

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

47e jaargang

1971/1972

no 5

januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt f 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nieuhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 15,—. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 200,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 110,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 60,—.

Wiskunde op de basisschool (3)

A. TREFFERS, F. GOFFREE, E. WIJDEVELD

INLEIDING VOOR DE ONDERWIJZER

BLOK I voor de heroriëntering van onderwijzers

Blok I dient niet zozeer ter kennisverruiming, als wel om u te laten ervaren hoe een mathematische werkwijze verloopt. Het onderwerp is zo aangeboden, dat u het wiskundige spel ook met uw leerlingen kunt spelen, als u tenminste een en ander in een verhaal inkleedt. Onze ervaringen komen erop neer, dat de leerlingen veel minder moeite hebben met de 'vreemde' meetkunde van het stadsplan dan we verwachten op grond van onze eigen problemen in dit onderwerp.

Het algemene doel van dit blok is:

introductie van coördinaten

Waarom dit alles?

- a. Voorop staat het didaktische belang. Het blok dient om óns iets van de ontdekkende werkwijze te laten ervaren.
- b. Het mathematische belang is van beperkter gewicht.
Toch biedt het onderwerp coördinaten zicht op uitwerkingen in *bijvoorbeeld algebra en statistiek*.

Het kennisaspect van blok I is op zichzelf genomen niet veel meer dan kennis van de spelregels, nodig om het 'spel' goed te kunnen spelen. Deel 1 geeft voornamelijk de kennis om het 'spel' zelf te leren en deel 2 verschaft vooral informatie en suggesties om het te kunnen laten spelen door de leerlingen.

Deel 2 dient dus als hulpmiddel en inspiratiebron voor uw eigen werk. Uw commentaar op deze suggesties, t.a.v. lesverslagen, leergangen, doelstellingen, toetsen, etc. zijn van harte welkom.

Er zijn eigenlijk zes werkzaamheden:

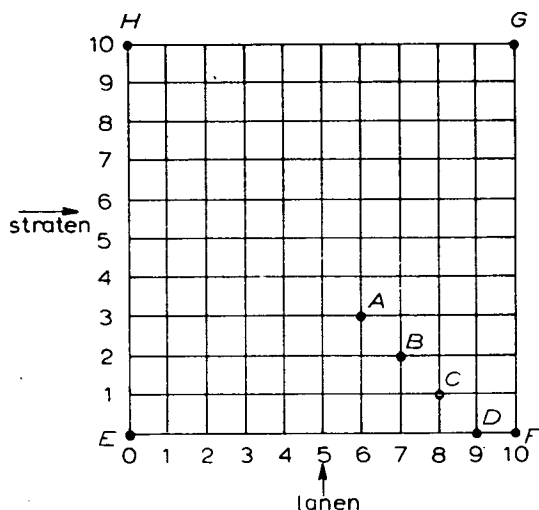
- 1 Het praktikum maken. P I is voor iedereen. P II is fakultatief.
- 2 Bestuderen van de suggesties en de gegevens in deel 2.
- 3 Maken, geven en schriftelijk verslaan van een les.
- 4 Mondelinge verslaggeving en bespreking op de cursus van enkele lessen aan de hand van het schriftelijke verslag.

5 Kommentariëren van de suggesties met name t.a.v. de activiteiten als doelstellingen in deel 2.

6 Maken en bespreken van de toets.

Wij wensen u veel plezier en hopen dat dit blokje u niet te zwaar op de maag zal liggen!

2 PRAKTIKUM I



Ons stadsplan bevat lanen (vertikale lijnen), straten (horizontale lijnen) en hoekpunten (snijpunten van lijnen).

Spreekt wij in dit practikum van punten, dan bedoelen we deze *roosterpunten* (hoekpunten); andere punten zijn er niet in het stadsplan!

Vul een getal in:

Punt *A* ligt op laan 6 en straat 3. Korte aanduiding: *A* (6,3).

Punt *B* ligt op laan . en straat .. Korte aanduiding: *B* (,).

Nu alleen de korte aanduiding (denk erom eerst het 'laangetal' en dan het 'straatgetal'):

C (,)

F (,)

D (,)

G (,)

E (,)

H (,)

P.S. De getallen 6 en 3 noemen we de *koördinaten* van het punt *A* (6,3).
Het getallenpaar (6,3) is geordend (de volgorde is immers essentieel!)

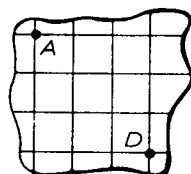
2)

- a Geef elkaar — in de groep van vier — ieder één keer een opgave, waarbij de koördinaten gevonden moeten worden bij een aangewezen punt.
b Geef elkaar ieder één keer een opgave, waarbij de koördinaten gezegd worden en het desbetreffende punt aangewezen wordt.

3)

AFSPRAAK: We kunnen ons in het stadsplan alleen langs lanen en door straten bewegen (dus niet 'binnendoor'!)

Wijs op nevenstaand kaartje een kortste weg aan die loopt van *A* naar *D* (Denk om de afspraak!)



AFSPRAAK: We gebruiken bij het bepalen van de afstand — d.w.z. de lengte van de kortste verbinding — de zijde van een roostervierkantje als eenheid.

Vul in:

De roosterafstand van *A* naar *D* is eenheden

Raadpleeg bij deze opgave het stadsplan van opdracht 1).

Vul de volgende afstandstabel in, waarbij de afstand dus de *kortste* verbinding tussen genoemde punten betreft. (We hebben de afstand van *A* en *D* reeds ingevuld)

afstand	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0			6				
B		0						
C			0					
D	6			0				
E					0			
F						0		
G							0	
H								0

4)

- Zet achter het letterpaar het aantal verschillende wegen (manieren), waarop de afstand tussen de punten afgelegd kan worden (zie stadsplan — opdracht 1). We noemen zo'n weg een *afstandsweg*.

Van *A* naar *B* afstandswegen

Van *C* naar *F* afstandswegen

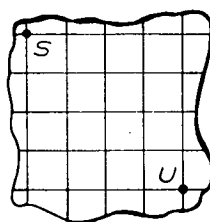
Van *A* naar *C* afstandswegen

5)

Een punt *T* ligt *tussen* twee punten *S* en *U* als het op één van de afstandswegen *SU* ligt.

Raadpleeg nevenstaand kaartje.

- Hoeveel punten (denk erom alleen roosterpunten!) liggen er *tussen* *S* en *U*?
....



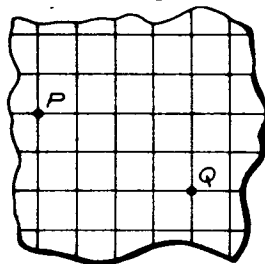
Zie kaart opdracht 1)

-
- Ligt *D* tussen *A* en *F*?
 - Ligt *C* tussen *A* en *F*?
 - Ligt *B* tussen *A* en *F*?
 - Ligt *C* tussen *E* en *F*?
 - Ligt *B* tussen *A* en *C*?
 - Ligt *C* tussen *H* en *F*?

6)

Breng onder woorden hoe we i.h.a. kunnen konstaten waar de afstandswegen tussen twee punten *P* en *Q* lopen en waar dus de punten liggen tussen *P* en *Q*.

- Gebruik daarbij de onderstaande tekening om naar te verwijzen.



7)

- Omschrijf hoe de afstand tussen de punten (1,6) en (2,3) bepaald wordt zonder eerst te tekenen of op het plan aan te wijzen. Anders gezegd: hoe bepaal je de afstand tussen genoemde punten door slechts gebruik te maken van de coördinaten.

8)

Bepaal de afstand tussen de volgende roosterpunten (het stadsplan niet meer gebruiken!).

(2,3) en (5,1) De afstand is

(0,0) en (8,9) De afstand is

(0,0) en (p,q) De afstand is

(p,q) en (r,s) De afstand is

Lees onderstaand stuk heel nauwkeurig!

9)

In de nu volgende opdrachten gaan we *roosterfiguren* tekenen.

Deze figuren zijn samengesteld uit roosterpunten en/of roosterlijnen en nu is het de bedoeling, dat u zelf probeert uit te vinden hoe zo'n bepaalde roosterfiguur eruit ziet. (Een roosterlijn wordt niet gedefinieerd.)

Zo omschrijven we een roosterdriehoek *naar analogie* met een driehoek zoals u die 'gewoon' bent te omschrijven, een roostercirkel naar analogie met een cirkel, etc.

Om de roosterfiguur te vinden moet u dus eerst goed nagaan wat de 'gewone' figuur definieert.

Meer zeggen we niet; we zijn benieuwd of u eruit komt!

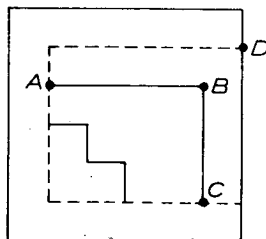
Vul in (wel of niet):

ABC is 'n roosterdriehoek

ABD is 'n roosterdriehoek

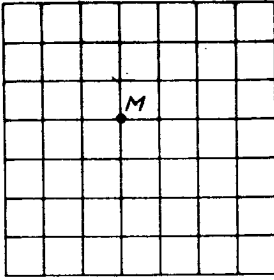
BCD is 'n roosterdriehoek

ADC is 'n roosterdriehoek



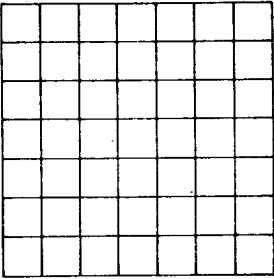
! Voordat u verder gaat, eerst met de cursusleider nagaan of u deze opgave goed hebt!

Teken in nebenstaand stadsplan een rooster cirkel met een (rooster-) straal van 3 eenheden.



11)

Teken in nebenstaand stadsplan een gelijkzijdige roosterdriehoek ABC met een (rooster-) zijde van 4 eenheden.

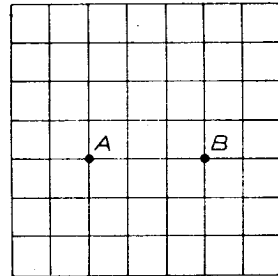


3 PRAKTIKUM II

(sterretje bij opgave betekent: ter keuze)

*12

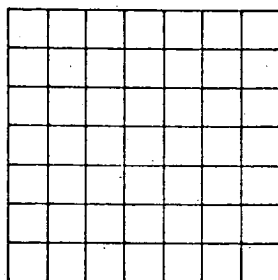
Teken in nebenstaand stadsplan de punten, waarvan de som van de afstanden tot A en B 4 éénheden is.



Vul in:
We kunnen deze figuur een rooster noemen.

*13

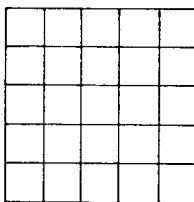
Teken in nebenstaand stadsplan een gelijkzijdige roosterdriehoek met zijden van 3 eenheden.



*14

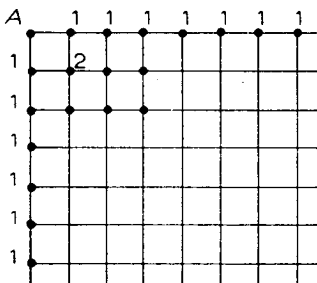
Deze opdracht sluit aan bij opdracht 14).

Bewijs of maak d.m.v. een tekening duidelijk, dat de omtrek van iedere roosterdriehoek op het stadsplan een even getal is.



*15

Bedenk een systeem om het aantal afstandswegen tussen twee roosterpunten op het stadsplan te ontdekken. Een tip: neem de punten geleidelijk verder van elkaar en zet steeds bij ieder punt het getal dat alle mogelijke afstandswegen aangeeft.



