Euclides

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

47e jaargang
1971/1972
no 9
mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 15,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Enkele opmerkingen over de leerstof goniometrie voor mavo

P. I. A. KNOPS
Heerlen

De leerstof van het mavo omvat oa. 'inleiding goniometrie, door gebruikmaking van vektoren met lengte 1. De verhoudingen van cos, sin, tg; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; grafieken van sinus en cosinus.' [1]
Een nadere toelichting geeft ons het volgende: 'Het verdient aanbeveling de leerlingen mbv. de goniometrische cirkel een eenvoudige sinus-, cosinus-, en tangens-tabel te laten ontwerpen en daarbij een grafiek te laten tekenen. Ook het aflezen van de goniometrische verhoudingen op een rekenliniaal dient te worden geoefend.' [2]
Een verdere uitwerking over een verantwoorde behandeling van de goniometrie voor mavo-leerlingen wordt niet gegeven. Dat de behandelingswijze voor goniometrie nogal problemen oproept is de laatste tijd in gesprekken met mavo-collega's, die met de methode *Van A tot Z* werkten nogal eens gebleken. Hierover later meer.
De volgende wegen staan open. We geven hier *enige* behandelingswijzen die men in mavo-methodes tegen *kan komen* met uitzondering van punt 3.

1 een behandeling van sin, cos enz met behulp van een rechthoekige driehoek. Dit is de meest vertrouwde manier voor de docent, die ook les gaf op de MULO.
Daar men reeds jaren op deze manier gewerkt heeft concludeert men vaak, dat dit toch wel een manier is die voor de mavo-leerling bevattelijk is. Het is echter niet in overeenstemming met de toelichting op het leerplan.
2 we voeren de eenheidscirkel in en geven de behandeling met deze cirkel als hulpmiddel.
3 een behandeling als opwindfunktie (wrapping function).
Waarschijnlijk te moeilijk voor deze leerlingen. De bovenbouw zou er echter wel mee gebaat zijn. Indien de leerling het echter niet kan vatten, dan is het niet verantwoord dat wij ons richten op de bovenbouw. De meeste methodes voor de bovenbouw havo geven trouwens een behandeling met behulp van de eenheidscirkel. In het vwo wordt de opwindfunktie wel aanbevolen.

Wat geeft de klassepraktijk ons te zien? In de meeste gevallen zal het zo zijn dat de leraar zoveel mogelijk de door hem ingevoerde methode zal volgen. Dit in verband met het feit, dat dit jaar voor het eerst naar examen-niveau moet worden gewerkt. Door dit slaafs volgen van het boek zal hij de knelpunten van de leerlingen leren kennen en daar in volgende jaren zijn profijt mee doen.
Wat geven de verschillende mavo-methodes te zien? Enkele methodes werken

alleen met de methode onder 1) genoemd. Anderen werken aanvankelijk op die manier en geven later de eenheidscirkel. De methode *Van A tot Z* geeft een behandeling met vektoren (zie deel 3b). Natuurlijk is dit een behandeling in overeenstemming met: 'De toelichting op het leerplan wiskunde.' Toch kampen de gebruikers van deze methode in het algemeen met het volgende; a) velen zijn al achterop geraakt alleen door het feit, dat het de eerste keer van behandeling is b) de nieuwe aanpak van de goniometrie vraagt nog eens extra tijd. Veel leerkrachten komen in tijdnood voor het centraal schriftelijk. Ook klagen velen over een te ver doorgevoerde behandeling voor de mavo-leerling. Hetgeen o.a. bleek op vergaderingen van mavo-leerkrachten waar de examens-1970 besproken werden. Als de behandeling te zwaar is, dan moeten we de leerling een eenvoudiger behandeling voorschotelen.
In 1967 kunnen we reeds lezen: 'Het gebruik van vektoren in de *goniometrie* en de meetkunde wordt door de leerlingen bij het vh. en mo. over het algemeen zeer toegejuicht. Het is een onderwerp dat erin gaat als koek. Maar de opbouw van de begrippen kost veel tijd. Het programma, dat voor de tweede en derde klas mavo wordt voorgesteld, kost in IV en V gymnasium ongeveer 8 lessen. Het lijkt mij daarom niet fout om dit aantal voor het mavo op 16 te stellen. Hiermede heb ik mij echter nog niet uitgesproken over de vraag of *dit onderwerp geschikt is voor een behandeling in het mavo.*' [3]
Tenslotte nog het volgende: '*Als het waar is,* dat dit onderwerp geschikt is voor het mavo, dan is het verschil tussen mavo en vwo veel kleiner dan ik mij voorstel. [3]
Als de schrijvers van de methode er zelf niet geheel zeker van zijn dat dit onderwerp geschikt is, lijkt het dan wel geheel verantwoord? Natuurlijk kan men zeggen, dat elk experiment (mits goed opgezet) altijd wel verantwoord kan worden. Maar hier zijn dan toch veel leerlingen mede door achterop geraakt.

Literatuur:

[1] CMLW. Interimrapport met toegevoegde discussie, mei 1967, p. 20.
[2] CMLW. Toelichting op het leerplan wiskunde mei 1969. p. 12, 13.
[3] P.M. van Hiele: De discussienota's in het interimrapport van de CMLW voor zover betreft het mavo. pag. 257. Euclides jrg 43. 1967/1968.

Commentaar van Dr. P.M. van Hiele.

Bij de keus: welke methode zullen we gebruiken bij de invoering van sinus en cosinus in het wiskunde-onderwijs op het Mavo, heeft bij de auteurs van de methode Van A tot Z zeer zwaar gewogen het argument, dat de mavo-leerlingen gemakkelijk zouden moeten kunnen overstappen naar het Havo. Bij het Havo en Vwo zijn de voordelen van het gebruik van eenheidsvectoren bij het definiëren van sinus en cosinus zó groot, dat een andere methode voor ons eenvoudigweg niet in aanmerking kon komen.
We hebben dus ook voor het Mavo sinus en cosinus gedefinieerd als inprodukten van eenheidsvectoren.

Een analyse van de voor- en nadelen levert nu het volgende op:
1. Voor de docenten is dit nieuwe een grote overgang. Zij zullen soms onhandig met deze begrippen omgaan.
2. Het begrip 'inprodukt' kost wat meer tijd van voorbereiding dan verhoudingen van lijnstukken.
3. Wanneer sinus en cosinus zijn gedefiniëerd met behulp van inprodukten, moeten de leerlingen werken met produkten in plaats van met quotiënten. Men krijgt dan direkt uitdrukkingen als a sin α, b cos α; hetgeen beslist een vereenvoudiging oplevert.
4. Leerlingen die van het Mavo naar het Havo overgaan weten al iets van inprodukt, als ze volgens deze methode gewerkt hebben. Dit is een groot voordeel.

Ad. 1: Na ten hoogste twee jaar zijn de docenten aan de nieuwe methode gewend. Het is te verwachten, dat het grootste deel van hen blij zal zijn met de nieuwe werkwijze.
Ad. 2: Als men de distributieve eigenschap bij het Mavo niet behandelt, heeft men bij het Mavo heel wat minder lessen nodig dan ik vroeger heb aangegeven. Bovendien is mij gebleken, dat op tal van scholen het verschil tussen Mavo-en Havo-leerlingen inderdaad kleiner is dan ik vroeger vermoed had. Vooral, als men te doen heeft met Mavo-leerlingen die door het wiskunde-keuzevak positief geselecteerd zijn.
Ad 3: Men moet de bezwaren tegen goniometrische functies als verhoudingen niet onderschatten. De leerlingen vinden verhoudingen moeilijk, bovendien werkt men alleen in het beginstadium met goniometrische functies als verhoudingen. (In vrij waardeloze opgaafjes in rechthoekige driehoeken)
Ad 4: Het aantal Mavo-leerlingen dat in de toekomst naar het Havo zal doorgaan, belooft vrij groot te worden. Het is dus heel zinvol met deze leerlingen rekening te houden.
Overigens heeft deze zaak zeer de aandacht van de auteurs van de Mavo-serie van Van A tot Z. Wij hebben een tussenoplossing in portefeuille, maar zouden deze liever niet willen toepassen, zolang niet duidelijk is gebleken, dat de aangegeven methode op te veel bezwaren stuit.

De dimensiestelling voor vectorruimten[1]

PROF. DR. G. PAPY

Brussel

1 Een verklaring van Peter Hilton

Enkele jaren geleden verklaarde Peter Hilton op een congres over het wiskunde-onderwijs te Southampton: 'Wij hebben geen filosofie om uit te leggen waarom de lineaire algebra, die toch zeer eenvoudig is, zo moeilijk te onderwijzen is, en waarom zoveel studenten in de eerste jaren van de Universiteit zakken voor hun examen lineaire algebra'. Deze verklaring van een zeer befaamd wiskundige en – wat geen kwaad kan – doorwinterd pedagoog moest de belangstelling opwekken bij ieder die zich verantwoordelijk acht en betrokken voelt bij de hernieuwing van het wiskunde-onderwijs op elk niveau. Inderdaad, de linearisatie van de theorieën, het systematisch in het licht stellen van de onderliggende vector-structuren en de uitbuiting van hun structurele eigenschappen is een van de meest typische kenmerken van de aantrekkelijke hedendaagse wiskunde. Elke waardevolle modernisering van het wiskunde-onderwijs moet dan ook een inleiding tot de vectorruimten bevatten en elke nederlaag bij het vectorruimte-onderwijs is de ondergang van de hernieuwing. Buiten de mogelijkheid de fundamentele principes van de lineaire wiskunde bij te brengen, is elke droom over de modernisering van het wiskunde-onderwijs slechts een utopie en een hersenschim. Aldus luidt de bedreiging die het Hiltoniaans aforisme schijnt te uiten... indien men de fijne Engelse humor van zijn auteur uit het oog zou verliezen! Als men de verklaring van Hilton grondig onderzoekt, bemerkt men de aanwezigheid van een *vaststelling* en van een *axioma*.

Experimentele vaststelling

Het rendement van het traditioneel onderwijs van de lineaire algebra is zeer teleurstellend tijdens de eerste twee jaren van de Universiteit.

Axioma (A.H.)

De lineaire algebra is eenvoudig

Vermits een feit belangrijker is dan een lord mayor kan alleen nog het impliciete *axioma* van Hilton gecontesteerd worden. 'De lineaire algebra is gemakkelijk en eenvoudig! '. Welke feiten schragen deze uitspraak? ... De virtuositeit waarmee

* Met toestemming overgenomen uit NIKO, 8, 1971. De vertaling is van E. Trousselot.

onze leerlingen de lineaire algebra gebruiken? 'De lineaire algebra is gemakkelijk en eenvoudig! ' Deze verklaring bevestigt alleen de diepe en voorvaderlijke nederigheid van de beroepswiskundige, die sinds mensenheugenis hardnekkig volhoudt de resultaten die hij eindelijk beheerst en de theorieën die hij kent eenvoudig en gemakkelijk te vinden – en zelfs bespottelijk en 'kindsheid van de kunst' –... bijna in de bijbelse betekenis van het woord, na een lang en echtelijk samenwonen (... en zij hadden vele kinderen!).

