squares, Affine Planes and Error-Distributing Codes, IEEE Transactions on Information Theory IT-10 (1964), p. 196-208.

Voor een aantal waardevolle adviezen bij de samenstelling van dit artikel dank ik O.P. Lossers.

Judging mathematical statements in the classroom[1]

LARS C. JANSSON[2]

Pennsylvania

In a third grade classroom the teacher asks the pupils to measure the line segment shown in figure 1 to the nearest half-inch. Bob places his ruler as shown, and says that the segment is 3½ inches long because 3½ is the nearest half-inch mark on the ruler.

Clearly Bob has reached a conclusion not in accord with the teacher's expectations. From the diagram it is immediately evident that Bob's placement of his ruler is not in error – he has done this correctly. Another possible cause for his error is that he thinks that in rounding numbers you must always 'round down'. He may actually believe this, but the situation as described gives no indication of it. A third possibility is that Bob and the teacher understand something different by the term *nearest half-inch.* At the very least, from Bob's point of view, the phrase is ambiguous, and his explanation gives a hint as to how his conclusion was reached in this case.

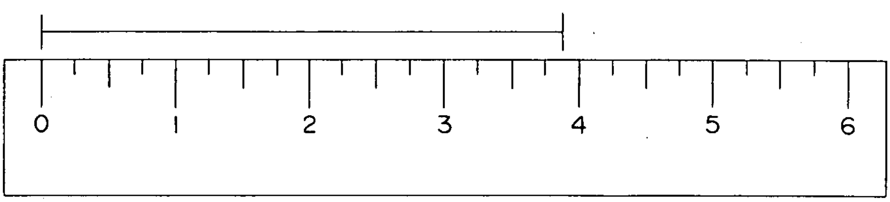


Fig. 1

Pupils as well as teachers make reasoning errors. Such errors are evidenced in the verbal or symbolic statements that are a conclusion to some reasoning activity. It should be noted that in the given example a judgment of the conclusion and its

[1] Reprinted from the *Arithmetic Teacher,* november 1971 (Vol. 18, p. 463-466),© 1971 by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

[2] Lars Jansson, assistant professor of mathematics education at the Pennsylvania State University works with both preservice and in-service elementary and secondary teachers. He also works in curriculum development in the area of computer-assisted instruction.

foregoing error could be made only on the basis of the stated conclusion and any additional explanation. I do not want to dwell here on the distinction between a concept (e.g., rounding) and the term (*rounding*) that designates it, but merely to suggest that not only must an erroneous conclusion be identified but also the reason *why* it is erroneous must be determined. How do teachers make these judgments? What criteria are employed? In what follows, criteria for the judgment of several types of statements made in the mathematics classroom will be examined.

One further distinction must be made before proceeding. To state that a conclusion is false (e.g., 'all primes are odd') is not the same as saying that it is invalid, that is, that it does not follow logically from the premises. Conclusions may be true and invalid

$$\left(\text{Reduce } \frac{19}{95} : \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}\right),$$

false and valid (If $-3 = 3$, then by adding 1, $-2 = 4$), and of course, true and valid or false and invalid. Note, however, the judgment of validity of reasoning depends on a common understanding of the premises from which the conclusion is to be drawn. We shall return to this notion directly.

The example given in the introduction is a somewhat trivial one. Not only is the conclusion of the pupil clearly false according to our usual conventions regarding terminology, but the pupil himself, by his explanation, gives a clear clue as to where the faulty thinking lies. The actual reasoning of the student from premise to conclusion may be valid, but the ambiguity of the term 'nearest half-inch' leads the pupil to begin reasoning from a different point, thus arriving at what we consider a false conclusion. Unfortunately, as every reader knows, the teacher is not always given such a clue. The type of statement made by the pupil was related to an 'application' or 'real world' problem, in this case relating numbers and units of measure to a real, given line segment.

Consider now an example in which a pupil makes a different kind of statement as the conclusion to some mathematical reasoning activity. Place this learning experience at the upper elementary or beginning junior high school level. The students have gained some understanding of divisibility, that is, they know what odd and even integers are and what a prime number is. Assume, for the sake of discussion, that the latter topic has been under discussion in recent class periods. Through examples the students remind themselves of certain facts that many had learned earlier: namely, that the sum of two even numbers is an even number and that the sum of two odd numbers is an even number. In the course of an extended and lively conversation the following statements are made:

1. ALLEN: All prime numbers are odd.
2. CAROL: How do *you* know?
3. ALLEN: Find one that isn't [odd].
4. CAROL: 2.
5. ALLEN: Miss Jones, is 2 a prime number?

6. TEACHER: See if you can decide. What is a prime number?

....

7. ALLEN: O.K. 2 is prime and 2 is even, but all other prime numbers are odd.
8. DORIS: Then if you add two prime numbers your answer will always be even.
9. TEACHER: What if you have 2 as an addend?
10. DORIS: No. I mean adding two *odd* primes.
11. TEACHER: O.K., good.

....

12. DORIS: Remember I said before that if you add two primes, the answer will be even?
13. TEACHER: Yes.
14. DORIS: Then is every even number the sum of two primes?
15. TEACHER: I'm not sure, let's work on that one. I'll write it on the board:
    Every even number is the sum of two primes.
    Oh, what about 2?
16. ALLEN: That's even.
17. TEACHER: What if I add 2 + 3 or 2 + 5 or 2 + 7?
18. ALLEN: The answer's odd.
19. TEACHER: But our statement on the board talks about an even answer, so now we have:
    Every even number is the sum of two odd primes.

Clearly this conversation is hypothetical, but all these statements could be made over a long time span. How would you, as a teacher, judge them or try to get students to judge them? Let us analyze the conversation further.

Some of the statements (1, 14, 19, and possibly 8) are mathematical conjectures – mathematical propositions based on available evidence but *not* deductively proved. At least one of the statements (7) is a characterization (as opposed to a formal definition) of a concept. Another statement (8) appears to be a deduction from the fact that the sum of two odds is an even. On the other hand, it could be a conjecture, depending on how it was arrived at.

The point is that the judgment of each type of mathematical statement requires that different criteria be brought to bear. Let us consider the types of statements in reverse order, taking statement 8 as a deduction. If we accept the conditional statement, 'If you add two odd numbers, then your answer will always be even,' the rules of substitution and class reasoning lead to the conclusion that Doris's statement is correct. That is, since odd primes are a subset of odd integers, the given statement holds true for primes and the student can rightly say that 'if you add two odd prime numbers your answer will always be even.'

Statement 7 is a characterization of prime numbers, that is, a statement of a property of all prime numbers except 2 – namely, that they are odd. This statement was made to clarify and therefore was sufficient for its intended purpose. Thus we have an example of a statement that is adequate for its purpose, does not contradict any previously accepted information, and, for the pupils, is neither circular nor redundant.

Perhaps the most interesting type of statement for the elementary school teacher who uses a guided-discovery approach is the conjecture – the intuitive leap or educated guess. What criteria are used to judge such statements? This may be an easy task if we know whether or not the given proposition is true (i.e., consistent within our system). But this is not always immediately obvious, Consider Doris's question (statement 14) in its modified form as given in statement 19.

As a first point we may note, following statement 14, the teacher's attempt to clarify in statement 17. Although it is perhaps not immediately evident to the pupil, the teacher is pointing out that the sum of an odd number and an even number (both prime) is necessarily odd, and hence we can modify the proposition only slightly further to get something more interesting.

What counts as evidence for or against such an inductively derived conclusion? (We will stop short of deductive proof.) Turning to the easier situation first, let us consider what counts as evidence *against* our proposition. Clearly one example of an even number that *cannot* be written as the sum of two odd primes will destroy the statement as a generalization, that is, a statement true for *all* even numbers. Now we look at some examples given by the class:

(*a*) $2 = 1 + 1$	(*d*) $100 = 47 + 53$
(*b*) $12 = 5 + 7$	(*e*) $108 = 51 + 57$
(*c*) $18 = 5 + 13$	(*f*) $108 = 47 + 61$

You are correct if you say, 'Wait a minute, something's wrong here.' The first one, (*a*), does not fit. Of the others, (*b*), (*c*), (*d*), and (*f*) all satisfy the conjecture: all are even numbers that can be written as the sum of two odd primes. Sum (*e*) does not satisfy the conjecture, since neither 51 nor 57 is prime. If no pair of odd primes whose sum is 108 could be found after checking all appropriate pairs of odd numbers (there are twenty-seven such pairs), a counterexample to the conjecture would have been found and we would be finished. As it turns out, however, sum (*f*) does satisfy the conditions of the conjecture, and so it still stands.