4 TOETS

0 Inleiding

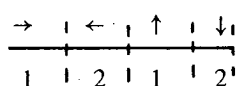
De toets is een controle t.a.v. het leerstofaspekt van blok I. Er wordt zo informatie ingewonnen over de volgende punten:

- 1 Is de kennis van de stof voldoende voor de onderwijzer(es) om ermee de praktijk in te gaan?
- 2 Wordt de stof voldoende beheerst om de cursus te kunnen voortzetten?
- 3 Welke onderdelen verdienen nog eens wat ekstra aandacht?

Wat het didaktische aspekt van het blok betreft, kan men de opdracht met zijn uitvoering, verslaggeving en bespreking als controle zien, welke dan tegelijk inhoudt dat men bij zichzelf en anderen vastgestelde leemten onvult

Toetsitems

- 1 Teken op roosterpapier het 'Stadsplan'.
- 2 Duid aan de punten (6,5) en (3,7).
- 3 Bepaal de afstand tussen deze punten.
- 4 Bepaal het aantal afstandswegen tussen deze punten.
- 5 Noteer de coördinaten van de punten, die op een afstand van 4 (eenheden) liggen van het punt (6,5).
- 6 Noteer de coördinaten van de punten, die op een afstand van minder dan 4 liggen van (6,5) en tegelijkertijd op een afstand van minder dan 3 van (3,7).
- 7 Noteer de coördinaten van de punten, waarvan het 'laangetal' drie groter is dan het 'straatgetal'.
- 8 Noteer de coördinaten van de punten, waarvan het 'laangetal' het kwadraat is van het 'straatgetal'.
- 9 We starten vanaf het punt (6,5 en lopen een route volgens de *routekaart*:



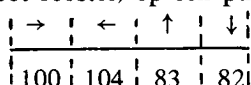
Lees:

1 naar rechts, 2 naar links,
1 naar boven, 2 naar beneden)

Waar komen we terecht?

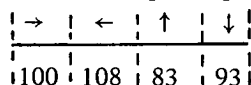
- 10 Geef een eenvoudiger routekaart, zodat we vanaf (6,5) (als vertrekpunt) uitkomen op hetzelfde eindpunt.
- 11 We starten (op een voldoende groot rooster) op een punt (6,5) en lopen de route

Waar komen we terecht?

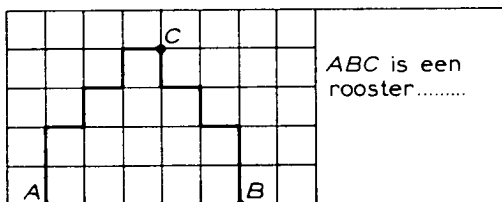


- 10 Geef een eenvoudiger routekaart, zodat we vanaf (6,5) (als vertrekpunt) uitkomen op hetzelfde eindpunt.
- 11 We starten (op een voldoende groot rooster) op een punt (6,5) en lopen de route

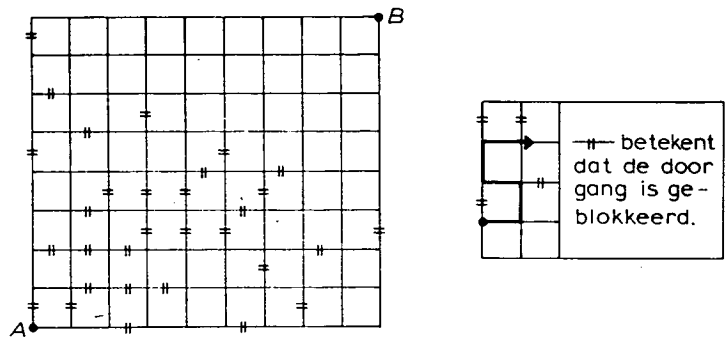
Waar komen we terecht?



12



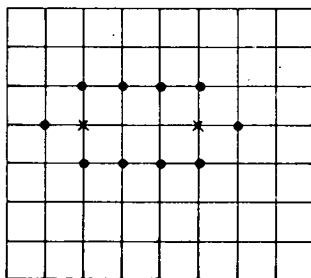
***13 (Ter keuze)**



Bepaal het aantal afstandswegen dat van *A* naar *B* voert.

***14**

(Ter keuze)



Nevenstaande figuur
is een rooster
.....

N.B. Naast het KO-boekje voor de onderwijzer is er een BAS-boekje, waarin praktische suggesties voor de basisschool beschreven staan, vanaf het simpele benoemen van lanen en straten tot aan het optellen van trekken en vektoren toe. Het zou echter te ver voeren om hierop dieper in te gaan. Jammer, want voor ons is dit eigenlijk het belangrijkste deel van het werk.

Tot slot willen wij u erop wijzen, dat een belangrijk deel van het werk op de Dr. W. Dreesschool te Arnhem (ONTWERPSCHOOL) gebeurt in samenwerking met een aantal nieuwe medewerkers van het I.O.W.O., die u zeker in één van de volgende Euclidesnummers zult ontmoeten.

ANTWOORDEN (bij het praktikum)

- Opgave 1: laan 7, straat 2 B(7,2)
C (8,1) F (10,0)
D (9,0) E (0,0) H (0,10)

Opgave 3 : 6

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	2	4	6	9	7	11	13
B	2	0	2	4	9	5	11	15
C	4	2	0	2	9	3	11	17
D	6	4	2	0	9	1	11	19
E	9	9	9	9	0	10	20	10
F	7	5	3	1	10	0	10	20
G	11	11	11	11	20	10	0	0
H	13	15	17	19	10	20	10	0

Opgave 4 : 2

3
6

Opgave 5 : 23

ja
ja
ja
nee
ja
ja

Opgave 6:

De afstandswegen tussen P en Q liggen binnen of behoren tot een rechthoek, waarvan PQ een diagonaal is (in dit konkrete geval).

De punten tussen P en Q zijn dus de roosterpunten op of binnen genoemde rechthoek uitgezonderd P en Q .

Opgave 7: $\left| 1 - 2 \right| + \left| 6 - 3 \right|$

Opgave 8:

5

17

$$\begin{array}{c} p + q \\ |p - r| \end{array} + \begin{array}{c} |q - s| \end{array}$$

Opgave 9:

niet

niet

niet

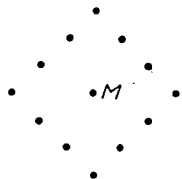
wel

(Denk erom: B ligt

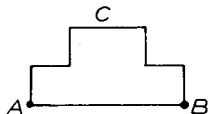
tussen A en C!

ABC is geen roosterdriehoek.)

Opgave 10:



Opgave 11:



Opgave 14:

Denk aan het 'rechthoekmodel', dat van een roosterdriehoek gemaakt kan worden.

Opgave 15:

Driehoek van Pascal.

Tweede interim-rapport van de nomenclatuurcommissie

Dit tweede interim-rapport behandelt de meetkunde voor de onderbouw.

De commissie stelt er veel prijs op reacties naar aanleiding van dit rapport te mogen ontvangen. Ook opmerkingen over het eerste rapport zijn natuurlijk nog welkom (zie Euclides van maart 1971). Het adres van de secretaris is: Calabrië 33, Leusden.

algemene opmerkingen

De begrippenrijkdom binnen de meetkunde is aanmerkelijk groter dan die binnen de algebra. Dat maakt het moeilijk om voor de meetkunde een stelsel notaties te bedenken, dat bijectief afgebeeld kan worden op het stelsel begrippen. Mogelijk is het wel, maar dan moet men slecht hanteerbare en bizarre notaties accepteren.

In het verleden heeft dit wel eens aanleiding gegeven tot ergernis. Maar een schadelijke verwarring is er naar onze mening eigenlijk nooit geweest. Voor de onderbouw is dat ook wel begrijpelijk, want de intuïtieve benadering van de meetkunde is daar erg belangrijk geworden. Dat impliceert dat de behoefte aan zorgvuldige en ondubbelzinnige verbale omschrijving van de begrippen kleiner is geworden. En voor de behoefte aan de geformaliseerde omschrijvingen van de notaties geldt dat nog sterker.

lengten en maatgetallen

Het begrip 'lijnstuk' kan men zonder moeite bij brugklassers introduceren; zij brengen dat ten dele uit het basisonderwijs mee. Daar hebben zij zich bovendien ook al beziggehouden met het begrip 'lengte'. Het is nuttig ons even te verdiepen in de formele inhoud van dat laatste begrip.

In de verzameling lijnstukken in een plat vlak kan men de relatie 'is congruent met' definiëren. We gaan niet in op de vraag hoe men dat zou kunnen doen.

Deze relatie 'is congruent met' is een ekwivalentie-relatie. Hij induceert dus een klasse-indeling, een partitie in de verzameling van lijnstukken. Elke klasse bestaat uit onderling congruente lijnstukken. Van twee lijnstukken uit dezelfde klasse zeggen we niet alleen, dat ze congruent zijn, maar ook dat ze gelijke lengte hebben of even lang zijn. Opgemerkt dient te worden dat hierbij (nog) geen sprake is van getallen.

Formeel gesproken is nu 'een lengte' synoniem met 'een klasse van die partitie'.

Er is hier analogie met het begrip 'richting' aanwezig. In de verzameling van lijnen in een vlak introduceert men de ekwivalentie-relatie 'is parallel met'. De klassen van de bijbehorende partitie worden richtingen genoemd.

In de verzameling van de lengten kan men een ordeningsrelatie definiëren. We verdiepen ons weer niet in de vraag, hoe dat gebeuren kan. We nemen zonder meer aan dat die relatie er is en dat we dus van de ene lengte kunnen zeggen, dat hij groter is dan een andere lengte (bijvoorbeeld). Natuurlijk dragen we die ordening over naar individuele lijnstukken: we zeggen ook van een lijnstuk, dat het langer is dan een ander lijnstuk. Nog steeds spelen getallen hierin geen rol. Maar in de volgende en laatste fase gaat dat veranderen.

De geordende verzameling van de lengten wordt nu bijtief afgebeeld naar de geordende verzameling positieve reële getallen. Voor de derde keer interesseert de manier waarop dat gebeurt ons bitter weinig. We merken alleen op, dat die afbeelding een isomorfie is t.o.v.: de orde van twee lengten is dezelfde als die van de aan hen toegevoegde beeldgetallen.

Het bij deze afbeelding aan een lengte toegevoegde beeldgetal noemen we 'het maatgetal van die lengte'.

We hebben dus nu met drie verschillende begrippen te maken gekregen:

- (1) lijnstuk als meetkundig plaatje,
- (2) lengte als ekwivalentieklasse,
- (3) maatgetal van lengte.

Het laatste begrip van dit drietal is vrij gemakkelijk met leerlingen te bespreken, als we ons tenminste de vrijheid veroorloven het over te dragen van lengten naar individuele lijnstukken (zoals we dat ook deden bij de ordening van lengten). Als we dat doen, dan krijgen we de gelegenheid er de nadruk op te leggen dat er oneindig veel van die isomorfe afbeeldingen zijn, dat elk lijnstuk tot eenheidslijnstuk benoemd kan worden. Veel moeilijker ligt het met het begrip lengte (ekwivalentie-klasse). Maar het valt gelukkig sterk te betwijfelen, of dit begrip besproken dient te worden.

bizarre notaties

In de paragraaf **algemene opmerkingen** stelden we, dat het mogelijk is een sluitend stelsel notaties te bedenken voor de begrippen, die we in de meetkunde hanteren. Dat willen we nu demonsteren voor de drie fundamentele begrippen lijnstuk, lengte van lijnstuk, maatgetal van lengte, en voor een paar daaruit afgeleide begrippen.

Het wordt een afschrikwekkend voorbeeld. Maar hopelijk zet het kracht bij aan de aanbevelingen, die we daarna zullen formuleren.