2 Niet zo eenvoudig

De lineaire algebra is niet zo eenvoudig! Haar logische organisatie en haar opeenvolging van definities en bewijzen zijn subtiel en ingewikkeld. In werkelijkheid redeneert de beroepswiskundige weinig in de lineaire algebra. Hij steunt op resultaten die hij reeds lang geassimileerd heeft, en niet op de argumentatie die hij voorwendt te gebruiken om er toe te komen! Voor zijn leerlingen, ontrolt hij de film van de theorie aan zulk een snelheid die hem zelf niet zou in staat stellen zijn aaneenschakeling te volgen indien hij niet voortdurend geleid en beveiligd werd door zijn voorafgaande kennis van het onderwerp. De beroepswiskundige redeneert niet in de lineaire algebra. Hij beweegt er zich gemakkelijk in, zoals een vogel in de lucht een visje in het water en een haan op zijn mesthoop.

3 Logica

Het totale meesterschap over het werktuig van de logica is misschien wat de beroepswiskundige – een vrijwilliger bij uitstek – het meest onderscheidt van de miliciens van de wiskunde die zich op onze schoolbanken bevinden. Zelfs indien hij zich niet voor de logica interesseert – soms zo erg dat hij de logische wetten niet kan formaliseren – toch gebruikt elke wiskundige ze zonder moeilijkheden, zonder smart, en meestal, zonder er zich van bewust te zijn. De logische synonymen zijn voor hem zó evident en natuurlijk dat hij nalaat erop te wijzen zeer tot schade van de gewone stervelingen, voor wie ze dikwijls een moeilijk te overwinnen hindernis vormen. De logische synonymen – propositionele of gekwantificeerde – vormen het dagelijkse brood in een uiteenzetting van de belangrijkste noties uit de lineaire algebra. Men aarzelt niet in de bewijzen definities van sommige begrippen te gebruiken, nadat men ze heimelijk van gedaante heeft doen veranderen, overeenkomstig een logische legaliteit, waarmee de leerlingen blijkbaar weinig vertrouwd zijn.

Therapeutiek

De logische synonymen van de verschillende gebruikelijke formuleringen van de definitie van een begrip in het licht te stellen.

4 Meetkunde intuïtie

Het verband met de meetkundige intuïtie in het geval van de kleine dimensies is een andere klip die de neofiet van de vectorruimten moet omzeilen. Een tekortkoming gemeen aan de meeste moderne uiteenzettingen over elementaire meetkunde, ligt in het bewijzen, in een eng verband, van bijzondere gevallen van belangrijke vectoriële stellingen. Men bewijst er op een plompe wijze feiten die de meetkundige intuïtie dwingt als evident te beschouwen. Het nauwe kader stelt de leerling niet in staat de draagwijdte van de algemene stelling of de veralgemening van het gegeven bewijs in te zien.

Therapeutiek

De bewijzen geven voor hogerdimensionale vectorruimten (= die tamelijk lange eindige vrije rijen hebben).

Deze therapeutiek kan in sommige opzichten verwondering opwekken en zal daarom in § 5 en § 6 toegelicht worden.

5 Intrinsieke methodes

Het natuurlijkste bestaat erin de stellingen die geldig zijn voor elke vectorruimte, met intrinsieke methodes aan te tonen, zonder het begrip *dimensie* te gebruiken. In tegenstelling met de routine en de soms duistere berekeningen van de analytische meetkunde, stammen de intrinsieke vectoriële redeneringen rechtstreeks af van die van de synthetische meetkunde. Hun standpunt verzoent het rekenen met een zekere intuïtie, die soms de intuïtie van de traditionele wiskunde veralgemeent, ofschoon zij bij zekere gelegenheden verschillend is.

6 Formalisme

Wat de stellingen betreft die gelden voor elke n-dimensionale vectorruimte (n eindig), zou een grappige logicus misschien opmerken dat geen enkel natuurlijk getal er een bijzondere rol speelt, vermits de veranderlijke n er gebonden is door een universele kwantor. En misschien zou je er een kunnen vinden die voorstelt de bewijzen te verrichten door inductie op n. Het aannemen van dit voorstel zou niet realistisch en evenmin natuurlijk zijn; het zou de globale visie vernietigen ten voordele van een kunstmatig formalisme dat zeer vlug toevallig zou toeschijnen. De traditionele uiteenzettingen van de lineaire algebra gebruiken niet dikwijls expliciet een bewijs door inductie. Om hun gewetensbezwaren te kalmeren, en zich te overtuigen wel degelijk op n en niet op 7 of op 9 geredeneerd te hebben, nemen de meeste auteurs hun toevlucht tot een ingewikkeld formalisme dat de lezer overdondert met een ballast indices en een stofwolk puntjes. De moderne wiskunde moet de spontane en frisse deugd van de traditionele meetkundige bewaren, die een stelling bewees voor elke veelhoek, terwijl hij vlug een zevenhoek op het bord tekende! De volledige formaliseringen van de bewijzen zijn niet te bereiken en zouden volkomen onleesbaar zijn. Een bewijs van de stelling $p(n)$ (afhangend van het natuurlijk getal n) is gegeven zodra, het bewijs gegeven zijnde voor een bijzonder natuurlijk getal, de lezer begrijpt hoe dit bewijs overgaat op elk ander natuurlijk getal.

7 Dimensiestelling

In verband met het onderwijs van de eindigdimensionale vectorruimten zijn er twee axioma's.

Axioma van de metawiskunde

Geen goede uiteenzetting zonder de dimensiestelling.

Axioma van de pedagogiek

Onmogelijk de dimensiestelling in het middelbaar onderwijs te bewijzen.

Het besluit van deze beide axioma's is overduidelijk en zou elke poging tot modernisering van het wiskunde-onderwijs tot het niets herleiden. Het axioma uit de metawiskunde schijnt heden ten dage onweerlegbaar, zodat we een pedagogische realiteit moeten scheppen die het tweede axioma ontkent. We gaan ons laten inspireren door de principes die in de vorige paragrafen werden uiteengezet; om te proberen aan te tonen hoe het mogelijk is de dimensiestelling te onderwijzen aan leerlingen van 15 à 16 jaar uit het middelbaar onderwijs, die vanaf hun twaalfde jaar een modern wiskunde-onderwijs genoten hebben.

Deze leerlingen hebben vele vectorruimten ontmoet:

het reële vectorvlak
het euclidische vectorvlak
de vectorruimte van dimensie 3
de euclidische vectorruimte van dimensie 3
de vectorruimte van de veeltermfuncties $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, van de graad $\leqslant n$
de vectorruimte van de veeltermfuncties $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$
de vectorruimte $\mathbf{R}^n$
de vectorruimte van de functies $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, . . . enz.
de vectorruimte van de functies $[0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$

Er is zeker voldoende motivering om een reële vectorruimte $\mathbf{R}$, V, + te beschouwen en zelfs een vectorruimte K, V, +, waarbij K een veld, ja zelfs elk willekeurig lichaam is.

8 Structureel begrip en berekening

Voor leerlingen die geleidelijk ingewijd werden in de structurele taal van de moderne wiskunde, is het zonder twijfel de meest structurele definitie van *vectorruimte* die de beste globale visie geeft van een vectorruimte.

a Een vectorruimte is in de eerste plaats een commutatieve groep die praktisch altijd additief genoteerd wordt, en waarvan de elementen *vectoren* heten; deze vectoren veralgemenen de vectoren of translaties van het vlak, waarmee de leerlingen vertrouwd zijn; ze worden – tenminste in de uiteenzetting van de algemene theorie – aangeduid met kleine letters met een pijltje erboven: $\vec{a}$, $\vec{v}$. Het neutraal element van de vectorgroep is de nulvector, genoteerd $\vec{o}$, en het symmetrisch element van de vector $\vec{v}$ duiden we met $-\vec{v}$ aan.

b In een vectorruimte staat naast de vectorgroep $V, +$ een veld van coëfficiënten. Zij $K, +, .$ dit scalair veld waarvan de elementen met latijnse kleine letters aangeduid worden. Het neutraal element wordt met o aangeduid. Het tegengestelde element van x wordt $-x$ en het invers van k (verschillend van nul) wordt k^{-1} genoteerd. Het eenheidselement van K wordt met 1 aangeduid. Voor de leerlingen veralgemeent dit veld scalairen het veld van de reële getallen.
Het is belangrijk op te merken dat vele nuttige en handige 'notatiemisbruiken' in bovenstaande tekst voorkomen. Het is het verband dat ons in staat stelt na te gaan of het +-teken de vectoroptelling dan wel de scalaire optelling aanduidt. Hetzelfde geldt voor de aftrekking.

c Een scalaire vermenigvuldiging $K \times V \longrightarrow V : (k, \vec{v}) \longmapsto k . \vec{v}$ verbindt het veld van de scalairen met de vectorruimte V. In feite spelen de scalairen de rol van operatoren die inwerken op de vectorgroep, en de scalaire vermenigvuldiging veralgemeent de homothieën van het vlak, waarmee de kinderen reeds vertrouwd zijn. In elke vectorruimte eist men tenslotte nog dat de scalaire vermenigvuldiging aan de drie volgende eigenschappen zou voldoen (die alle reeds bestudeerde eigenschappen van de homothetieën veralgemenen).

c_1 de scalaire vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de vectoriële optelling en de scalaire optelling.

c_2 de vermenigvuldiging van scalairen en de scalaire vermenigvuldiging voldoen aan de gemengde associativiteit

$$\forall a, b \in K, \qquad \forall \vec{x} \in V \qquad a \, . \, b\vec{x} = ab \, . \, \vec{x}$$

c_3 het eenheidselement van het veld is neutraal voor de scalaire vermenigvuldiging

$$\forall \vec{x} \in V \qquad 1 . \vec{x} = \vec{x}$$

De vectorruimte zal genoteerd worden $(K, +, .), V, +$
Of korter $K \quad , V, +$
ja zelfs V

Deze structurele definitie kan door een paneel voorgesteld worden:

Veld $K, +, .$	Groep $V, +$

$K, V, +$ is een *vectorruimte*
a.s.a.

de scalaire vermenigvuldiging $K \times V \rightarrow V : (k, v) \mapsto k.v$
distributief is ten opzichte van de vectoriële optelling en de scalaire optelling en de scalaire vermenigvuldiging voldoet aan de gemengde associativiteit en het eenheidselement van K als neutraal element heeft.

De bewustwording van deze structurele definitie is belangrijk, want het is essentieel de vectoriële eigenschappen die uit de groepstructuur voortkomen, te onderscheiden van die, die voortkomen uit de werking van de scalairen. Deze voorstelling bereidt latere veralgemeningen voor: ring-modulen en groepen met operatoren.

