

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

47e jaargang

1971/1972

no 4

december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 15,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouthuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezaand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 15,—. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 130,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 70,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 40,—.

Prof. Dr. O. Bottema 70 jaar

Op 25 december 1971 hoopt prof. dr. O. Bottema zijn zeventigste verjaardag te vieren. We stellen er prijs op aan dit feit in Euclides enige aandacht te besteden in verband met de bijzondere verdiensten van Bottema voor ons tijdschrift.

Zijn eerste bijdrage in Euclides bevatte de tekst van de openbare les door hem in 1931 gegeven bij de aanvaarding van het ambt van privaat-docent aan de Groningse universiteit, een van zijn laatste grotere bijdragen handelde over de *Stelling van Pompeïu*, waarover hij op de jaarvergadering van Wimecos in 1961 een voordracht had gehouden. Maar karakteristiek in de relatie Bottema-Euclides zijn de korte bijdragen die sinds 1945 onder de naam '*Verscheidenheden*' een plaats in ons tijdschrift hebben gevonden: hun aantal heeft de 80 reeds overschreden. In deze lange reeks is het inderdaad de verscheidenheid die opvalt, een verscheidenheid die getuigt van een ongemene belangstelling voor de meest uiteenlopende terreinen op het gebied van de wiskunde. Het spelkarakter, dat karakteristiek is voor de belangeloze beoefening van de wiskunde, krijgt door deze bijdragen bijzonder relief. Uiteraard worden de verscheidenheden die bestudering vereisen niet door alle lezers van Euclides doorgewerkt. Maar we weten dat er ook intens belangstellenden zijn die ervan getuigen dat Bottema's bijdragen voor hen de hoofdattractie van ons tijdschrift uitmaken. Op de betekenis van het spelelement voor de beoefening van de wiskunde heeft Bottema nadrukkelijk gewezen in zijn artikel '*Euclides in wonderland*' dat in de 27ste jaargang van Euclides werd opgenomen. In dit verband wijzen we er ook nog op, dat Bottema eertijds zijn medewerking verleende bij de samenstelling van de opgaven voor de eerste Wiskunde Olympiade in ons land.

Bottema heeft zijn gehele leven een grote belangstelling aan de dag gelegd voor de problemen waarvoor het wiskundeonderwijs, ook dat van het v.h.m.o. dat hij 17 jaren lang als leraar en als directeur van de h.b.s. te Sappemeer en te Deventer diende, hem stelde. Hieraan danken we enkele bijdragen in Euclides. Zijn waardering voor het vraagstuk als didactisch kleinood werd door hem tot uitdrukking gebracht in een lezing over het wiskundig gedeelte van het eind-examen h.b.s. uit de jaren waarin de samenstelling van de opgaven voor dit examen niet buiten hem om tot stand kwam. Van zijn belangstelling voor de problematiek van ons wiskunde-onderwijs getuigt zijn nog steeds lezenswaardige oratie uit 1941 getiteld '*De dienst der wiskunde*'. Ook wijzen we erop dat hij in de jaren 1936-1941 docent aan de Leidse universiteit is geweest voor de didactiek van de wiskunde. Zijn actieve belangstelling voor didactische problemen krijgt bovendien relief door zijn bemoeienissen inzake de instelling van het instituut der instructeurs te Delft, spoedig aan andere universiteiten en hogescholen nagevolgd.

Het herlezen van Bottema's grotere artikelen is een genot, dank zij zijn sprankelende geest die er in doorbreekt, door zijn grote culturele kennis en inzicht, door het telkens weer doorbreken van enge vakwetenschappelijke grenzen. We prijzen ons daarom gelukkig, dat een aantal van zijn publikaties die

buiten het vakgebied van de wiskunde liggen gebundeld zullen verschijnen in '*Steen en schelp*', een boekwerk waarvan de verschijning werd aangekondigd ter gelegenheid van het door hem gegeven afscheidscollege op 4 juni 1971.

We wensen prof. Bottema en de zijnen van harte geluk met zijn zeventigste verjaardag en spreken de hoop uit dat het hem gegeven zal zijn zich nog zeer lang te kunnen wijden aan de beoefening van de wetenschap die hem lief is.

Joh. H. Wansink

Ten geleide

Dit nummer van Euclides is aan alle scholen voor m.a.v.o., h.a.v.o. en v.w.o. toegezonden. Dit werd mogelijk gemaakt door de financiële medewerking van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de uitgever Wolters-Noordhoff.

Door Dr. Joh. Wansink werd op verzoek van de redactie een lijst samengesteld van boeken die kunnen worden aanbevolen zowel voor de leraren- als voor de leerlingenbibliotheek. Nu namelijk het wiskundeprogramma zo ingrijpend gewijzigd is hebben leraren en leerlingen behoefte aan materiaal om zich wat breder te oriënteren in de nieuwe terreinen van wiskundestudie. De leraren om zich een betere achtergrond bij hun lessen te verschaffen. De leerlingen o.a. bij de voorbereiding van keuzeonderwerpen en schooltoetsen. In de meeste schoolbibliotheken is nauwelijks iets aanwezig op wiskundig gebied.

Bij het aanvragen van extra credieten voor aanschaffing van de bibliotheekboeken kan deze lijst goede diensten bewijzen. De prijs voor elk boek afzonderlijk kon niet vermeld worden, maar wel is een schatting gemaakt voor het totale bedrag, dat voor beide bibliotheken aangevraagd zou kunnen worden.

Van de gelegenheid dat Euclides met dit nummer zich ook aan niet-abonnees presenteert, willen we gebruik maken om even iets over dit blad te vertellen.

Het is het officiële orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (vroeger Wimecos), de groep Liwenagel van het Genootschap van leraren aan Gymnasia en Lycea en van de Wiskunde werkgroep van de Werkgemeenschap tot Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs.

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft sinds kort ook zijn poorten opengezet voor m.a.v.o.-leraren. Er zijn nu ongeveer 500 van deze leraren lid van de vereniging. Voor hen worden speciale voordrachten op de jaarvergadering gehouden en o.a., in verschillende plaatsen van het land bijeenkomsten georganiseerd om de experimentele examens te bespreken.

De Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. heeft al jarenlang een sterke invloed gehad op de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. In de maandelijkse bijeenkomsten en dikwijls ook de weekend-conferenties zijn allerlei ideeën, die nu in de nieuwe leerplannen verwezenlijkt zijn, voorbereid.

Euclides heeft van de werkzaamheden van de verenigingen voortdurend verslagen, voordrachten, lezingen, discussies gepubliceerd.

Daarnaast treft men artikelen aan over de didaktiek van de (nieuwe) wiskunde en zo nu en dan een bijdrage in de geest van 'elementaire wiskunde van hoger standpunt beschouwd'.

In de lopende jaargang zal Euclides niet alleen de hierbij gepubliceerde boekenlijst opnemen, maar eveneens de interimrapporten van de nomenclatuurcommissie en een dubbelnummer gewijd aan de werkzaamheden van het pas opgerichte Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde-Onderwijs (IOWO), dat gerust een unicum op het gebied van het wiskundeonderwijs genoemd mag worden. Niet alleen landelijk, maar ook internationaal.

Voor hen die geïnteresseerd zijn in het werk van de verenigingen of van Euclides wijzen wij op de adressen vermeld op de binnenzijde van de omslag.

Relaties *

G. KROOSHOF

Groningen

Mamma, Piet is even oud als mij, hè?

1 Inleiding

Al op zeer jeugdige leeftijd zijn we begonnen relaties te herkennen. Zodra het vergelijken een rol begon te spelen hadden we het over:

is even groot als
is even oud als
heeft dezelfde kleur als

maar ook over

is groter dan
is ouder dan
is goedkoper dan.

Toen we gingen rekenen en later wiskunde bedrijven werd het werken met relaties uitgebreid. Het was een voortzetting van wat we allang gewend waren te doen. Nu leerden we relaties kennen als:

is de helft van
is het kwadraat van
is groter dan of gelijk aan

of zulke als:

is congruent met
is parallel met
staat loodrecht op.

In de 'klassieke' schoolwiskunde werd gewerkt met relaties, zonder dat ze als zodanig door de leerlingen werden herkend. Hun aard en onderlinge samenhang werden niet opgemerkt. De relaties waren niet het eigenlijke onderwerp

* Voordracht gehouden tijdens de jaarvergadering van de Ned. Ver. van Wiskundeleraren 16 oktober 1971.

van studie. Dat waren de eigenschappen van figuren en de vaardigheden in het hanteren van getallen.

Duidelijk blijkt dit wanneer we bijvoorbeeld letten op de rol die de relatie *is congruent met* vroeger speelde en nu is toebedeeld.

De congruentiegevallen waren in de schoolwiskunde van nog-niet-zo-heel-lang-geleden het onderwerp van de meetkunde in de eerste klas. Met enkele andere stellingen, bijvoorbeeld die over evenwijdige lijnen gesneden door een derde lijn, vormden ze zo ongeveer het fundament van het bouwwerk meetkunde, dat altijd nog herinnerde aan de grote bouwmeester Euclides.

Nu wordt er aan de congruentiegevallen geen of nauwelijks aandacht geschonken. Soms worden figuren congruent genoemd als ze 'passen in elkaars opening'. Later wordt gedefinieerd dat figuren die elkaars beeldfiguur kunnen zijn bij zekere meetkundige afbeeldingen, bijvoorbeeld spiegelen, congruent zijn.

Maar de zg. congruente afbeeldingen worden niet in de eerste plaats als bewijsmateriaal gebruikt. Ze zijn zelf onderwerp van studie, bijvoorbeeld wanneer onderzocht wordt welke afbeelding in de plaats kan komen van een spiegeling gevolgd door een tweede.

Een ander aspect van het onderwerp relaties en afbeeldingen komt meteen met dit voorbeeld te voorschijn: het bestrijkt de hele wiskunde, algebra en meetkunde.

2 De ontwikkeling van het begrip relatie in de schoolwiskunde

In de inleiding zijn voorbeelden van relaties gegeven in de vorm van open beweringen met twee variabelen. Verschillende methoden voor het voortgezet onderwijs maken van deze wijze van introduceren van relaties gebruik. De methode van A tot Z begint op een andere manier. Dadelijk in het eerste hoofdstuk van deel 1A wordt gesproken over origineel en beeld, in het tweede hoofdstuk wordt dan het begrip *functie* ingevoerd. In deze methode is in deel 1A een functie een *voorschrift, een vaste regel*, die je vertelt wat je met de getallen moet doen. Later in de methode worden ook de voorschriften die vertellen wat je met punten in een vlak moet doen (spiegelen, enz.) functies genoemd. Relaties worden geïntroduceerd via de *groter dan-* of *kleiner dan-relatie*.

Bij de ontwikkeling van het begrip relatie of functie is het *voorschriftkarakter* daarvan een fase. Een relatie is dan een voorschrift waardoor elementen van een verzameling worden *toegevoegd* aan elementen van een andere verzameling. Toevallig is mij eens gebleken dat leerlingen bij toevoegen soms denken aan 'erbij optellen'. Bij het gebruik van deze uitdrukking moet dus wel rekening worden gehouden met de mogelijkheid van verkeerd begrijpen.

Het voorschriftkarakter van een relatie kan tot uitdrukking worden gebracht door de schrijfwijze met een pijl, bijvoorbeeld $x \rightarrow x + 2$ of door de schrijfwijze *ARB*.

Ook de tekeningen met pijlen ('Papygrammen') accentueren het voorschriftkarakter.

Geleidelijk aan zal het accent echter wat verlegd worden. Het blijkt dat de zg. *binaire relaties* (open beweringen met twee variabelen) aanleiding geven tot het vormen van geordende paren. De verzameling van deze geordende paren zou men de oplossingsverzameling van de relatie kunnen noemen.

Er hoeft dan nog maar één stap te worden gedaan om over te gaan op de definitie: *Een relatie is een verzameling geordende paren.*

Dat is echter voor de leerlingen een grote stap, die zorgvuldig moet worden voorbereid. Het is een veel abstracter definitie dan die waarin een relatie een voorschrift wordt genoemd. Mits goed voorbereid kunnen de leerlingen de nieuwe definitie wel aanvaarden. Het is dan ook mogelijk relaties te definiëren zonder dat expliciet een voorschrift voor het vormen van de paren onder woorden wordt gebracht. Zo zou gezegd kunnen worden dat

$$\{(1, 3), (3, 7), (8, 12)\}$$

een relatie is met domein $\{1, 3, 8\}$ en met bereik $\{3, 7, 12\}$.

Wanneer een voorbeeld als dit op het bord komt, proberen de leerlingen toch nog een voorschrift te vinden waardoor het tweede element van elk paar aan het eerste wordt gekoppeld. De mededeling dat dit voorschrift is gegeven door het opschrijven van de relatie verwekt altijd enige tegenstand.

3 Relatie, afbeelding, functie

Een binaire relatie is gericht van een gegeven verzameling V naar een tweede verzameling W . We zeggen wel het is een relatie *van V naar W* . Daarbij hoeft niet elk element van V gekoppeld te zijn met elk element van W .

De nomenclatuurcommissie beveelt uitdrukkelijk aan om de *van-naar-terminologie* te gebruiken en dus bijvoorbeeld ook als er sprake is van een relatie waarbij bron- en beeldenverzameling beide $\mathbb{N}$ zijn, niet te spreken van een relatie *in $\mathbb{N}$* maar van een relatie *van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$* .