Als naam voor een lijnstuk als meetkundig plaatje zouden we een kleine letter kunnen gebruiken of de achter elkaar geschreven hoofdletters, die de eindpunten van dat lijnstuk benoemen:

P

AB

Dan zouden we de lengte van dat lijnstuk (waartoe dat lijnstuk behoort) kunnen noteren door de naam van het lijnstuk zelf tussen haken te schrijven:

$$(p) \quad , \quad (AB)$$

En tenslotte zouden we het maatgetal van die lengte kunnen aanduiden door voor de naam van die lengte zelf nog de (vaste) m van maatgetal te schrijven:

$$m(p) \quad , \quad m(AB)$$

Met deze afspraak zouden verschillende begrippen inderdaad keurig netjes verschillende notaties krijgen. Bij voorbeeld zou

$$(p) > (q)$$

betrekking hebben op de ordening van de lengten als ekwivalentieklassen, terwijl

$$m(p) > m(q)$$

betrekking zou hebben op de ordening van de bijbehorende maatgetallen. Bent u daar gelukkig mee?

De stelling van Pythagoras zou als volgt er uitzien:

$$(m(a))^2 + (m(b))^2 = (m(c))^2$$

En ook dit is niet aanlokkelijk.

Bij de afgeleide begrippen komen we bijvoorbeeld tot $ABCD$ als naam voor een rechthoek, $(ABCD)$ als notatie voor de oppervlakte van die rechthoek als ekwivalentie-klasse, en tenslotte $m(ABCD)$ voor het maatgetal van die oppervlakte. Dit leidt dan tot zo iets:

$$m(ABCD) = m(AB) \cdot m(AD)$$

Tenslotte nog dit: bij dit stelsel past onverbiddelijk een onderscheid tussen congruentie (van lijnstukken of rechthoeken) en gelijkheid (van lengten, oppervlakten of van de maatgetallen daarvan). Wat denkt u van:

$$p \equiv q \quad , \quad m(p) = m(q) \quad \text{of} \quad (p) = (q)$$

figuren en hun maatgetallen

We komen nu tot onze aanbevelingen. Daarbij willen we in de eerste plaats

stellen dat we in de schoolwiskunde de begrippen lengte, oppervlakte en inhoud als ekwivalentie-klassen kunnen missen. Daarvoor stellen we dus geen notatie voor; we beperken ons tot het aanduiden van de figuren zelf en van hun maatgetallen.

Bij de figuren, die geen maatgetallen hebben, is alles heel eenvoudig. Als namen voor punten gebruiken we hoofdletters. Lijnen en halve lijnen worden met kleine letters benoemd. En vlakken en halve vlakken weer met hoofdletters.

Dus bijvoorbeeld:

s verdeelt V in de halve vlakken V' en V'' ,
 A verdeelt s in de halve lijnen s' en s'' ,
 s snijdt r , maar $s \parallel q$.

Voor de figuren met maatgetal doen we het volgende voorstel. Als we de figuur zelf, het plaatje, willen aanduiden, dan maken we dat kenbaar door de soortnaam van de figuur voluit op te schrijven voor de verdere aanduiding. Ontbreekt die soortnaam, dan wordt automatisch niet de figuur zelf, maar zijn maatgetal bedoeld. We schrijven dus bijvoorbeeld:

driehoek ABC (of ook wel $\triangle ABC$)

als we het plaatje bedoelen. Staat er dan in de volgende regel

$$ABC = 84,$$

dan hebben we het over het maatgetal van de oppervlakte van die driehoek. Zo schrijven we ook

rechthoek $ABCD$

als naam voor de figuur. En over de oppervlakte van die rechthoek delen we mee

$$ABCD = AB \cdot AD,$$

want door het ontbreken van het voorvoegsel 'lijnstuk' is het duidelijk dat we met AB en AD maatgetallen bedoelen.

De stelling van Pythagoras kan nu geschreven worden als

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

en dat is kort en kernachtig genoeg. Het vereist wel het overwinnen van een lichte hindernis om te schrijven

lijnstuk AB is hypotenusa van driehoek ABC ,

maar dat is de prijs die we betalen voor eenvoudige maatgetalnotaties. Overigens vinden wij dat speciaal bij lijnstukken ook de kleine letters gebruikt kunnen worden. Maar dan uitsluitend voor de maatgetallen, niet voor de plaatjes. Dit leidt dan bijvoorbeeld tot de versie

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ van Pythagoras.}$$

hoeken en hoekgrootten

De moeilijkheden bij hoeken liggen niet principieel anders dan bij lijnstukken. Ook hier kunnen we weer onderscheid maken tussen de hoek als meetkundige figuur, de hoekgrootte als ekwivalentieklasse en het maatgetal van die klasse. Er zijn echter ook enkele kleine verschillen. Daar gaan we in deze paragraaf wat nader op in.

Bij de lijnstukken hebben we (ietwat hautain) gesteld, dat we in de schoolwiskunde de lengten wel kunnen missen. Het is echter niet zo, dat we bij de hoeken de hoekgrootten kunnen missen. Er zijn immers twee verschillende afbeeldingen van de verzameling hoekgrootten (ekwivalentie-klassen) naar de verzameling reële getallen in gebruik.

Zo zijn 60° en $\frac{\pi}{3}$ rad allebei namen voor dezelfde hoekgrootte; de maatgetallen 60 en $\frac{\pi}{3}$ zijn verschillend.

Het was tot nu toe traditie om bij de eerste afbeelding altijd met hoekgrootten te werken en bij de tweede altijd met maatgetallen. Wij willen met die traditie breken en stellen voor in beide gevallen hoekgrootten te gebruiken. Dat betekent dat bij het radialen-stelsel steeds 'rad' achter het maatgetal geschreven wordt. Dus bijvoorbeeld:

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{1}{2}.$$

Het voordeel hiervan is, dat we in de bovenbouw des te duidelijker kunnen laten uitkomen dat we in de analyse niet meer met hoekgrootten werken, maar met getallen. De goniometrische functies hebben dan niet meer de verzameling hoekgrootten tot domein, maar de verzameling reële getallen. Daar schrijven we dan ook

$$\sin \frac{\pi}{6} \text{ en niet } \sin \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Een tweede verschilpunt met de lijnstukken is het volgende. We hadden als algemeen principe gesteld, dat de naam van de figuursoort voluit geschreven zou worden bij de verdere benaming in het geval, dat het plaatje bedoeld wordt. We schrijven dus

hoek B of hoek ABC (van driehoek ABC).

Laten we nu dat voorvoegsel 'hoek' weg, dan ontstaat niet, zoals bij de lijnstukken e.d., een notatie voor de hoekgrootte of voor het maatgetal. Immers

B duidt het punt B aan en

ABC betekent het maatgetal van de oppervlakte van de driehoek ABC .

Ons voorstel is nu het teken $\angle$ te gebruiken, als we de grootte van een hoek willen aanduiden. De grootte van hoek B , van hoek ABC wordt dus geschreven

$$\angle B, \quad \angle ABC.$$

Als alternatieve notatie voor hoekgrootten stellen we de griekse letters voor (zonder het hoekteken). Dus:

driehoek ABC is gelijkbenig omdat $\angle A = \angle B$

driehoek ABC is gelijkbenig omdat $\alpha = \beta$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ rad}.$$

In het laatste geval kunnen we voor onze leerlingen rustig verzwijgen dat we operaties hanteren op ekwivalentie-klassen. Isomorfie is toch maar iets heel gemakkelijk.

Tot slot van deze paragraaf vermelden we nog, dat de gebruikelijke namen voor de goniometrische functies zijn

$\sin$, $\cos$, $\tan$.

functies

Het komt ons uit didactisch oogpunt gewenst voor ook in de meetkunde namen te gebruiken voor functies, evenals in de algebra. Of daar kleine letters of hoofdletters voor gebruikt worden is niet zo belangrijk:

s of S voor een spiegeling,

t of T voor een translatie,

r of R voor een rotatie,

m of M voor een vermenigvuldiging (multiplicatie).

Op de gebruikelijke manier kan men dan ook noteren de beelden bij die func-

ties; het spiegelbeeld van punt A bij de spiegeling s wordt bijvoorbeeld $s(A)$. Desgewenst kunnen de namen van functies nog voorzien worden van indices, die dienen om die functies te karakteriseren: S_a voor de spiegeling in a .

Er zijn twee bezwaren tegen het beeld van driehoek ABC bij de spiegeling in de as p te noemen $S_p(ABC)$.

In de eerste plaats is die spiegeling S_p een functie, die een verzameling punten als domein heeft (niet een verzameling driehoeken).

In de tweede plaats is ABC een notatie voor het maatgetal van de oppervlakte van de driehoek, niet een naam van de driehoek zelf. Het tweede bezwaar wordt ondervangen door te schrijven

S_p (driehoek ABC),

maar dat wordt wel wat erg lang; je kunt dan net zo goed meteen maar schrijven

het S_p -beeld van driehoek ABC .

Aan dat laatste geven we dan ook de voorkeur, beseffende dat tegen deze schrijfwijze het eerste bezwaar nog altijd geldt. In dit verband wijzen we ook nog op overeenkomstige opmerkingen in het eerste interim-rapport.

Aan woorden zoals bijvoorbeeld 'homothetie' hebben wij, althans in de onderbouw, geen behoefte. Wil men nadruk leggen op het speciale karakter van bepaalde afbeeldingen, dan gebruike men congruentie-afbeelding of congruentie, gelijkvormigheidsafbeelding of gelijkvormigheid.

Waarschijnlijk ten overvloede herhalen we het advies niet te spreken over meetkundige transformaties. Er is geen principieel verschil tussen afbeeldingen in de meetkunde en in de algebra en het is dus niet raadzaam een terminologisch onderscheid te maken.

vektoren

Het ligt voor de hand dat bij de introductie van het vektorbegrip die notatie wordt gebruikt, die het beste aansluit bij het meetkundige beeld van een pijltje met beginpunt A en eindpunt of spits B . In die fase schrijft men dus

$\overrightarrow{AB}$

Op den duur krijgt men echter behoefte aan eigennamen voor vektoren (en in de bovenbouw kan men die eigennamen beslist niet missen). En dan ontstaat het probleem van de tegenstrijdige eisen bij drukwerk en schrift.

In drukwerk moet de vektor goed te onderscheiden zijn van de scalaire variabele. Daarom is de vette kleine letter het aangewezen symbool. Een bijkomstig

voordeel ervan is, dat hij betrekkelijk gemakkelijk als index gebruikt kan worden, bijvoorbeeld bij een translatie. Een nadeel is dat men moet breken met de gewoonte om belangrijke formules vet te zetten.

Voordelen en nadelen tegen elkaar afwegende wijzen wij de vette kleine letter aan voor vektoren in drukwerk.

Voor geschreven teksten zijn deze letters echter volmaakt ongeschikt. In plaats daarvan kan men dan gebruiken letters, voorzien van een boven- of onderstreep of voorzien van een pijltje. Het ligt niet op het terrein van de nomenclatuurcommissie hiervoor aanbevelingen te doen.

kleinigheden

In het voorgaande is al terloops iets opgemerkt over de relatie 'is evenwijdig met' of 'is parallel met'. Wij stellen voor om deze relatie op te vatten als een e-kwivalentie. Dit houdt in, dat elke lijn geacht wordt evenwijdig met zichzelf te zijn. Tot nu toe waren de meningen over deze kwestie nogal verdeeld. Met het oog op de afhankelijkheid van vektoren (bovenbouw) menen wij wel aan deze verdeeldheid een eind te mogen maken. Het verdient overigens nog wel even de aandacht, dat

$AB // CD$

blijkens het voorgaande niet meer toegelaten is. Met ***AB*** en ***CD*** worden immers maatgetallen van lengten bedoeld. In gevallen waarin de lijnen niet door kleine letters aangeduid worden, is het consequent te schrijven

lijn ***AB*** // lijn ***CD*** .