Thus, except for (*a*), no exceptions have been found. At this point it is possible to modify the conjecture again to read:

Every even number greater than 4 can be written as the sum of two odd primes.

We have excluded 4, since we have decided arbitrarily in the standard definition to omit 1 as a prime ($3 + 1 = 4$). Note that (*e*) makes the proposition neither more nor less plausible; it was an attempt at a contradiction but actually adds no new information. So far, the data we have tend to confirm the pupils' proposition as duly amended (with more actual examples shown in class).

We have discussed 'internal' evidence for and against, as well as evidence that gives us no further information about the conjecture. An additional source of information can be considered in such a situation where the truth of the statement is in doubt. An authority can be consulted. The logical truth of the conjecture discussed here has not yet been decided by mathematicians! So, up until now deductive proof has not provided an answer. On the other hand, no counterexample has yet been found, and so mathematicians continue to work on the problem. The statement was originally proposed by Goldbach in a letter to the famous mathematician Euler in 1742. Thus the fact that many eminent scholars have worked on the problem without producing any contradictory statements lends credibility to it. Although we can accept many statements in the mathematics classroom without formal proof, mathematicians will accept a statement as true only when it has been deductively proved from statements previously accepted as being true.

Different types of mathematical statements made in the classroom have been presented to indicate the differing types of criteria that must be used in their assessment. The judgments called for have been in regard to: (1) awareness of ambiguity in word and symbol, (2) the plausibility of conjectures, (3) the form and adequacy of definitions, and, briefly, (4) the validity of a deduction. The last-named type of statement is quite complex and would require a paper by itself. Two other types of judgments frequently called for concern (1) the finding of assumptions made in either inductive or deductive arguments and (2) the adequacy of a mathematical model for solving a problem (applications).

As teachers we must constantly be judging pupils' mathematical statements. An attempt has been made here to indicate some of the criteria employed in this task. The criteria alone do not provide a judging algorithm, but rather indicate the kinds of judging required once the statement to be judged has been characterized. It is hoped that they will provide further insight into activities that we must perform regularly in the classroom.

Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde

Het 2e Internationaal congres van het ZWIN zal worden gehouden van 3 t/m 6 maart 1973 in Knokke-Heist.

De thema's van het congres zullen zijn

1 Basisonderwijs-psychologie-buitengewoon onderwijs

2 Logica en wiskunde

3 Discussiegroepen in verschillende talen

4 Geprogrammeerd groepswerk (logica op tekst van Papy).

Nadere gegevens zullen t.z.t. worden gepubliceerd.

N.I.A.M.

De filmotheek van het Nederlands Instituut voor Audiovisuele Media van het Onderwijs is uitgebreid met een aantal films. Uit de aankondiging vermelden wij hier de film die zeker de belangstelling van de wiskundeleraar zal hebben:

1656 Het oog op avontuur. (Maurits Escher)

(16 mm, geluid, kleur, 21 minuten)

De wereld van de Escher is het denken en zien van een graficus.

Hij schept ruimten in het platte vlak.

En wat voor ruimten! Hol wordt bol, onder wordt boven, de wet van de zwaartekracht verliest zijn geldigheid.

De wereld van Escher wordt ons in deze knappe film van Han van Gelder geopenbaard op een wijze, die met geen ander medium mogelijk is.

Voor leerlingen van het voortgezet onderwijs in al zijn vormen in het kader van kunstzinnige en creatieve vorming en zeker ook moderne wiskunde.

Schoolonderzoek in Mavo-4

J.P. ALDERSHOF

Bergum

Het schoolonderzoek voor het vak wiskunde kan, vergeleken met de andere examenvakken, nogal eenvoudig verlopen. De leraar geeft drie à vier uitgebreide repetities, tentamens, die samen het gehele programma omvatten. Elke repetitie bestaat bij voorkeur uit twee delen, zoals ook het schriftelijk examen dat kent: één deel met een groot aantal meerkeuzevragen en één deel met een beperkt aantal open en of compositievragen. Mist een leerling door ziekte een repetitie dan zal de leraar een soortgelijke moeten samenstellen. Moet er ook een herkansing zijn? Vele collega's menen van niet. Zij vinden dat een aantal van vier repetities voldoende is om een minder goed cijfer te kunnen compenseren. Geeft men wel een herkansing dan is het zaak deze procedure nauwkeurig te omschrijven, want juist met een herkansing kunnen zich narigheden met ouders voordoen.

Een methode waarin iets van een herkansing, van compensatie van een eventuele flopper zit, is de leerlingen de gelegenheid te geven een werkstuk te maken. Een werkstuk over een wiskundig onderwerp leek mij ook voor de leerlingen van de vierde klas een hele opgave. Zie voor een verslag over het eerste jaar 'Euclides' 47^{e} jaargang no. 1. Het resultaat van het tweede jaar is vanzelfsprekend ook niet allemaal toppers. Dat kan men niet verwachten. Maar als een leerling met kleine eigen ideeën komt, kleine eigen vondsten verwerkt, dan is dat m.i. op zijn niveau zeker waardevol. Een onderwerp dat zich daarvoor bij uitstek leent is de statistiek. De leerling krijgt tijdens de lessen allerlei begrippen aangeboden. In opgaven uit het boek worden deze begrippen verwerkt en tot zijn eigendom gemaakt. Een leerling die een werkstuk statistiek wil beginnen kan eerst allerlei waarnemingen doen, zoals:

a In onze buurt heb ik aan enkele mensen gevraagd wat voor dieren ze houden.

b Op 22 en 23 januari 1972 zijn in Davos de Europese schaatskampioenschappen gehouden. Iedere schaats stelt één deelnemer voor.

c In onze school zijn drinkautomaten. Iedere dag zijn er kinderen die daaruit koffie, soep of chocolade halen. Het kost een kwartje. In een week heb ik geteld hoeveel kinderen per dag er drinken kochten.

d In de krant stond dit staafdiagram van de defensiekosten gedurende de periode 1900-1972. Als je hier gaat extrapoleren dan denk ik dat in het jaar 2000 zo'n 9 miljard gulden wordt uitgegeven.

e Ik heb in onze klas gevraagd in welke maand ieder jarig was.
f Ik heb vanaf 6 september de doelpunten opgeschreven die ze (d.z. Ajax en Feijenoord) gescoord hebben. Dit deed ik tot de laatste wedstrijd van het jaar 1971.
g In de maand januari en in het begin van februari heeft het gevroren. Nu heb ik vanaf 28 januari tot en met 3 februari een bakje met water buitengezet en iedere morgen heb ik het ijs gemeten. Iedere morgen heb ik er weer nieuw water in gedaan.