Wanneer men zich in de eigenlijke theorie van de vectorruimten bevindt, eist het meesterschap over de berekeningen toch dat men de verschillende bewerkingen mengt. Ook is het goed expliciet op te sommen wat deze structurele definitie verbergt. Het aanschouwen van deze lange tabel is zeer leerzaam.

$\forall a, b, c, \in K$	$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$
$a + b = b + a \in K$	$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \in V$
$0 \in K$	$\vec{o} \in V$
$a + 0 = a$	$\vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$
$-a \in K$	$-\vec{x} \in V$
$-a + a = 0$	$-\vec{x} + \vec{x} = \vec{o}$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
$a.b = b.a \in K$	$a.\vec{x} \in V$
$1 \in K$	
$1a = a$	$1\vec{v} = \vec{v}$
$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^{-1} \in K \wedge aa^{-1} = 1$	
$ab.c = a.bc$	$a.b\vec{x} = ab.\vec{x}$
$a(b + c) = ab + ac$	$a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
	$(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

We zien namelijk dat, als de letters met pijltjes plotseling elementen van K zouden aanduiden, dat alles waar zou blijven in de beste van alle mogelijke werelden;
dit toont aan dat

$$(K, +, .), K, + \quad \text{een vectorruimte is.}$$

Als men voldoende geduld heeft, wordt dit resultaat door de leerlingen (15 jaar) zelf geleverd.
Vandaar ziet men onmiddellijk dat zekere eigenschappen van K,+, . ook gelden in de vectorruimten. De structurele voorstelling van vectorruimten is zeer begrijpelijk maar een beetje statig. De knoeierij met de formules van de expliciete tabel knipoogt naar de lezer en stelt hem gerust: ver van verrassend of onverwacht te zijn, veralgemenen de vectorrekenregels op de meest elementaire wijze de gewoonten van de reële getallen (ja zelfs van de gehele getallen).

9 Lineaire combinaties

$\vec{v}$ is *lineaire combinatie* van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

a.s.a

$\exists\, k_1, \ldots, k_n \qquad \vec{v} = k_1 \vec{e}_1 + \ldots + k_n \vec{e}_n$

a.s.a

	$\vec{e}_1$	$\ldots$	$\vec{e}_n$
$\vec{v}$	k_1	$\ldots$	k_n

Het is meestal niet nodig de veranderlijken $k_1,\ldots,k_n$ in de bovenstaande definitie te verpersoonlijken door de vastzetting van letters, dikwijls volgestopt met moeilijk te lezen indices die het genot van sommige beroepswiskundigen schijnen op te wekken. Hun parasiet geruis houdt gewoonlijk de aandacht van de beginneling gaande, terwijl de uiteenzetting of een bewijs de aandacht op een heel ander punt eist. Het gebruik van $*$ ondervangt dit gevaar

	$\vec{e}_1$	$\ldots$	$\vec{e}_n$
$\vec{v}$	$*$	$\ldots$	$*$

Elke $*$ duidt *onafhankelijk* aan dat het de plaats inneemt van een letter of een term die een element van een verzameling aanduidt, die de context ... impliciet preciseert

Dank zij de voorgaande algoritme kunnen we verschillende vectoren economisch als lineaire combinatie van $e_1, ..., e_n$ voorstellen

	$\vec{e}_1$	$\cdots$	$\vec{e}_n$
$\vec{v}$	a_1	$\cdots$	a_n
$\vec{u}$	b_1	$\cdots$	a_n
$\vec{v}$	c_1	$\cdots$	c_n

Men vestigt er eventueel de aandacht op dat een i bestaat met $a_i \neq c_i$ door te zeggen 'v kan op ten minste twee manieren als lineaire combinatie van $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ geschreven worden'.

		$\vec{v}$	$\vec{e}_1$	$\cdots$	$\vec{e}_n$	$*$	$*$
Als	$\vec{v}$	0	$*$	$\cdots$	$*$		
dan	$\vec{v}$	0	$*$	$\cdots$	$*$	0	0

Wegens de regels uit de vectorrekening

		$\vec{e}_1$	$\cdots$	$\vec{e}_n$
Als	$\vec{u}$	a_1	$\cdots$	a_n
	$\vec{v}$	b_1	$\cdots$	b_n
dan	$k\vec{u}$	ka_1	$\cdots$	ka_n
	$\vec{u} + \vec{v}$	$a_1 + b_1$	$\cdots$	$a_n + b_n$

Daaruit volgt dan

Elke lineaire combinatie
van lineaire combinaties van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$
is een lineaire combinatie van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

Deze stelling wordt veralgemeend door

		$\vec{u}$	$\vec{y}$	$\vec{w}$	$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_n$
	$\vec{x}$	*	*	*	*	...	*
Als	$\vec{u}$	0	0	0	*	...	*
	$\vec{v}$	o	0	0	*	...	*
	$\vec{w}$	0	0	0	*	...	*
dan	$\vec{x}$	0	0	0	*	...	*

10 Vrije rijen — Voortbrengende rijen — Basissen

De rij $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *is voortbrengend*

a . s . a .

		$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_n$
$\forall \vec{v} \in V$	$\vec{v}$	*	...	*

De rij $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *is vrij*

a . s . a .

geen van haar leden lineaire combinatie is van de "overigen".

Beter uitgedrukt

De rij $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *is niet-vrij*

a . s . a .

		$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_i$	...	$\vec{e}_n$
$\exists i \in \mathbf{N}$	$\vec{e}_1$	*	...	* 0 *	...	*

Wegens stelling ⊛ van § 9

Elke extensie van een voortbrengende rij is een voortbrengende rij
Elke extensie van een niet-vrije rij is een niet-vrije rij
Elke restrictie van een vrije rij is een vrije rij
Elke restrictie van een niet-voortbrengende rij is een niet-voortbrengende rij

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ vrije rij

$$\Downarrow$$

geen vector kan op tenminste twee manieren als
lineaire combinatie van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ geschreven worden.

$$\Downarrow$$

$\vec{o}$ kan op juist één manier als lineaire combinatie
van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ geschreven worden

$$\Downarrow$$

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ vrije rij

Bewijs door contrapositie

✱ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ is een niet-vrije rij

$$\Downarrow$$

	$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_i$	...	$\vec{e}_n$
$\vec{e}_i$	0	...	0 1 0	...	0
$\vec{e}_i$	*	...	* 0 *	...	*

$$\Downarrow$$

Een vector (tenminste) wordt op twee manieren als lineaire combinatie van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ geschreven.

$$\Downarrow$$

	$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_i$	...	$\vec{e}_n$
$\vec{o}$	*	...	* 1 *	...	*

$$\Downarrow$$

	$\vec{e}_1$	...	$\vec{e}_i$	...	$\vec{e}_n$
$\vec{e}_1$	*	...	* 0 *	...	*

$$\Downarrow$$

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ is een niet-vrije rij.

De leden van elke vrije rij zijn onderling verschillend en zijn verschillend van nul

*

	$\vec{v}$	$\vec{v}$
$\vec{o}$	1	–1
$\vec{o}$	–1	1

	$\vec{o}$
$\vec{o}$	1
$\vec{o}$	1

BASIS = *Vrije en Voortbrengende rij*

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *is een* BASIS

a . s . a .

elke vector op juist één manier als lineaire combinatie van $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ geschreven kan worden.

De Dimensiestelling

Als $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *een basis is van een vectorruimte,*

dan *bevat elke basis van die vectorruimte juist* n *leden*

11 Vectoren en coëfficiënten verschillend van nul

In het geval van vectoren en coëfficiënten verschillend van nul

$$\vec{u} = a\vec{v} + \vec{w} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = a^{-1}\vec{u} - a^{-1}\vec{w}$$

Dus :

Vectoren en coëfficiënten niet nul !

	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$
$\vec{u}$	0	*	*
	a . s . a .		
$\vec{v}$	*	0	*
	a . s . a .		
$\vec{w}$	*	*	0

12 Het hoedenspel

Zoals al de fundamentele resultaten van de elementaire lineaire algebra hebben we ook de dimensiestelling te danken aan *Grassman*. Ze draagt de naam van *Austauschungsatz* of *Austauschsatz*, die de idee van substitutie oproept en tenslotte die van een *manipulatie* om ze uit te voeren. In feite zullen we in het bewijs van de dimensiestelling opeenvolgende transformaties van een verzameling vectoren uitvoeren; deze worden alle gerealiseerd door de vervanging van een vector door een andere. Zij die de naam *Austauschungsatz* aan de dimensiestelling gegeven hebben *beeldden* zich deze vervangingen in, juist zoals muzikanten de muziek horen terwijl ze een partituur lezen. Maar de muziek bestaat onafhankelijk van haar notatie, en kan zich via andere media overdragen. Men kan de dimensiestelling en haar bewijs overdragen zonder langs de vernederingen van de gewone formele notatie te moeten gaan, op voorwaarde dat men gedeeltelijk gebruik maakt van een niet geschreven taal die echte en concrete substituties mogelijk maakt. Sinds onheugelijke tijden hebben de wiskundigen andere notaties gebruikt dan het allerheiligst wiskundig geschrift dat min of meer geformaliseerd is. Meetkundige figuren en abacussen zijn er voorbeelden van. De abacussen en telramen zijn nog in vele landen in gebruik, en de meerderheid van de met de hand uitgevoerde berekeningen zijn geen 'geschreven berekeningen'. Tenslotte, de ordinatoren zelf rekenen vanaf een niet geschreven notatie.

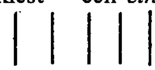
*

'Zij $\vec{v}$ een vector van de vectorruimte V'.
Wij weten zeer goed dat de letter met het pijltje $\vec{v}$ de vector *niet* is. De vector is noch deze letter, noch een hoeveelheid inkt, noch een goed geplaatste hoeveelheid krijt. Traditioneel wordt de vector door concrete voorwerpen voorgesteld: inktsporen en minimonumenten krijt. Men verliest a priori niets aan strengheid als

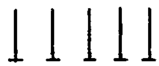
men ze voorstelt door ander handige voorwerpen... en bijvoorbeeld door de zo handelbare kegels. Elementen van de vectorruimte $\vec{V}$ worden door kegels voorgesteld

Twee verschillende kegels kunnen dezelfde vector voorstellen, en a priori, elke kegel kan elke vector voorstellen.

Telkens als wij een eindige verzameling kegels te voorschijn toveren, tonen we eigenlijk een *eindige familie* – of, zo men verkiest – een *eindige rij* vectoren. In het vervolg van dit artikel zullen wij de kegels van de ene kleur voorstellen door



en de kegels van een andere kleur door



Zoals in de vorige paragraaf beperken we ons tot vectoren en coëfficiënten die *niet nul* zijn.