Als men dat wil, kan men ook afspreken twee lijnstukken evenwijdig te noemen als hun dragers dat zijn. Dan komt men tot

lijnstuk ***AB*** // lijnstuk ***CD*** .

Wij hebben ons in het voorgaande niet bekommerd om de definitie van het begrip 'hoek'. Het lijkt ons niet belangrijk of men een hoek wil definiëren als doorsnede van halve vlakken of als figuur van twee halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt.

Bij de definitie van veelhoeken en veelvlakken ligt dat echter anders. Wij spreken over oppervlakte en omtrek van een driehoek, van een rechthoek. Dat kan alleen als wij driehoek en rechthoek als tweedimensionale figuren zien. Dat behoort in de definities dus ook tot uitdrukking te komen.

In dit verband willen we ook meteen een novum introduceren in onze wiskunde-taal.

Wij willen onderscheid maken tussen bijvoorbeeld

de cirkel (M,r)

de cirkelschijf (M,r) .

De cirkel is een gesloten lijn. We zouden over zijn lengte kunnen spreken. De cirkelschijf daarentegen is tweedimensionaal en heeft een omtrek en een oppervlakte.

Analoge opvattingen hebben wij over bolvlak en bol, kegelvlak en kegel, cilindervlak en cilinder.

Naar aanleiding van het eerste interim-rapport bereikte ons nog het voorstel de volgende woorden aan te bevelen:

voor commutatieve eigenschap: wisseleigenschap

voor associatieve eigenschap: schakeleigenschap

voor distributieve eigenschap: strooieigenschap.

We bedoelen hiermee het didactisch advies in het begin de nederlandse woorden te gebruiken om de associatie tussen naam en betekenis van de eigenschap te bevorderen. Op den duur moet men de algemeen gangbare termen leren gebruiken.

Ook hierop krijgen we graag commentaar.

Nog eens nomenclatuur

HANS FREUDENTHAL

Utrecht

Naar aanleiding van Vredenduins antwoord *.

1 Wanneer men in een bouwsel achteraf de 'eerste steen' wil om draaien, dient men zich te realiseren wat er allemaal aan te pas komt. De Nomenclatuurcommissie heeft het met de 'eerste steen' van de wiskunde, de functie- en afbeeldingsdefinitie, willen doen, zonder de konsekwenties te overzien. Dit is geen verwijt. Toen ik mijn kritiek * op haar rapport * schreef, overzag ik de konsekwenties evenmin. Uit Vredenduin's toelichtingen blijkt dat ik de ernst van de situatie nog heb onderschat, toen ik de term 'algemene vernieling' bezigde.

2 Allereerst: ik houd er niet van als men hier de school aan de ene kant met het wetenschappelijk onderwijs en de wetenschapsbeoefening confronteert. Mijn argumenten tegen de nomenclatuur van de Nomenclatuurcommissie zijn niet 'wetenschappelijk' (wat dit dan ook moge zijn) versus 'didaktisch'. De functiedefinitie van de Nomenclatuurcommissie is even 'wetenschappelijk' als de gebruikelijke: de vraag is of zij doelmatig is. Wil men een antwoord hierop geven, dan telt niet alleen de behoefte van de school, maar ook hetgeen de leerling in 't leven met die wiskunde doet. We zijn het er toch wel over eens, dat heel wat meer moet zijn dan het vroeger was. Ik vind het daarom jammer dat Vredenduin zijn voorbeelden uit een stukje schoolwiskunde haalt, dat ten dode is opgeschreven, altans als men het isolement van de schoolwiskunde wil verbreken. (Of is men zelfs op weg naar aparte wiskundes voor beneden- en bovenbouw, voor Wiskunde I en Wiskunde II — ik bedoel: naar met elkaar strijdige, in plaats van elkaar aanvullende?)

Desniettemin zal ik mijn argumenten tegen voorstellen van de Nomenclatuurcommissie overwegend in het beperkte raam van de schoolwiskunde plaatsen, d.w.z. aantonen dat de voorstellen reeds in dit beperkte raam een verantwoord wiskunde-onderwijs bemoeilijken.

3 Een afbeelding of functie in de gebruikelijke zin bestaat uit drie gegevens: twee verzamelingen, zeg A en B , en een toevoeging, zeg f , die bij elk element van A één element van B bepaalt. Verandert A of verandert B , dan verandert de

*Eerste Interimrapport van de nomenclatuurcommissie, Euclides 46 (1970/1), 241-50

Hans Freudenthal, Kanttekeningen bij de nomenclatuur, Euclides 47 (1971/2), 139-140

P.G.J. Vredenduin, Antwoord aan Freudenthal. Euclides 47 (1971/2), 141-146

functie. De identieke afbeelding van $\mathbb{R}$ in zichzelf verschilt van die van $\mathbb{R}^*$. Evenzeer verschilt de identieke afbeelding van $\mathbb{R}^*$ in $\mathbb{R}^*$ van die van $\mathbb{R}^*$ in $\mathbb{R}$ (ook inbedding genoemd); de één is een surjectie en de tweede niet.

Dat een functie uit drie gegevens bestaat, betekent niet dat men ze steeds alle drie moet opnoemen. Het is net als bijvoorbeeld, wanneer ik heb gedefinieerd, wat ik onder een translatie over een vector a versta en dan ineens over translaties sec spreek, of na de definitie van spiegeling in een rechte l , ertoe over ga van spiegelingen zonder meer te spreken. De variabele 'vector a ' resp. 'rechte l ' is hier verborgen existentieel gebonden: T is een translatie (spiegeling) betekent dat er een a (l) is zo dat T een translatie over a (spiegeling in l) is. Evenzeer mag ik gerust zeggen: ' f is een functie'; wat de twee andere leden van het tripel 'functie' zijn, moet dan uit verdere gegevens blijken.

Ik merk op dat er geen enkel bezwaar is, om van de functie

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

te spreken, als iedereen begrijpt, dat hier een zo groot mogelijk domein, dus $\mathbb{R}^* \cup \{0\}$ bedoeld is, en als het derde lid van 't drietal er niet toe doet. Wenst men om bepaalde redenen het nulpunt uit het domein uit te sluiten (bijv. als men op een differentieerbare functie prijs stelt), dan moet men dit wel te kennen geven. Men heeft een keuze. Of: 'de functie

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ (voor } x > 0\text{) '}$$

al dan niet met toevoeging ' $\mathbb{R}^*$ in $\mathbb{R}$ '. Of:

'de functie f van $\mathbb{R}^*$ naar $\mathbb{R}$ met $f(x) = \sqrt{x}$ '.

Er kunnen ook redenen bestaan, om die functie alleen voor rationale waarden van x of kwadraatgetallen x te fixeren; soortgelijke beperkingen moeten uitdrukkelijk worden aangegeven. Alleen als men de 'volle' functie $x \rightarrow \sqrt{x}$ bedoelt, zou men die toevoegingen kunnen missen.

Volgens de nomenclatuur van de Nomenclatuurcommissie is dit net zo. De Nomenclatuurcommissie zegt eveneens: de functie

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

met of zonder de toevoeging, dat de volle functie bedoeld is. Is het de bedoeling om 0 uit te sluiten, dan moet de Nomenclatuurcommissie dit eveneens aanduiden, bijv.

$$x \rightarrow \sqrt{x} \text{ voor } x > 0,$$

of in de vorm: de functie f van $\mathbb{R}^*$ naar $\mathbb{R}$ met

$$f(x) = \sqrt{x},$$

waarbij weer in confesso is dat met de functie f van $\mathbb{R}^*$ naar $\mathbb{R}$ de maximale bedoeld is.

De Nomenclatuurcommissie wil nu in alle gevallen ook het recht hebben, deze functies als functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ te beschouwen. In 't eerste geval heeft dit geen effect op de notatie, omdat de toevoeging 'van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ ' toch kon vervallen. In het tweede geval mag het niet, omdat

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

indien beschouwd als functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ of van $\mathbb{R}^*$ naar $\mathbb{R}$ nu eenmaal; ook naar het oordeel van de Nomenclatuurcommissie, verschillende zaken zijn. Het ontgaat mij ten enenmale, in welk opzicht de nomenclatuur van de Nomenclatuurcommissie het zou winnen.

Er is verder niet het minste bezwaar om

$$f: x \rightarrow 2x - 1,$$

$$g: x \rightarrow \sqrt{x}$$

samen te stellen tot de functie

$$g \circ f: x \rightarrow \sqrt{2x - 1}.$$

Het is waar dat in 't algemeen alleen afbeeldingen f van A naar B met afbeeldingen g van B naar C tot een afbeelding $g \circ f$ van A naar C samen worden gesteld, maar niets hindert om evenzeer afbeeldingen f van A naar B met afbeeldingen van C naar D samen te stellen, als men maar niet verwacht, dat er dan een afbeelding van A naar D uitkomt.

De Nomenclatuurcommissie wil echter iets anders. Ze eist om duistere redenen het recht op, al deze functies te beschouwen als functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ — geen winst als het om de volle functies gaat en alleen maar hinderlijk als de functies bijkomstig tot kleinere verzamelingen zijn beperkt, hetgeen buiten dit stukje schoolalgebra het normale geval is.

Een bezwaar van de nietszeggende label 'van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ' is dat leerling en leraar er tenslotte niet meer om malen voor welke x zo'n functie nu eigenlijk gedefinieerd is. Neem:

$$f: x \rightarrow \sqrt{x}$$

$$g: x \rightarrow x^4$$

Beide zijn volgens de Nomenclatuurcommissie functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Dus geldt dit ook voor $g \circ f$. Maar wat is $g \circ f$? Niet

$$g \circ f: x \rightarrow x^2$$

maar

$$g \circ f : x \rightarrow x^2 \quad \text{voor } x \geq 0.$$

Als de lezer mocht hebben gedacht, dat de niet 'volle' functies een verzinsel van mij zijn, om de Nomenclatuurcommissie te plagen, dan ziet hij ze hier op natuurlijke wijze verschijnen. Het is onjuist om de leerling voor te spiegelen, dat de volle functies, door algebraïsche termen bepaald, het enige ware zijn. Integendeel, men moet hem er juist op trainen, dat hij op het geldigheidsbereik van uitdrukkingen en formules let. Door alles met de saus 'afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ ' te overgieten, wordt deze training juist belet.