De verzameling van alle eerste elementen van de paren, die dus een echte deelverzameling van V kan zijn, wordt het *domein* van de relatie genoemd. De verzameling van alle tweede elementen van de paren heet dan het *bereik* van de relatie. In de methode Moderne Wiskunde is men van een andere opvatting uitgegaan. Die zal in de toekomst wel herzien worden. Bij relaties nl. is in deze methode ook een verzameling die meer elementen bevat dan de eerste elementen van de paren, domein genoemd. Eveneens is het begrip bereik daar ruimer genomen. Bij afbeeldingen en functies ligt de zaak anders, omdat deze zo gedefinieerd zijn dat er geeist wordt dat bij ieder element van het domein een element van het bereik zal behoren. Daarbij is het weer niet zo, dat elk element van het bereik aan een domeinelement gekoppeld behoeft te zijn. Ook dat zal veranderen tengevolge van het werk van de nomenclatuurcommissie.

Het is goed zich nog even verder bezig te houden met het rapport van deze

commissie. Het is nog een interimrapport, dat in nummer 7 van jaargang 1970-71 van Euclides is opgenomen. De mogelijkheid bestaat dus er op te reageren en wijzigingen voor te stellen. Of daar veel gebruik van wordt gemaakt betwijfel ik. In dit interimrapport worden twee opvattingen voor het begrip *afbeelding van V naar W (functie van V naar W)* vermeld. De commissie heeft gekozen voor de tweede daarvan.

a Een afbeelding van V naar W is een relatie van V naar W die aan elk element van V *precies één* element van W koppelt.

b Een afbeelding van V naar W is een relatie van V naar W die aan elk element van V *ten hoogste één* element van W koppelt.

Bij opvatting a valt het domein dus met V samen, bij opvatting b kan het domein een echte deelverzameling van V zijn.

Bij opvatting a moet men zeggen dat de functie $x \rightarrow \frac{1}{x}$ een relatie is van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ naar $\mathbb{R}$.

Bij opvatting b kan men zeggen dat deze functie een relatie is van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Nu is er aan het element 0 van $\mathbb{R}$ geen element van $\mathbb{R}$ gekoppeld maar dat is toegestaan bij opvatting b.

4 *Injectie, surjectie, bijectie*

Van het drietal termen in de kop van deze paragraaf wordt meestal alleen de laatstgenoemde in de schoolwiskunde vermeld. De nomenclatuurcommissie vindt ook geen duidelijke behoefte aan het gebruik van injectie en surjectie aanwezig. Zelfs wil de commissie het gebruik van de term bijectie facultatief stellen, om de leerlingen een 'terminologie-jungle' te besparen.

Een afbeelding van V naar W waarbij elk element van W aan de paarvorming meedoet heet *afbeelding op W* of *surjectie*.

Een afbeelding van V naar W die 1-1 is heet *injectie*.

Een afbeelding die zowel injectie als surjectie is, is een *bijectie*.

5 *Bijzondere relaties*

Wanneer een relatie gericht is van een verzameling V naar V zelf dan kan deze onderzocht worden op het bezit van de volgende eigenschappen:

1 een relatie R heet *reflexief in V* als voor elk element a van V geldt $(a, a) \in R$. Is dit voor geen enkel element van V het geval dan is de relatie *irreflexief in V* . Het is mogelijk dat een relatie zowel niet-reflexief als niet-irreflexief in V is.

2 Een relatie R is *symmetrisch in V* als voor elk tweetal elementen a en b van V geldt $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

Geldt voor elk tweetal elementen van V : $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$ dan is de relatie *asymmetrisch in V* .

Ook nu kan het weer gebeuren dat een relatie zowel niet-symmetrisch als niet-asymmetrisch is.

3 Een relatie R is *transitief* in V als voor elk drietal elementen a , b en c van V geldt $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

4 Een relatie R is *samenhangend* in V als voor ieder tweetal *verschillende* elementen a en b van V tenminste één van de beide formules $(a, b) \in R$ of $(b, a) \in R$ waar is.

Relaties die zowel reflexief als symmetrisch als transitief zijn heten *ekwivalentierelaties*.

Het prototype van de ekwivalentierelaties is de relatie *is gelijk aan* van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

Elk element van $\mathbb{R}$ is gelijk aan zichzelf.

Elk tweetal elementen van $\mathbb{R}$ heeft de eigenschap dat uit $a = b$ volgt $b = a$

Voor elk drietal elementen van $\mathbb{R}$ geldt: $a = b$ en $b = c \Rightarrow a = c$

Het is niet moeilijk ekwivalentierelaties te vinden:

<i>is even oud als</i>	<i>is congruent met</i>
<i>is even duur als</i>	<i>is parallel met</i>
<i>heeft dezelfde leraar als</i>	<i>is gelijkvormig met</i>
<i>heeft dezelfde ouders als</i>	

Een bijzondere ekwivalentierelatie vinden we op de volgende manier: (Papy doet dat o.a. in zijn deel 1 van *Mathématique Moderne*)

We verdelen de verzameling V in deelverzamelingen met de volgende eigenschappen:

- 1 geen enkele deelverzameling is leeg
- 2 de deelverzamelingen zijn disjunct, hebben dus een lege doorsnede.

Zulke deelverzamelingen worden *partities* of *klassen* genoemd.

Beschouw nu de relatie *behoort tot dezelfde klasse als*.

Het is een ekwivalentierelatie.

- 1 elk element behoort tot dezelfde klasse als het element zelf,
- 2 als a behoort tot dezelfde klasse als b dan ook b tot dezelfde klasse als a ,
- 3 als a behoort tot dezelfde klasse als b en b tot dezelfde klasse als c dan ook a tot dezelfde klasse als c .

Iedere ekwivalentierelatie van V naar V verdeelt V in klassen, bijvoorbeeld:

<i>is even oud als</i>	<i>leeftijd</i>
<i>is gelijkvormig met</i>	<i>vorm</i>
<i>is parallel met</i>	<i>richting</i>
<i>is even duur als</i>	<i>prijs</i>
<i>is ekwipollent met</i>	<i>vrije vector</i>

Buiten de wiskunde geldt de volgende wijze van redeneren: alle artikelen die even duur zijn hebben *dezelfde prijs*. Men zegt ook wel ze *behoren tot dezelfde prijsklasse* (al wordt daar meestal een iets ruimer begrip mee bedoeld, namelijk een interval van prijzen, bijvoorbeeld een tv van f 800.— en een van f 900.— vallen in dezelfde prijsklasse).

In de wiskunde wordt nu gezegd: *Elke klasse is een prijs*. De overgang van *in elke klasse zitten artikelen van dezelfde prijs op elke klasse is een prijs* kan vergeleken worden met de overgang van *deze relatie heeft als oplossingsverzameling een verzameling geordende paren op de verzameling paren is de relatie*.

Het is gebleken dat v.w.o. leerlingen wel de stap kunnen doen om te zeggen: *elke klasse van ekwipollente vectoren is een vrije vector*, ze begrijpen ook dat elk element van zo'n klasse gekozen kan worden als representant van de klasse. Maar misschien hangt dat samen met het feit dat het begrip vrije vector nieuw is en nog niet met ervaringen belast.

In de verzameling $\mathbb{Q}$ kan ook een klasse-indeling worden aangebracht. In elke klasse vinden we dan de breuken die vereenvoudigd of uitgebreid kunnen worden tot een gegeven breuk. (Het is lastig dat in het Nederlands wel de uitdrukking 'vereenvoudigen' voorkomt, maar niet een woord dat de inverse bewerking aanduidt. In het Duits zegt men daarvoor 'erweitern').

Het is wel mogelijk om de leerlingen duidelijk te maken dat ieder element van een klasse van breuken voor elk ander element van die klasse in de plaats gezet kan worden. Maar de vraag is of ze zullen accepteren: elke klasse is een rationaal getal.

Het onderwerp 'ekwivalentierelaties' wordt voor de onderbouw v.w.o. in het rijksscholenleerplan expliciet genoemd. Voor de andere schooltypen treffen we het niet in het leerplan aan en voor geen enkel schooltype is het vermeld in het eindexamenprogramma.

Toch zou ik willen adviseren, waar dat mogelijk is, de eigenschappen van de ekwivalentierelaties te vermelden en telkens even te doen constateren. Worden de ekwivalentierelaties als een apart onderwerp onderwezen, dan is het de moeite waard er eens een op te bouwen uitgaande van de definitie *een relatie is een verzameling geordende paren*.

Het is bijvoorbeeld mogelijk een ekwivalentierelatie van V naar V op te bouwen met $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

In de eerste plaats moeten de paren (1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) en (6, 6) elementen van de relatie zijn.

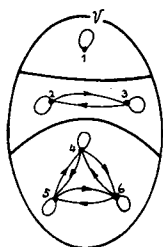
Nemen we (2, 3) op als element dan moet ook (3, 2) element zijn. Verder zouden bijvoorbeeld de volgende paren opgenomen kunnen worden: (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (5, 6) en (6, 5)

Het is gemakkelijk te constateren dat nu voldaan is aan de eisen van reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit.

Vooral door de volgende figuur te tekenen kan aangetoond worden dat V in drie klassen wordt verdeeld, nl. $\{1\}$, $\{2, 3\}$ en $\{4, 5, 6\}$

Een aardig voorbeeld van een klasse-indeling wordt geleverd door het rekenen met restklassen. In de methode Moderne Wiskunde wordt dat klokrekenen genoemd. Het rekenen op een vijftienklok bijvoorbeeld is eigenlijk rekenen in restklassen modulo 5, d.w.z. klassen gevormd door de relatie *laat als rest bij delen door 5*.

Elk natuurlijk getal wordt door deze relatie ingedeeld in een van de vijf klassen waarvan de resten bij delen door 5, nl. 0, 1, 2, 3 en 4 de vertegenwoordigers zijn. Als we nu bij het klokrekenen zeggen dat $4 + 2 = 1$ dan bedoelen we dat de som van elk getal uit de klasse vertegenwoordigd door 4 en een getal van de klasse vertegenwoordigd door 2 een getal is van de klasse vertegenwoordigd door 1. Een voorbeeld van zo'n optelling is $19 + 12 = 31$.



6 Relaties in de schoolwiskunde

In de meeste schoolboeken wordt het begrip relatie beschouwd als voorbereiding voor het hanteren van de begrippen functie en afbeelding.

Ekwivalentierelaties en orderrelaties worden niet of maar vluchtig behandeld. Bij de behandeling in de huidige schoolboeken volgt de introductie van het begrip relatie na de behandeling van de verzamelingen. Het zou ook mogelijk zijn het behandelen van verzamelingen te motiveren met behulp van de relaties. Zoals in de inleiding al werd gereleveerd: relaties worden al door zeer jonge kinderen gebruikt. Door Z.P. Dienes en enkele anderen zijn spelen bedacht voor leerlingen van het basisonderwijs om hen te laten experimenteren met relaties. In dit opzicht moeten we ook verwijzen naar het werk van Prof. Papy en zijn vrouw Frédérique in België.

Het door Papy sterk ontwikkelde gebruik van pijldiagrammen kan ook in het basisonderwijs plaats vinden. Een spel als bijvoorbeeld *voornaam-achternaam* dat voorkomt in het eerste deel van het boek *Mathématique Moderne* van Papy kan door leerlingen van de basisschool gemakkelijk gespeeld worden. Ik verwacht dus dat het werk van Wiskobas onder meer zal gaan in de richting van het ontwikkelen van het relatiebegrip in de basisschool.

De inrichting van de vakbibliotheek voor wiskunde op elke school

Joh. H. WANSINK

Arnhem

Het aantal popularisaties over wiskundige onderwerpen is in de laatste decennia buitengewoon sterk gegroeid, zo sterk dat de algemene bibliotheken met de toegenomen belangstelling voor mathematische onderwerpen slechts onvoldoende rekening kunnen houden. Eveneens is het aantal publikaties op didactisch gebied die informatie verschaffen over de op gang zijnde modernisering zo sterk toegenomen, dat het gevaar dreigt dat de vakbibliotheeken van de wiskundeleraars geen bevredigend beeld meer zullen opleveren van de ter beschikking staande lectuur.

In verband met de toegenomen behoefte aan informatie lijkt het ons urgent, dat er op iedere school voor v.w.o. en a.v.o. op korte termijn wordt overgegaan tot het inrichten van speciale wiskundebibliotheken.

Elke schoolbibliotheek op wiskundig gebied kan dan twee afdelingen omvatten:

A een afdeling met populaire lectuur voor de leerlingen;

B een didactische afdeling voor de docenten.

Voor de eerste inrichting van zo'n vakbibliotheek zou naar mijn mening met een bedrag van 1250 gulden kunnen worden volstaan. Hiervoor zouden dan een honderdtal boeken kunnen worden aangeschaft: 50 voor de docenten tot een bedrag van 1000 gulden, 50 voor de leerlingen tot een bedrag van 250 gulden. Indien dan voor de jaarlijkse aanvulling nog een bedrag van minimaal 250 gulden ter beschikking komt, kan er op de duur een behoorlijke boekenvoorraad van verantwoorde samenstelling tot stand komen.

Onderstaande lijsten A en B dienen om voor de docenten de keuze van titels te vergemakkelijken. Elke opstelling van zo'n lijst blijft uiteraard een subjectief karakter dragen.

We raden aan ook de door de *Unesco* aanbevolen titels, die men kan vinden in *Euclides* 42, p. 148-149, te raadplegen, alsmede de door Leujes opgestelde lijsten in *Euclides* 35, 36 en 43.