Men vertaalt de uitlating

een vector $\vec{x}$, niet nul, is lineaire combinatie, met coëfficiënten verschillend van nul, van $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

door een gekleurde hoed van bepaalde vorm $\sqcap$ te plaatsen op de kegel die $\vec{x}$ voorstelt en de kegels die $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ voorstellen een hoed $\wedge$ op te zetten, die van de vorige verschilt in vorm of kleur.
Deze kegels met hoeden of blootshoofds drukken een stelling uit.
De stelling van paragraaf 11, essentieel voor ons onderwerp, wordt dan

Hoedenspel

Elke permutatie van hoeden zet een ware stelling om in een ware stelling.

Stelling van de hoeden

*

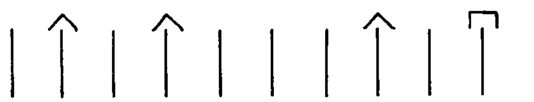
Nu hebben we alles tot onze beschikking wat we nodig hebben om de dimensiestelling aan te tonen. Maar vermits de geschenken de vriendschap onderhouden, zullen we eerst een kleine gratis uitdeling hebben.

13 Geschenken

Elke niet vrije rij vectoren, die niet nul zijn

laat een plaatsing van de hoeden toe

... laat een plaatsing van de hoeden toe waar geen $\sqcap$ gevolgd wordt door een $\wedge$



Men wist per definitie dat

VRIJE RIJ

= Rij waarvan geen lid een lineaire combinatie is van de 'overigen'

Geschenk:

VRIJE RIJ

= Rij waarvan geen lid lineaire combinatie is van haar 'voorgangers'

Dit zeer nuttig resultaat om een eindige rij vectoren te testen om de eventuele 'niet-vrij' – ziekte op te sporen, stelt ons in staat elke eindige rij tot vrije rij te zuiveren.

Elke eindige rij bevat een vrije rij

$\vec{x}$ *lineair afhankelijk van* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

a.s.a.

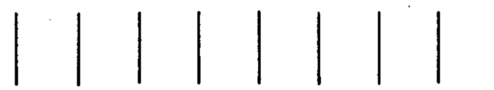
$\vec{x}$ *is lineaire combinatie van* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$

Het hoedenspel toont aan dat de onafhankelijkheid, uitgedrukt door de *lineaire combinatie*, van een bijzonder type is. Geen van de axioma's van de verzamelingentheorie van Nicolas *Bourbaki* is onafhankelijk van de vorige... en toch is een van hen niet onafhankelijk van de overige.

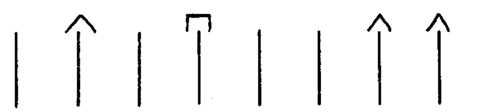
> De logische afhankelijkheid laat het hoedenspel niet toe.

*

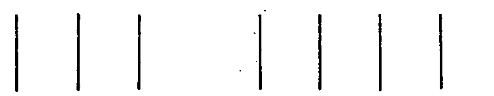
Als de voortbrengende rij



zó is dat



dan is de rij

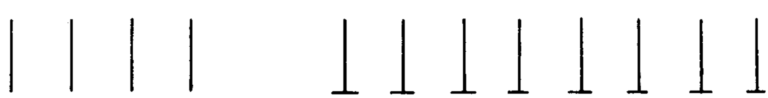


bekomen door de uitstoting van  nog een voortbrengende rij.

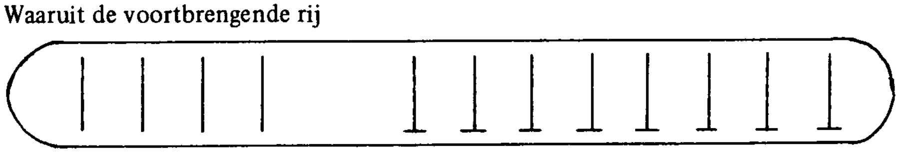
> **Gevolg**
>
> Elke voortbrengende rij omvat een basis

*

Hier is een vrije rij en een voortbrengende rij



Waaruit de voortbrengende rij



die men tot basis zuivert door elke vector die lineaire combinatie is van de vorige uit te stoten, wat de oorspronkelijke vrije rij niet treft.

> Als een vectorruimte een eindige voortbrengende rij omvat,
> dan kan elke vrije rij tot basis uitgebreid worden.

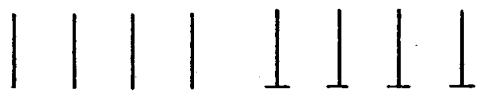
14 De Dimensiestelling

Als	*een vectorruimte een eindige basis toelaat,*
dan	*hebben al de basissen van de vectorruimte hetzelfde eindig aantal elementen , dat* ▽ *dimensie van de vectorruimte* ▲ *genoemd wordt.*

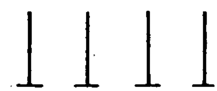
We hoeven alleen maar aan te tonen

Als	*een vectorruimte een vrije rij van n elementen omvat,*
dan	*omvat elke voortbrengende rij ten minste n elementen.*

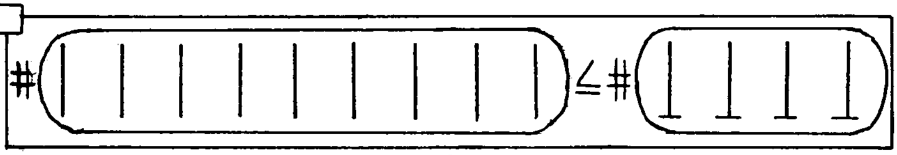
✱ SCRIPT van een gemimeerd BEWIJS

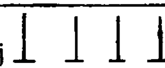
Kegels van verschillende kleur 

Vrije rij 

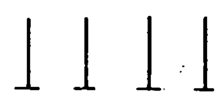
Voortbrengende rij 

Men moet aantonen dat



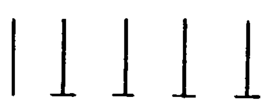
Men toont alleen de voortbrengende rij  Men steekt de vrije rij weg, en men bewijst dat ze niet meer dan $n = 4$ elementen kan bevatten.

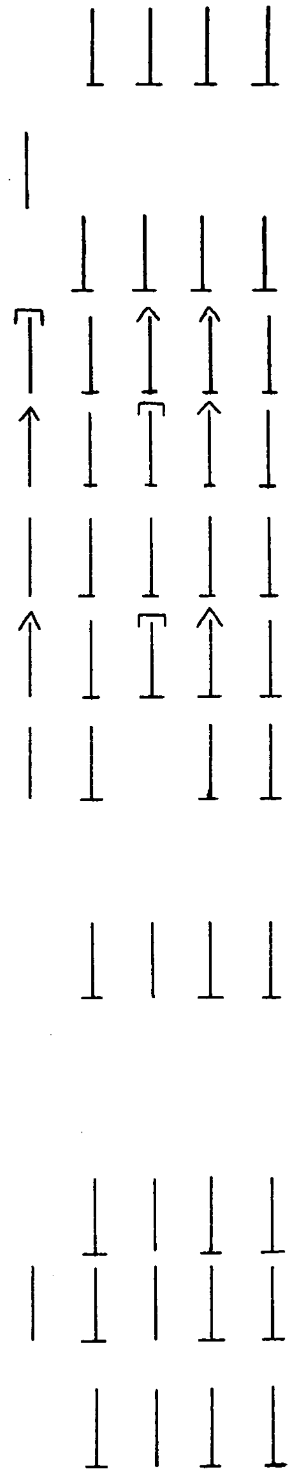
*



- Hier is de voortbrengende rij
  De vrije rij is leeg
  O.K.

- De vrije rij is niet leeg,
  een van haar elementen
  voegt zich bij de voortbrengende rij.
  De aldus bekomen nieuwe rij
  is voortbrengend.





Maar, de rij
was reeds voortbrengend.

Dus

is lineaire combinatie van

Dit wordt uitgedrukt door, bijvoorbeeld,

HOEDENSPEL

Voortbrengende rij

met

Dus
is voortbrengende rij.

Men mag zeggen dat een | in de plaats komt van een $\perp$

Voortbrengende rij

- Er blijft geen element meer over in de vrije rij
  O.K.
- Er blijft ten minste een element in de vrije rij

Een vector die in die rij overblijft |

voegt zich bij de voortbrengende rij

De aldus bekomen nieuwe rij

is voortbrengend

Maar de rij
was reeds voortbrengend

Dus

is lineaire combinatie van
Wat met de hoeden kan uitgedrukt worden

?

? is onmogelijk, want
is vrije rij.

Laat ons veronderstellen

Zeker een hoed ^ op een

HOEDENSPEL

Voortbrengende rij

waarvan een vector

lineaire combinatie is van de overige

Dus, de andere vormen een voortbrengende rij
Men mag zeggen dat twee in de plaats

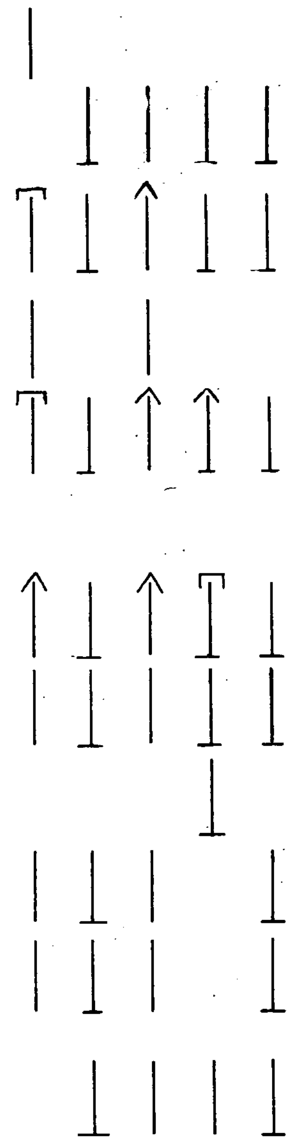
gekomen zijn van twee om een nieuwe
voortbrengende rij te bekomen

(SUBSTITUTIE)

- ●●● Er blijft geen vector meer over in de vrije rij
  O.K.

- ●●● Er blijft nog een vector in de vrije rij

Hier is



Hij voegt zich bij de voortbrengende rij

om een nieuwe voortbrengende rij te vormen

Maar de rij
was reeds voortbrengend
Dus

is lineaire combinatie van
Wat kan uitgedrukt worden met hoeden

Eerst
en dan tenminste een hoed ∧

op een van de ⊥ want de rij
is vrij.

Bijvoorbeeld

HOEDENSPEL!