4 Noch bij het definiëren noch bij het samenstellen van functies wijst Vredenduin uitzetting winstpunten voor de nomenclatuur van de Nomenclatuurcommissie aan. Wel schijnt dit het geval te zijn bij het vormen van de inverse. Volgens de gebruikelijke spreekwijze bestaat de inverse van een afbeelding f van A naar B alleen als de afbeelding 'één-één en op' (een bijectie) is. Het kan eenvoudig niet anders, omdat van de omgekeerde afbeelding van B naar A vereist is, dat hij aan elk element van B een element naar A toevoegt. Volgens het functiebegrip van de Nomenclatuurcommissie zou men de inverse ook kunnen toelaten als A alleen maar één-één afbeeldt (injectie), maar men is er niet toe verplicht; men zou evenzeer de term 'inverse' voor het geval van een bijectie kunnen reserveren. Het voorstel van de Nomenclatuurcommissie om van een inverse van f te spreken indien f één-één is, is trouwens inkonsekvent. Het zou konsekvent zijn om f^{-1} als verklaard te beschouwen voor alle $b \in B$ die precies één origineel hebben. Dan zou elke afbeelding een (evt. lege) inverse bezitten. Zover gaat de Nomenclatuurcommissie niet. Om redenen die in het duister blijven, kiest ze iets willekeurig er tussen in. Vredenduin ziet er in elk geval een winstpunt in, van een inverse te spreken zodra de afbeelding één-één is. Wel, het is toelaatbaar, maar als men zo iets voorstelt, moet men de gebruiker ook over de konsekwenties inlichten.

$$f : x \rightarrow x^2 \quad \text{voor } x \geq 0,$$

$$f^{-1} : x \rightarrow \sqrt{x}.$$

Wat is $f \circ f^{-1}$ en $f^{-1} \circ f$? Niet de identieke afbeelding maar

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f : x \rightarrow x \quad \text{voor } x \geq 0.$$

Of:

$$f : x \rightarrow \sin x \quad \text{voor } -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi,$$

$$f^{-1} : x \rightarrow \arcsin x,$$

$$f \circ f^{-1} : x \rightarrow x \quad \text{voor } -1 \leq x \leq 1,$$

$$f^{-1} \circ f : x \rightarrow x \quad \text{voor } -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$$

Hier verschillen $f \circ f^{-1}$ en $f^{-1} \circ f$ zelf. Het mag natuurlijk allemaal, verondersteld dat je de mogelijkheden om fouten te maken, die je hier nodeloos schept, signaleert. Ik bedoel niet alleen dat de leraar de leerling erop attent maakt, maar ook dat een Commissie die een nieuwe notatie wil opleggen, de leraren omtrent de — evt. kwalijke — bijverschijnselen inlicht en niet alleen de voordelen breed uitmeet.

De Nomenclatuurcommissie noch Vredenduin hebben zich erover uitgelaten, of bij het ruimere toelaten van inversen gehandhaafd zou worden dat $f \circ f^{-1}$ en $f^{-1} \circ f$ als identieke afbeeldingen zijn te beschouwen, dus dat een identieke afbeelding ϵ van A in A er een is die door $\epsilon x = x$ voor x in een deel van A gedefinieerd is. Het gevolg zou zijn dat een verzameling zoveel identieke afbeeldingen krijgt als hij deelverzamelingen heeft, dat niet meer elke identieke afbeelding neutraal zou zijn, en dat elke afbeelding van of naar A zijn aparte links- en rechts-neutrale identieke afbeelding heeft. Het mag allemaal — onder dezelfde didactische veronderstellingen als boven.

5 In deze denktrant is vooral Vredenduins voorbeeld

$$f: x \rightarrow |x|$$

interessant. Heeft deze functie een afgeleide? Volgens het oude functiebegrip niet. Volgens de Nomenclatuurcommissie wel:

$$f': x \rightarrow 1 \quad \text{voor } x > 0$$

$$x \rightarrow -1 \quad \text{voor } x < 0.$$

Een winstpunt volgens Vredenduin. Is het dat? Ik zou het veeleer een Pyrrhus-overwinning noemen. Let wel, *elke functie* is nu differentieerbaar. Niet alleen die f van net, die misschien op zijn eentje nog een winstpunt zou zijn, maar ook

$$f: x \rightarrow x \quad \text{voor } x \text{ rationaal}$$

$$x \rightarrow x^2 \log |x| \quad \text{voor } x \text{ irrationaal}$$

of

$$f: x \rightarrow \sqrt{-1-x^2}.$$

Het 'prettige' hierbij is dat je met produkt- en kettingregel al die afgeleiden ook nog kunt uitrekenen, om dan al of niet tot de conclusie te komen dat ze stuk voor stuk 'leeg' zijn.

(Trouwens ook de afbeelding, die aan elke olifant zijn snuit toevoegt, is nu differentieerbaar; alleen kom je er niet met de recepten van de differentiaalrekening om de afgeleide te achterhalen.)

Is het juist, om een nomenclatuur aan te bevelen, waarbij elke functie differentieerbaar wordt, zonder de gebruiker hierop attent te maken? En zou je niet de gebruiker veeleer moeten waarschuwen tegen een verderfelijk automatisme

dan het te propageren of als voordeel aan te prijzen?

6 Zijn deze begripsverruimingën werkelijk aanwinsten? Laten we onze blik een beetje verder richten dan de lelijke sommetjes van de school-algebra.

De afbeelding $x \rightarrow x + 3$ van $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ krijgt volgens de Nomenclatuurcommissie een inverse. Is dit een winstpunt? Was het tot nu toe niet juist zo prettig, dat die afbeelding *geen* inverse had? Je kon de behoefte aan negatieve getallen duidelijk maken door te zeggen: ik wil $\mathbb{N}$ zo uitbreiden, dat die afbeelding een inverse krijgt. (Dit is didactisch beter dan van het oplossen van vergelijkingen te spreken.)

Analoog is het met de afbeelding $x \rightarrow 5x$ van $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ gesteld. Was het niet juist zo prettig dat deze afbeelding geen inverse heeft, zolang als 5 geen inverse heeft?

Het wordt als winst beschouwd, aan alle functies, die je in algebra-sommetjes tegenkomt, het predikaat functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ te mogen toekennen. Het wordt als winst beschouwd, dat er meer functies een inverse hebben gekregen en misschien zelfs dat bij een verzameling niet één maar een heleboel identieke afbeeldingen horen, dat alle afbeeldingen een afgeleide hebben gekregen, dat de afbeelding die aan de heer Jansen zijn echtgenote toevoegt, de titel verdient van afbeelding van de verzameling van alle mannen in die van alle vrouwen.

Stel, er komt een wet waarbij elke absolvent van de lagere school de titel 'doctorandus' krijgt. Niet dat ik er tegen zou zijn, maar is het een winst? Inderdaad, miljoenen worden er beter van. Maar hoe moet het met de echte doctorandi? Heel eenvoudig, ze noemen zich in 't vervolg *universitair doctorandus*. Laten we nu nog aan iedere absolvent van een LTS de titel 'ingenieur' geven. Heel eenvoudig, de ingenieurs oude stijl gaan zich Technische-Hogeschoolingenieur noemen.

Wat doen we nu met de functies oude stijl? Heel eenvoudig, een functie oude stijl van A naar B heet nu 'functie van A naar B met domein A '. Er komen maar vier lettergrepen bij, tenzij ik een afbeelding oude stijl van de verzameling van alle mannen in die van alle vrouwen bedoel, waaraan ik dan de extra-omschrijving moet toevoegen: niet als domein de verzameling van alle mannen; want doe ik dit niet, dan is het echtpaar Jansen een afbeelding van de verzameling van alle mannen in alle vrouwen. Met de differentieerbaarheid is het lastiger. Hoe tot uitdrukking te brengen, dat zekere functie oude-stijl-differentieerbaar is, nu alle functies differentieerbaar zijn geworden? De enige term, die mij te binnen schiet, is 'oude-stijl-differentieerbaar'. Dit zou misschien ook in 't algemeen bij functies en afbeeldingen aan te bevelen zijn: toevoeging van het predikaat 'oude stijl', wat dit dan ook voor de leerling moge betekenen.

Het voorstel van de Nomenclatuurcommissie wordt door Vredenduin gemotiveerd met het grotere gemak: geen gezeur meer: elke algebraïsche uitdrukking levert een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$; elke functie wordt nu differentieerbaar. Het is wat je noemt een paardenkuur. Alleen los je er geen problemen mee op. Het gezeur wordt enkel verplaatst. Al geef je elke functie het predikaat 'van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ ', als je ermee wilt werken, moet je toch onderzoeken, wat zijn feitelijk domein is, en al ben je zo gelukkig elke functie differentieerbaar te mogen noe-

men, je omzeilt de differentieerbaarheid-oude-stijl er niet mee. En dan de komplikaties, die je elders veroorzaakt! Bij al die meetkundige afbeeldingen, die zo'n grote rol spelen, zoals translaties, draaiingen, spiegelingen, affiniteiten enz. moet in de definitie uitdrukkelijk erbij 'met als domein het hele vlak'. Er bestaat een neiging — zelfs tot in schoolleerboeken toe — meetkundige afbeeldingen (bijv. congruenties) te zien, alsof alleen een enkele figuur (bijv. een driehoek) wordt afgebeeld. Dit leidt tot verwarring, vooral waar het om hele groepen van afbeeldingen gaat. In de strijd om beter begrip voor deze zaken word je nu in je rug aangevallen door de opvatting legitiem te verklaren, dat een kongruente afbeelding van een driehoek op een driehoek een afbeelding van hele vlak in zichzelf zou zijn. Volgens Vredenduin moeten de leerlingen dan maar in de bovenbouw de algebra-terminologie van de Nomenclatuurcommissie afleren. Maar meetkundige afbeeldingen spelen tegenwoordig al in de onderbouw een rol; straks komen ze in 't basisonderwijs. Wie moeten de onderwijzers dan geloven? De leraren van de pedagogische Akademies, die hun inprenten dat ze die afbeeldingen als afbeeldingen van 't hele vlak moeten zien, of de Nomenclatuurcommissie die hun zegt 'Een afbeelding van het hele vlak in zichzelf hoeft niet in 't hele vlak gedefinieerd te zijn'?

7 Aan de afbeeldingen die in 't hele vlak gedefinieerd zijn, tilt Vredenduin echter niet zwaar. Hij noemt als winstpunt de projectie in het vlak π vanuit het punt O op de rechte l . Volgens de definitie-nieuwe-stijl is dat een afbeelding van het hele vlak in zichzelf. Een winstpunt? Ja, de definitie van de projectie wordt eenvoudiger. Het is volgens nieuwe stijl

$$f: X \rightarrow \text{het snijpunt van } OX \text{ met } l$$

Oude stijl zou zijn

$$f: X \rightarrow \text{het snijpunt van } OX \text{ met } l \text{ voor } X \neq O \text{ en } OX \text{ niet}$$

parallel met l .

Of althans

$$f: X \rightarrow \text{het snijpunt van } OX \text{ met } l \\ \text{voor zover existent.}$$

Maar deze vereenvoudiging is bereikt ten koste van een zeer ernstige afwijking van het wiskundig taalgebruik. Er is hier sprake van het snijpunt van OX met l onverschillig of dit bestaat of niet. Nu pleegt het gebruik van het lidwoord in wiskundige teksten aan zekere afspraken te zijn gebonden:

De x met de eigenschap $F(x)$

definieert een wiskundig objekt wanneer er één en slechts één x is die $F(x)$ bevredigt, en wel definieert die uitdrukking dan dit objekt. Onder welke voor-

waarden kan

De x met de eigenschap $F(x)$

als onderwerp of voorwerp in een volzin optreden? De algemeen erkende afspraak (zie bijv. Hilbert-Bernays) in de wiskunde is:

Alleen als er één en slechts één x met $F(x)$ is.

Ik geef toe dat logisten andere opvattingen huldigen. Russell & Whitehead laten

De x met de eigenschap $F(x)$

in een propositie toe, met dien verstande dat die uitspraak als fout wordt beschouwd, als er geen zo'n x is of er verschillende zulke x zijn.

De tegenwoordige koning van Frankrijk is kaal is volgens algemeen wiskundig taalgebruik ontoelaatbaar, volgens Russell & Whitehead fout.

Nog een andere mening huldigt Quine, die

De x met de eigenschap $F(x)$

de lege verzameling laat definiëren, indien geen x aan $F(x)$ voldoet of meer dan één x voldoet.

Het toelaten onder alle omstandigheden van

De x met de eigenschap $F(x)$

in een propositie is wel de achtergrond van Vredenduins betoog. Volgens Vredenduïn zijn de volgende uitspraken juist:

De oplossing van $ax = 3$ is $3/a$. Volgens Vredenduïns principes hoeft hier geen $a \neq 0$ als eis aan toegevoegd te worden.