Al deze waarnemingen worden verwerkt in verschillende diagrammen; modi worden bepaald, gemiddelden berekend, kwartielen uit ogieven van inwonertallen van dorpen afgeleid. Kortom alle begrippen tijdens de lessen statistiek aangeleerd worden met eigen waarnemingen en op eigen wijze verwerkt. Vaak worden uit de gevonden antwoorden conclusies getrokken. Uiteraard soms een conclusie die voor de hand ligt: 'Ajax is beter dan Feijenoord' (Gemiddeld aantal doelpunten v/m 6-9-71 t/m 27-12-71 van Ajax 2,5 en van Feijenoord 1,93).
Maar ook deze conclusie: In dorp A wonen niet zoveel mensen als in B, maar toch wordt het aantal nieuwe inwoners van A steeds groter. 'De afstand tussen Q_3 en Q_2 is namelijk kleiner dan tussen Q_1 en Q_2.
In een spreekbeurt over hun werkstuk moet de leerling tonen het geschrevene te hebben begrepen; de stof moet zijn eigendom zijn geworden. De eerste opdracht is steeds: Licht je werkstuk toe voor je klasgenoten zodat zij weten waar het over gaat. Daarna kunnen de leerlingen enigszins meediscussiëren. Dat gebeurt ook wel, maar uiteraard komen de meeste vragen van de leraar. De auteur moet dan verwerkte lesstof zonder inzage van zijn werkstuk kunnen reproduceren. Zoals in boven aangehaald werkstuk: 'Wat is het verschil tussen een staafdiagram en een histogram? ' Toen bleek dat er wel degelijk verschil was, reageerde de klas met: 'Leg dat nog eens uit' en 'Geef eens een voorbeeld'.
Andere gekozen onderwerpen waren:
Lijnen, cirkels, parabolen en hyperbolen.
Pythagoras
Goniometrie
Getallen.
Deze werkstukken zijn meer een eigen weergave van de geleerde stof aangevuld uit andere boeken en toegepast in zelfbedachte opgaven. Inhoudelijk zijn deze werkstukken niet allemaal van redelijk niveau. Niet elk werkstuk met nabespreking kon dan ook met een voldoende beloond worden. De begeleiding was dit jaar vrij intensief. Tijdens de beginperiode moesten de leerlingen op gang geholpen worden met suggesties en aanwijzingen. Doordat het terugdraaien van het aantal uren van 32 naar 30 ook voor het vak wiskunde gevolgen zal hebben, zal in de nabije toekomst minder aan begeleiding kunnen worden gedaan. Alle tijd zal helaas besteed moeten worden aan het doorworstelen van het programma, waarbij díe leerling die het nu nog net wel kan doen, het dan net niet meer kan volgen. Een zeer betreurenswaardige ontwikkeling. Dit kleine stukje zelfwerkzaamheid wordt nu meteen de grond ingeboord. Zoals het zich nu laat aanzien, zal na het volgend cursus-jaar op mijn school de gevolgen van de 'beleidsombuigingen' in de examen-

klas merkbaar zijn. Tot zolang wil ik de leerlingen in de gelegenheid stellen een werkstuk te maken. De ervaringen van twee jaar proberen heeft me geleerd dat het onderwerp statistiek zich het beste leent voor een werkstuk. Het wordt dan meer dan alleen een compilatie. Zou het in dit licht niet het overwegen waard zijn het onderwerp statistiek uit het programma van het schriftelijk examen weg te laten en dit geheel onder te brengen in het schoolonderzoek? Het aantal zinvolle vraagstukken over dit onderwerp is immers zeer beperkt. Tevens geeft deze regeling de leraar de vrijheid met zijn leerlingen individueel of in groepsverband de statistiek in werkstukken te verwerken.
Tevens schept dit de mogelijkheid dat elke leerling een werkstuk moet maken, zoals ook bij andere vakken wel gebeurt. In het programma zou dan de vectormeetkunde een grotere plaats toebedeeld kunnen krijgen. Dit onderdeel is nu nog erg summier en is in het vervolgonderwijs van wezenlijk belang.
In overleg met de leerlingen van de derde klas Mavo-4 hebben we afgesproken dat alle leerlingen die in de vierde klas wiskunde zullen kiezen een werkstuk over statistiek gaan maken. Nu reeds hebben ze een begin of een ontwerp gemaakt. Toen ik deze nieuwe regeling ook eens aan de huidige vierde klassers voorlegde, vonden ze hun regeling van een werkstuk *mogen* maken beter. Eén leerling omschrijft 't zo: 'De nieuwe regeling vind ik niet beter. Het eigen initiatief gaat weg. Ten eerste door de vrijheid weg te nemen en je er een opdringerij van maakt. Ten tweede omdat je veel te veel dezelfde onderwerpen krijgt. Een voordeel van deze nieuwe regeling is wel, dat je degenen die nu bij ons niet de moed hadden om eraan te beginnen een steun in de rug geeft.'
Waarom maakt een leerling een werkstuk? Is het alleen vanwege de mogelijkheid zijn cijfer op te halen? Dat zou m.i. een negatieve motivatie zijn. Het cijfer ophalen speelt natuurlijk wel een grote rol, maar gelukkig zijn er ook andere motieven, zoals: 'het werken aan zo'n werkstuk is ook hardstikke leuk' (statistiek) en 'hoe langer ik ermee bezig was hoe leuker ik het vond om er iets leuks van te maken' (getallen).
Een moeilijkheid is nog wel eens of de leerlingen hun werkstuk mogen houden. Het is hun werk, dus hun eigendom (?) Elk tentamen echter moet ingeleverd worden en zelfs lange tijd in school bewaard blijven. Een werkstuk is een tentamen, wordt dus ingeleverd. Eventueel kan een leerling zijn werkstuk na 1 april van het volgend jaar terugkrijgen. De handel in deze zaken wordt hiermee voorkomen. Alle werkstukken zijn nu in mijn bezit. Tegen portovergoeding ben ik gaarne bereid een belangstellende collega één of meer werkstukken ter inzage toe te zenden om daarmee te komen tot een uitwisseling van ervaringen over dit facet van het fenomeen schoolonderzoek.

Felix Klein's "Erlanger Programm", 1872

Dr. A.J.E.M. SMEUR

Breda

Het is 100 jaar geleden, dat Klein zijn zogenaamde Erlanger programma geschreven heeft, in de maanden namelijk voorafgaande aan zijn inauguratie, op 7 december 1872, aan de universiteit van Erlangen. Op die datum werd het programma aan de aanwezigen overhandigd.
Felix Klein is geboren te Düsseldorf op 25 april 1849. Hij heeft gestudeerd te Göttingen, bij Alfred Clebsch (1833-1872) en werd daarna te Bonn assistent van Julius Plücker (1801-1868). In 1872 werd hij hoogleraar te Erlangen, in 1875 te München, in 1880 te Leipzig en tenslotte in 1886 te Göttingen, waar hij op 25 januari 1925 overleden is.
In 1870 bezocht hij Parijs samen met de Noorse wiskundige Sophus Lie (1342-1899), medestudent uit Göttingen. Daar leerden zij Galois' (1811-1832) leer der substitutiegroepen kennen. Beiden zagen het belang der groepentheorie en hebben deze verder ontwikkeld. Men kan zeggen, dat door Camille Jordan's (1839-1922) 'Traité des substitutions et des équations algébriques' (Parijs 1870) en door Klein en Lie de groepentheorie pas goed bekend werd.
In 1872, dus reeds op 23-jarige leeftijd, kreeg Klein een benoeming als hoogleraar te Erlangen, een stad in Beieren, ca 15 km ten Noorden van Neurenberg, sinds 1743 in het bezit van een universiteit. Volgens Klein zelf dankte hij deze benoeming aan de voorspraak van zijn leermeester Clebsch. Over het ontstaan van het 'Erlanger Programm' zijn wij goed ingelicht door Klein zelf. In 1918 namelijk, bij het 50-jarig jubileum van zijn promotie (Bonn 1868) is hem door vrienden en leerlingen een uitgave van zijn verzamelde werken toegezegd. Klein verleende zelf zijn medewerking. In de eerste band, Berlijn 1921, staat het Erlanger programma met een door hem zelf geschreven historische inleiding.
Aan de universiteit van Erlangen bestond de gewoonte, dat een nieuw-benoemde hoogleraar bij zijn inauguratie ook een gedrukt programma overlegde waarin hij enige ideeën van zijn toekomstig onderricht gaf. Voor Klein werd dit wat hem sinds Parijs bezig gehouden had en waarover hij vaak met Lie van gedachten had gewisseld. In september en oktober 1872 was Lie zijn gast, de eerste maand in Bonn en daarna in Erlangen, waarheen hij op 1 oktober was verhuisd. De gesprek-

ken gingen over een groepentheoretische klassifikatie van de verschillende meetkunden. De titel van het Erlanger programma is 'Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Programm zum Eintrit in die philosophische Fakultät und der Senat der k. Friedrich – Alexanders – Universität zu Erlangen)'. De gedachte, die Klein daarin ontwikkelt, is deze, dat elke meetkunde te beschouwen is als een invariantentheorie behorende bij een zekere transformatiegroep. Zo zijn lengte en hoek invariant voor de groep der Euclidische transformaties (verschuiven, draaien, spiegelen), terwijl voor projectieve transformaties dubbelverhouding invariant is.
Klein zelf formuleert het probleem als volgt:

> Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

of, anders gezegd:

> Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.