In de *A*-lijst vindt men vooral boekjes voor oudere leerlingen. Slechts weinig titels zijn, zoals nr 23 van de *A*-lijst, voor eersteklasseers geschikt.

Men houde er rekening mee dat sommige titels uitverkocht kunnen zijn. Om teleurstelling te voorkomen hebben we uit de lijst reeds weggelaten: *Flatland, een roman van vele afmetingen geschreven door een Vierkant*; 138 p.; Emmering, Amsterdam 1920. Het is een vertaling door L. van Zanten van *Flatland* door H. A. Abbot dat misschien nog uit de Doverserie is te betrekken. Wie echter een boekje als *Flatland* antiquarisch kan krijgen, late zich die kans niet ontgaan.

In de *B*-lijst zijn geen titels van wiskundige periodieken opgenomen. Het lijkt me echter uitermate gewenst, dat elke school minstens één abonnement neemt uit de volgende tijdschriften:

- 1 *Der Mathematikunterricht*; vier monografieën per jaar; Klett Verlag.
- 2 *Educational Studies in Mathematics*; Reidel, Dordrecht.
- 3 *Praxis der Mathematik*; Aulis Verlag, Keulen.
- 4 *Mathematica & Paedagogia*, Brussel.
- 5 *Niko*, Belgisch tijdschrift voor de Methodiek van de Wiskunde.
- 6 *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques*, Parijs.

Voorts spreekt het m.i. vanzelf, dat elke schoolbibliotheek over een zo compleet mogelijke verzameling van jaargangen van Euclides dient te beschikken.

Nadere inlichtingen over de tijdschriften worden gegeven door dr. A. J. E. M. Smeur, Breda.

A. 60 titels van aanbevolen boeken voor leerlingenbibliotheken

- 1 Irving Adler, *Nieuwe Wiskunde*; 188 p.; vertaling van Tj. Blanksma; Prismaboeken 1152; Utrecht-Antwerpen 1966
- 2 Irving Adler, *Rekenkunde, nieuwe stijl*; 293 p.; vertaling van R. A. M. Lopik; Prisma-boeken 1303; Utrecht-Antwerpen 1968
- 3 Irving Adler, *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek*; 233 p.; Aula-boeken 295; Utrecht 1966
- 4 Irving Adler, *The giant colourbook of mathematics*, exploring the world of number and space; met voorwoord van Howard F. Fehr; 92 p.; 1960; Paul Hamlyn, London
- 5 E. T. Bell, *Men of mathematics*; twee delen samen 646 p.; Pelican-serie 276, 277; Harmondsworth 1953
- 6 E. T. Bell, *The development of mathematics*; 637 p.; Mc. Graw Hill, New York-London, 1945
- 7 E. Bentel, *Die Quadratur des Kreises*; Math-Phys. Bibl. 12; 57 p.; 1920; sindsdien tal van malen herdrukt; Teubner-Leipzig
- 8 G. Bosteels, *Wiskunde vandaag*; 116 p.; De Sikkels, Antwerpen 1963
- 9 O. Bottema, *Meetkunde, gewoon en anders*; Torusreeks 7, 53 p, Wolters-Noordhoff, Groningen 1971
- 10 Bruno Ernst, *Pythagoras Festival*; selectie uit de eerste acht jaargangen van het jeugdtijdschrift *Pythagoras*; 264 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1970
- 11 L. N. H. Bunt, *Van Ahmes tot Euclides*; hoofdstukken uit de geschiedenis van de Wiskunde; 183 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1968
- 12 D. Burger, *Bolland*; 120 p.; C. Blommendaal N.V.; 's-Gravenhage 1957

- 13 N. A. Court, *Mathematics in fun and in earnest*; 192 p.; a Mentor-Book, MD. 344, The New American Library, 1958
- 14 H. J. A. Duparc, *Inductie en iteratie*; Torusreeks 2; 75 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1968
- 15 M. C. Escher, *Groefiek en tekeningen*, met een bijdrage van Prof. dr. P. Terpstra en een inleidend commentaar; 63 p.; Tijl, Zwolle 1960
- 16 H. Freudenthal, *Van sterren tot inlegzolen*; een bundel artikelen; 180 p.; Van Loghum Slaterus, Arnhem 1954
- 17 H. Freudenthal, *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven*; 253 p.; Wereldakademie, De Haan-Meulenhoff 1967
- 18 Martin Gardner, *Mathematics, magic and number*; Doverserie, New York. Zie ook zijn periodieke bijdragen in Scientific American
- 19 R. L. Goodstein, *Grondbegrippen van de wiskunde*; 270 p.; Aula-boeken 271; Utrecht-Antwerpen 1960
- 20 Paul R. Halmos, *Intuïtieve verzamelingenleer*, 159 p.; Aula-boeken 372; Utrecht-Antwerpen 1968
- 21 Darrell Huff, *Gebruik en misbruik van de statistiek*; Prismaboeken 572; 190 p.; Utrecht-Antwerpen 1960
- 22 Darrell Huff, *Bereken uw kansen*; Prisma-boeken 1096; 158 p.; Utrecht-Antwerpen 1958
- 23 J. A. H. Hunter, *Rekenkundige raadsels*; vertaling van C. van der Linden; 159 p.; Prismaboeken 637; Utrecht-Antwerpen 1961
- 24 O. Jacoby en W. H. Benson, *Wiskunde voor je plezier*, vertaling van 152 p.; Prisma-boeken 1256; Utrecht-Antwerpen 1967
- 25 Morris Kline, *Mathematics and the physical world*;
- 26 M. Kraitichik, *Mathematical recreations*; Doverserie, New York
- 27 Edna E. Kramer, *Wiskunde, mogelijkheid voor de moderne wetenschappen*; vertaling van Aula-boeken 177; 368 p.; Utrecht-Antwerpen 1964
- 28 W. Lietzmann, *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Figuren*; 276 p.; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen
- 29 W. Lietzmann, *Der Pythagorische Lehrsatz*; Math.-Phys. Bibl. 3; 69 p.; 1917 sindsdien tal van malen herdrukt, Teubner, Leipzig
- 30 W. Lietzmann, *Wo steckt der Fehler*, Math.-Phys. Bibl. 10; 53 p.; 1917; sindsdien tal van malen herdrukt; Teubner, Leipzig
- 31 C. van der Linden, *Moderne Wiskunde*; Prisma-boeken 1248; 170 p.; Utrecht-Antwerpen 1967
- 32 Karl Menninger, *Zwischen Raum und Zahl*; Ullsteinbücher 267
- 33 Karl Menninger, *Mathematik und Kunst*; Kleize Vanderhoeckserie 76; Göttingen
- 34 Karl Menninger, *Wij en de Wiskunde*; Vertaling van Van Went en Meyer; 295 p.; Bibliotheek voor Algemene Ontwikkeling; Amsterdam-Antwerpen 1963
- 35 Karl Menninger, *Ali-Baba und die 39 Kamele*; 108 p.; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen
- 36 M. J. Moroney, *Feiten uit cijfers*; Marka 71, Utrecht-Antwerpen 1967
- 37 C. Stanley Ogilvy, *De wiskunde van morgen*; Aula-serie 185; vertaling van C. van der Linden; 128 p.; Utrecht-Antwerpen 1965

- 38 C. Stanley Ogilvy en J. T. Anderson, *Getallentheorie*, Aula-serie 403; vertaling van C. Paris; 157 p.; Utrecht-Antwerpen 1969
- 39 Dan Pedoe, *De speelse wiskunde*; Aula-serie 282; vertaling van D. F. M. van de Wiel; 185 p.; Utrecht-Antwerpen 1966
- 40 Rózsa Péter, *Wiskunde spelenderwijs*; Prisma-boeken 1203; vertaling van C. van der Linden; 184 p.; Utrecht-Antwerpen 1966
- 41 Jan Poortenaar, *De gulden snede en goddelijke verhouding*; 72 p.; In den Toren, Naarden z.j.
- 42 Constance Reid, *Van nul tot oneindig*, getaltheorie voor iedereen; vertaling en bewerking van W. A. van der Spek; 152 p.; Prisma-boeken 1067; Utrecht-Antwerpen 1965
- 43 Evelyn B. Rosenthal, *Moderne wiskunde voor iedereen*; vertaling van C. Kila; 280 p.; Kluwer e.a., Deventer 1965
- 44 W. W. Sawyer, *Wegwijs in de wiskunde*; vertaling van C. van der Linden; 119 p.; Aula-serie 104; Utrecht-Antwerpen 1962
- 45 W. W. Sawyer, *Wiskunde zonder omslag*; vertaling van J. J. P. Boezeman; 222 p.; Prisma-boeken 203; Utrecht-Antwerpen, z.j.
- 46 E. Schneider, *Van nul tot oneindig*, wiskunde als ontspanning; vertaling van N. B. van Went en J. A. Meijer; 294 p.; Bibliotheek voor Algemene Ontwikkeling; Bussum-Antwerpen z.j.
- 47 Fred. Schuh, *Hoe bepaal ik mijn kans?* Kansrekening met toepassing op spel en statistiek; 165 p.; Agon Bibliotheek 4; Elsevier, Amsterdam-Brussel 1964
- 48 J. J. Seidel, *Computerwiskunde*; 155 p.; Aula-boeken 407, Utrecht 1969
- 49 A. van der Sluis, *Computers en Algoritmen*; Torusreeks 5; 88 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1969
- 50 D. E. Smith, *Number stories from long ago*; Ginn, Boston
- 51 H. Steinhaus, *Mathematical snapshots*; 266 p.; Oxford University Press, New York, 1950
- 52 D. J. Struik, *Tellen zonder en met cijfers*; Torusreeks 6; Wolters-Noordhoff, Groningen 1971
- 53 J. van Tiel, *Versnelling en beweging*; Torusreeks 3; 55 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1968
- 54 H. Tietze, *Problemen uit de Wiskunde*; vertaling van Bruno Ernst; twee delen van 175 en 160 p.; Thieme, Zutphen 1964
- 55 H. E. Timerding, *Der goldene Schnitt*; Math.-Phys. Bibl.; 57 p.; Teubner, Leipzig 1925
- 56 P. G. J. Vredenduin, *Verzamelingen*; Torusreeks 1; 80 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1967
- 57 P. G. J. Vredenduin, *Vijfentachtig wiskundige puzzels*; 86 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1964
- 58 B. L. van der Waerden, *Ontwakende wetenschap*; Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde; 321 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1930
- 59 J. Wessels, *Rekenen met kansen*; Torusreeks 4; 71 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1969
- 60 A. N. Whitehead, *Wiskunde, basis van het exacte denken*; vertaling van J. Engelfriet jr.; Aula-serie 226; 159 p.; Utrecht-Antwerpen 1965

B. 125 titels van aanbevolen boeken voor lerarenbibliotheken

De nummers 1-60 zijn dezelfde als die van de A-lijst. Omdat vele docenten echter de oorspronkelijke uitgaven zullen verkiezen boven de vertalingen laten we enige van de oorspronkelijke titels volgen.

- 1 Irving Adler, *The new mathematics*; 192 p.; a Mentor Book; 1960
- 2 Irving Adler, *A new book at arithmetic*; The John Day Comp., New York 1964
- 3 Irving Adler, *Probability and Statistics for everyman*; The John Day Comp.; New York 1965
- 19 R. L. Goodstein, *Fundamental concepts of mathematics*; 279 p.; Pergamon Press, Oxford 1964
- 20 Paul R. Halmos, *Naive set theory*; 104 p.; D. van Nostrand Comp.; Princeton 1964
- 21 Darrell Huff, *How to lie with statistics*; Victor Gollancz Ltd, London
- 22 Darrell Huff, *How to take a chance*; W. W. Norton & Comp., New York
- 23 J. A. H. Hunter, *Fun with figures and Figures (More fun with figures)*; Oxford University Press
- 24 O. Jacoby & W. H. Benson, *Mathematics for pleasure*; McGraw-Hill Comp.; New York
- 27 Edna E. Kramer, *The main stream of mathematics*; Oxford University Press, New York
- 36 M. J. Moroney, *Facts from figures*; 472 p.; A Pelican Book; Melbourne-London-Baltimore 1954
- 37 C. Stanly Ogilvy, *Tomorrow's Math.*; Oxford University Press, New York 1962
- 38 C. Stanley Ogilvy and John T. Anderson, *Excursions in Number Theory*; Oxford University Press, New York 1966
- 39 Dan Pedoe, *The Gentle Art of Mathematics*; The English University Press; London 1958
- 40 Rózsa Péter, *Playing with Infinity*; C. Bell and Sons Ltd; 1961
- 42 Constance Reid, *From Zero to Infinity*; Thomas Y. Crowell Company, New York
- 44 W. W. Sawyer, *Relude to mathematics*, 214 p.; A Pelican Book, Harmondsworth 1960
- 45 W. W. Sawyer, *Mathematician's Delight*; 238 p.; A Pelican Book, Harmondsworth 1956
- 54 H. Tietze, *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit*; I 216 p., II 303 p., Biederstein Verlag, München 1949
- 60 A. N. Whitehead, *An Introduction to Mathematics*; Oxford University Press; London 1961

Aan deze A-lijst voegen we de volgende titels toe:

- 61 J. van Achter, *De modernisering van het wiskunde-onderwijs op de basisschool*; 107 p.; Malmberg, Den Bosch 1969
- 62 H. Behnke e.a., *Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen*; 142 p.; Referate der IUUK-Tagung Wien 1966; Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1969
- 63 H. Behnke e.a., *Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft*;
 - I Grundlagen der Mathematik, Arithmetik und Algebra; 584 p.; derde druk 1966
 - II Geometrie, 646 p., tweede druk 1966, nu gesplitst in deel A en deel B
 - III Analysis, 638 p., 1962
 - IV Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik: Geometrie und Statistik; 406 p.
 - V Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik: Algebra und Analysis; 1967Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen

- 64 H. Behnke e.a., *Les repercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement*; verslag van een C.I.E.M.-conferentie te Echternach 1965; Imprimé en offset par Ossa, Luxembourg 1965
- 65 H. Behnke e.a., *Le passage du secondaire à l'université et les études mathématiques*; verslag van een C.I.E.M.-conferentie te Echternach 1969; Service central des imprimés de l'Etat, Luxembourg 1969
- 66 H. Behnke und H.-G. Steiner, *Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen*; 335 p.; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1967
- 67 E. Bouqué, *De algebra der verzamelingen en relaties*; 104 p.; Story's wiskundige monografieën I; Wetenschappelijke Uitgeverij Gent, 1967
- 68 E. Bouqué, *Boole'se algebra's*; 98 p.; Story's wiskundige monografieën II; Wetenschappelijke Uitgeverij Gent, 1968
- 69 E. Bouqué, *Kardinaalgetallen*; 92 p.; Story's wiskundige monografieën III; Wetenschappelijke Uitgeverij Gent, 1970
- 70 Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire de mathématiques*; 277 p.; Histoire de la Pensée 4; Hermann, Parijs 1960
- 71 R. Courant en H. Robbins, *Was ist Mathematik?* 399 p.; Springer Verlag; Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962
- 72 H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*; 443 p.; John Wiley & Sons, New York 1967; in Duitse vertaling: *Unvergängliche Geometrie*; 550 p.; Sammlung Wissenschaft und Kultur 17
- 73 H. S. M. Coxeter en S. L. Greitzer, *Geometry revisited*; 160 p.; Random House, New York 1967
- 74 Z. P. Dienes, *An experimental study of mathematics learning*; 207 p.; Hutchinson, London 1963
- 75 Z. P. Dienes, *Building up mathematics*; 124 p.; London 1961; In Nederlandse vertaling van S. van der Krogt-Terstegge: *Wij bouwen wiskunde op*; Wiskunde paperbacks; Malmberg-Van In, 's-Hertogenbosch-Lier, 1970
- 76 Z. P. Dienes en M. A. Jeeves, *Thinking in structures*, 128 p.; Hutchinson, London 1965
- 77 Z. P. Dienes en E. W. Golding, *De eerste stappen in de wiskunde*:
 - I Logica en spelen; 129 p.;
 - II Verzamelingen, getallen en machten; 155 p.; Nederlandse vertaling van M. J. A. Bouwmeester-de Witte van: *First years in mathematics, Logic and logical games*; Sets, numbers and primes; Malmberg-Van In, 's-Hertogenbosch-Lier, 1970
- 78 J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, London 1960
- 79 E. J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*; 379 p.; Martinus Nijhoff, Den Haag 1943
- 80 E. J. Dijksterhuis, *De elementen van Euclides*; twee delen van opv. 220 en 283 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1929-1930
- 81 E. J. Dijksterhuis, *Vreemde woorden in de wiskunde*; 96 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1939
- 82 T. Ehrenfest-Afanassjewa, *Didactische opstellen Wiskunde*; 169 p.; verzorgd door Bruno Ernst, Thieme, Zutphen 1960
- 83 Howard F. Fehr e.a., *Mathematics to-day, a guide for teachers*; proceedings of an International Working Session on New Teaching Methods; Athene 1963; 420 p.; O.E.C.D.-uitgave 1964; besteladres o.a. Meulenhoff & Co, Amsterdam

- 84 Howard F. Fehr e.a., *New Thinking in School Mathematics*; verslag van een O.E.E.C.-conferentie in Royaumont 1959; 246 p.; besteladres o.a. Meulenhoff & Co, Amsterdam
- 85 Lucienne Félix, *Elementarmathematik in moderner Darstellung*; 558 p.; Vieweg, Braunschweig 1966. Vertaling van: *Exposé moderne des mathématiques élémentaires*; 421 p.; Dunod, Parijs 1959
- 86 T. J. Fletcher, *Some lessons in mathematics*; a handbook on the teaching of 'modern' mathematics; 367 p.; Cambridge University Press 1964
- 87 H. Freudenthal, *Waarschijnlijkheid en statistiek*; 185 p.; Bohn, Haarlem 1962
- 88 H. Freudenthal, *Exacte logica*; 119 p.; Bohn, Haarlem
- 89 Gerhard Frey, *Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik*; 116 p.; Schroedel-Schözingh; Hannover-Paderborn, 1968
- 90 C. Gattegno, W. Servais e.a., *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*; 212 p.; Delachaux, Neuchâtel 1958
- 91 J. C. H. Gerretsen, *Raaklijn en oppervlak*; 380 p.; Bohn, Haarlem 1959
- 92 J. C. H. Gerretsen, *Grondslagen van de leer der reële getallen en de reële analyse*, 243 p.; CM L.W. stencil, Utrecht 1967
- 93 A. D. de Groot, *Bewegingsmeetkunde*; 158 p.; verslag van een gecontroleerd innovatie-experiment. Empirische studies over Onderwijs, deel II; Wolters-Noordhoff, Groningen 1968
- 94 A. D. de Groot en R. F. v. Naerssen, *Studietoetsen*; 358 p.; Mouton, Den Haag 1969
- 95 P. M. van Hiele, *Development and learning process*; 31 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1959
- 96 P. M. van Hiele, *De problematiek van het inzicht*; Utrechtse dissertatie; 215 p.; Purmerend 1957
- 97 D. van Hiele-Geldof, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.h.m.o.*; Utrechtse dissertatie; 183 p.; Purmerend 1957
- 98 D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (1899); 271 p.; Teubner, Leipzig 1962
- 99 J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*; Sammlung Götscher 226, 875, 882; Walter de Gruyter & Co, Berlijn
- 100 D. A. Johnson and G. R. Rising, *Guidelines for teaching mathematics*; 446 p.; Wadsworth Publ. Comp.; Delmont, Cal. 1967
- 101 G. Kropp, *Geschichte der Mathematik*; Probleme und Gestalten; 230 p.; Heidelberg 1969
- 102 M. J. Mansfield, *Introduction to topology*; 116 p.; D. van Nostrand, New York 1963
- 103 Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer; eine Kulturgeschichte der Zahl*; 314 p.; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1958
- 104 Herbert Meschkowski, *Wandlungen des mathematischen Denkens*; 141 p.; Vieweg, Braunschweig 1960
- 105 J. A. Neumann e.a., *The world of mathematics*; artikelen van wiskundigen 'from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein', met commentaren; 4 delen, totaal 2535 p.; Simon and Schuster, New York 1956
- 106 G. Papy, Uit zijn zesdelig schoolboek wijzen we i.h.b. op: *Géométrie plane*, deel 6 van *Mathématique Moderne*; 277 p. Labor-Didier, Brussel 1966. Ook bevelen we aan: Papy-Debbant, *Ebene Geometrie und reelle Zahlen*; 69 p.; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1965 en: *Inleiding tot de vectorruimten* (83 p); Plantijn n.v., Antwerpen 1966

- 107 J. Piaget, E. W. Beth e.a., *L'enseignement des mathématiques*; 175 p.; Delachaux, Neuchâtel 1955. Aanbevolen wordt de Duitse vertaling ten name van C. Gattegno, *Zur Didaktik des Mathematikunterrichts; Neue Ansätze*; 120 p.; Hannover 1969
- 108 G. Polya, *Schule des Denkens*; 266 p.; Bern 1949. De Engelse uitgave draagt de titel: *How to solve it*; 204 p.; Princeton University Press; 1946
- 109 G. Polya, *Mathematik und plausible Schließen*;
I Induktion und Analogie in der Mathematik; 403 p.; 1962
II Typen und Strukturen plausibler Folgerung; 282 p.; 1963
Sammlung Wissenschaft und Kultur, nr. 14 en 15; Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart. De oorspronkelijke Engelse uitgave verscheen onder de titel: *Mathematics and plausible reasoning*; Princeton 1954
- 110 B. van Rootselaar en P. G. J. Vredenduin, *The use of the axiomatic method in secondary school teaching*; 32 p.; rapport 8 van de N.O.C. voor Wiskunde, Mathematisch Instituut, De Uithof, Utrecht 1965
- 111 M. Rueff en M. Jeger, *Sets and Boolean algebra*; 192 p.; George Allen and Unwin Ltd.; London 1970. Duitse uitgave onder de titel: *Menge, Boole'scher Verband und Maß im Schulunterricht*, Rüber Verlag, Luzern-Stuttgart 1970
- 112 J. J. Seidel e.a., *Computerkunde*; 155 p.; Aula-serie 407; Utrecht-Antwerpen 1969
- 113 D. J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde*, 256 p.; Aula-serie 195; Utrecht-Antwerpen 1965
- 114 Karl Strunz, *Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht*; 355 p.; Quelle und Meyer, Heidelberg 1968
- 115 J. J. Verdonk, *Petrus Ramus en de wiskunde*; 445 p.; Van Gorcum, Assen 1966
- 116 Hk. de Vries, *De vierde dimensie*; een inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden; 142 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen, 1915
- 117 B. L. van der Waerden, *Einfall und Überlegung*; drie kleine Beiträge zur Psychologie des mathematischen Denkens; 28 p.; Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1968
- 118 Joh. H. Wansink, *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren*; drie delen van opv. 340, 368 en 399 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1966-1971
- 119 B. L. van der Waerden, *De logische grondslagen der euklidische meetkunde*; 87 p.; Wolters-Noordhoff, Groningen 1927
- 120 J. D. Williams, *Speltheorie*; 240 p.; Markaboeken; Utrecht 1966
- 121 Georg Wolff e.a., *Handbuch der Schulmathematik*;
I Arithmetik; Zahlenlehre; 295 p.;
II Algebra; 296 p.;
III Geometrie der Unter-und Mittelstufe; 256 p.;
IV Geometrie der Oberstufe 288 p.;
V Einzelfragen der Mathematik; 270 p.;
VI Analysis; 268 p.;
VII Neuere Entwicklungen; 336 p.; verschenen sinds 1960. Schroedel Verlag, Hannover
- 122 A. I. Wittenberg, *Bildung und Mathematik*, 313 p.; Stuttgart 1961
- 123 E. J. Wijdeveld, *Nieuwe wiskunde 1*; Taal en logica; 176 p.; 1969; *Nieuwe wiskunde 2*; Structuren; 215 p.; 1969; *Nieuwe wiskunde 3*; ter perse 1971
- 124 M. L. Wijvekate, *Verklarende statistiek*; 232 p.; Aula-serie 39; Utrecht-Antwerpen, 1960
- 125 J. M. Yaglom, *Geometric transformations I*; 133 p.; 1962; *Geometric transformations II*; 189 p.; 1968; Random House, New York

Kanttekeningen bij de nomenclatuur *)

HANS FREUDENTHAL,

Utrecht

1 De schrijfwijze (blz. 242)

$$\{x \mid x < 12 \wedge x \text{ heeft geen echte delers}\}$$

wordt 'uit wetenschappelijk oogpunt niet correct' genoemd. Ik vind dat een mathematische formule internationaal leesbaar moet zijn, maar het bezwaar van de Commissie kan ik niet delen. Ik vermoed, dat hier twee zaken vermengd worden. Het is waar dat men een verzameling liever niet door middel van een eigenschap definieert zonder te stipuleren uit welke gegeven verzameling zijn elementen te putten zijn, maar dit heeft niets te maken met notaties. Er bestaan een heleboel notaties die niets betekenen — dit laat zich niet vermijden. De voorbeelden, die hierop volgen, zijn niet goed gekozen. De definities van $V \cup W$ en $V \times W$, zoals ze daar staan zijn geheel correct.

2 De spreekwijze '(3,5) is een oplossing van $7x - 3y = 6$ ' (blz. 248) is af te keuren. Ze berust op de stilzwijgende afspraak dat x altijd vóór y komt. Hoe zou het zijn met: $(1, -1)$ is oplossing van $aa^2 = 1$? Men wenne de leerling aan 'de oplossingen $(x, y) = (3, 5)$ en $(a, a) = (-1, 1)$ '

3 Relatie van... naar... vind ik bezwaarlijk. Wat te doen met de veel vaker voorkomende relaties tussen drie en meer variabelen?

4 Waarom is het woord 'doorlopen' (p. 243) niet erg duidelijk?

Men komt zelfs wel eens de bewering tegen dat het fout is. Ik hoorde de motivering 'a heeft geen pootjes'. Maar net zo kan men tegen 'a is element van A' inbrengen, dat dit ongewenste associaties met de scheikunde wekt, en tegen 'a behoort tot A' dat het aan eigendomsrelaties doet denken. 'Doorlopen' wekt associaties met zeer belangrijke natuurkundige toepassingen. Het schijnt, dat die tegenwoordig ook ongewenst zijn.

In plaats van deze zeer suggestieve notatie vergoelijkt men als zeer suggestief zijnde een die knetterfout is:

$$\{(x, y) \mid x = 3a \wedge y = a - 2, a \in \mathbb{R}\}.$$

Verder verklaart men een notatie die te voren impliciet meermalen goedgekeurd is,

$$\{(3a, a - 2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

als ongewenst.