De grootste oplossing van $x^2 + ax + b = 0$ is $-a/2 + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b}$. Volgens Vredenduïn hoeft er geen diskriminant-eis aan te worden toegevoegd.

Nog bizarrer: Volgens Vredenduïn (en vermoedelijk de Nomenclatuurcommissie) is juist:

De oplossing van $x^2 - a^2 = 0$ is $x = \sqrt{-a^2}$.

En zelfs:

De oplossing van $|x| \leq a$ is $x = \sqrt{-a^2}$.

Want voor $a \neq 0$ bestaat de oplossing niet.

Volgens gangbare wiskundige taal zijn de als oplossing aangegeven uitdrukkingen ontoelaatbaar, als er niet bepaalde eisen aan worden toegevoegd. Ik denk, dat dit didaktisch ook de juiste opvatting is. Het is van het grootste belang, dat we de leerlingen inprenten van

De x met de eigenschap $F(x)$

alleen te spreken als er precies één zo een x is. Ik geef toe, dat men subtiële konstrukties kan bedenken, waarbij het spreken over

De x met de eigenschap $F(x)$

mogelijk wordt, ook indien aan die eis niet voldaan is, maar dergelijke subtiliteiten horen niet in het onderwijs thuis. Het lijkt me, dat we op de verkeerde weg zijn, als we de leerlingen niet deze denkwijzigheid bijbrengen. In elk geval moet, wie zulk een revolutionaire wijziging van de mathematische taal propageert, niet alleen een enkel voorbeeld geven, waar ze een klein winstpunt op-

levert, maar evenzeer voor minder aangename konsekwenties waarschuwen.

Staat men Vredenduin die vrijheid t.a.v. het taalgebruik niet toe, dan kan men ook het laatste eventuele voordeel van het functiebegrip van de Nomenclatuurcommissie vergeten.

8 Vredenduin maakt er gewag van, dat het door de Nomenclatuurcommissie voorgestelde functiebegrip in België met name bij Papy gebruikelijk zou zijn. Ik heb iets, wat hierop lijkt, elders * op andermans gezag beweerd. Ik heb echter achteraf nergens in de literatuur enig bewijs hiervoor gevonden. Het schijnt dat men dit functiebegrip wel heeft toegelaten, maar er achteraf zo van geschrokken is, dat men het liever niet toepast.

9 Ik stelde in mijn vorig stuk de vraag:

Volgens de voorstellen blijft het in 't midden of

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow \sqrt{x-1} & \text{van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R} \\ \text{en } x \rightarrow \sqrt{x-1} & \text{van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R} \end{array}$$

dezelfde functie zijn. Is dit didactisch verantwoord?

Vredenduin's antwoord hierop verbaast me uitermate. Het luidt 'ja' in strijd met alle relatie-definities, die ik uit de literatuur ken. Mogelijk dacht Vredenduin aan een ander relatiebegrip dan het gebruikelijke, maar in elk geval dient hieromtrent klaarheid te komen.

10 Ik moet me, helaas, opnieuw met een misverstand bezighouden, dat telkens in Vredenduin's uiteenzettingen terugkomt. Het is de verwarring van wiskunde met de taal, waarin de wiskunde wordt uitgedrukt. Ik weet wel dat er een grondslagentheoretische opvatting is, het formalisme, waarbij de wiskunde als een taal wordt opgevat. Deze opvatting heeft haar bestaansrecht, maar zij veronderstelt een volledig geformaliseerde wiskunde (die tot nu toe alleen maar in theorie bestaat). Het is geen opvatting, die ook maar in de verste verte op school thuishoort. Vermengt men dan toch de realistische en de formalistische opvatting van de wiskunde, dan gebeuren er rampen.

Het antwoord dat Vredenduin op mijn vragen 1 en 2 geeft, is volstrekt onvoldoende. Vredenduin stelt erin, dat een functie een uitdrukking uit de wiskundetaal met een vrije variabele is. Dit is onjuist, behalve vanuit een formalistisch standpunt waar de wiskunde met een taal vereenzelvigd wordt. Op de school leidt het tot een caricatuur van het functiebegrip: een formule met een x erin, waar je maar iets voor substitueert. Het is in strijd met de letter en geest van het functiebegrip. De leerling moet begrijpen, dat elk verband tussen twee verzamelingen, dat aan de bekende eisen voldoet, een functie is, of het door een formule in wiskundetaal is gegeven, dan wel niet. Je kunt het domein van een functie f niet uit taalkundige kenmerken verkrijgen, maar het moet met de functie gegeven worden. Dit was de zin van mijn vraag: hoe zie je aan de letter f voor welke x die $f(x)$ betekenis heeft? Vredenduin's antwoord hierop is ernaast.

*Educational Studies 2 (1969), 43.

Hetzelfde geldt van zijn opmerkingen omtrent de schrijfwijze

$$\{x \mid A\}.$$

Natuurlijk heeft de Nomenclatuurcommissie het recht die schrijfwijze te verbieden. Maar de gebruiker — leraar en leerling — heeft evenzeer het recht op een redelijke motivering van zo'n verbod. Dat die schrijfwijze tot paradoxen leidt, is onjuist. Een *schrijfwijze* kan niet tot paradoxen leiden (tenzij in een volledig geformaliseerde taal, waar ook het begrip 'paradox' geformaliseerd is). Wel kunnen *redeneringen* tot paradoxen leiden en dan geheel onafhankelijk van de schrijfwijze. Het spijt me dat Vredenduin mijn opmerkingen hieromtrent naast zich neerlegt.

11 Ik stap over Vredenduits overige opmerkingen heen naar het notatiepatroon

$$\{(x, y) \mid x = 3a \wedge y = a - 2, \quad a \in \mathbb{R}\},$$

dat ik knetterfout noemde. Volgens Vredenduin is deze notatie niet fout. Zij heeft nog geen betekenis — zegt hij — men kan er dus elke betekenis aan hechten. Dit laatste is al onjuist; het is didactisch fout, een willekeurige betekenis aan uitdrukkingen te hechten, die zich er niet voor lenen. Maar ook het eerste is fout. Die uitdrukking heeft — redelijkerwijs gesproken — een betekenis, alleen betekent zij niet hetgeen men ermee wenst uit te drukken.

De vraag komt hierop neer: wat betekent de komma tussen mathematische formules? Ik houd er niet van, van deze komma, maar het is een feit dat hij gebruikt wordt.

Als men onder een vraagstuk over ongelijkheden het antwoord

$$x \leq -3, \quad x \geq 2$$

vindt, is het duidelijk dat de komma 'of' betekent.

Staat er

$$x \geq -3, \quad x \leq 2,$$

dan betekent de komma kennelijk 'en'. Hoe zie je dat? Het is nogal duidelijk. $x \leq -3$ en $x \geq 2$ kan niet samen, dus moet het wel 'of' zijn. $x \geq -3$ of $x \leq 2$ zou helemaal geen beperking opleggen, dus moet het 'en' zijn.

Ik dacht, dat wij het er over eens zijn, dat dit geen zindelijk taalgebruik is. Al vóór de moderne wiskunde hebben wiskundelaren zich beijverd om de leerlingen in deze een behoorlijk taalgebruik bij te brengen; met de $\vee$ en $\wedge$ van tegenwoordig is dat geweldig vergemakkelijkt.

Mag nu bij de kwantoren wel, wat bij de dis- en conjunctie taboe is? Als de gebruikelijke tekens voor de kwantoren de overeenkomst met dis- en conjunctie niet versluierten, zou iedereen direkt 'neen' zeggen, maar volgens de Nomenclatuurcommissie is het 'ja'.

Waar treft men de komma bij kwantoren aan: Bijvoorbeeld

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

de eerste komma betekent 'voor alle', de tweede 'en';

$$\text{als } a < b \text{ dan } ac < bc, \quad c \in \mathbb{R}^+;$$

de komma betekent weer 'voor alle'.

Zou de komma ook wel eens 'er is' kunnen betekenen? Ik heb geen voorbeelden kunnen vinden. Het lijkt me ook niet waarschijnlijk, dat ze er zijn, omdat je 'er is' zeker vóór en niet achter de zin zou plaatsen. Of kun je de komma als 'voor sommigen' gebruiken?

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

lees je wel als een op te lossen vergelijking, maar niet als uitspraak 'voor sommige x '.

Laten we nu de akkolades erbij halen. Wat betekent

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + bx + c > 0, x \in \mathbb{R}\}?$$

Ik heb de proef genomen. Iedereen leest dit als: de verzameling der coëfficiëntendrietallen, waarvoor $ax^2 + bx + c$ positief definitief is, dus

$$= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0)\}.$$

Ik geef toe dat men de komma ook als existentiële kwantor zou kunnen lezen en dan zou de verzameling

$$= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b^2 - 4ac > 0) \vee (a = b = 0 \wedge c > 0)\}$$

zijn, al dacht ik dat die interpretatie gezocht is.

Waarom zou nu in

$$\{(x, y) \mid x = 3a \wedge y = a - 2, \quad a \in \mathbb{R}\}$$

de komma ineens een *existentiële* kwantor moeten aanduiden? Nogal duidelijk, omdat de interpretatie van de komma als *universele* kwantor de lege verzameling zou produceren en dat kan onmogelijk de bedoeling zijn, want daar kan je je niet druk voor maken.

Dit soort redeneringen ad hominem van 'wat kan hij wel met de komma bedoeld hebben?' gaan tegen de opvoedende taak van de wiskundetaal in. Vindt men kwantoren te moeilijk, dan blijve men uit de buurt. In elk geval verleide men leraar en leerling niet tot het weinig verheffende geknoei van 'als je het niet

weet, zet dan maar een komma.' Men vermijde onbegrepen dikdoenderij en schrijve simpelweg

de verzameling der (x, y) van de vorm $x = 3a, y = a - 2$ bij geschikte $a \in \mathbb{R}$.

Of als dit te lang is:

de v.d. (x, y) v.d.v. $x = 3a, y = a - 2$ b.g. $a \in \mathbb{R}$.

Nog beter: men kome eerlijk voor de bedoeling uit, dat achter

$$x = 3a \wedge y = a - 2$$

de functie

$$a \rightarrow (3a; a - 2) \quad \text{voor } a \in \mathbb{R}$$

zit. De bedoelde verzameling is dan niets anders dan de waardeverzameling van deze functie, bijv. door

$$W(a \rightarrow (3a, a - 2) \quad \text{voor } a \in \mathbb{R})$$

aan te duiden. Ik begrijp niet, waarom men een kronkel-interpretatie, die men niet eens behoorlijk formaliseren kan, boven de eigenlijk bedoelde prefereert. In deze trant kan men ook

$$\{(3a, a - 2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

schrijven. Er zijn dus heel wat mogelijkheden om het goed te doen.

Er zijn volwassenen, die menen tegen kleuters in een brabbeltaaltje te moeten praten; als de kleuter dit overneemt, kunnen ze immers zeggen: zie je, hij kan niet beter. Gelukkig leren de kleuters het af. In Wiskunde II zullen we ze het afleren — aldus Vredenduin. En de anderen? Moeten ze maar blijven brabbelen?

Rectificatie

De lezer van Freudenthals stukje in het decembern timer zal wel bij de laatste zin (blz. 140) de ogen uitgewreven hebben.

De zetter heeft — wel onbewust — dan ook een „leuke” poets gebakken. De laatste zin moet natuurlijk luiden:

Een functie van A en B is een relatie, die aan elk element van A precies een element van B koppelt.

Het tweede internationale congres over wiskundeonderwijs

Dit congres zal van 29 aug. — 2 sept. 1972 gehouden worden in Exeter, Engeland.