Door de transformatiegroep te verruimen of te beperken kan men van de ene meetkunde in de andere overgaan. Op deze wijze werd er verband gelegd tussen de verschillende meetkunden, die in de loop der 19e eeuw ontwikkeld waren.
Klein was er zich van bewust niet ieders instemming te verkrijgen. Met name was hij benieuwd naar de reactie van zijn leermeester Clebsch, die echter kort voor het verschijnen van het programma, op 7 november 1872, aan difteritis overleden is. In 1921, dus bijna 50 jaren na het verschijnen van het programma, wijst Klein zelf de onvolkomenheden ervan aan. Niettemin hebben zijn ideeën toch zeer vruchtbaar gewerkt. Wie in kort bestek de mogelijkheden ervan wil zien zij verwezen naar het heldere boekje van Prof. Dr. O. Bottema, 'Meetkunde gewoon en anders' (Torusreeks 7).
Met Klein is de roem van Göttingen begonnen, voortgezet door David Hilvert (1862-1943), die in 1895 aldaar op uitdrukkelijk verlangen van Klein werd benoemd.

Boekbespreking

Raymond Broeckx en Robert Broeckx, De Rij 4/2, *Algebra* 2 (reeks: Moderne Wiskunde), De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen 1971, 230 blz., 150 BF.
In dit boek vindt men grote delen van de klassieke leerstof op moderne wijze behandeld. Veel techniek wordt hier aangeleerd. Het algebraïsch rekenen wordt gefundeerd en geoefend, vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad worden opgelost, de vierkantsvergelijking komt ter sprake, eerstegraads en tweedegraads functies worden behandeld met hun grafieken. Het is bestemd voor het vierde leerjaar.
Op één punt wil ik nader ingaan. Het algebraïsch rekenen is in dit boek (evenals in Opbouw) een rekenen met veeltermen (polynomen). Naast elkaar worden gedefinieerd:
optellen en vermenigvuldigen van reële getallen (vroeger al gebeurd),
optellen en vermenigvuldigen van reële functies,
optellen en vermenigvuldigen van polynomen.

Een polynoom met onbepaalde x wordt genoteerd $A(x)$. De bijbehorende functie wordt geschreven A. Is $A(x)$ dus het polynoom $x^2 + x + 1$, dan is A de functie $x \to x^2 + x + 1$. Waardoor $A(x)$ een tweede betekenis krijgt, nl. het beeld van x bij de functie A. Onder ons gezegd, erg is dat niet, want er is toch isomorfie tussen de polynomen en de reële functies t.a.v. de bewerkingen + en $\cdot$. Was het nu niet veel eenvoudiger geweest alleen met functies te werken en niet daarnaast ook nog eens polynomen met hun bewerkingen in te voeren? Ik vraag dit uitdrukkelijk in de hoop, dat de schrijvers hun mening willen komen verdedigen in Euclides.
Nu gaan de auteurs nog één stap verder en definiëren:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \ \underset{=}{\underline{\mathrm{df}}}\ AD = BC$$

Hierin zijn A, B, C en D polynomia; B en D zijn geen nulpolynomia.
Dit is uiteraard geoorloofd, maar

$$\frac{A}{B} \text{ en } \frac{C}{D}$$

zijn nu geen polynomia meer. Volgens deze definitie is b.v.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{x - 1}{x}$$

Hieruit blijkt, dat we ook niet op een of andere manier met veeltermfuncties te maken hebben, want de functies

$$x \to \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} \text{ en } x \to \frac{x - 1}{x}$$

zijn niet gelijk.
We hebben dus weer met een nieuw soort dingen te maken. De auteurs zijn dan ook consequent en gaan ook voor deze nieuwe dingen een optelling en een vermenigvuldiging definiëren, en wel op de 'gewone' manier. De bij de polynomia nog aanwezige isomorfie met de reële functies is echter verstoord. Zouden de leerlingen hier nog wegwijs uit kunnen worden? Ik ben van mening, dat ze, doordat ze de achtergronden niet begrijpen, met het rekenwerk geen moeite zullen hebben. Zoals gezegd, graag commentaar.

P.G.J. Vredenduin

A. Permentier, De Rij 4/3, *Meetkunde* (reeks Moderne Wiskunde), De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen 1971, 263 blz., 180 BF.

Het boek is bestemd voor het vierde leerjaar van het secundair onderwijs.
Nadat vroeger in de delen 1-3 de meetkunde al ter sprake geweest is, worden in dit deel de verkregen resultaten samengevat en uitgebreid en wordt de tweedimensionale vectormeetkunde behandeld.
Opvallend is de manier, waarop de auteur enerzijds tracht de meetkunde streng te behandelen, maar anderzijds daarmee niet overdrijft en soms didactische bruikbaarheid boven strengheid stelt. De meetkunde wordt axiomatisch gefundeerd, maar we vinden alleen de traditionele beginaxioma's (zoals het bepaald zijn van een rechte lijn door twee van zijn punten, het axioma van Euclides) en axioma's over de loodrechte stand. Volgorde wordt niet axiomatisch, maar intuïtief ingevoerd. Wel worden de eigenschappen, die de volgorde betreffen, expliciet geformuleerd, maar de auteur schroomt niet er een figuurtje bij te tekenen en daarnaar te verwijzen.
In de zo axiomatisch-intuïtief tot stand gekomen meetkunde worden twee soorten vectoren gedefinieerd: translatievectoren (vrije vectoren) en puntvectoren (vectoren met vast beginpunt). De isomorfie van beide vectorverzamelingen t.o.v. de bewerkingen optellen en scalair vermenigvuldigen wordt aangetoond en de eigenschappen van deze bewerkingen bewezen. Na dit tweetal voorbeelden van een vectorruimte volgt een algemene axiomatische invoering van het begrip reële vectorruimte. Hierna wordt teruggekeerd naar de planimetrie en wordt de tweedimensionale vectormeetkunde behandeld. Hierbij wordt zowel van translatievectoren als van puntvectoren gebruik gemaakt, zonder echter deze te vermengen. De auteur telt gelukkig geen vectoren van verschillende soort bij elkaar op.
Opmerkelijk is ook de invoering van het scalaire produkt. Eerst wordt een eenheid aangenomen. Daarna volgt een definitie van het scalaire produkt (mèt behulp van de aangenomen eenheid en de bewerking projecteren) en ten slotte wordt de lengte van een lijnstuk gedefinieerd met behulp van het scalaire produkt. Deze methode zouden we in ons land ook met vrucht kunnen toepassen.
Al met al een boekje, dat men met plezier doorleest.

P.G.J. Vredenduin

Raymond Broeckx en Robert Broeckx, De Rij 4/4, *Goniometrie, Driehoeksmeting* (reeks Moderne Wiskunde), De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen 1971, 188 blz., 135 BF.

Ook dit boek is bestemd voor het vierde leerjaar van het secundair onderwijs.
Op aanschouwelijke basis wordt een definitie gegeven van een hoek, van de orderelatie tussen hoeken, de optelling van hoeken en de vermenigvuldiging van een reëel getal met een hoek. Daarna worden gerichte hoeken analoog behandeld. De goniometrische getallen sin x, cos x en tg x worden gedefinieerd met behulp van een eenheidscirkel; x is hierbij een hoek uitgedrukt in graden, minuten en seconden. De traditionele formules worden afgeleid.
Eerst daarna worden de goniometrische functies ingevoerd gedefinieerd volgens sin x = sin (x rad) en worden goniometrische vergelijkingen opgelost.
Ten slotte komt de driehoeksmeting aan de orde, en zelfs in volle omvang.
Het heeft me verbaasd hier te merken, dat het programma nauw aansluit bij ons programma van voor 1958. Men verwijt onze zuiderburen wel eens, dat ze de techniek dreigen te verwaarlozen. Dat kan van dit boekje beslist niet gezegd worden.