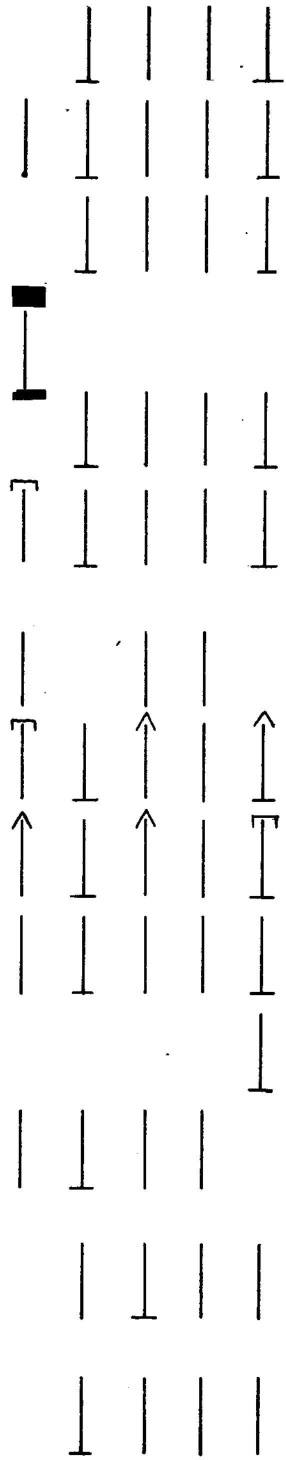
Voorbrengende rij

waarvan een vector

lineaire combinatie is van de overige

Dus, de overige vormen zelf reeds een
voortbrengende rij

Men mag zeggen dat drie | | | van de vrije rij
in de plaats gekomen zijn van drie ⊥ ⊥ ⊥ van de
voortbrengende rij om een nieuwe voortbrengende rij
te vormen



●●●● Geen elementen meet in de vrije rij
O.K.

●●●● Er blijft een vector in de vrije rij

Hier is |

Hij voegt zich bij de voortbrengende rij

om een nieuwe voortbrengende rij te vormen

Maar de rij
was reeds voortbrengend
Dus

is lineaire combinatie van
Dit kan met hoeden weergegeven worden
met eerst,
Vervolgens een hoed $\wedge$

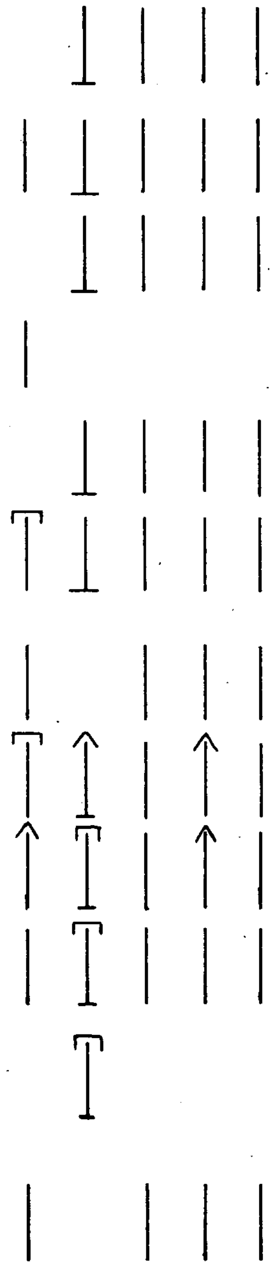
op een van de $\perp$ want de rij
is vrij
Bijvoorbeeld

HOEDENSPEL

Aldus is
een voortbrengende rij

waarvan de vector

lineaire combinatie is van de overige
Dus de overige vormen een voortbrengende rij.



Men mag zeggen dat vier van de vrije rij

in de plaats gekomen zijn DE vier
van de voortbrengende rij om een nieuwe
voortbrengende rij te vormen.

●●●●● Geen vectoren meer in de vrije rij
O.K.

●●●●● Is het mogelijk dat er een vector overblijft
in de vrije rij?

ABS ●

Hier is

Vermits de rij
voortbrengend is

zou de overblijvende vector · van de vrije rij
een lineaire combinatie zijn van de overige
vectoren van dezelfde vrije rij

Wat absurd is!

*

Bovenstaand bewijs is alleen het script van de film of van het toneelstuk dat het ware communicatiemiddel van het bewijs is. De film brengt gemakkelijker het bewijs over dan het script de film overbrengt.

*

Wij hebben soms dit bewijs gegeven in afdelingen met weinig uren wiskunde zonder gebruik te maken van het begrip *vrije rij*.

15 De pijlers van de elementaire lineare algebra

Met de geschenkstelling van § 13 en de dimensiestelling is het gemakkelijk aan te tonen dat

Voor elke deelruimte S van een eindigdimensionale vectorruimte V geldt.

$$\boxed{\dim S \leqq \dim V}$$

De eenvoud van het bewijs is geen voldoende reden om het weg te toveren... zoals men het jammer genoeg al te dikwijls doet.
Voor het bewijs construeert men een in elkaar omvatte keten van vrije rijen van S, $\vec{e}_1 \quad \vec{e}_1\, \vec{e}_2 \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \ldots$ en men stelt vast dat deze eindigt... Daaruit volgt dan dat de laatste eindige rij een basis is voor S.
Dit bewijs gebruikt eigenlijk de gelijkwaardigheid van *E. Noether* tussen

Basissatz en *Teilerkettensatz,*

een van de belangrijkste begrippen uit de moderne algebra.

*

Met deze belangrijke resultaten is het nu kinderspel om aan te tonen dat

Voor elk koppel deelvectorruimten van een eindigdimensionale vectorruimte

$$\boxed{\dim A + \dim B = \dim (A + B) + \dim (A \cap B).}$$

en dat

Voor elke lineaire afbeelding $f : V \to W$

$$\boxed{\dim fV + \dim f^{-1}\{\vec{O}\} = \dim V}$$

Dit laatste speelt een zeer belangrijke rol bij de studie van *stelsels lineaire vergelijkingen.*

Aldus werden, met zeer weinig moeite, al de belangrijke stellingen van de theorie van de eindigdimensionale vectorruimten bereikt.

16 Besluit

Het is mogelijk de dimensiestelling voor eindigdimensionale vectorruimten aan te tonen op een strenge, aanschouwelijke wijze, die ook creatief is van een werkelijke intuïtie uit hoofde van het vectorieel zijn. Dank zij deze sleutelstelling kunnen de grondstellingen van de theorie van de eindigdimensionale vectorruimten met weinig moeite verkregen worden.

In de nieuwe hervorming van het wiskunde-onderwijs, die door het meesterlijk experiment van FREDERIQUE [EG], [EM1] wordt aangekondigd, zullen de reële getallen en het vectorvlak reeds in het lager onderwijs ingevoerd worden. Andere eindigdimensionale vectorruimten, o.m. de fascinerende 'aankoop-vectorruimten',

zullen op dit niveau ingevoerd worden.
In het licht van deze hervorming, zullen waarschijnlijk de dimensiestelling voor eindigdimensionale vectorruimten en haar intieme vrienden, de andere pijlers van de theorie der eindigdimensionale vectorruimten, reeds in het eerste jaar van het middelbaar onderwijs hun plaats vinden.
De eerste hervorming had de durf het wiskunde-onderwijs op het middelbaar niveau aan te vangen met de zeer aristoteliaanse verzamelingentheorie [MW1]. De revolutie die nu aan de gang is zal er de mijlpaal van de lineaire algebra plaatsen, die een van de fundamentele punten is van het hedendaagse wiskundig denken.

17 Besluit van het besluit

In afwachting?
Vooral niet wachten!
De geschapen pedagogische middelen gebruiken om aan ieder, overal, en zo vlug mogelijk het bewijs van de dimensiestelling en de fundamentele begrippen van de eindigdimensionale vectorruimten, de ware sleutels van het rijk van de moderne wiskunde, te onderwijzen.

BIBLIOGRAFIE

[EM1] FREDERIQUE, *Les enfants et la Mathématique 1*, Didier, Brussel, Montreal - Parijs, 1970. (Nederlandse vertaling te verschijnen).

[EM2] FREDERIQUE, *Les enfants et la Mathématique 2*, Didier, Brussel – Montreal – Parijs, 1971.

[EM3] FREDERIOUE, *Les enfants et la Mathématique 3*, Didier, Brussel – Montreal – Parijs, te verschijnen.

[EM4] FREDERIQUE, *Les enfants et la Mathématique 4*, Didier, Brussel – Montreal – Parijs, in voorbereiding.

[EG] FREDERIQUE et PAPY, *L'enfant et les Graphes*, Didier, Brussel – Montreal – Parijs, 1968.

[MW1] PAPY, *Moderne Wiskunde 1* (vertaald door A. en O. Mogensen), Didier, Brussel, 1965.

[F2] PAPY, *Inleiding tot de vectorruimten* (vertaald door P. Wuyts), Plantijn, Antwerpen, 1966.

*

Pool, Poolverzameling en E verzameling.

A. ROODHARDT
Dokkum

In Euclides zijn al een aantal voorstellen voor de behandeling van pool en poollijn gedaan. De bedoeling van dit artikel is niet daar het zoveelste aan toe te voegen.
Dit is een weergave van een aantal lessen waarin samen met de klas een stuk theorie werd opgebouwd. Een groot gedeelte vond plaats in de vorm van klassegesprekken, waarbij het aandeel van de leraar zoveel mogelijk werd beperkt. De leerlingen hadden bijna een jaar ervaring met de B-stof, zodat de gebruikelijke pooltheorie bekend was. In examenklas is dit werkstuk ook gebruikt.
De aanloopvoorbeelden zijn gekozen omdat ze gemakkelijk te construeren zijn.

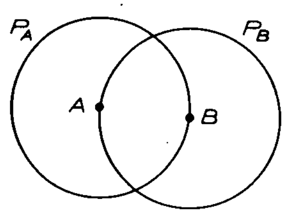


fig.1.

In het platte vlak worden aan een willekeurig punt X de punten van de cirkel (X, r) toegevoegd. (r constant). Notatie: $X \rightarrow P_X$.
Deze toevoeging heeft de volgende bijzonderheid:

$$\boxed{\text{Als } B \in P_A \text{, dan } A \in P_B}$$

Indien een toevoeging $X \rightarrow P_X$ deze 'wederkerigheid' voor alle in aanmerking komende punten vertoont, spreken we van pool (X) en poolverzameling (P_X).

In de analytische meetkunde kunnen we het voorbeeld schrijven als

$$A\ (x_1\ , y_1) \rightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

Bewijs van de wederkerigheid:

$A\,(x_1\,,y_1)\,;P_A:\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$

$B\,(x_2\,,y_2)\,;P_B:\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r^2$

$B\in P_A:\qquad (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=r^2$ (I)

$A\in P_B:\qquad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)=r^2$ (II)

In (I) mogen we x_1 met x_2 en y_1 met y_2 verwisselen, waardoor (II) ontstaat.
We kunnen ook zeggen: In P_A mogen we x met x_1 en y met y_1 verwisselen.