5 Vanaf blz. 251 heb ik meer essentiële bezwaren.

'Met de functie $f : x \rightarrow f(x)$ van V en naar W bedoelen we een functie, waarvan het domein bestaat uit alle $x \in V$, waarvoor $f(x)$ betekenis heeft?

Vraag 1: Wat betekent $f(x)$ als $f(x)$ geen betekenis heeft?

Vraag 2: Hoe zie ik aan die letter f , voor welke x die $f(x)$ betekenis heeft?

Vraag 3: Hoe moet ik in 't vervolg aangeven dat f een functie van V naar W in de

*)Eerste Interimrapport van de nomenclatuurcommissie, Euclides 46 (1970-1971), 241-255.

oude zin is? Bijvoorbeeld: Zij f een functie van V naar W die voor elk element van V betekenis heeft? Of: zij f een functie van V naar W met domein V ?

Vraag 4: Hoe moet ik in 't vervolg definiëren, wat gelijkmachtheid van twee verzamelingen V, W betekent? Er is een bijectie f van V naar W met domein V en bereik W ?

Vraag 5: Hoe moet ik in 't vervolg een permutatie van $\{1, \dots, n\}$ definiëren? Een bijectie van $\{1, \dots, n\}$ naar $\{1, \dots, n\}$ met bereik en domein $\{1, \dots, n\}$?

Vraag 6: Hoe moet ik een kromme in 't vlak definiëren? Een continue afbeelding van een interval in het vlak met datzelfde interval als domein?

Vraag 7: Volgens de voorstellen blijft het in 't midden of

$$x \rightarrow \sqrt{x-1} \text{ van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x-1} \text{ van } \mathbb{R}^+ \text{ naar } \mathbb{R}$$

dezelfde of verschillende functies zijn. Is dit didactisch verantwoord?

Vraag 8: Volgens de voorstellen definieert

$$f(x) = \sqrt{-1-x^2}$$

een functie f . Is dit doelmatig?

Vraag 9: Het aantal functies van $\{1, \dots, n\}$ naar $\{0,1\}$ was tot nu toe het prettige getal 2^n . Het verandert nu tenzij ik zeg: het aantal functies van $\{1, \dots, n\}$ naar $\{0,1\}$ met domein $\{1, \dots, n\}$. Is dit te rechtvaardigen?

Ik meen dat ik met deze voorbeelden aangegeven heb waar de schoen knelt. De door de Commissie voorgestane notatie heeft zekere (minieme) voordelen in 't geval van numeriek gegeven functies uit het vraagstukkenrepertoire van de school. Ze veroorzaakt onnodige complicaties in uitspraken, waar functies meer algemeen in voorkomen. Om haar voorkeur te rechtvaardigen, haalt de Commissie alleen lelijke schoolsommetjes aan. Een bredere kijk ware wenselijk. Lang genoeg is er een schoolwiskunde, los van de echte wiskunde, gecultiveerd. Begint dit weer?

De korte bondige spreekwijze 'functie van A naar B ' voor het fundamentele begrip, dat men nu gewend is zo aan te duiden, is zo'n grote weelde, dat geen nomenclatuur-commissie eraan mag komen; het mag geen lettergreep langer worden — denk maar aan al die consequenties voor 'homomorfisme van A naar B ', afbeelding van A naar B , operator van A naar B , injectie van A naar B , karakter van A ', die thans allemaal met de toevoeging 'met het domein A ' of zo iets opgezaald worden! De nomenclatuur-commissie zou niet vanuit het kleine hoekje van de schoolsommen, dat ordening behoeft, een algemene vernieling moeten propageren. Is er in dat hoekje behoefte aan een speciale notatie voor functies van een deel van A naar B , kies dan maar iets. Bij voorbeeld:

Een functie *van uit**) A naar B is een relatie, die aan elk element van A ten hoogste een element van B koppelt.

Men late de overige wiskunde in 't genot van

Een functie *van uit**) A naar B is een relatie, die aan elk element van A ten hoogste een element van B koppelt.

*) of 'uit'.

Antwoord aan Freudenthal

door

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Het begrip functie (afbeelding) heeft de nomenclatuurcommissie veel hoofdbrekens gekost. De na ampele discussie voorgestelde terminologie biedt voor het onderwijs veel voordelen, maar wijkt inderdaad af, althans voorzover het de term afbeelding betreft, van de in de literatuur meest gangbare. Vandaar dat ik dan ook blij ben, dat Freudenthal zich de moeite getroost heeft zijn wetenschappelijke bezwaren op schrift te stellen.¹ Dit geeft me de gelegenheid uitvoeriger op het probleem in te gaan, hetgeen alleen maar verhelderend kan werken.

Voor het gemak van de lezer herhaal ik eerst de door de nomenclatuurcommissie voorgestelde definitie van een functie en van een afbeelding.

Definitie. Een functie van V naar W is een verzameling geordende paren, waarvan het eerste element tot V en het tweede tot W behoort, met de eigenschap dat elk element van V in *hoogstens* één van de geordende paren als eerste element voorkomt. Onder een afbeelding wordt hetzelfde verstaan als onder een functie.

Terzijde opgemerkt: in België is dit de bij het onderwijs aanvaarde functie-definitie, ook voorgestaan door Papy. De Belgen geven echter een andere definitie van een afbeelding; zij vervangen bij afbeeldingen 'hoogstens' door 'precies'. Om ons standpunt duidelijk te maken, gaan we uit van een meetkundige afbeelding: de centrale projectie. Volgens ons is dit een afbeelding van Π naar Π $f: X \rightarrow X$ het snijpunt van de lijn door O en X met l , waarin $l \subset \Pi$ en $O \notin l$. Trek door O een lijn m evenwijdig aan l en kies daarop een punt P . Het snijpunt van de lijn door O en P met l bestaat dan niet en P heeft dus geen f -beeld. Het domein van de afbeelding is dus $\Pi \setminus m$.

Het afbeeldingsvoorschrift f laten we dus werken op alle elementen van Π . Soms is daarbij het resultaat, dat aan een punt P een beeld P' toegevoegd wordt; soms is het resultaat nihil. We spreken nu van een afbeelding van Π naar Π . 'Van Π ', omdat we het afbeeldingsvoorschrift laten werken op alle elementen van Π , en 'naar Π ', omdat het beeld element van Π is.

Een voorbeeld uit de algebra maakt dit nog duidelijker. Beschouw de afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f: x \rightarrow \frac{1}{x}$$

¹ Zie p. 139 van dit nummer.

Laten we dit afbeeldingsvoorschrift (functievoorschrift) werken op een van 0 verschillend reëel getal a , dan blijkt het f -beeld $\frac{1}{a}$ te zijn. Laten we het werken op het getal 0, dan ontstaat geen beeld. Het domein van de afbeelding is $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Men zou ook kunnen zeggen, dat de afbeelding

$$f: x \rightarrow \frac{1}{x}$$

per definitie hetzelfde is als de relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$\left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{x} \right\}.$$

Hier heeft niemand bezwaar om te spreken van een relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Ook is er geen bezwaar tegen te zeggen, dat door deze relatie aan elk van 0 verschillend reëel getal a het getal $\frac{1}{a}$ toegevoegd wordt. Evenmin is er bezwaar tegen te constateren, dat aan 0 geen enkel getal toegevoegd wordt. Ten slotte is er ook geen bezwaar tegen te zeggen, dat deze relatie gelijk is aan een functie

$$f: x \rightarrow \frac{1}{x},$$

mits – en nu komt de controverse – men maar niet zegt, dat dit een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is. De nomenclatuurcommissie heeft daartegen geen bezwaar. Velen uit het w.o. stellen echter de eis, dat men hier zegt: functie van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ naar $\mathbb{R}$.

Ik heb Freudenthal eens horen zeggen (op de heroriënteringscursus over logica te Utrecht), dat men in zo'n geval spreekt van een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ voorzover gedefinieerd. Ik geef direct toe, dat hij daarbij niet in strijd komt met zijn eigen zienswijze. Maar de standpunten zijn elkaar dan wel dicht genaderd.

Natuurlijk zijn er ook functievoorschriften, die vaker falen, zoals

$$g: x \rightarrow \sqrt{x}.$$

Door g wordt aan elk niet-negatief reëel getal een beeld toegevoegd, echter niet aan een negatief reëel getal. Wat zullen we nu zeggen:

g is een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

g is een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ voorzover gedefinieerd,

g is een functie van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ naar $\mathbb{R}$?

De nomenclatuurcommissie geeft er de voorkeur aan g een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ te noemen. Deze functie is gelijk aan de relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$: $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$. Totnogtoe is alleen het standpunt van de nomenclatuurcommissie verduidelijkt, maar is niet gebleken, dat dit standpunt voordelen heeft. Nu een paar voorbeelden om dit aan te tonen.

Gegeven is de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f: x \rightarrow |x|.$$

Gevraagd de functie f' .

Rare vraag. Het heeft alleen maar zin te spreken van een functie f' van V naar W . We moeten dus specificeren, welke verzamelingen die V en W zijn. Wel, dat is gemakkelijk gedaan. We vragen naar de functie f' van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, die de afge-

leide van f is. Volgens de definitie van een functie conform Freudenthal, die ik voortaan kortweg de F-definitie noem, bestaat deze functie niet. Volgens de definitie conform de nomenclatuurcommissie (n-definitie) luidt het antwoord:

$$\begin{aligned} f' : x &\rightarrow 1 \text{ voor } x > 0 \\ x &\rightarrow 1 \text{ voor } x < 0 \end{aligned}$$

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$dx + x^2 dy = 0$$

Bij het oplossen van een differentiaalvergelijking vraagt men in het algemeen niet naar functies. Het komt echter stellig voor, dat men vraagt een functie te vinden, die aan deze vergelijking voldoet. Rare vraag. Goed dan: gevraagd een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, die aan de vergelijking voldoet. Conform de F-definitie bestaat er geen dergelijke functie. De n-definitie laat als antwoord o.m. toe

$$f : x \rightarrow \frac{1}{x}.$$

Er zijn meer praktische voordelen van de n-definitie. Ze zijn in het rapport al gereleveerd, maar volledigheidshalve herhaal ik ze.

Gevraagd de inverse van de functie van $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ naar $\mathbb{R}$

$$f : x \rightarrow \sqrt{x}.$$

Opzettelijk zeg ik 'van $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ naar $\mathbb{R}$ ' en niet 'van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ ' om geen meningsverschil te krijgen op een moment, waarop het er nog niet toe doet.

Volgens de F-definitie bestaat een dergelijke inverse niet. Weliswaar is f een injectie, maar het is geen surjectie. En dus is er geen functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, die de inverse is van f .

Zouden we de opgave veranderen en vragen naar de inverse van de functie g van $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ naar $\mathbb{R} \cup \{0\}$:

$$g : x \rightarrow \sqrt{x},$$

dan is volgens de F-definitie deze inverse er wel. Het is namelijk de functie van $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ naar $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$:

$$g^{\text{inv}} : x \rightarrow x^2.$$

Volgens de n-definitie is de inverse van de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f : x \rightarrow \sqrt{x}$$

de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$f^{\text{inv}} : x \rightarrow x^2 \text{ voor } x \geq 0.$$

We zijn blijkbaar van enige subtiliteiten bevrijd. Elke functie, die een injectie is, heeft een inverse. Weinig behoefte hebben we nu nog aan de term injectie, die niet anders voor ons betekent dan inverteerbare functie. Ook het belang van de term surjectie verdwijnt voor ons onderwijs.

Evenzo is volgens de n-definitie de inverse van de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sin x \text{ voor } -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$$

de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$x \rightarrow \arcsin x.$$

En wat een gemak nu in een heel boek over analyse de afspraak te kunnen

maken: met een functie is, als er niets bij vermeld is, een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ bedoeld.

Ten slotte nog één kwestie: de samenstelling van functies. Gegeven zijn de functies

$$f: x \rightarrow 2x - 1$$

$$g: x \rightarrow \sqrt{x} \text{ (volgens de F-definitie een functie van } \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ naar } \mathbb{R}).$$

Stel de functie $g \circ f$ op.

Volgens de n-definitie is er geen vuiltje aan de lucht. Men vindt

$$g \circ f: x \rightarrow \sqrt{(2x - 1)}.$$

Volgens de F-definitie bestaat $g \circ f$ niet, omdat het bereik van f geen deel is van het domein van g en dus niet aan elk reëel getal door $g \circ f$ een beeld toegevoegd zou worden. De samenstelling lukt wel, als we enige voorzichtigheid in acht nemen en de functies

$$f_1: x \rightarrow 2x - 1 \quad \text{van } \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\} \text{ naar } \mathbb{R}$$

$$g: x \rightarrow \sqrt{x} \quad \text{van } \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \text{ naar } \mathbb{R}$$

beschouwen. Samenstelling levert nu

$$g \circ f_1: x \rightarrow \sqrt{(2x - 1)} \quad \text{van } \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\} \text{ naar } \mathbb{R}$$

Ook van deze narigheid zijn we met onze n-definitie af. Van elk paar functies f van V naar W en g van W naar U kunnen we de samengestelde functie $g \circ f$ van V naar U vormen. Als we pech hebben, heeft geen enkel element van V een beeld en is de functie $g \circ f$ dus leeg. Maar waarom zou een relatie wel en een functie niet leeg kunnen zijn? Een consequentie van de n-definitie is, dat de lege functie niet uitgesloten wordt.