P.G.J. Vredenduin

J. Brenner, P. Lesky, A. Vogel, *Grundlagen einer strukturell betonten Schulmathematik*, Raeber Verlag Luzern und Stuttgart, z.j., Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts, Heft 8, 259 blz.

Het boek bevat de inhoud van in 1967/68 aan de universiteit van Stuttgart gehouden heroriënteringscursussen voor leraren.

Behandelde stof: logica, verzamelingen, relaties, structuren, lineaire algebra.

De auteurs maken terecht onderscheid tussen de implicatie en de deductie (inferentie). De implicatie is gedefinieerd op grond van de waarheidstabel. Bij het deduceren, zeggen zij, schrijdt men voort van ware oordelen naar ware oordelen. Dienovereenkomstig vermelden zij (blz. 31), dat een uitspraakvorm $A \rightarrow B$, waarin het eerste lid voor minstens één waarde van de erin voorkomende vrije variabelen overgaat in een ware uitspraak, aanleiding geeft tot een deductieregel. Hetgeen inhoudt, dat niet onder alle omstandigheden $\vdash A \rightarrow B$ gepaard gaat met $A \vdash B$. Het deductietheorema geldt dus in hun logica niet. Voor heroriëntering van leraren lijkt het mij minder gewenst een logica te poneren, die van elke gebruikelijke afwijkt. Ook de vorming van verzamelingen is een probleem, waarmee de auteurs tevergeefs de strijd hebben aangebonden. Voor schoolgebruik stellen ze voor verzemelingen te vormen door middel van de setbuilder als deelverzamelingen van een reeds gedefinieerde verzameling. Deze noemen ze de Grundmenge. Ook mij lijkt dit aan te bevelen. Maar nu vervolgen zij: twee verzamelingen zijn gelijk (per definitie), als ze gevormd zijn als deelverzamelingen van dezelfde Grundmenge en bovendien dezelfde elementen bevatten. Dus zouden de verzamelingen

$\{x \mid x = 1\}$ gevormd uit de Grundmenge $\mathbb{Q}$
$\{x \mid x = 1\}$ gevormd uit de Grundmenge $\mathbb{R}$

niet gelijk zijn. Toch zouden conform de door de auteurs toegelaten notaties beide verzamelingen genoteerd mogen worden: $\{1\}$. Zodat in dit verband $\{1\} = \{1\}$ geen juiste uitspraak zou zijn.

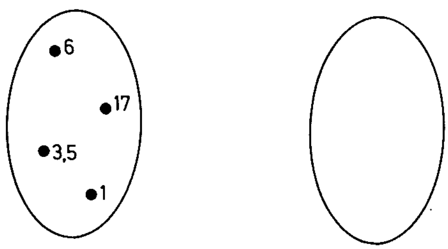
Ze trekken de consequenties uit hun afspraak en definiëren de verzameling van de deelverzamelingen van A niet als $\{x \mid x \in A\}$, maar beperken zich tot een omschrijving in woorden. Tot mijn verbazing zie ik echter wel de vereniging gedefinieerd als $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ en het cartesisch produkt als $\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. Op blz. 151 zijn de auteurs weer consequent en definiëren ze een cardinaalgetal als volgt: 'Eine Kardinalzahl bezüglich des Mengensystems $\mathfrak{A}$ ist eine Aequivalenzklasse gleichmächtiger Mengen.' Helaas zullen nu verschillende Mengensysteme tot verschillende cardinaalgetallen leiden, zodat er b.v. een heleboel verschillende cardinaalgetallen 3 zullen zijn.

Enkele kleinigheden. De antinomie van Russell wordt op één lijn gesteld met de bewering omtrent de dorpsbarbier. Deze bewering houdt echter geen paradox in, maar is domweg een onwaarheid. Het bewijs van de dualiteit tussen $\cap$ en $\cup$ op blz. 47 is niet steekhoudend. De gelijkheid van twee geordende paren wordt ten onrechte gedefinieerd; de inhoud van de definitie kan bewezen worden uitgaande van de gegeven definitie van een geordend paar. Een vergelijking oplossen is alleen maar mogelijk als er een vrije variabele in voorkomt (blz. 87). Het bewijs van de associativiteit op blz. 110 is overbodig, omdat het op blz. 69 ook reeds gegeven is. In de definitie van gelijkmachtigheid op blz. 150 stellen de twee letters J verschillende afbeeldingen voor. De definitie van een halfgroep op blz. 117 is niet correct, ten minste als de auteurs van mening zijn dat er wel halfgroepen bestaan.

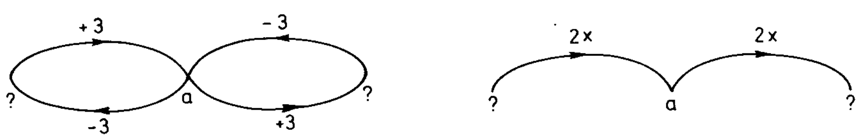
Laat ik het hierbij laten. M.i. staan de auteurs niet voldoende boven de stof, althans voorzover het de logica betreft. Verder is het boek niet gemakkelijk leesbaar. De uiteenzettingen zijn vaak te zwaarwichtig, niet helder en missen nog al eens de vereiste nauwkeurigheid. Ik kan het boek dan ook niet aanbevelen.

P.G.J. Vredenduin

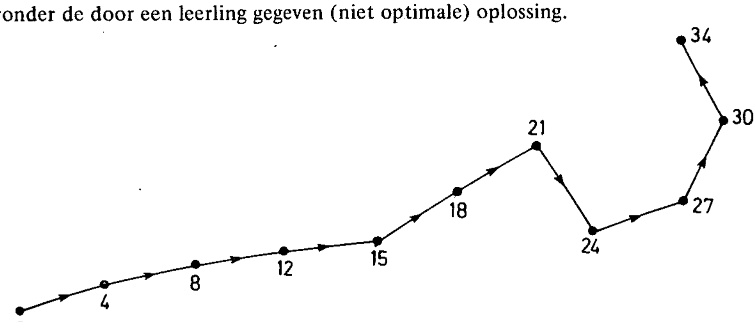
Frédérique, *Les enfants et la mathématique* 2, Marcel Didier, Bruxelles, 1971, VI + 508 blz.
Het boek geeft in protocolvorm weer de rekenlessen door de schrijfster gegeven aan leerlingen van de tweede klas van de lagere school. Het bestaat uit zes delen.
Deel 1. Calcul numérique et minicomputer.
Deel 2. Initiation au raisonnement logique et aux démarches mathématiques. Aan de orde komen permutaties, relaties en samenstelling ervan (grootmoeder van vaders zijde), kwantificatie en negatie, begin van algebraïsch rekenen.
Enkele voorbeelden ter verduidelijking. Er wordt een plattegrond van de klas getekend. Ieder kind wijst een ander kind (of zichzelf) aan. Op de plattegrond wordt dit aangetekend. Zo ontstaat een permutatie.
Elk element van deze verzameling is een getal. Als men denkt aan de linker verzameling, dan is het waar. Als men denkt aan de rechter dan is het fout. Hoe tekenen we de twee verzamelingen?



In het linker ovaal worden enkele getallen gezet. Nu het rechter ovaal. Ook hierin worden enkele getallen gezet. De leerlingen moeten de tekening afmaken. Ze zetten in het rechter ovaal er een kat bij. Nu zijn niet alle elementen van de verzameling getallen. Wie is de boosdoener? De kat.
Wij leraren zouden ogenblikkelijk de moraal hieruit trekken. Niet alle A zijn B – wil zeggen – er is een A die niet-B is. Frédérique daarentegen geeft opgaven, maar vermijdt de moraal te expliciteren. De opgaven dienen om een bepaalde faculteit te ontwikkelen, maar niet om tot algemene formuleringen te komen.
Een enkel voorbeeld aangaande algebraïsch rekenen vindt men in onderstaande figuur.



Deel 3. Fonctions numériques. Opgaven worden gemaakt van het type: ga van 0 naar 34 door telkens 3 of 4 bij het verkregen getal op te tellen, en wel in zo min mogelijk stappen. Hieronder de door een leerling gegeven (niet optimale) oplossing.