We definiëren een verzameling punten met behulp van een vergelijking.
Het toevoegingsvoorschrift wordt dan:

$$(x_1\,,y_1)\rightarrow f(x_1,x,y_1,y)=0.$$

Onder welke voorwaarden voor $f(x_1,x,y_1,y)=0$ er sprake van pool en poolverzameling?

$A\ (x_1,y_1)\,;P_A\ :\ f(x_1,x,y_1,y)=0$

$B\ (x_2,y_2)\,;P_B:\ f(x_2,x,y_2,y)=0$

$B\ \in P_A:\qquad f\ (x_1,x_2,y_1,y_2)\ =0$

$A\ \in P_B\qquad f\ (x_2,x_1,y_2,y_1)=0$

Als $B\in P_A$ dan $A\in P_B$ wordt nu:
Als $f(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$, dan $f(x_2,x_1,y_2,y_1)=0$
Hieruit volgt de voorwaarde:

In $f(x_1,x,y_1,y)=0$ moeten we x met x_1 en y met y_1 kunnen verwisselen.

Met de volgende termen kunnen we geschikte formules $f(x_1,x,y_1,y)=0$ opbouwen.

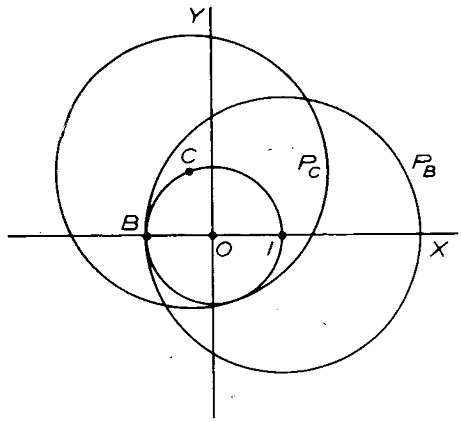
$(x_1+x)\,;(y_1+y)\,;\ xx_1\,;yy_1\,;(x-x_1)^2\,;(y-y_1)^2\,;(x+x_1)^2\,;(y+y_1)^2\,;$
$(xy_1+yx_1)\,;(xy+x_1y_1)\,;\ .\ .\ .\ .\ .$

Voorbeelden

1 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r^2=0$ (voor $r=0$ de identieke transformatie)
2 $(x+x_1)^2+(y+y_1)^2-r^2=0$ (voor $r=0$ puntspiegeling t.o.v. O)
3 $(x+x_1)^2+(y-y_1)^2-r^2=0$ (voor $r=0$ lijnspiegeling t.o.v. Y-as)
4 $ax_1x+by_1y-r^2=0$ (voor $a,b,\neq 0$; $r=0$: $(0,0)\rightarrow R_2$ en $r\neq 0$: $(0,0)\rightarrow\phi$).
5 $a\,(x_1-p)(x-p)+b\,(y_1-q)(y-q)-r^2=0$.
6 $x_1y+y_1x+c=0$ (voor $c=0$ wordt aan P toegevoegd het spiegelbeeld van OP t.o.v. de X-as)
7 $x_1\,y-y_1\,x+c=0$ (voor $c=0$ wordt aan P toegevoegd de lijn OP)
8 $y_1\,y-p\,(x+x_1)=0$.
9 $(y_1-b)(y-b)-p\,(x-a+x_1-a)=0$.
10 $x_1+x+y_1+y+c=0$.
11 $(x-x_1)^2-(y-y_1)^2+c=0$.
12 $x_1\,y_1+xy+c=0$.

Hierbij werden de volgende vragen gesteld:
Welke punten kunnen als pool optreden?
Kan een poolverzameling meer dan één pool hebben?

fig.2.



We nemen de toevoeging (pool→poolverzameling)

$$(x_1,y_1) \to (x+x_1)^2 + (y+y_1)^2 - 4 = 0\,.$$
$$B\,(-1,0) \text{ dan } P_B : (x-1)^2 + y^2 = 4\,. \text{ Nu blijkt: } B \in P_B$$

Dus B behoort tot zijn **eigen** poolverzameling.

We noemen de punten die tot hun eigen poolverzameling behoren: de *E*- verzameling van de toevoeging.

In dit voorbeeld is de *E*-verzameling de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Immers de voorwaarde voor (x_1, y_1) om tot de *E*-verzameling te behoren is: $(x_1 + x_1)^2 + (y_1 + y_1)^2 = 4$ of $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Algemeen:

De *E*-verzameling van $(x_1, y_1) \to f(x_1, x, y_1, y) = 0$ is $f(x, x, y, y) = 0$

Voor de genoemde voorbeelden geeft dit:

1 $r \neq 0$, geen *E*-verz.	$r = 0$. *E*-verz. R_2.	
2 $r \neq 0$, cirkel.	$r = 0$, *E*-verz. $\{O\}$	
3 Twee lijnen.	$r = 0$, *Y*-as	
4 $ax^2 + by^2 = r^2$.	voor $a, b, r \neq 0$:	Cirkel als $a = b$.
		Ellips als $a = b$, $a > 0$, $b > 0$.
		Hyperbool als $a.b < 0$.

5 Als vorige met middelpunt willekeurig.

6 $xy = -\frac{1}{2}c$. $c \neq 0$, hyperbool. $c = 0$ X-as en Y-as.
(dit voorbeeld kan aanleiding geven tot het opstellen van een voorschrift met een willekeurig lijnenpaar als E-verzameling)
8 $y^2 = 2px$ Parabool.
10 $x + y = -\frac{1}{2}c$.
12 $xy = -\frac{1}{2}c$.

In het voorbeeld van fig.2 kunnen we zien dat de poolverzamelingen van de E-punten (elementen van de E-verzameling) raken aan de E-verzameling. We onderzoeken of dat ook gebeurt in die gevallen waarin de poolverzameling een lijn(poollijn) is en de E-verzameling een cirkel, ellips, hyperbool of parabool, zoals in de voorbeelden 4,5,6,8,9.
(E-verz. lijnenpaar laten we achterwege)

We tonen eerst aan dat in deze gevallen een lijn hoogstens één pool heeft.

Voorbeeld 4: Stel (x_1, y_1) en (x_2, y_2) polen van één lijn.

Dan $ax_1x + by_1y - r^2 = 0$
$ax_2x + by_2y - r^2 = 0$ dezelfde lijn, dus $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$

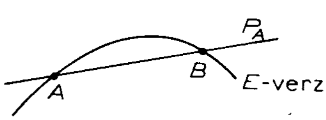
In de andere voorbeelden soortgelijke bewijzen.

Opm. Bij $(x_1, y_1) \to x_1x + y_1y = 1$ heeft een lijn door O geen pool.
Bij $(x_1, y_1) \to x_1 + x + y_1 + y + c = 0$ hebben alle punten waarvoor $x_1 + y_1 =$ constant dezelfde poollijn.

In de gekozen gevallen geldt:

> De poollijn van een E-punt is raaklijn aan de E-verzameling.

fig.3.



Bewijs:
Veronderstel dat de poollijn van E-punt A de E-verzameling in een van A verschillend punt B snijdt. We hebben dan:

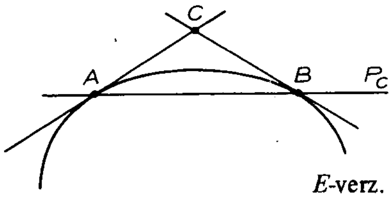
$B \in E$-verz, dus P_B door B

$B \in P_A$, dus P_B door A.

gevolg: AB is de poollijn van B. Maar dan heeft AB twee polen A en B. Dat is in strijd met het voorgaande.

> Als de poollijn de E-verzameling snijdt, dan zijn die snijpunten de raakpunten van de raaklijnen uit de pool aan de E-verzameling.

fig.4.



Bewijs:

Stel P_C is de lijn AB. Dan $C \in P_A$ en $C \in P_B$. Dus CA en CB zijn raaklijnen.

De overgang naar de gebruikelijke formuleringen voor pool en poollijn t.o.v. een kegelsnede is nu eenvoudig.

Opm.

1. Rakingen, ook in andere gevallen, gaven mogelijkheid tot toepassing differentiaalrekening.
2. Vervanging van $=$ in het voorschrift door $<$, $>$ gaf aanleiding tot beschouwingen over het begrip omgeving. (ook niet wiskundige)
3. Door (x_1, y_1) op te vatten als toestand en $P(x_1, y_1)$ als de toestanden die hieruit kunnen voortkomen kwam de volgende formulering van de Wet van Boyle naar voren $xy - x_1 y_1 = 0$. Elk punt van de hyperbool is E-punt.
4. $e = i.r$ gaf : $e = x$, $i = y$, $r = \frac{x_1}{y_1}$ dus $x - \frac{x_1 y}{y_1} = 0$ of $xy_1 - x_1 y = 0$

(voorbeeld 7)

Experimenten Wiskunde in examenklassen 1971-1972

Ten behoeve van leraren die in contact wensen te treden met collega's die in de loop van dit jaar deelnamen aan experimenten, laten wij hier de namen van de betreffende scholen volgen.

Experiment Algebra-Analyse vwo

St. Pauluslyceum, Tilburg
Cobbenhagencollege, Tilburg
Sted. gymnasium, Leiden
Rijnlands Lyceum, Oegstgeest
Tweede V.C.L., den Haag
Chr.SG, Zeist
Triniteitslyceum, Haarlem
Cartesiuslyceum, Amsterdam
Sted. gymnasium, Arnhem
Kath.Geld.lyceum, Arnhem
Rhedenslyceum, Velp
Sted.lyceum, Zutphen
Rijks SG, Wageningen
Rijks SG, Zwolle
Sted. Gymnasium, Leeuwarden
Chr. Gymnasium, Leeuwarden
Lienwardcollege, Leeuwarden
Bogermancollege, Sneek

Experiment Meetkunde met vectoren vwo

J.F. Kennedyatheneum, Dongen
Bisschoppelijk college, Roermond
Sted. gymnasium, Leiden
Bonaventuracollege, Leiden
Joh.v.Oldebarneveltgym, Amersfoort
Rijks SG, Amersfoort
SG Casimir, Amstelveen
Coornhert SG, Haarlem
Mendelcollege, Haarlem
Triniteitslyceum, Haarlem
Eerste Chr. SG, Haarlem
Spinoza Lyceum, Amsterdam
Sted.gymnasium, Arnhem
Rhedens lyceum, Velp
Rijks SG, Tiel
Rijks SG, Wageningen
Aletta Jacobs Lyceum, Hoogezand
Sted. gymnasium, Leeuwarden
Chr.gymnasium, Leeuwarden
Lienwardcollege, Leeuwarden
Bogermancollege, Sneek

Definitief programma wiskunde-I vwo

Mgr.Zwijsen college, Veghel
Peelland college, Deurne
SG Sint Jan, den Haag
Huygens lyceum, Voorburg
RSG Schoonoord, Zeist
Osdorper SG, Amsterdam
Kath.Geld. lyceum, Arnhem
Marianum, Groenlo
Rijks SG, Heerenveen

Experiment havo

Mgr. Zwijsen college, Veghel
Peelland college, Deurne
Carolus Borromeus college, Helmond
Huygens lyceum, Voorburg
Osdorper SG, Amsterdam
Kath.Geld. lyceum, Arnhem
SG Nijmegen-west, Nijmegen
SG Westerkwartier-Noorderveld Leek

Red.