Ongaarne zouden we dus ons standpunt verlaten en het voortgezet onderwijs belasten met de F-definitie. Gaarne geef ik toe, dat we het jammer vinden een, in onze ogen niet groot, verschil te creëren tussen de n-definitie en de in de literatuur gebruikelijke definitie van afbeelding.

Zou het aanbeveling verdienen bij het voortgezet onderwijs te gaan spreken van een afbeelding *uit* V naar W ? In de nomenclatuurcommissie is overwogen of dit beter zou zijn. We dachten van niet. Niemand heeft deze uitdrukking te voren gehoord en het lijkt ons erg waarschijnlijk, dat een advies de uitdrukking te gaan gebruiken niet nageleefd zal worden. Het betrekkelijk geringe percentage leerlingen, dat zich later intensief met wiskunde zal bezighouden, zal er dunkt ons geen last van ondervinden, als ze later horen, dat alleen van een afbeelding van V naar W gesproken wordt, als elk element van V afgebeeld wordt. Ze zullen hun terminologie toch al moeten herzien, omdat ze bij het voortgezet onderwijs alleen hebben leren spreken over een afbeelding naar, terwijl ze nu zullen gaan spreken over een afbeelding in en een afbeelding op. Zou het ze veel helpen, als ze bovendien nu 'uit' door 'van' moesten vervangen? Deze overwegingen hebben de nomenclatuurcommissie ertoe geleid niet op haar mening terug te komen.

Nu de vragen 1-9. Ik zou deze als volgt kort willen beantwoorden.

Vraag 1 en 2. Toegegeven, dat de formulering slordig is. De juiste formulering is:

Met de functie van V naar W

$$f: x \rightarrow A,$$

waarin A een uitdrukking is, bedoelen we een functie, waarvan het domein bestaat uit alle $x \in V$, waarvoor de uitdrukking die uit A ontstaat door overal waar x in A vrij voorkomt x te vervangen door y . Hiermee vervalt het tweemaal voorkomen van de letter f , en verdwijnen de door Freudenthal terecht geopperde bezwaren.

Vraag 3. M.i. kan men het beste zeggen: f is een functie van V naar W met domein V .

Vraag 4. Ook hier kan ik niet zeggen, wat men moet. Wel kan ik zeggen, wat mij het eenvoudigste lijkt. Men kan een bijectie van V naar W definiëren als een functie van V naar W , die een inverse heeft en die V als domein en W als bereik heeft. V en W zijn gelijkmachtig wil dan zeggen: er is een bijectie van V naar W .

Vraag 5. Een permutatie van $\{1, 2, \dots, n\}$ is dan een bijectie van $\{1, 2, \dots, n\}$ naar $\{1, 2, \dots, n\}$.

Vraag 6. Lijkt me prima.

Vraag 7. Of men nu de F-definitie of de n-definitie bezigt, beide functies bestaan uit dezelfde geordende paren en zijn dus gelijk. Ten minste als men een functie beschouwt als een bijzonder geval van een relatie en dus als een verzameling geordende paren. Ik weet, dat Freudenthal in zijn *Exacte Logica* dit standpunt niet huldigt en functie als een logisch groundbegrip axiomatisch invoert. Eerst dan zouden er verschillen kunnen ontstaan tussen de twee genoemde functies.

Vraag 8. Deze vraag is hierboven bij het samenstellen van functies al bevestigend beantwoord.

Vraag 9. Het doet me toch genoeg, dat ik hier moet antwoorden: in dit geval geeft de F-definitie een kortere formulering dan de n-definitie.

Nu nog de minder essentiële bedenkingen.

1 De schrijfwijze

$$\{x \mid A\}, \text{ waarin } A \text{ een uitdrukking is,}$$

heeft tot paradoxen geleid, die voorkomen kunnen worden door te eisen, dat men schrijft

$$\{x \in V \mid A\}.$$

Vandaar dat er principieel verschil is tussen

$$\{x \mid A \wedge x \in V\} \text{ en } \{x \in V \mid A\}.$$

De tweede schrijfwijze verdient de voorkeur boven de eerste. Dit is o.a. ter sprake gekomen in de secties van bovengenoemde heroriënteringscursus en is

door Freudenthal in de door hem gegeven samenvatting gereleveerd. Natuurlijk moeten we onze leerlingen niet met dit subtiële verschil lastigvallen. Desondanks is het nuttig, dat wijzelf op de hoogte zijn van dit verschil, dat toch ook met nomenclatuur te maken heeft.

2 Inderdaad is '(3, 5) is een oplossing van $7x - 3y = 6$ ' eigenlijk niet correct. Wel correct zou zijn

$$(3, 5) \in \{(x, y) \mid 7x - 3y = 6\},$$

$$x = 3 \wedge y = 5 \Rightarrow 7x - 3y = 6$$

en ook b.v.

(3, 5) is een oplossing van de vergelijking $7x - 3y = 6$ met eerste veranderlijke x en tweede veranderlijke y .

Ik vrees, dat de terecht gesignaleerde slordigheid, die berust op de stilzwijgende afspraak dat 'x voor y komt', wel onuitroeibaar zal zijn, omdat ... we deze afspraak nu eenmaal stilzwijgend maken. Maar slordig blijft het.

3 Relatie van V naar W vind ik niet bezwaarlijk. Juist de terminologische analogie met functie (afbeelding) van V naar W werkt bevorderend op het inzicht. Relaties tussen drie verzamelingen komen bij het voortgezet onderwijs expliciet nauwelijks voor. We hebben er dan ook geen last van, dat de gekozen terminologie niet gegeneraliseerd kan worden voor relaties tussen meer dan twee verzamelingen.

4 Het woord 'doorlopen' is erg duidelijk. Net zo duidelijk als 'continu', 'naderen tot', 'naderen tot oneindig' e.d. Hoe duidelijk ze zijn, blijkt pas als men vraagt, wat er nu precies onder verstaan wordt. Vandaar onze definities voor limiet, continuïteit e.d.

Welnu, de verzameling van alle geordende paren $(3a, a - 2)$, waarin a de reële getallen doorloopt, is exact genoteerd

$$\{(x, y) \mid \exists a \in \mathbb{R} : x = 3a \wedge y = a - 2\}. \quad (1)$$

In de bovenbouw, met name bij het vak meetkunde met vectoren, is een dergelijke exacte notatie m.i. onontbeerlijk. Maar in de onderbouw verfoeilijk. In de onderbouw zouden we ons dus kunnen redden door te schrijven

$$\{(x, y) \mid x = 3a \wedge y = a - 2, a \in \mathbb{R}\}. \quad (2)$$

Knetterfout? Hoe kan een notatie, die nog geen betekenis heeft, knetterfout zijn? We moeten er eerst een betekenis aan hechten. Niemand zou mij kunnen beletten te definiëren, dat (2) per definitie betekent (1). Wetenschappelijk maak ik dan geen fout. Dus niet knetterfout. Knettergek misschien? Daar zou ik niets tegen kunnen zeggen. Het is een subjectieve appreciatie. Als logicus zou ik het hier direct mee eens zijn. Maar als leraar niet. Als leraar heb ik een tijdelijke notatie bedacht, die aanspreekt. En die later, als men er rijp voor is, door een betere vervangen kan worden.

Het bewijs door volledige inductie

Drs. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest

1 Een fictief (maar niet onmogelijk) gesprek.

Wiskundeleraar (*schrijft*):

$$1 = 1$$

$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

(*vraagt*): Wat moet hier staan? (*Wijst op de lege plek links van het onderste gelijktteken*).

Leerling: 36.

(In het vervolg is met L steeds een van de leerlingen bedoeld. Het hoeft niet steeds dezelfde leerling te zijn.)

W: Hoe weet je dat?

L: Dat zie je aan die kwadraten.

W: Weet je daardoor dat er 36 moet staan of geloof je dat er 36 moet staan?

L: Nou ja, ik geloof het.

W: Wat moet je dus nu nog doen?

L: Bewijzen.

W: Hoe?

L: Ik zou het gewoon uit kunnen rekenen. Maar dat is toch geen bewijs?

W: Waarom zou dat geen bewijs zijn?

L: Bewijzen is redeneren . . .

W: Redeneren heeft wel vaak iets met bewijzen te maken, maar wat is bewijzen? Ik bedoel, wat wil je bereiken met een bewijs?

L: Aantonen dat iets waar is.

W: Precies. En als je door rekenen kunt aantonen dat 1 plus drie plus vijf plus zeven plus negen plus elf gelijk is aan zesendertig, is dat dan een bewijs of niet?

L: Ja. (*Denkt even na*). Het klopt.

W: Akkoord. Het doet er helemaal niet toe welke methode je gebruikt om een bewering te bewijzen. Het gaat er alleen maar om dat aangetoond wordt dat de bewering waar is. Kijk nu eens hier naar (*schrijft*):

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$$

L: Ik zou het wel weer uit kunnen rekenen, maar dat zal u wel niet bedoelen.

W: Wat zou ik dan wel bedoelen, denk je?

L: U wilt een of andere regel hebben waarmee je zonder rekenen het antwoord kan vinden.

W: Precies, en wat zou daar de lol van zijn?

L: Dat je het antwoord ook kunt zeggen als er bijvoorbeeld honderd of duizend termen staan.

W: Alleen maar honderd of duizend?

L: Nee, ieder getal.

W: Je bedoelt niet ieder getal, maar ieder natuurlijk getal. Zeg nu eens precies wat de regel moet bevatten.

L: De regel moet voor elk natuurlijk getal zeggen wat de som is van zo'n reeks.

W: Ik ben niet tevreden met de uitdrukking: 'zo'n reeks'. Je vindt me misschien wel een pietlut, maar ik geloof dat je een heel eind op weg bent naar het vinden van de regel, als je het probleem goed kunt formuleren. Begin de zin eens niet met: 'De regel moet voor elk natuurlijk getal zeggen ...' maar met: 'De regel moet voor elk natuurlijk getal *n* zeggen ...'.

L: De regel moet voor elk natuurlijk getal *n* zeggen, wat de som is van die oneven getallen ... (*aarzelt*).

W: Je aarzelt. Wat is het probleem nu nog?

L: Ik weet niet hoeveel termen er staan.

W: Hoe zou je dat te weten kunnen komen?

L: ...

W: Hoe wist je dat daar (*wijst*) zesendertig zou moeten staan?

L: Dat zag ik aan de regelmaat.

W: Nou en ...?

L: ... ja natuurlijk, (*telt*) een, twee, drie ... Het antwoord is het kwadraat van het aantal termen! (*telt*) ... twaalf. Dan moet daar (*wijst naar de onderste reeks*) honderdvierenveertig uit komen.

W: Goed. En als je het zou uitrekenen, dan zou je zien, dat het klopt. Wil je nu nog eens het probleem formuleren?

L: Ik moet een regel vinden die voor elk natuurlijk getal *n* zegt wat de som is van *n* oneven getallen.

W: Niet helemaal goed, je zou moeten zeggen: '... de som van de eerste *n* oneven getallen', maar dat is nu van minder belang. Ik zei zoëven, dat je door een goede formulering van het probleem het antwoord kunt vinden. Kun je de regel geven?

L: De som van de eerste *n* oneven getallen is gelijk aan *n* kwadraat.

W: Hoera. Nu even proberen of we nog een stapje verder kunnen gaan.
(schrijft:)

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 3673$$

Wat zou ik met die stippeltjes bedoelen?

L: Dat het op dezelfde manier doorgaat tot drieduizendzeshonderddrieënzeventig.

W: Wat moet daar nu staan? (wijst links van het gelijktteken)

L: ...

W: Wat is nu je probleem?

L: Ik weet wel dat het een reeks opvolgende oneven getallen is, maar ik weet niet hoeveel.

W: Hoe moet je dat te weten komen?

L: ...

W: Wat heb je zo net gedaan toen je het aantal termen wilde weten?

L: Tellen.

W: Waar telde je?

L: (kijkt naar de eerste reeksen) Daar.

W: Maar je weet niet wat je nu uit die reeksen zou moeten halen. Zoals gezegd, formuleer je probleem, dan zul je vermoedelijk het antwoord wel vinden.

L: Mijn probleem is, als ik het laatste getal ken, hoeveel termen zijn er dan. O, dus moet ik bij die eerste reeksen naar het laatste getal kijken. Een drie bij twee termen, een vijf bij drie termen, een zeven bij vier termen ... Neen, ik zie het niet.

W: Schrijf eens achter elke reeks het aantal termen. Doe het maar met een andere kleur, anders raken we misschien in de war.

L: (schrijft:)

$$\begin{aligned}1 &= 1 && 1 \\4 &= 1 + 3 && 2 \\9 &= 1 + 3 + 5 && 3 \\16 &= 1 + 3 + 5 + 7 && 4 \\25 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 && 5 \\36 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 && 6 \\144 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 && 12\end{aligned}$$

Nou zie ik het! Eén meer dan het dubbele van de laatste term.

Dat zijn er daar (wijst naar de laatste reeks) ... achttienhonderdzesendertig.

W: Fout. Maar je bent warm.

L: ...?

W: Je zei: 'Eén meer dan het dubbele' (zonder nadruk op het woord meer)
Wat is één meer dan het dubbele van vijf?

L: Elf ... O, nee, het moet minder zijn. Dus het is achttienhonderdzévenendertig.

W: Akkoord, dus als er n termen zijn, wat is dan de laatste term?