Later krijgen de pijlen een waarde, b.v. de blauwe pijlen (+ 4) zijn 5 gulden waard en de groene (+ 3) 4 gulden.[1] Ga op een zo goedkoop mogelijke manier van 0 naar 34. Lineaire programmering in de dop!
Op een soortgelijke manier worden ggd en kgv behandeld. Begin bij 0 en ga met blauwe pijlen steeds omhoog en begin opnieuw bij 0 en ga met rode pijlen 4 omhoog. Zo vindt men de gemene veelvouden van 3 en 4 als ontmoetingspunten van beide ketens.
Deel 4. Ensembles. Met behulp van diagrammen van Venn worden de grondbegrippen van de verzamelingenleer geoefend: is element van, is geen element van, doorsnede, vereniging, verschil, inclusie.
Deel 5. Géométrie. Eerst worden opgaven gemaakt over lengte en oppervlakte. Dan volgt een inleiding in de affiene meetkunde, dus een analyse van het begrip evenwijdig. Graffen van relaties en diagrammen van Venn doen hierbij goede dienst. Ook de ordening van punten op een lijn en de projectie als afbeelding worden geoefend. Ten slotte volgt een serie opgaven over afstand in vogelvlucht en taxiafstand.
Deel 6. Premières structures. Hoofdschotel zijn hier de restklassen. Gedemonstreerd wordt hetgeen de insider zou noemen de isomorfie van de groep voortgebracht door 1 optellen modulo 5 en die door een cyclische permutatie van vijf elementen.
De kinderen kregen zes uur per week les; elke dag één uur. Naast elkaar werden op deze zes dagen de zes hoofdstukken behandeld, waardoor het geheel levendiger bleef. Hoofdstuk 1 nam daarbij wat extra tijd in beslag, hoofdstuk 6 wat minder.
Ik ben me bewust slechts een zeer onvolkomen verslag gegeven te hebben van dit fraaie, in kleurendruk uitgevoerde, werk. Tot slot enig commentaar.

Wie Mathématique Moderne van Papy kent, ziet in vrijwel elke opgave een paragraaf van dit boek, waarop de opgave preludeert. Doel van de schrijfster is blijkbaar in een zo vroeg mogelijk stadium kennis bij te brengen, die het fundament vormt voor veel later conceptueel vast te leggen wiskundige begrippen. Het principiële verschil tussen nu en later is, dat nu alles spel is en dat uit het spel geen enkele conclusie expliciet wordt getrokken. Door middel van tekening en spel worden faculteiten ontwikkeld, worden begrippen voorbereid, zonder ooit expliciet conclusies te trekken. Hoe kom je zo snel mogelijk van 0 naar 34? Verschillende leerlingen proberen het en krijgen verschillende uitkomsten. Je merkt dan wel of het nog vlugger kan. Wat is de 'goedkoopste' manier? Nu volgt, bij wijze van uitzondering, een redenering, die laat zien, dat men verstandig doet zoveel mogelijk stappen van 4 te doen.
In de protocollen leest men de vragen van de lerares, de verkeerde en goede antwoorden van de kinderen en krijgt men respect voor de didactische bekwaamheid van de docente. Het meest ben ik daarbij getroffen door de hoofdstukken 2, 3 en 4.
Toch wil ik niet nalaten een vraag te stellen, die van enige scepsis mijnerzijds getuigt. Moet het hoofddoel van het rekenonderwijs op de basisschool zijn het voorbereiden van mathematische kennis? Persoonlijk heb ik de neiging als doel te zien het aanbrengen van rekenkundige kennis, die in de samenleving doeltreffend is. Om het suggestief te zeggen: liever de beeldgrafiek dan het diagram van een relatie. Of gaan we die kant op, dat 'verder leren' zo algemeen en onmisbaar wordt, dat intellectuele scholing moet prevaleren boven maatschappelijke scholing?

P.G.J. Vredenduin

[1] De problemen, die Frédérique de kinderen voorlegt, kunnen ook geschikt voor leraren zijn. Zie recreatieopgave 278 in het vorige nummer.

Stuart E. Bell, *Wiskunde in wording,* Nederlandse bewerking: W. den Hartog, Malmberg, 's-Hertogenbosch.
deel 3, Veelhoeken en veelvlakken; 32 pag. *f* 2,75
deel 4, Hoeken; 32 pag. *f* 2,75.

Beide boekjes, die vermoedelijk bestemd zijn voor de brugklas van het vwo en het mavo zijn bewerkingen van de overeenkomstige deeltjes uit de Engelse serie 'Mathematics in the Making'. De inhoud vormt de neerslag van een poging om jonge mensen spelenderwijze vertrouwd te maken met de grondbegrippen van de meetkunde.
Naast overbekende voorbeelden komen ook enige verrassend originele vondsten voor. Men kan zich echter wel afvragen, in hoeverre de gevolgde methode van behandeling en de m.i. veel te geringe hoeveelheid oefenmateriaal geschikt zijn om het geleerde te doen beklijven.
De Nederlandse tekst verraadt nergens de Engelse herkomst. Aan de uitvoering is zeer veel zorg besteed.

K.J.L. Rogier

T.W. Anderson, *The statistical analysis of time series,* J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1971, XIV + 704., £ 5.95.

Een tijdreeks is een rij waarnemingen, die gewoonlijk in de tijd geordend zijn. Voorbeelden van tijdreeksen zijn: het aantal studenten dat ingeschreven staat aan de universiteiten, het aantal auto's dat jaarlijks verkocht wordt of omzetcijfers van een bedrijf. Deze waarnemingen bezitten in het algemeen naast een trend ook een toevallige fluctuatie. Tijdreeksanalyse heeft tot doel deze beide effecten van elkaar te scheiden. Veelal met de bedoeling hieruit voor de toekomst cijfers te kunnen extrapoleren.
Er is nogal wat voorkennis nodig om alles wat in dit boek behandeld wordt te kunnen volgen. We noemen: integraalrekening, matrixrekening en een redelijke basiskennis van waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek. Van laatstgenoemde moet men kennis hebben genomen van schattings- en toetsingstheorie, speciaal toegepast op lineaire modellen. Gewapend met deze (niet geringe) voorkennis worden aan aantal modellen uitgebreid doorgerekend. Van de gevonden schatters en toetsingsgrootheden worden de (eventueel asymptotische eigenschappen afgeleid. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een paragraaf met opgaven.

Conclusie: Dit boek is zeker geen elementair leerboek. Door zijn omvang is het boek alleen geschikt als leerboek, wanneer men een keuze doet uit de hoofdstukken. Het is prettig alle genoemde resultaten bij elkaar in een boek te kunnen naslaan.

J.L. Mijnheer

Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions (Approximation Theory), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972, 538 blz., $ 23.40.

Dit boek bevat de tekst van 52 voordrachten, gehouden op de in de titel genoemde konferentie (24 augustus-3 september 1969) te Budapest. Van deze voordrachten zijn er 26 in het Engels, 9 in het Russisch, 12 in het Duits en 5 in het Frans. De deelnemers aan de konferentie kwamen uit zestien verschillende landen. Bijna alle voordrachten gaan over een onderwerp uit de approximatietheory van funkties (d.w.z. over het benaderen van een gegeven funktie door een 'eenvoudigere' funktie; liefst met een expliciete schatting van het verschil tussen die funkties).
Het boek bevat bovendien twee overzichtsartikelen, gewijd aan het werk van de Hongaarse wiskundige L. Fejér (1880-1959) resp. aan dat van de Russische wiskundige S. Bernstein (1880-1968).

A.C. Zaanen

Jean-Pierre Aubin *Approximation of elliptic boundary-value problems* (Pure and Applied Mathematics, Volume 26), Wiley-Interscience, New York, 1972, XVII + 360 blz., $ 7.25.

De schrijver begint met het geven van een overzicht aangaande diverse methoden om de oplossing van een randwaardeprobleem numeriek te benaderen. Hij gebruikt daarbij begrippen en notaties uit de funktionaalanalyse (in het bijzonder uit de theorie der ruimten van Hilbert en van Sobolev). Tenslotte wordt aangetoond hoe men met behulp van een nog pas recent ontwikkelde methode (de 'finite element method') op effektieve wijze benadering kan konstrueren voor de oplossingen van elliptische randwaardeproblemen.