In zijn jaarrede op 16 oktober j.l. deelde de voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren mede dat het bestuur voornemens is uit de kas van de vereniging een tegemoetkoming in de kosten te geven aan die leden die het congres willen bijwonen. De jaarvergadering heeft later goedgevonden dat hiervoor een bedrag van maximaal f 3.000,— wordt uitgetrokken.

Zij die voor een toelage in aanmerking willen komen worden verzocht dit voor 31 januari bij de secretaris kenbaar te maken. De grootte van de tegemoetkoming is afhankelijk van het aantal aanvragen.

De kosten van huisvesting, voeding en congres bedragen £ 27.50.

Aankondiging en inschrijfformulier kunnen voor zover de voorraad strekt verkregen worden bij de penningmeester.

Uit het aankondigingsblad wordt hier het volgende uittreksel gegeven.

All the work of the Congress will take place at the University of Exeter. There is ample residential accommodation available for all Congress members in University Halls of residence on the University site.

DISTINGUISHED GUESTS

Professor Jean Piaget
Professor George Polya

Each will prepare a special written paper as a contribution to the work of the Congress.
Their presence will enable Congress to acknowledge and acclaim two most distinguished men.

PLENARY SESSIONS (6 sessions)

Invited addresses will be given by:

Professor Hans Freudenthal	Netherlands	"What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematics teaching"
Professor David Hawkins	U.S.A.	"Nature, Man and Mathematics"
Dr. Edmund Leach	U.K.	"The Concept of Time in Cross-Cultural Perspective"
Professor H.W.S. Philp	Australia	"Mathematics in the developing world: some teaching-learning problems"
Professor René Thom	France	"Modern Mathematics—does it exist?"

The Academy of Pedagogical Sciences of the Union of Soviet Socialist Republics has been invited to nominate one speaker.

Invited papers will be simultaneously interpreted during plenary sessions into French, German and English.

WORKING GROUPS (10 sessions)

There will be approximately 40 working groups. To give some idea of the scope of these, there follows a sample of the topics already identified, with, in each case, the name of one of the contributors.

1. The Teaching of Analysis in Schools (Professor A. Revus, I.R.E.M. Paris)
2. The Teaching of Probability and Statistics (Professor L. Rade, Chalmers Uni., Sweden)
3. Mathematics for Science Undergraduates (Professor Mary Hartly, Uni. of Ghana)
4. Computers in Mathematical Education (Professor P. Suppes, Stanford Uni. U.S.A.)
5. The Psychology of Learning (Dr. E. Fischbein, Institute of Psychology, Bucarest, Rumania)
6. Learning by Investigation (Miss Edith Biggs, Dept. of Education and Science, U.K.)
7. Creativity and Problem Solving (Professor J.W. Wilson, Uni. of Gregoria, U.S.A.)
8. Research in Mathematics Education (Professor B. Christiansen, Copenhagen, Denmark)

Each group will have a secretary from the U.K. who will collate the various contributions.

Offers to participate actively in the areas listed above or in (ONI) our First Announcement, or, indeed, any other fields, should be made as soon as possible to the Honorary Secretary.

Van de redactie

1. Tot ons genoeg kunnen we melden dat Drs. B.J. Westerhof, coördinerend inspecteur van het vwo-havo, tot de redactie van Euclides is toegetreden. Wij heten hem van harte welkom.
Wij zijn er van overtuigd in hem een goed medewerker en adviseur te zullen hebben.
2. De nummers van februari en maart zullen tesamen in één dubbelnummer in de loop van februari verschijnen. Het nummer zal geheel verzorgd worden door medewerkers van het IOWO.

Zwin 1

Le Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique vous invite à participer au

1^{er} Congrès International du ZWIN

KNOKKE 8 - 11 MAI 1972

thème: de la maternelle à l'université

FREDERIQUE, Directeur de Recherche au CBPM

"Mathématique moderne à 10 ans"

"Mathématique moderne à 4 ans"

Robert DIESCHBOURG, Professeur à l'Institut Pédagogique de Walferdange
(Grand-Duché de Luxembourg)

*"Un enseignement de la mathématique moderne
pour des enfants mentalement handicapés"*

Peter J. HILTON, Professor of Mathematics, CORNELL UNIVERSITY (USA),
Visiting Fellow Battelle Seattle Research Center.

*"The implications of the modern mathematical theory of categories
to problems of mathematical education" (1) et (2)*

PAPY, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Bruxelles

"Le calcul booleen et le calcul propositionnel" (1) et (2)

Paul VAN PRAAG, premier assistant au Centre Universitaire de l'Etat à Mons

"Polynomes et champs"

Exposé de travaux de jeunes chercheurs du CBPM

Le CBPM se réserve le droit d'apporter à ce programme toute modification
qu'imposerait le développement de la recherche.

Le Congrès se tiendra au SINT-BERNARDUSINSTITUUT
Sportlaan 4 – 8300 KNOKKE-HEIST.

Les séances auront lieu de 9.00 à 12.15
et de 16.00 à 18.30

Les inscriptions doivent parvenir au CBPM avant le 31 mars 1972

Le droit d'inscription est de 600 FB ou \$ 12
à virer au CCP 302.10 du CBPM – 1180 Bruxelles.

LES PARTICIPANTS ETRANGERS recevront, *sur demande*, une documentation
concernant les possibilités de logement et d'excursions.

Un programme détaillé sera envoyé, en temps utile, aux personnes inscrites.

Boekbespreking

W. Kaplan, D.J. Lewis, *Calculus and linear algebra*, dl. II, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1971, 600 blz., £ 5.

Deel I werd besproken in *Euclides*, 46, p. 114. Deel II start met een abstract vectorbegrip. Uitgaande van de bekende rekenregels, die in deel I voor vectoren waren afgeleid, wordt nu elke verzameling waarin een operatie gedefinieerd is die aan deze regels voldoet een vectorruimte genoemd. Zoals gebruikelijk in deel I worden ook nu onmiddellijk de nieuwe begrippen toegelicht met voorbeelden, die de abstractie verduidelijken.

Hierna volgen lineaire afbeeldingen (eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren, kern).

Hoofdstuk 10 bespreekt matrices en determinanten, lineaire vergelijkingen, de algebra van vierkante matrices, het minimum-polynoom van een vierkante matrix, matrices van functies en de afgeleide van een matrix.

Hoofdstuk 11 bespreekt de lineaire euclidische meetkunde in R_3 waarbij in de toegevoegde opgaven ook de meetkunde in R_4 en R_5 voorkomt. Verschillende coördinaatsystemen zoals cilindrische en sferische komen ook aan de orde.

Hoofdstuk 12 en 13 behandelt de 'calculus', functies van meer variabelen, vectorfuncties, partiële afgeleiden, impliciete functies, meervoudige integralen, lijn-integralen, theorema's van Green en Stokes, rotatie en divergentie uit de vectoranalyse en differentiaalvergelijkingen.

De appendix van 25 bladzijden dient voor de antwoorden op vele van de toegevoegde opgaven. Een uitstekend boek voor zelfstudie. De uitvoering zou men luxueus kunnen noemen.

Burgers

C.A.Ch. Görts, S.G. v.d. Meulen, A. v.d. Sluis en J.R. Zweerus, *Computerkunde 2*, Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen 1971, 93 blz. prijs f 6,50.

In dit tweede deel van *Computerkunde* wordt een aantal toepassingen van de computer besproken: een girodienst, een personeelsadministratie, plaatsbespreken in een vliegtuig, sorteren. Met nadruk verklaren de schrijvers dat zij als een van de belangrijkste doeleinden van het onderwijs in computerkunde zien, dat de leerling van een aantal maatschappelijke toepassingen de kern begrijpt. Daartoe hebben zij steeds die wijze van toepassing gekozen, die de leerling het meest aanspreekt. Het gevolg hiervan is dat bij doorlezen van dit boekje nogal eens de vraag blijft hangen: Hoe gaat het momenteel in werkelijkheid bij de Girodienst en bij de K.L.M.? Het is jammer dat hieraan geen aandacht besteed wordt. Ondanks het feit dat niet steeds de meest economische of meest gebruikte manier vermeld wordt, blijft het boekje voor de leerling vrij pittig.

In de tweede helft van dit boekje worden nog een aantal speelse toepassingen van de computer gegeven, zoals het bord van Galton en het probleem van de wolf, de geit en de kool.

In een appendix wordt op duidelijke wijze de werking van de computer uiteengezet, waaraan bij de leerling nu ook echt wel behoefte bestaat. Dit keurig verzorgde en met tal van prentjes geïllustreerde boekje, besluit met een overzicht van de gebezigde taal – ECOL – met alle bekende eigenschappen.

Onder goede leiding zullen vele leerlingen dit smakelijk opgediende menu met veel genoegen verorberen.

A. van Wijk.

Prof.Dr.F. v.d. Blij en Dr.J. van Tiel, *Infinitesimaalrekening*, Het Spectrum N.V. Utrecht/Antwerpen.

In de serie Prisma-Technica – de bibliotheek voor moderne technici – is een boek verschenen dat bestemd is voor fysici en bovendien zeer aanvaardbaar voor mathematici.

In kort bestek worden hier een aantal onderwerpen behandeld uit de analyse, die van belang zijn voor ingenieurs en natuurkundigen.

Uitgaande van definities en stellingen, zonder verder bewijs gegeven, wordt veel aandacht besteed aan toepassingen. Veel vraagstukken worden uitgewerkt gegeven, aangevuld met opgaven die de lezer aansporen zelf aan het werk te gaan.

Door de beknoptheid van de theorie, waarbij alleen aan de orde gesteld wordt wat noodzakelijk is om de toepassingen te begrijpen, brengt het boek veel materiaal bijeen, bij uitstek geschikt voor de zuiver-wiskundigen, die hier ervaren wat 'er met wiskunde allemaal te bereiken valt'.

Vandaar dat dit gewijzigde en aangevulde collegedictaat voor vele docenten in de wiskunde bij v.w.o. van groot belang is. Speciaal kan gewezen worden op de praktische interpretatie van het differentiëren als lineaire benadering, terwijl het werken met differentiaalvormen en hun toepassingen ook bijzonder waardevol is.

Gaarne zou ik dit boek in handen zien van allen die voor wiskunde in het algemeen en voor de toepassingen daarvan in het bijzonder belangstelling hebben.

Westerhof

Robert Ineichen, *Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Raeber Verlag, Luzern und Stuttgart, 1971, 114 blz. (3. vollständig neu bearbeitete Auflage). Heft 2 van de Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichtes. Prijz 14 sFr.

Het boekje is, zoals de titel ongeveer aangeeft, een elementaire inleiding. De schrijver stelt zich terecht daarbij niet op een theoretisch standpunt, maar behandelt het probleem vanuit een zuiver praktische gezichtshoek. Dit blijkt duidelijk uit de gekozen kansdefinitie. Op blz. 31 vinden we: 'Hat nun ein zufälliges Ereignis eine relative Häufigkeit, die diese auffallende Stabilität zeigt, so gibt uns der Wert von r/n doch eine Möglichkeit, den Zufallscharakter dieses Ereignisses besser zu erfassen ...'. Hierin is r/n de relatieve frekwentie en is met de stabiliteit bedoeld, dat men merkt, dat deze relatieve frekwentie weinig meer verandert, als men n groot neemt en laat toenemen. Deze r/n is nu een 'Messung der mathematischen Wahrscheinlichkeit' (blz. 32). Binnen het kader van het boek heb ik alle waardering voor deze omschrijving. De rest van het boek ademt dezelfde geest: praktisch, helder en duidelijk. Achtereenvolgens worden behandeld: een inleiding in de beschrijvende statistiek, waarschijnlijkheidsrekening (incl. kansverdelingen en een vleugje steekproeven), de normale verdeling. Het is wel erg moeilijk dit laatste onderwerp op elementaire wijze goed uit de verf te laten komen en dat is de schrijver dan ook m.i. het minst goed gelukt.