L: Twee n min één.

W: Prima, nu nog eens het algemene probleem.

L: De som van de eerste n oneven getallen, waarvan het laatste twee n min één is, is gelijk aan n kwadraat.

W: Ja. Laten we nu even kijken wat we tot nu toe gedaan hebben.

We hebben gezien dat we in sommige gevallen een regel kunnen vinden door

a precies te formuleren wat ons probleem nu eigenlijk is en vervolgens b te zoeken naar een zekere regelmaat.

Verder constateerden we dat we niet altijd een regel bewijzen moeten door redeneren, maar dat dat ook wel eens kan door te rekenen.

Tenslotte vonden we voor dit speciale geval de rij van een aantal oneven opvolgende getallen een regel.

Ik zal die regel zo opschrijven:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

Is dat goed?

L: Nou ja, als n een groot getal is wel.

W: Uitstekend, in deze formule moet dat laatste getal van de reeks minstens zeven zijn, dus n minstens vier.

L: Het moet zelfs minstens negen zijn en n minstens vijf, want anders kan er niets op de stippeltjes staan.

W: Daar ben ik het eigenlijk wel mee eens. Er is wel een manier om het zo te schrijven dat n ook gelijk aan één, twee, drie of vier mag zijn. Maar dat is een hoofdstuk apart. Laten we afspreken dat we nu heel even slordig zijn en dat we met deze formule bedoelen:

Voor elk natuurlijk getal n is de som van de eerste n oneven getallen gelijk aan n kwadraat. Zijn we nu klaar?

L: Nee. We hebben nu wel een regel, maar we weten nog niet of die wel waar is. En nu kunnen we niet rekenen.

W: Ja, waarom kunnen we niet rekenen?

L: Omdat we niet weten hoe groot n is.

W: Neen, het is nog veel erger. We weten wel hoe groot n is, we weten dat n elk geheel positief getal mag zijn.

L: Nou, ja . . .

W: Geloof je dat de regel waar is?

L: Ja, dat wel.

W: Hoe kom je aan dat geloof?

L: Nou ja, bij n is één is het één kwadraat, bij n is twee is het twee kwadraat, bij n is drie is het drie kwadraat, enzovoort.

W: En door dat woord enzovoort, geloof je dat het goed is, maar je weet het niet. Dat heb je fijn aangevoeld. Als een regel honderd keer waar is, ik bedoel, als een regel voor honderd speciale gevallen waar is, garandeert dat nog niet dat hij voor het honderdeneende geval ook waar is.

2 We moeten een algemene methode vinden om in een klap alle gevallen tegelijk te bewijzen. Dat kan hier duidelijk niet door rekenen. We zullen moeten redeneren. Ik zal je nu een nieuwe redeneermethode leren. Hij wordt vaak gebruikt in dit soort gevallen waarbij het gaat om een bewering over gehele positieve getallen, zoals hier.

Het bewijs heeft nog een speciale naam ook: Bewijs door volledige inductie. Het gaat als volgt.

Eerst laten we zien, dat de regel waar is voor n is één.

Nu, dat is in dit geval niet moeilijk: de som van de eerste één oneven getallen is gelijk aan één kwadraat.

(schrijft:)

$$\text{voor } n = 1: 1^2 = 1 \quad \text{Klopt}$$

(I) De regel is waar voor $n = 1$

(spreekt:)

Als de regel voor zekere gehele positieve n waar is

(schrijft:)

$$\text{Als } n^2 = 1 + \dots + (2n-1)$$

(spreekt:)

dan blijft hij waar als ik aan beide kanten het volgende oneven getal optel. Het volgende getal is twee groter dan dat (wijst naar $(2n-1)$) en is dus twee n min één plus twee, en dat is gelijk aan twee n plus één.

(schrijft ondertussen:) dan

$$\begin{aligned} n^2 + (2n-1+2) &= 1 + \dots + (2n-1) + (2n-1+2) \\ n^2 + 2n + 1 &= 1 + \dots + (2n-1) + (2n+1) \end{aligned}$$

(spreekt:) Dat linkerlid herken je wel.

L: Een merkwaardig produkt, n plus één in het kwadraat.

W: Precies.

(schrijft:)

$$(n+1)^2 = 1 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1)$$

(spreekt:)

Begrijp je waarom ik dat laatste zo geschreven heb?

L: Nee.

W: Wel, er stonden eerst n oneven getallen. Toen kwam er een oneven getal bij. Het aantal oneven getallen is nu dus $n+1$. Het laatste getal uit de reeks is, zoals we zagen, twee maal het aantal min één. Welnu, dat staat er precies: twee maal het aantal, dat is twee maal n plus één, min één.

We zien dus: als de regel waar is voor zekere n , dan is hij ook waar voor $n+1$.

(schrijft:)

(II) Als waar voor zekere n , dan ook voor zijn opvolger $n+1$

(spreekt:)

Nu ben ik klaar. De regel is waar voor alle gehele positieve getallen n . Dat volgt uit (I) en (II).

L: ?????

W: Ja, dat is moeilijk, nietwaar. Het is toch heus zo. Kijk maar. De regel is waar voor $n=1$ (wijst naar (I)). Als hij waar is voor $n=1$, en dat is zo, dan is hij ook waar voor zijn opvolger, voor $n=2$. Dat volgt hier (wijst naar (I)) uit. Dus is de regel waar voor n is twee. Maar dan is hij ook waar voor de opvolger van twee. voor n is drie. Maar dan is hij ook waar voor de opvolger van drie, voor n is vier. Enzovoort, enzovoort, enzovoort.

L: (zwijgt)

L: (zwijgt nog steeds)

L: (blijft zwijgen)

L: (triomfantelijk) Dat is niet goed! U zei zelf dat, als het regeltje waar is voor n is één, twee, drie, vier, vijf, dan mag je niet zonder meer zeggen dat het ook waar is voor zes, zeven, acht, enzovoort. En nu doet U het zelf.

3 Ik kan het toneelstukje niet verder afmaken, Ik weet niet wat ikzelf in zo'n situatie moet antwoorden. De leerling had natuurlijk niet gelijk, want formeel zijn de uitspraken (I) en (II) inderdaad voldoende. Toch is de reactie volkomen begrijpelijk. Deze manier van redeneren is niet doorzichtig. We moeten hem dus plausibel maken. En dat moet dan niet op een manier die veel lijkt op wat we daarvoor afkeurden: 'stippeltje-stippeltje-enzovoort-methode'. Om het geheel wel plausibel te maken gebruik ik sinds enige tijd een redeneertrant die iets meer zegt dan alleen (I) en (II). Ik weet wel dat (I) en (II) voldoende zijn, maar als er een uitspraak (III) bij komt, die niet in strijd is met de beide vorige, ben ik formeel niet fout.

Ik zal geen poging doen het weer in dialoogvorm te schrijven, maar alleen de grote lijn aangeven.

4 Er is een uitspraak $U(n)$ over gehele positieve getallen. Ik geloof dat die waar is voor alle gehele positieve getallen. Ik ga proberen hem te bewijzen. De verzameling $\mathbb{Z}^+$ van gehele positieve getallen wordt opgedeeld in twee deelverzamelingen V en W . V (de eerste letter van het woord vals) bevat de getallen v uit $\mathbb{Z}^+$ waarvoor $U(v)$ onwaar is en W (de eerste letter van waar) bestaat uit de getallen w van $\mathbb{Z}^+$ waarvoor de uitspraak $U(w)$ waar is.

We gaan nu drie dingen bewijzen:

I $1 \in W$.

II Als n een element is van W , dan is ook $n+1$ een element van W .

III Uit (I) en (II) volgt, dat V de lege verzameling is.

5 Ik zal nu aannemen dat (I) en (II) bewezen is en verder gaan met (III). Voor (III) geven we een indirect bewijs: Er zijn twee mogelijkheden: $V = \emptyset$, of $V \neq \emptyset$.

Als we kunnen laten zien, dat $V \neq \emptyset$ tot een strijdigheid voert zijn we klaar. Want dan is $V = \emptyset$ de enig overgebleven mogelijkheid. Hetgeen betekent dat $W = \mathbb{Z}^+$, wat te bewijzen was.

Welnu, als V niet leeg is, dan heeft V een kleinste element.

Uit (I) volgt, dat dat kleinste element niet 1 is. Dat kleinste element heeft dus een directe voorganger in $\mathbb{Z}^+$. De directe voorganger noemen we n .

Omdat $n+1$ het kleinste element uit V is, is n een element uit W .

Volgens (II) is dan ook $n+1$ een element uit W . Conflict!

6 Natuurlijk geef ik deze redeneringen in het begin alleen aan de hand van een concreet voorbeeld. Als het vaak genoeg gebeurt gaan de leerlingen inzien dat (I) en (II) voldoende zijn, en dat (III) in wezen niets anders is dan een praatje dat dat inzicht veroorzaakt.

Over het feit dat (III) eigenlijk een axioma over natuurlijke getallen is sprak ik niet. Ik heb daar ook geen behoefte aan als axiomatic in het algemeen geen programmaonderdeel is van het leerplan.

Wiskundig Genootschap

Het wintersymposium zal worden gehouden op *maandag 3 januari 1972* in het Revius-Lyceum, Dribergsestraatweg 6a, Doorn.

Als thema is gekozen: 'Getallentheorie'.

Het programma luidt als volgt:

10.15 - 10.30 u.	Aankomst en koffie.
10.30 - 11.30 u.	Prof. dr. H.J.A. Duparc: 'Toepassingen van elementaire getallentheorie'.
11.45 - 12.45 u.	Prof. dr. J.H. van Lint: 'Perfekte codes'.
12.45 - 14.00 u.	Lunch.
14.00 - 15.00 u.	Dr. H.G. Meyer: 'De priemgetalstelling'.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom. I.v.m. de te reserveren plaatsruimte wordt ieder die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen verzocht hiervan bericht te geven aan drs. G.W. de Vries, Burg. Martenslaan 46, Leersum en tevens te vermelden of hij aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen.

Degenen die per trein naar deze bijeenkomst reizen kunnen het Revius-Lyceum vanuit Dribergen bereiken met bus 50 of bus 58 (Halte Woestduinlaan).

Wie aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen wordt verzocht vóór 16 december 1971 f 6,50 over te maken op giro nr. 468081 t.n.v. drs. G.W. de Vries te Leersum.

Openingsrede

door de heer Dr. J. K. van den Briel voor de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 16 oktober 1971 in het Transitorium van het Universiteitscentrum de Uithof.

Dames en Heren,

Ik verklaar hierbij de jaarvergadering 1971 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren geopend.

Het doet mij veel genoegen een bijzonder welkomstwoord te kunnen richten tot ons erelid Dr. J.H. Wansink, die vanzelfsprekend aanwezig is. De inspecteurs Drs. B.J. Westerhof en Dr. H.A. Gribnau moesten voor deze vergadering tot hun spijt bericht van verhindering zenden; dat wij ze hier missen is een bevestiging van de prettige samenwerking die altijd bestaan heeft tussen onze vereniging en de Inspectie. Ik ben ervan overtuigd dat deze zelfde prettige samenwerking ook zal ontstaan met de heer N.J. Zimmerman, die als nieuw benoemde Mavo-inspecteur hier voor het eerst op onze jaarvergadering aanwezig is. Hartelijk welkom!

Dat ook de oud-inspecteurs E.H. Schmidt en Dr. D.N. van der Neut vandaag in ons midden willen zijn, duidt erop dat zij prettige herinneringen aan onze vereniging bewaard hebben. De heer Drs. A.M. Koldijk is hier als vertegenwoordiger van de Redactie van Euclides. De vertegenwoordiger van de met ons samenwerkende groepering Liwenagel, de heer D. Leujes, zien we hier met genoegen, terwijl de heer en mevrouw Holvoet hier namens de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren getuigen van de wil tot samenwerken die ook in België aanwezig is.

Drs. A.B. Oosten van Wolters-Noordhoff is een graag geziene gast op onze vergaderingen.

De heren Drs. H.G.B. Broekman, G. Krooshof en Drs. A.J.Th. Maassen verdienen onze hartelijke dank, dat zij vandaag voor ons willen spreken.

Aan u, gasten, en aan u, gewone leden, een hartelijk welkom hier. Nu er sedert onze vorige jaarvergadering op 16 december 1970 bijna een jaar verlopen is, is het weer mijn taak om u een overzicht te geven van de gebeurtenissen op het gebied van ons werk in het algemeen en dat van het wiskunde onderwijs in het bijzonder.

De invoering van de Wet op het Voortgezet Onderwijs reikt een jaar verder en we zijn een jaar langer bezig met de nieuwe organisatie en het sterk veranderde vak.

Keken we vorig jaar nog wel eens terug naar de toen achter ons liggende periode, nu zijn we wel verplicht naar voren te kijken; de collega's van het 4-jarige Mavo zijn voor het eerst bezig aan het eindexamenjaar, de collega's die les geven op het Havo zijn begonnen met het jaar waarin de pakketten zijn samengesteld en dus de leerlingen nu zelf hun vakken en wat ons betreft ook wiskunde hebben gekozen.