A.C. Zaanen

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Mathematica & Paedagogia (50-55; 1971-1972)

C. Radoux, Nombre $\mathscr{P}_n$ de partitions d'un ensemble de cardinal n;
R. Broeckx, Iets over veelterm rijen;
J. Carlot et G. Noël, Sur l'enseignement de la géométrie métrique;
V. van Achter, Didactiek van de wiskunde;
J. Wilmet, Problèmes de calcul numérique;
Knokke 10.

J. Moonen, De veranderende wereld en het wiskundeonderwijs;
G. Halin, Expérience de pédagogie de la mathématique au seuil de l'enseignement renové;
R. Pelsmaekers, Het begrip integraal als doelstelling;
R. Broeckx, Bij een punt van het nieuw leerplan voor de vijfde van de humanoria;
Leerplan wiskunde voor de derde van de humanoria (Katholiek onderwijs).

H. Breny, La mesure des angles en classe de troisième;
H.F. Fehr, Trends in mathematical education in Europe;
M. Peltier, La calcul approché;
W.J. Brandenburg, Schoolexperimenten met nieuwe leerstof en het besliskundig proces;
G. Noël, Étude des manuels de mathématique pour la première année de l'enseignement secondaire;
J. Wilmet, Problèmes de calcul numérique;
R. Broeckx, Tovervierkanten en determinanten;
Une semaine d'initiation à l'informatique;
Statistiek op het leerplan wiskunde in Nederland.
Y. Noël-Roch, Où en est la réforme en France?
L. Jéronnez et I. Lejeune, L'expérience de Waterloo d'un enseignement moderne de mathématique à l'école primaire;

V. van Achter, Inspraak en participatie bij leerplanontwikkeling rekenen lager onderwijs;
A. Vanderlinden, La notion de linéarité pourrait simplifier l'enseignement à l'école primaire;
R. Standaert, Doelstellingen in de didactische praktijk;
P.L. Hennequin, Quelques réflexions sur l'enseignement de la statistique;
H. Wunderling, Reelle Zahlen;
G. Noël, Playdoyer pour l'intuition;
E. Etienne, A propos de la définition d'un homomorphisme de vectoriels;
R. Broeckx, Een permutatiespel;
La vie de la Société.

H. Wunderling, Reelle Zahlen;
L. Jéronnez et I. Lejeune, L'expérience de Waterloo ... II;
G. Bosteels, Testvraag;
Y. Noël-Roch. PPCM, PGCG ces vielles connaissances;
E. Etienne, A propos de la définition d'un homomorphisme de vectoriels;
Leerplannen wiskunde voor de tweede klassen Rijksmiddelbaar onderwijs.

Niko, Belgisch driemaandelijks tijdschrift van het B.C.M.W.; nr. 9, 10, 11 (1971-1972)

A.J.E.M. Smeur, Simon Stevin;
J. en Th. Coppens-Schallier, Scheepgaan met MW;
G. Capiaux-van Deurme, Oplossen van stelsels lineaire vegelijkingen;
Frédérique, Waarschijnlijkheid;
J. Ade, Statistiek in het Middelbaar onderwijs;
Papy, Graffen en groepen;
J. Drabbe, Veelkleurige diagrammen en propositielogica;
J. Drabbe, Elimineren van kwantoren: een voorbeeld;
P. Hilton, Categorieën en functoren;
F. Plastria, Studiedag van het B.C.M.W.;
R. Holvoet, Het aanbevolen boek: D. van Dalen, Formele logica.

Zwin 1972;
Een internationale groep voor onderzoek over methodiek van de wiskunde;
Papy, Klassen verzamelingen;
Fr. Lowenthal, Poging tot wiskunde-onderwijs over twee groepen gestoorde kinderen;
J. Drabbe, Enkele verzamelingen connectoren uit de klassieke propositielogica;
A. Warinnier, Groepoïden en padruimten;
Frédérique, Statistiek: Nebucadnezar krantenverkoper;
H. Breny, Paardensport en kansrekening;
A. Verbeure, Algebraïsche methodes in de fysica;
D. Incolle, Het internationale congres Knokke 1971;
Ontwerp-leerplan voor de normaalscholen voor kleuterleidsters;
Fr. Plastria, Het aanbevolen boek: G.H. Hardy, A mathematician's apology.

Frédérique, Inleiding tot de vlakke vectormeetkunde;
A. Dieudonné, Het gebruik van de wiskundige taal der papygrammen;
Papy, Inwendige en afsluiting;
A. Warrinnier, Padruimten;
Papy, Functicolor;
E. Schrödinger, What is life?
H.G. Steiner, Moderne algebra in de determinatiecyclus: vierkantsworteltrekking in een willekeurig veld.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Jaaroverzicht verenigingsgelden 1971-1972.

INKOMSTEN		UITGAVEN	
Saldo per 1-8-1971	8827,77	abonnementen Euclides	16860,00
contributies	23762,85	administratie en PTT	2149,72
rente	178,93	bestuur	2370,05
rijkssubsidie		ledenvergaderingen	1341,04
nomenclatuurcommissie	4131,10	havo-mavo-sectie	1203,94
	--------	didactiekcommissie	1130,50
		nomenclatuurcommissie	3252,43
	36900,65	commissie vwo-opgaven	477,35
	========	leesportefeuille	600,00
		Euclides	501,80
		Raad van Vakgroepen	350,00
		boekenbonnen	415,25
		saldo per 31-7-1972	6248,57

			36900,65
			========

Jaaroverzicht "Fonds eigen publicaties"

saldo per 1-8-1971	10278,55	toelage Exetergangers	1800,00
rente	616,68	bestuur	175,00
auteursrechten	1824,48	saldo per 31-7-1972	10744,71
	12719,71		12719,71
	========		========

Begroting 1972-1973

contributie	34000,00	abonnementen Euclides	22950,00
rente	150,00	administratie en PTT	2500,00
nadelig saldo	450,00	bestuur	2500,00
	--------	ledenvergaderingen	1700,00
	34600,00	havo-mavo-commissie	1300,00
	========	nomenclatuurcommissie	1000,00
		didactiekcommissie	1000,00
		leesportefeuille	600,00
		Euclides	500,00
		Raad van vakgroepen	350,00
		boekenbonnen	200,00

			34600,00
			========

Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren

Agenda van de jaarvergadering op zaterdag 28 oktober 1972 in het gebouw van de Koninklijke Nederlandse Jaarbeurs, Croeselaan 6 te Utrecht.

Aanvang 10.30 uur.

1 Opening door de voorzitter, Dr. J.K. van den Briel
2 Notulen van de algemene vergadering 1971[1]
3 Jaarverslagen[2]
4 Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie
5 Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van L. van Beek, Dr. J.K. van den Briel en Drs. J.W. Maassen. Het bestuur stelt de aftredenden kandidaat.
6 Vaststelling van de contributie 1973/74
7 Splitsing van de vergadering in twee delen
7.1 Voordracht van Dr. D. van Dalen
De logica houdt niet op bij de waarheidstafels
7.2 Voordracht van Drs. J. van Dormolen
Geen modellessen, wel lesmodellen

Pauze

8 Voordracht van Dr. R. Holvoet (België)
Morfismen
9 Rondvraag
10 Sluiting

---

[1] Zie het septembernummer, p. 28
[2] Id. p. 30

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

282 a Men wil een vierkant bord, dat in 81 congruente vierkantjes verdeeld is, overdekken met 40 rechthoekjes, die elk juist twee naast elkaar gelegen vierkantjes kunnen bedekken. Daarbij moet één van te voren aangewezen vierkantje onbedekt blijven.
b Men wil een schaakbord overdekken met 31 congruente rechthoekjes, die elk juist twee naast elkaar gelegen velden kunnen bedekken. Daarbij moeten twee van te voren aangewezen velden onbedekt blijven.
Onderzoek in beide gevallen, onder welke voorwaarde dit mogelijk is.