Het boekje kan ik stellig aanbevelen aan hen, die zich in het vak statistiek willen inwerken en er de voorkeur aan geven de portee van het vak te zien, voordat zij zich met de begripmatige precisering gaan bezighouden.

P.G.J. Vredenduin

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

School Science and Mathematics, 621-629, october 1970-juni 1971.

- W. J. McKeough, Conceptualizing mathematics 'motion problems';
N. Locksley, Why should a nice liberal arts student study math?
R. R. Allen, The language of 'maths' in England's modern schools;
M. Gozan, The promise of scientific humanism;
J. L. Creswell en M. Wiscamb, New strategies for teaching properties of number systems;
R. B. Nicodemus, Order of complexity in attribute blocks.
- L. Oberlin, Equal or equivalent sets;
M. J. Demchik, The classroom test – a measure of transfer of training;
M. A. Hervey en B. H. Litwiller, Structure;
N. Sleight, An easy method of solving trigonometric inequalities.
- J. D. Novak, Relevant research in audio-tutorial methods;
F. M. Roberts, Attitudes toward mathematics of faculty and students in three high schools;
R. Karplus en R. W. Peterson, Intellectual development beyond elementary school: ratio, a survey;
L. J. Dixon, Approximations and the teaching of mathematics.
- H. Boeckmann, The discovery approach strategy for mathematics teachers;
K. J. Travers, Mathematics education and the computer revolution;
J. Niman, Physics and poetry;
R. A. Roth, Princeton project and the process approach;
A. H. Holmes, Statistical inference: some classroom activities.
- D. A. Johnson, Behavioral objectives for mathematics;
N. W. Earp, Problems of reading in mathematics;
M. A. Farrell, Geometry: a psych-o-logical learning strategy;
Th. C. O'Brien, Some notes on mediators;
C. B. Read, Second degree equations as sections of a cone;
Ch. W. Trigg, Palindromic cubes.
- Ch. W. Trigg, Magic squares with polygonal elements;
Ch. T. Mangrum a.o., Doctors dissertation research in science and mathematics;
G. Kaprelian, Number names;
I. M. Silvey en A. Christensen, Using prime numbers to teach mathematics in the primary school.
- A. L. Taylor, Teacher and student evaluations of an enriched science and mathematics summer program;
J. Melton, Arithmetic for individuals;
O. C. Bassler a.o., Comparison of two levels of guidance in teaching elementary school mathematics;
J. W. McConnell, An application of boolean algebra to biology;
A. R. Amir-Moez, The magic of base two;
R. F. Gray a.o., An experimental study of the relationship of homework to pupil succes in computation with fractions.
Fr. Abeles en E. J. Zoll, Networks, maps and Betti numbers;
R. Yager, The tasks of SSMA;

R. L. Sparks en L. McCallon, Forstering indirect teaching behavior in an elementary science methods course;
 L. H. Kanter, A note on the optical property of the parabola;
 O. C. Bassler a.o., An investigation of two instructional variables in learning nonmetric geometry;
 N.E. Ladd, Some modern proofs for ninth and tenth grade analytic geometry;
 J. K. Bidwell, Some consequences of learning theory applied to division of fractions.

S. Metzner, The elementary teacher and the teaching of arithmetic;
 H. Hannon, All about division with rational numbers;
 D. R. Byrkit, Changing bases — a method for squares;
 J. Barnard en J. Knaupp, Using behavioral objectives to teach placeholders;
 Fr. Smith, The readability of ninth grade word problems;
 L. M. Lackner, A pilot study on teaching the derivative concept in beginning calculus by inductive and deductive approaches.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuveel 73, Oosterbeek.

272 In het platte vlak liggen n punten zo, dat er geen drie op één lijn liggen. Elk paar is door een gericht lijnstuk verbonden. Hierdoor ontstaat een aantal driehoeken, waarin de pijltjes 'rond lopen'. Noem dit aantal p .

a. Kies de richtingen zo, dat $p = 0$.

b. Kies de richtingen zo, dat p maximaal is. Dat maximum is voor n oneven gelijk aan $(n-1)n(n+1)/24$ en voor n even $(n-2)n(n+2)/24$. Gevraagd wordt niet te bewijzen, dat deze formules juist zijn (omdat noch de inzender noch uw redacteur daarin geslaagd is), maar alleen een methode aan te geven om dit maximum te realiseren.
 (Mevr. B.C. Dijkstra-Kluyver)

273 Gegeven is een aantal kaartjes op elk waarvan twee letters naast elkaar staan, b.v. AC, PL, AV. We leggen deze kaartjes naast elkaar zo, dat de beginletter van elk tweede kaartje dezelfde is als de eindletter van het eerste, dus b.v. zo: AV - VP - PQ - QB - ... Kies willekeurig twee letters b.v. R en C. Het is dan steeds mogelijk een serie op bovenstaande manier te vormen, die met R begint en met C eindigt. Het aantal keren, dat A als eerste letter voorkomt, is gelijk aan het aantal keren, dat A als tweede letter voorkomt. Hetzelfde geldt voor alle andere letters.

Bewijs, dat de gehele verzameling kaartjes zich op de voorgeschreven manier aan elkaar laat passen en wel cyclisch, d.w.z. zo, dat de beginletter van het eerste kaartje dezelfde is als de eindletter van het laatste.

270 Gevraagd wordt op te lossen

$$\varphi(n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \text{ en } \varphi(n) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

waarin $\varphi(n)$ het aantal natuurlijke getallen tussen 0 en n is, dat onderling ondeelbaar met n is.

Verschillende priemfactoren van n , die $\neq 2$ zijn, leveren elk een factor 2 in $\varphi(n)$. Omdat in het eerste geval $\varphi(n)$ slechts één factor 2 bevat, kan n maar één priemfactor $\neq 2$ bevatten. Deze ene priemfactor is dan

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031.$$

Omdat $30031 = 59 \cdot 509$ en dus niet priem is, is de oplossingsverzameling van de eerste vergelijking leeg.

In het tweede geval kan n twee verschillende priemfactoren $\neq 2$ bevatten. Onderstel n bevat twee factoren 3. Dit levert een bijdrage voor $\varphi(n)$ van $2 \cdot 3$. Er blijft nog over $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Nu is $30 + 1 = 31$ priem. En dus voldoet $3^2 \mid 31$. Bevat n drie factoren 3, dan levert dit voor $\varphi(n)$ een bijdrage van $2 \cdot 3^2$. Er blijft nog over $2 \cdot 5 = 10$. Omdat $10 + 1 = 11$ priem is, voldoet $2 \cdot 3^2 \mid 11$.

Het blijkt niet mogelijk, dat n twee factoren 5 bevat.

Verder kunnen we $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ nog splitsen in

$6 \cdot 30$, hetgeen voor n levert $7 \cdot 31$,

$18 \cdot 10$, hetgeen voor n levert $19 \cdot 11$,

$2 \cdot 90$, hetgeen geen oplossing levert, omdat 91 niet priem is,

$1 \cdot 180$, hetgeen levert $n = 181$.

Ten slotte kunnen de zo gevonden 5 wortels elk nog met 2 vermenigvuldigd worden.

271. Gevraagd wordt de langste rij natuurlijke getallen, waarvan de som 10^6 is.

Noem het eerste getal van de rij a en het aantal getallen n . Dan is

$$\frac{1}{2}n(a + a + n - 1) = 10^6,$$

$$n(n + 2a - 1) = 2^7 \cdot 5^6.$$

Er zijn nu twee mogelijkheden.

a. n is even. Dan is $n + 2a - 1$ oneven en bevat n dus 7 factoren 2. Dus is

$$n = 2^7 \cdot 5^k \quad (0 \leq k \leq 6).$$

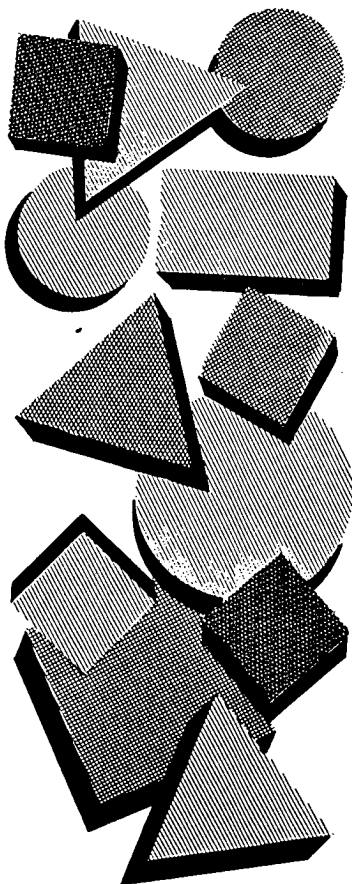
Direct duidelijk is, dat $k < 3$. Ook $k = 2$ blijkt onmogelijk. Bij $k = 1$ vindt men $n = 640$.

b. n is oneven. Dan is $n = 5^k$ ($0 \leq k \leq 6$). Nu blijkt de grootste waarde, die k kan aannemen, 4 te zijn. Bij $k = 4$ vinden we $n = 625$.

Zodat de grootste waarde voor n gelijk is aan 640.

Opdrachten logica

Voor de brugklas



Ideeën van prof. dr. Z.P. Dienes, voor Nederland bewerkt door drs. C.A.J. Bouwmeester en drs. B. van der Krogt.

Deze logica-cursus, die losbladig is en opgeborgen is in een ringband, bestaat uit twee delen:

- ★ Een basiscursus (Serie I). Hierin wordt een aantal groundbegrippen uit de logica geleerd:
 1. de negatie of ontkenning
 2. de conjunctie
 3. de disjunctie
 4. de implicatie
 5. de equivalentie of gelijkwaardigheid
- ★ Een cursus redeneervormen (Serie II). Hierin wordt een aantal redeneervormen behandeld, die berusten op een van de volgende principes of op een combinatie daarvan:
 1. het deelverzameling-principe
 2. het gelijke verzamelingen-principe
 3. het doorsnede-principe

Beide series zijn zo samengesteld dat de leerlingen de opdrachten zelfstandig kunnen uitvoeren. Zij kunnen daarbij gebruik maken van Malmbergs mini-logiblokken.
(f 4,75; bij 20 ex. f 4,25)

Vraag nadere inlichtingen bij



MALMBERG 's-HERTOGENBOSCH

postbus 233 Telefoon (04100)-23311

meetkunde met vectoren

L. R. J. Westermann,

MEETKUNDE MET VECTOREN

deel 1 ISBN 90 01 94920 7, ing. f 12,—

deel 2 ISBN 90 01 94921 5, ing. f 11,60

Een behandeling van vectoren in het
platte vlak en in de ruimte.

Geschikt voor:

- de hoogste drie leerjaren van het
v.w.o. (b-afdeling en wiskunde-II)
- hoger beroepsonderwijs
- wiskunde l.o. opleiding

Meetkunde met vectoren is
voortgekomen uit een experiment van
de Commissie Modernisering Leerplan
Wiskunde.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de
uitgever



Wolters-Noordhoff

INHOUD

Wiskunde op de basisschool (3) 161

Tweede interim-rapport van de nomenclatuurcommissie 172

H. Freudenthal: nog eens nomenclatuur 181

Het tweede internationale congres over wiskundeonderwijs 193

Van de redactie 194

Zwin 1 195

Boekbespreking 196

Didaktische literatuur 198

Recreatie 199