Centrale commissie begeleiding MAVO-Wiskunde

E.H. SCHMIDT
Amstelveen

De CCBMW heeft in december jl. haar interimrapport over het jaar 1970-1971 gepubliceerd. Eerder verscheen het interimrapport over de jaren 1968-1969 en 1969-1970. *)
De commissie is een samenwerkingsorgaan van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW), de Pedagogische Centra en het Mavo-Verband.

In 1968 formuleerde zij haar doelstellingen als volgt:
— de mavo-leraren hulp te bieden bij de oplossing van de onderwijskundige problemen, waarvoor de invoering van de moderne wiskundeleerstof hen plaatst;
— hun de gelegenheid te geven onder deskundige begeleiding hun eigen ervaringen te toetsen aan die van anderen en met elkaar overleg te plegen over leerstof en didactiek;
— na te gaan of de denkbeelden, die de commissie modernisering leerplan wiskunde ten aanzien van het mavo heeft ontwikkeld of zal ontwikkelen te realiseren zijn en eventueel in hoeverre wijziging gewenst is;
— door samenwerking van zovelen als mogelijk is een didactiek te ontwikkelen, die een optimale overdracht waarborgt.

In het verslagjaar werden de ongeveer 1000 deelnemers bijeengebracht in 46 werkgroepen en wel 37 groepen gebruikers van de methode 'Moderne Wiskunde' en 9 groepen gebruikers van de methode 'Van A tot Z'. De werkgroepen vergaderden tweemaal een gehele dag.
Voorafgaande aan deze bijeenkomsten belegde de commissie met de 26 gespreksleiders telkens een themadag, waarop een centraal thema werd ingeleid en besproken. Als zodanig werden aan de orde gesteld: de grote lijn in de leerboeken met betrekking tot het onderwerp vergelijkingen en ongelijkheden, daarbij de onderscheiding in kern- en keuzestof mede als basis voor differentiatie, en het onderwerp deductie in de meetkunde.
De commissie bedoelt niet een cursus te geven — deze taak heeft de CMLW op zich genomen — maar zij verwacht actieve deelname en een belangrijke inbreng van alle betrokkenen.

*)Verkrijgbaar bij het sekretariaat van de CCBMW p/a Chr. Pedagogisch Studiecentrum Postbus 30, Hoevelaken.

Een deel van de tijd is gewijd aan discussie in kleine groepen.
Wanneer blijkt dat een aantal leraren onvoldoende is ingespeeld op de nieuwe leerstof moet de gespreksleider soms langer dan bedoeld was bij de wiskundige inhoud van het thema stilstaan.
Ook door haar werkwijze wil de commissie de deelnemers laten ervaren dat er nog andere didactische werkvormen zijn dan het frontale lesgeven. Onze tijd vraagt een andere vorm van leiderschap en meer gevarieerde vormen van samenwerking dan vroeger.
Het wiskunde-onderwijs biedt hiervoor aanknopingspunten nu het gezamenlijk oplossen van problemen een steeds ruimere plaats gaat innemen.
Alleen al vanwege de tweede doelstelling hebben de bijeenkomsten een belangrijke functie. Zo kan men met elkaar spreken over het tempo, de knelpunten in de nieuwe leerstof, het bereikbare niveau, de werkmethode, het leerboek. Belangrijke gegevens worden doorgegeven naar inspectie en auteurs van leerboeken en omgekeerd.
Tot een evaluatie van het leerplan is de commissie nog niet gekomen. Misschien zal zij aan het einde van haar vijfde en laatste jaar, wanneer het leerplan een paar keer volledig is doorgewerkt, hieromtrent gegevens kunnen publiceren.
Inmiddels is het vierde jaar van de werkzaamheden van de commissie reeds een eind gevorderd. De eerste reeks bijeenkomsten met als centraal thema 'diagnostisch toetsen', toegepast op 'relaties en functies', heeft plaatsgevonden.
Het eerste seizoenverslag is verschenen. De tweede reeks zal betrekking hebben op werkvormen en vectoren.
Nadat in een bijlage bij het interimrapport 1969-1970 de resultaten van een enquête naar de mate van herscholing van de mavo-leraren werden vermeld, bevat het rapport 1970-1971 in een uitvoerige bijlage de resultaten van een enquête, waarvan de vragen betrekking hebben op vorm en inhoud van de begeleiding en op het werk van de leraren (bewijzen in de meetkunde, lessentabellen).
Gaarne vestig ik de aandacht van alle wiskundeleraren op de publicaties en het werk van onze commissie. Mogelijk willen ook anderen kennisnemen van de manier waarop de vernieuwing van het onderwijs in een vak kan worden gestimuleerd en begeleid.

NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN.

Naar aanleiding van verzoeken van leden deelt het bestuur mee dat op grond van het leerplan wiskunde en op grond van de in 1965 begonnen experimenten voor de wiskunde I (analyse en statistiek) zowel in de vijfde als in de zesde klas van het v.w.o. vier wekelijkse lesuren nodig zijn.
Voor wiskunde II zijn op dezelfde gronden 8 wekelijkse lesuren nodig, te verdelen over de klassen 5 en 6 of 4, 5 en 6.

Evenals vorige jaren zal ook dit jaar een bespreking van de experimentele eindexamens plaats vinden.
Voor de v.w.o.-examens op 9 september in Utrecht van 14.30-17.00 uur
Voor de h.a.v.o.- en m.a.v.o.-examens op 9 september in Utrecht, op 23 september in Roermond, op 30 september in Haarlem, op 7 oktober in Zwolle en op 14 oktober in Breda.
De h.a.v.o.- bijeenkomsten van 10.00- 12.30 uur en de m.a.v.o.-bijeenkomsten van 14.30-17.00 uur.
Nadere gegevens zullen nog volgen.

De jaarvergadering zal gehouden worden op 28 oktober 1972 in het jaarbeursgebouw te Utrecht.

Vereniging voor statistiek

Onder toezicht van het Ministerie van Economische Zaken zal de Vereniging voor Statistiek in 1972 voor de vierde keer de examens Statistisch Assistent-VVS en Statistisch Analist-VVS afnemen.

Examen Statistisch Assistent-VVS :	1 juni 1972 van 14.00-17.00 uur in Musis Sacrum te Arnhem
Examen statistisch Analist-VVS :	schriftelijk gedeelte 1 juni 1972 van 9.30-12.30 uur in Musis Sacrum te Arnhem
mondeling gedeelte	28-29-30 juni 1971 in het Bouwcentrum te Rotterdam

Degenen die aan de examens wensen deel te nemen dienen zich vóór 1 mei 1972 aan te melden bij de secretaris van de Commissie Statistische Examens VVS, de heer R. Tillemans, Bachstraat 67 Zevenaar. Aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij de secretaris.

Boekbespreking

H.J. Arnold. *Die Geometrie der Ringe im Rahmen allgemeiner affiner Strukturen.*(Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 4), Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1971, 86 blz., D.M. 36.
Het boekje behandelt een axiomatisering van de affiene meetkunde met behulp van zogenaamde vektoriele groepoïden. Men verkrijgt aldus een vergaande uitbreiding van een vektorruimte over een lichaam, en ook van de begrippen 'ringmeetkunde' en 'Spernerse meetkunde'.

A.C. Zaanen

H. Rund, *Invariant theory of variational problems on subspaces of a Riemannian manifold* (Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 5), Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 55 blz., D.M. 20.
In toepassingen van de variatierekening bij Riemannse meetkunden ontmoet men enerzijds problemen waarbij zekere klassen van deelruimten onderzocht moeten worden (bijv. bij de theorie der minimaaloppervlakten) en anderzijds problemen betreffende de bepaling van geschikte metrieken (bijv. bij de afleiding van de veldvergelijkingen van Einstein). In het bovengenoemde beknopte boekje worden deze twee soorten problemen met elkaar vergeleken.

A.C. Zaanen.

R. Bens, E. Bouqué, W. Dewilde, F. Smissaert, A. Snauwaert, G. Verschuere, *Opbouw* 4a, Wesmael-Charlier, Namen, 1971, XV + 278 blz.
Het boek is bestemd voor de derde klas (d.i. onze vierde) van het secundair onderwijs in België. Het valt uiteen in vier delen: logica, reële getallen, statistiek en veeltermen.
Het deel over logica heb ik met veel plezier gelezen. Het geeft niet te veel. En wat erin behandeld wordt, is goed doordacht. De schrijvers voorkomen notaties als $\{x \mid \ldots\}$, $\forall x: \ldots$ en eisen, dat men schrijft $\{x \in V \mid \ldots\}$ resp. $\forall x \in V: \ldots$, dus steeds met vermelding van de referentieverzameling V.
Het tweede deel getiteld 'reële getallen' gaat aanvankelijk over structuren. Groep, ring en veld (lichaam) passeren de revue. Ten slotte blijkt het volledige veld, d.i. het veld waarin de stelling van de bovenste grens geldt, de vanouds reeds bekende reële getallen te leveren. Aardig is, dat de stelling van de bovenste grens gebruikt wordt bij de bepaling van de afstand van een punt en een puntverzameling en bij de bepaling van de lengte van een cirkel. De mogelijkheid wordt gepostuleerd van een isomorfie van $\mathbb{R}^+, \cdot$ naar $\mathbb{R}, +$ en deze isomorfie leidt dan tot de definitie van de logaritmen. Eerst daarna wordt de machtsverheffing uitgebreid tot machten met rationele exponenten.
In het hoofdstuk over statistiek worden de gebruikelijke fundamentele begrippen van de beschrijvende statistiek behandeld. De schrijvers hebben zich ingespannen dit niet al te sappige onderwerp voor de leerlingen verteerbaar te maken.
Veeltermen zijn in deel 3 reeds uitvoerig ter sprake gekomen. De theorie wordt hier uitgebreid. De schrijvers spreken over veeltermen in de onbepaalde x. Dat is uiteraard correct. Maar wat zijn dat eigenlijk voor dingen? Eigenlijk zijn het rijen met de eigenschap, dat slechts een eindig aantal termen ervan van 0 verschilt. Zo is de veelterm in de onbepaalde x: $3 + 5x - x^3 + 2x^4$ eigenlijk de rij: $3, 5, 0, -1, 2, 0, 0, 0, \ldots$ Dat deze rij een veelterm genoemd wordt, komt doordat op een bepaalde manier som en produkt van twee dergelijke rijen gedefinieerd zijn. Kijk je goed, dan zie je in de veelterm helemaal geen x voorkomen. Alleen als je hem op een bepaalde manier schrijft, komt de letter x te voorschijn. Deze letter heeft echter geen andere dan notationele betekenis. Ze stelt niet een willekeurig reëel getal voor, maar ze stelt in feite niets voor. Vandaar het zonderlinge woord 'onbepaalde'. Wat voor indruk moet dit nu op onze leerlingen maken? Ze krijgen te zien de veelterm in de onbepaalde x: $3 + 5x - x^3 + 2x^4$. Even later zien ze de functie: $x \to 3 + 5x - x^3 + x^4$
En nu heet x een veranderlijke. Zou het niet de voorkeur verdienen een term, die toch niet begrepen kan worden, ook niet te gebruiken? Het is alleen maar een vraag om protest uit te lokken. Mochten de auteurs lust hebben hun mening in Euclides te verdedigen, dan graag.