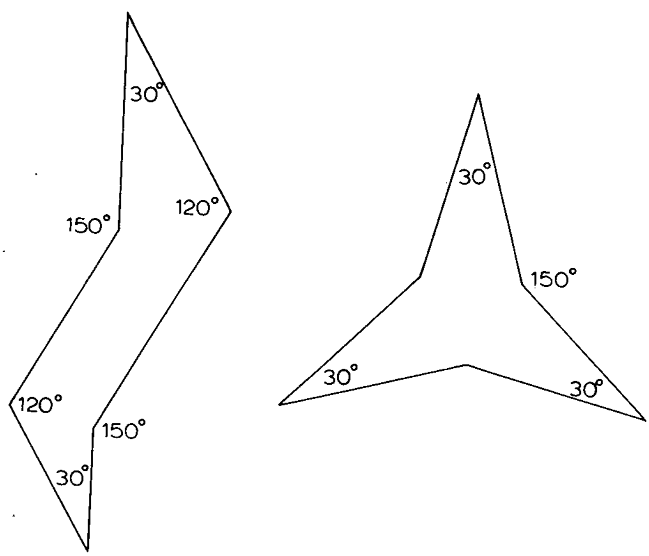
283 Uit een college worden enige commissies gevormd. Elke commissie vergadert (gelukkig) slechts eenmaal. Elke twee personen vergaderen één keer samen, maar niet vaker. De commissies bestaan alle uit meer dan twee leden. Er wordt 's avonds vergaderd. Geen enkele persoon vergadert ooit meer dan één keer op een avond. Beantwoord de volgende vragen:

a Hoeveel commissies zijn er minimaal?

b Op hoeveel avonden wordt minimaal vergaderd? (L.A. Rang)

Oplossingen

280 Gevraagd werd met zes lucifers een zeshoek te leggen, waarvan de oppervlakte gelijk is aan 2 maal de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek die men met drie van deze lucifers leggen kan.
Hieronder vindt men twee mogelijkheden. De verificatie van de juistheid is te eenvoudig om hier toe te voegen.



281 Gegeven is het patroon

0	1	4	7	17	10	3	2	1	0									
	0	1	2	5	3	1	1	1	1	0								
		0	1	3	2	1	2	3	4	1	0							
			0	1	1	1	3	5	7	2	1	0						
				0	1	2	7	12	17	5	3	1	0					
					0	1	4	7	10	3	2	1	1	0				
						0	1	2	3	1	1	1	2	1	0			
							0	1	2	1	2	3	7	4	1	0		
								0	1	1	3	5	12	7	2	1	0	
									0	1	4	7	17	10	3	2	1	0

Behalve de uiterste getallen zijn alle getallen positief geheel. Elk vierkant van vier getallen heeft determinantwaarde 1.

Hoe stelt men zo'n patroon samen?
Beschouw een zestal getallen uit het patroon

$$\begin{matrix} a & c & e \\ b & d & f \end{matrix}$$

De vierkanten hebben determinantwaarde 1, dus

$$ad - bc = 1 \tag{1}$$
$$cf - ed = 1 \tag{2}$$

Aftrekking geeft

$$d\,(a + e) - c\,(b + f) = 0$$
$$c : (a + e) = d : (b + f) \tag{3}$$

Hiervoor is voor ons van belang:

als (1) dan: (2) $\Leftrightarrow$ (3):

Nu hebben we voldoende aanwijzingen om het patroon samen te stellen. De eerste rij begint met 0 1. Het volgende getal 4 kiezen we willekeurig. Dan kiezen we 7 zo, dat 1 + 7 een veelvoud is van 4; daarna 17 zo, dat 4 + 17 een veelvoud is van 7; enz.
Nu gaan we naar de tweede rij. We weten, dat

$1 + 7 = 2 \cdot 4$ (in rij 1).

Onder het getal 7 plaatsen we nu het getal 2, omdat dan ook

$2 + 0 = 2 \cdot 1.$

In rij 1 is verder

$4 + 17 = 3 \cdot 7.$

In rij 2 zetten we achter het getal 2 nu 5, omdat dan ook

$1 + 5 = 3 \cdot 2.$

Het is duidelijk, dat als men de getallen op de eerste rij positief geheel kiest, de overige getallen ook alle geheel worden. Mocht er ergens een geheel getal komen, dat niet positief is, dan zal het, gezien de manier van vullen van het patroon, rechts onderaan een vierkant komen waarvan de overige drie getallen reeds positief zijn. De determinant van dit vierkant zou dan negatief worden. Dus zullen alle getallen positief geheel worden.
Komt men in rij 1 ten slotte weer bij het getal 1? Wel, zodra men besluit elk volgend getal zo klein mogelijk te kiezen, wordt elk volgend getal kleiner dan het voorgaande en zal men dus noodzakelijk bij 1 moeten komen. In ons voorbeeld is dit besluit genomen bij de keuze van het getal 10.
Desgewenst kan men nog een regel opstellen om ervoor te zorgen, dat de rijen een voorgeschreven lengte krijgen. Dit is niet moeilijk, maar ik laat het aan de lezer over om de regel te vinden.

Het meest intrigeert ons échter, waarom rij 1 hetzelfde is als kolom 10 en ook weer hetzelfde als rij 10. En evenzo rij 2, kolom 11 en rij 12. Enz.
Nu vindt men in de eerste rij een drietal opeenvolgende getallen, nl. 7 17 10, waarvoor geldt

$$17 = 7 + 10.$$

Dit is geen toeval. Was een dergelijk drietal niet aanwezig, dan zouden de getallen van de eerste rij naar rechts toe onbegrensd toenemen.
De gevonden merkwaardigheid zet zich, zo we weten, naar beneden voort. Ook geldt dus

$$5 = 2 + 3, \quad 3 = 1 + 2, \quad 1 = 0 + 1.$$

Wat voor kolommen geldt, geldt ook voor rijen. Bezie nog eens het onderdeel van het patroon

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & 1 & 3 & 5 \\ & & 0 & \underline{1} & 2 & 7 & 12 \\ & & & \underline{0} & 1 & 4 & 7 \end{array} \qquad \text{(rij 3)}$$

We vonden in rij 4: $1 = 0 + 1$ (de onderstreepte getallen). In de kolom geldt voor de onderstreepte getallen eveneens $1 = 1 + 0$. Ga verder naar rechts. Dan is ook

$$2 = 1 + 1, \quad 7 = 3 + 4, \quad 12 = 5 + 7, \text{ enz.}$$

Laat nu uit het patroon kolom 5 weg, laat ook rij 5 weg, daarna kolom 15, rij 15, enz. Dan ontstaat een patroon, dat nog aan dezelfde eigenschappen voldoet als het oorspronkelijke. Immers als we naast elkaar hebben de getallen

$$a \quad b \quad c \quad d$$

dan geldt

$$a + c = n \cdot b \wedge b + d = c \Rightarrow a + d = (n - 1)\, b$$

De weg te laten rijen en kolommen zijn in het patroon aangegeven.
Op deze wijze voortgaand kan men het patroon afbreken, totdat men overhoudt:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \text{enz.} & & \end{array}$$

Dit simpele patroon repeteert. Er geldt: rij 1 is hetzelfde als kolom 4 en als rij 4, enz. Het is nog mooier, maar dat interesseert ons niet.
Uitgaande van dit simpele patroon kunnen we het afbraakproces omkeren en door inlassing van kolommen en rijen in zes stappen het oorspronkelijke patroon weer terug krijgen. Dat daarbij het repeteerkarakter behouden blijft, is door inductie direct in te zien. Kijk maar in het oorspronkelijk gegeven patroon en denk kolom 5, rij 5, enz. nog even weggelaten. Onderstel het overblijvende patroon heeft repeteerkarakter. In rij 1 krijgen we dan 17 als som van 7 en 10. Wegens het repeteerkarakter van het gereduceerde patroon vindt men deze 7 en 10 onder elkaar terug in rij 4 en 6, achter elkaar in kolom 13 en 15, enz. Steeds zal tussen dit tweetal getallen het getal 17 ingelast worden. Het repeteerkarakter blijft dus behouden.

INHOUD