P.G.J. Vredenduin

Didactische Literatuur.

uit Buitenlandse Tijdschriften

Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, XVIII, Heft 1, 1971.

H. Behnke, Die hohe Zeit Göttingens, zu einer Biographie über Hilbert;
W. Kroebel, Die traditionellen Bildungsvorstellungen als Hintergrund der Stundentafeln unserer Gymnasien;
W. Bos, Axiomatische Charakterisierung des arithmetischen Mittels;
W. Oberschelp, Ein neuer elementarer Beweis für die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:
D. Kohle, Charakterisierung der Stetigkeit reeller Funktionen durch Eigenschaften ihrer Graphen;
W.J. Burscheid, Eine ordnungstheoretische Darstellung zweier elementarer kombinatorischer Fragen;
H. Zeitler, Über Ovale in endlichen Ebenen;
G. Holland, Ein Vorschlag zur Einführung der reellen Zahlen als Dezimalbrüche;
N. Knoche, Moderner Mathematikunterricht eine Frage der Stoffauswahl?

The Mathematical Gazette, 389-392; october 1970-maart 1971.

T.J. Willmore, Whither geometry?
F. Smithies, What makes a mathematician?
E.N.R. Fletcher, Thee area of the curved surface of a hemisphere in Ancient Egypt;
D.S. Grimoditch, Computerbuilding blocks;
A.L. Davies, Rotating the fifteen puzzle;
F. Gerrish, How many triangles?
R.H. Thouless, The 12-balls problem as an illutration of the application of information theory;
J.L. Synge, The problem of the thrown string;
F. Smithies, Two remarks on a note by Mordell;
A.J. Moakes, The calculation of π ;
R.L. Goodstein, The generalized Vandermonde determinant;
R.L. Goodstein, A generalized permutation problem;
H. Sherwood, Sums of powers of integers and Bernoulli numbers.
T.A.A. Broadbent, The other Newmann;
E.C. Axford, Daniel Cumb;
G. Merlane, The use of matrix methods when solving simultaneous linear equations;
W.W. Wilson, An approach to complex numbers;
M. Holt, Group on the Möbius ring;
C.J. Bouwkamp, P.Janssen en A.Koene, Note on pantactic squares;
K.E. Bullen, The earth and mathematics;
B.L. Meek, „Design doodling" in a square;
J.R. Branfield, Geoboard geometry;
F.J. Budden, A non - commutative associative operation on the reals;
S. Kamal Abdali, Verification of associativity of a binary equation.
J.K. Buckhouse, A simple introduction to tests of significance;
T.J. Fletcher, Doing without calculus;
B. Banks, The „disaster kit";
L.R. Chapman en P.Butler, July thoughts;
Gr.S. Smithers, Public opinion polls in schools;
P. Shiu, Triangular numbers, two applications;
V. Bryant, Reducing classical axioms;
G.R. Garside, A recursive approach to raffles with replacement;
H.M. Cundy, Getting it taped;
A.E. Lawrance, Playing with probability; return match.

Nummer 392 van de M.G. draagt de titel *'Centenary issue'* en is gewijd aan de herdenking van het feit, dat in januari 1871 de *Association for the reform of geometry teaching*, tot stand kwam. Prof. I Ligthill schreef een inleidend artikel. Een aantal belangrijke bijdragen uit de jaren 1871-1970 werden in dit nummer herdrukt.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek

276 Op de velden van een 'schaakbord' met 25 velden schrijft men de getallen 1 - 25. Gevraagd wordt dit zo te doen, dat het minimum verschil tussen getallen op twee aangrenzende velden zo groot mogelijk is.
Los de opgave op voor het geval, dat onder aangrenzende velden verstaan wordt:
a. velden, die een zijde gemeen hebben,
b. velden, die een zijde of een hoekpunt gemeen hebben.

227 Het is op verscheidene manieren mogelijk natuurlijke getallen *a*, *b* en *c* te vinden, waarvoor

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Zelfs is het daarbij mogelijk *a*, *b* en *c* zo te vinden, dat $b - a$ gelijk is aan een willekeurig positief geheel getal. Eist men, dat $b - a = k$, dan kan men aan de eis voldoen door b.v. te kiezen

$$\frac{1}{3k} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{12k}.$$

We stellen nu de extra eis, dat de g.g.d. van *a*, *b* en *c* gelijk aan 1 is. Voor welke waarden van $b - a$ vinden we dan een oplossing?

Oplossingen

274 De nieuwjaarswens van de heer Kootstra bestond ditmaal uit de vraag, wat het laatste van 0 verschillende cijfer van 1972! is. Zoals gewoonlijk kwam de opgaaf met de oplossing keurig dichtgeplakt erbij. Op het eerste gezicht dacht ik het varkentje spoedig te zullen wassen. Het bleek echter een stekelvarken te zijn.
Laat uit 1972! eerst alle factoren weg, die door 5 deelbaar zijn. Het overblijvende produkt noteren we: red 1972!.
Verder voeren we als afkorting in voor het laatste van 0 verschillende cijfer van het natuurlijke getal *a*: lc *a*.
We rekenen nu eerst uit: lc red 1972!. Omdat

$$\text{lc } 1.2.3.4.6.7.8.9 = 6$$

is

$$\text{lc red } 1970! = 6$$

en dus

$$\text{lc red } 1972! = 2.$$

Nu beschouwen we het produkt van de factoren uit 1972!, die wel deelbaar door 5 zijn. Noteer dit produkt: res 1972!.

res $1972! = 5^{394}\ 394!$

We gaan op de ingeslagen weg verder.

lc red $394! = 4$, res $394 = 5^{78}\ 78!$

lc red $78 = 4$, res $78 = 5^{15}\ 15!$

lc red $15! = 4$, res $15! = 5^{3}\ 3!$

lc red $3! = 6$

Zodat 1972! gelijk is aan 5^{490} maal een getal, waarvan het laatste van 0 verschillende cijfer gelijk is aan lc 2 . 4 . 4 . 4 . 6, dus aan 8.
Een getal p, dat op 8 eindigt en meer dan één factor 2 bevat, eindigt op 08, 28, 48, 68 of 88. Vermenigvuldig dit getal met 5 en we krijgen een getal $5p$, waarvoor lc $5p = 4$.
Als lc $p = 4$, dan is lc $5p = 2$;
als lc $p = 2$, dan is lc $5p = 6$;
als lc $p = 6$, dan is lc $5p = 8$ enz.
(we hebben immers steeds met getallen te maken, die meer dan één factor 2 bevatten).
Omdat $490 = 2 \pmod 4$ geldt
lc $p = 8 \Rightarrow$ lc $5^{490} p = 2$
Het gevraagde cijfer is dus 2.
U weet nu gelukkig al, dat er volgend jaar 6 uitkomt. Maar ik vrees, dat de heer Kootstra dan weer iets anders bedenkt.

275 Gevraagd wordt het aantal verschillende (niet-congruente) zeshoeken, waarvan de hoekpunten hoekpunten van een gegeven regelmatige zeshoek zijn.
Er zijn drie verschillende soorten zijden: zijden die twee opvolgende hoekpunten verbinden, zijden die twee punten verbinden waar één punt tussen ligt, en zijden die twee overstaande punten verbinden. We noemen deze zijden resp. zijden van de soort z_1, z_2 en z_3.
Hieronder volgt een methode om systematisch alle zeshoeken te vinden.
a. De zeshoek heeft $3 z_3$ (fig. 1 en 2).
b. De zeshoek heeft $2 z_3$. Ga aan een van van de uiteinden door met $2 z_1$ en je krijgt fig. 3. Ga door met een z_1 en een z_2 en je krijgt fig. 4. Ga door met $2 z_2$ en je krijgt fig. 4.
c. De zeshoek heeft $1 z_3$ met aan beide uiteinden aansluitend een z_1 (fig. 6).
d. Idem met aan het ene uiteinde een z_1 en en aan het andere een z_2 (fig. 7.).
e. Idem met aan beide uiteinden een z_2 (fig. 8).
f. De zeshoek heeft geen z_3. Begin met twee opvolgende z_2 en je krijgt fig. 9 of fig. 10.
g. Idem en twee niet opvolgende z_2 geeft fig. 11.
h. Idem en $1 z_2$ lukt niet, zodat nog alleen fig. 12 overblijft.

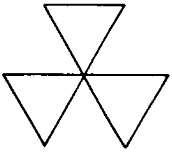


fig. 1

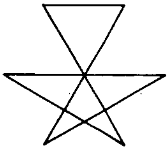


fig. 2

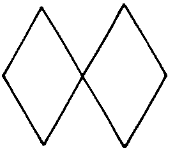


fig. 3

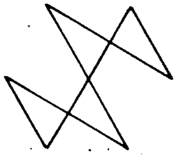


fig. 4

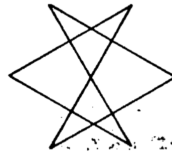


fig. 5

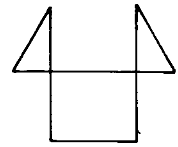


fig. 6

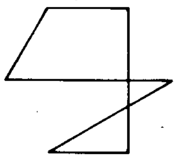


fig. 7

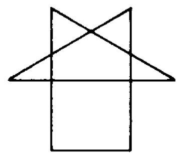


fig. 8

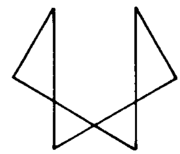


fig. 9

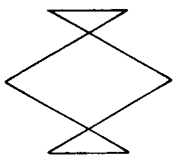


fig. 10

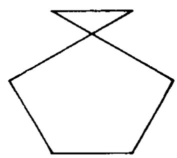


fig. 11

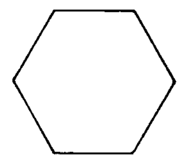
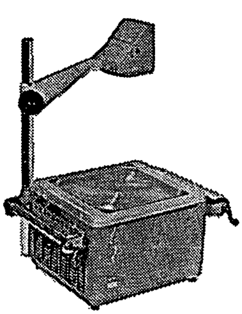


fig. 12



INHOUD