Tenslotte de collega's van atheneum en gymnasium werken nu met in A en B gesplitste klassen en hebben de gelegenheid om met deze geselecteerde leerlingen de voorbereidingen voor het eindexamen te treffen. Vermoedelijk zijn er meerdere collega's die het net zo gaat als mijzelf en die nu gaan zien, wat we in de eerste drie klassen van onze nieuwe scholen hadden moeten doen. Een bewijs, dat we het einde van het begin van onze omscholing bereikt hebben. Misschien is deze uitdrukking wat te somber, maar aan de andere kant vrees ik wel dat vele collega's, die niet met het experiment 'Meetkunde met vectoren' hebben meegedaan, moeite zullen hebben met deze nieuwe stof. Een zo veel mogelijk uitwisselen van ervaringen en het beschikbaar stellen van gegevens door diegenen onder ons die meedoen met dit experiment, is hoogst noodzakelijk. In Euclides zal een lijst gepubliceerd worden van de scholen en de namen van de collega's die bereid zijn deze ervaringen door te geven.

De bijeenkomsten over de experimentele eindexamens: één voor havo-vwo in Utrecht en vijf voor het mavo in diverse plaatsen, waren zeer goed bezocht en voldoen kennelijk in een behoefte.

Euclides blijft onder een enthousiaste redactie onze zeer gewaardeerde vraagbaak voor de didaktiek van ons vak. De vereniging organiseert in november drie bijeenkomsten, toegankelijk voor alle belangstellenden waar de heren E. Wijdeveld en F. Goffree een voorlichtende causerie over Wiskobas zullen houden.

Onder de verdere activiteiten van de Vereniging moeten de werkzaamheden van de verschillende commissie's genoemd worden. Die voor de vraagstukkenverzameling voor het vwo is klaar en we zullen er voor zorgen dat het boekje verschijnt vóór de aanvang van de cursus 1972/1973, daar er ruimschoots tijd moet zijn om zich voor te bereiden. Naar de mening van de commissie bevat deze verzameling een aantal vraagstukken die een geschikte voorbereiding zijn voor de te verwachte eindexamens vwo.

De Nomenclatuurcommissie heeft met grote voortvarendheid werkend het eerste deel van zijn voorstel uitgebracht (gepubliceerd in het maartnummer van Euclides) en het tweede interim rapport, handelend over de meetkunde onderbouw, is bijna gereed. Vanzelfsprekend zal het nog wel enige tijd duren voor de resultaten hiervan merkbaar zijn in nieuwe drukken van alle leerboeken. Aansluitend aan deze materie lees ik u de volgende passage uit de Discussienota van de COLO (de Commissie Organisatie Leerplan Ontwikkeling) voor: 'De huidige situatie wordt gekenmerkt door een uitzonderlijk grote vrijheid op het gebied van de keuze van de leergang. Voor ieder schoolvak zijn tientallen onderwijsmethodes beschikbaar. Een zekere mate van pluriformiteit is zeker gewenst, maar op het ogenblik wordt de situatie in brede kring als chaotisch ervaren'. Zeer juiste opmerkingen, maar mij dunkt, dat een zekere waakzaamheid toch op zijn plaats is, als we lezen dat één van de taken van de COLO moet zijn: 'ontwikkeling van onderwijs, leermaterialen (leergangen, onderwijsleerpakketten e.d.) ten behoeve van de dagelijkse praktijk'. Een te grote centralisatie op dit gebied is beslist niet gewenst.

Bij de Didaktiekcommissie zijn we wat te optimistisch geweest. Hier de pro-

blemen besprekend en overdenkend bleek al spoedig, dat het moeilijker was dan we eerst dachten. Zeker is nu al dat het tijdschema dat opgesteld was, niet houdbaar is en het onderzoek, vooral ook door de drukke werkzaamheden van de Commissieleden, veel langer zal duren. In verband hiermede doe ik een dringend beroep op onze leden om zich op te geven aan de secretaris van de Commissie, Drs. Broekman, om mee te helpen bij het onderzoek. Verder is duidelijk gebleken hoe noodzakelijk dit werk is en hoe nodig is dat resultaten er van zo spoedig mogelijk doorgegeven worden aan de collega's voor de klas. Plannen hiervoor bestaan wel, maar het tijdsgebrek speelt een grote rol.

Er bestaat een vruchtbare samenwerking met de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Zoals u weet heeft deze commissie het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs opgericht, dat gevestigd is op twee étages van een gebouw aan de Tiberdreef in Overvecht, een wijk van Utrecht, waar nu de C.M.L.W. haar domicilie heeft.

Door dit Instituut worden de oude en nieuwe activiteiten van de Staatscommissie uitgevoerd, waarbij op dit ogenblik wel het hoofdaccent ligt op het basis- en beroepsonderwijs.

Maar ook op het gebied van het algemeen voortgezet onderwijs: (mavo, havo en vwo) zal de Commissie de leidinggevende instelling moeten blijven voor de Modernisering van ons wiskundeonderwijs. In de toekomst zal aan deze taak veel aandacht besteed moeten worden.

Speciaal voor de mavo-collega's doet de Centrale Commissie Begeleiding mavo-Wiskunde nog steeds zeer nuttig werk, terwijl het bestuur van onze vereniging overweegt om regionaal bijeenkomsten te organiseren. Er vindt overleg plaats met contactpersonen in de verschillende plaatsen over wat er gedaan zou kunnen worden. Suggesties van de leden zijn natuurlijk hartelijk welkom.

In het afgelopen jaar is een organisatie verdwenen en er één ontstaan. Na achtien keer het tweejaarlijkse Congres voor leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen te hebben georganiseerd, namen een maand geleden de samenwerkende verenigingen het besluit er niet mee door te gaan, omdat de belangstelling voor deze bijeenkomsten te veel terugloopt en andere organisaties soms te zelfder tijd soortgelijke congressen houden. In de plaats van deze schaarse contacten met enkele verenigingen van docenten is nu sinds enige tijd een veel algemener samenwerking gegroeid. Op 5 maart 1971 is opgericht de Raad van Vakgroepen, bestaande uit de voorzitters van de verschillende verenigingen van docenten in één bepaald vak, in totaal dertien. Besprekingen met de Raad van Leraren, speciaal met de 2e afdeling, hebben geleid tot een nauwe samenwerking hiermee.

De internationale contacten zijn dit jaar gegroeid. Behalve de zeer gewaardeerde aanwezigheid van de vertegenwoordigers van de Belgische Wiskunde-leraren op de vorige en op deze jaarvergadering, woonde Dr. Vredenduin namens onze vereniging de jaarvergadering van de Belgische collega's op 26 september j.l. bij. De Voorzitter en de Vice Voorzitter bezochten het vijfdaagse

Congres van de Association of Teachers of Mathematics in Lancaster in Engeland. Een heel interessante ervaring die wij alle wiskundecollega's kunnen aanbevelen. Volgend jaar wordt het tweede congres van de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique in Exeter gehouden. Op de begroting van onze vereniging zult u een bedrag vinden dat bedoeld is om een aantal van onze leden de gelegenheid te geven dit congres bij te wonen. Wie voor deze bijdrage in de kosten in aanmerking wenst te komen, wordt verzocht een verzoek hiervoor aan het Bestuur te richten.

De Wiskunde Olympiade zal zijn tienjarig bestaan herdenken met de uitgave van een boekje in de Torusreeks, waarin de verschillende opgaven opgenomen zijn.

De vakantiecursus van het Mathematisch Centrum in Amsterdam, was gewijd aan de Wiskunde van de laatste vijf en twintig jaar en was een groot succes.

Dames en heren, met veel genoegen heb ik u een overzicht kunnen geven van één jaar waarin onze Vereniging en andere instanties veel en goed werk hebben kunnen doen voor de modernisering van ons wiskunde-onderwijs.

Tot slot wil ik mij graag tot één uwer wenden, namelijk de Heer Schmidt. U bent dit jaar met pensioen gegaan, maar daarna hebt u nog uw medewerking verleend bij de organisatie van alle vijf regionale bijeenkomsten over de Mavo-examens.

Op uw afscheidsreceptie als inspecteur op 30 september is u namens het Bestuur de dank overgebracht voor uw adviezen en de prettige samenwerking die de Vereniging altijd met u heeft gehad. Ik herhaal het hier bizonder gaarne op deze eerste jaarvergadering, waarop u als ambteloos burger aanwezig bent.

Het Bestuur wilde het niet bij dit dankwoord laten en u, vooral ook als dank voor uw hulp bij de regionale mavo bijeenkomsten een boekenbon geven. Hoewel het geen gewoonte is om het bedrag ervan voor te lezen wilde ik het in dit geval toch doen. Het is een bon voor vijf en zestig gulden en vijf en twintig cent: 65+ en wij hopen dat u er veel genoegen aan zult hebben.

Didactische Literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 274-279
(juni 1970-juni 1971).

G. Heuzé, Plans finis;
J. Lelong-Ferrand, Notes de géométrie;
C. Frasnay, Éléments de valence impaire relativement à un graphe fini;
J. Dautrevaux, A propos de l'indicatrice d'Euler;
G. Walusinski, Matériaux pour une bibliographie;
J. Kuntzmann, Remarques sur l'écriture des nombres négatifs;
P. Jacquemier, Graduation d'une droite et numérotage d'intervalles;
Meyer, Additions et soustractions, avec retenues, à l'école élémentaire.

B. Mourlevat, Le nombre d'or à Notre-Dame-du-Port;
J. P. Kahané, Courbes étranges, ensembles minces;
L. Guerber, Programmation lineaire;
P. L. Hennequin, Etude élémentaire de la circulation d'une file de voitures;
J. M. Souriau, L'évolution des modèles mathématiques en mécanique et en physique;
G. Letac, Promenades aléatoires plus ou moins un;
M. Pavel-Givens, Fondements mathématiques de la reconnaissance des structures;
A. Lichnerowicz, Les mathématiques et leur enseignement;
G. Walusinski, Réalités de la mathématisation à Clèrmont;
G. Audibert, Abus de langage;
A. Sem, Sur la notion de limite;
J. Dantrevaux, Sur quelques points de terminologie;
B. Déhamé, Les réels en quatrième.

M. Puissegur, Rabelais, Dada et les probabilités;
Alzingre, Guillotin, Gabriel, Théorie de Galois;
Mme Robert, Mathématique à l'école élémentaire;
J. M. Chevalier, Aimez-vous l'intrinsèque?
H. Bouteiller, Fonctions trigonométriques;
I. R. E. M.. de Lille, Développer et moderniser l'enseignement des mathématiques? Pourquoi faire?
M. Glaymann, Un aspect de la combinatoire.

Redactioneel: Programmes pour les classes de quatrième et de troisième; programme pour la classe de terminale A;
St. Turneau, Continuité et limites à partir des transformations géométriques;
Jean Itard, Des vecteurs et des hommes;
G. Walusinski, Robert et la mathématique.

Redactioneel: La réforme dans le premier cycle, deuxième étape;
Redactioneel: Programmes pour la classe de quatrième et pour la classe de troisième;
V. Gauthron, Nombres décimaux;
M. Motté, Des décimaux aux réels;
E. Déhamé, Les décimaux et les réels en quatrième;
C. Morin, Construction de l'ensemble des réels;
M. Roumieu, Les nombres réels dans l'enseignement secondaire;
B. Kittel, Construction des réels à partir des décimaux;

P. Buisson, La géométrie en quatrième;
 L. Duvert en anderen, La géométrie;
 Pauwels, Géométrie sur un quadrillage;
 F. Colmez, Axiomatisation de la droite;
 G. H. Clopéau, Mathématiser les translations techniques;
 M. Auzé, Quelques histoires vécues dans une classe expérimentale;
 L. Duvert, Sur l'expérience en quatrième;
 J. Charyé, Apprentissage de la déduction;
 M. Motte, En marge de l'apprentissage de la déduction;
 J. Bastier, Quelques réflexions.

N.B. Nummer 279, gewijd aan „*Mathématique en Quatrième par ceux qui l'enseignent*” in een omvang van 250 pag., verdient de bijzondere belangstelling van de Nederlandse wiskundeleraars.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaeheuveel 73, Oosterbeek.

270 $\varphi(n)$ stelt het aantal natuurlijke getallen tussen 0 en n voor, die onderling ondeelbaar met n zijn. Zoals bekend geldt:

als $n = p_i^a p_j^b p_k^c \dots$ de ontbinding van n in priemfactoren is,

dan is $\varphi(n) = (p_i - 1) p_i^{a-1} (p_j - 1) p_j^{b-1} (p_k - 1) p_k^{c-1} \dots$

Voor wie deze formule niet kent, is het een aardige niet te moeilijke recreatieopgave haar af te leiden.

Gevraagd wordt

voor welke waarden van n geldt $\varphi(n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$;

voor welke waarden van n geldt $\varphi(n) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$?

(G. Cool, Goldern, Zw.)

271 Wat is de langste rij opvolgende natuurlijke getallen, waarvan de som 10^6 is?

(B. Kootstra)

Oplossingen

268

1 Bert is niet zwaarder dan Arthur.

2 De kok is zwaarder dan Gerard.

3 Bert is ouder dan Gerard.

4 De kok is zwaarder dan de kapitein.

5 De kapitein is ouder dan de stuurman.

6 Als Gerard stuurman is, is Bert kapitein.

7 Er is een oudste; de kok is niet de oudste.

We gebruiken de afkortingen A, B, G, Ka, S, Ko. Er zijn twee orderrelaties, ouder dan en zwaarder dan, die we resp. noteren $>_O$ en $>_Z$. De gegevens kunnen we nu ook schrijven:

3 $B >_O G$

5 $Ka >_O S$

7 $Ka >_O Ko \vee S >_O Ko$.

1 $A \geq_Z B$

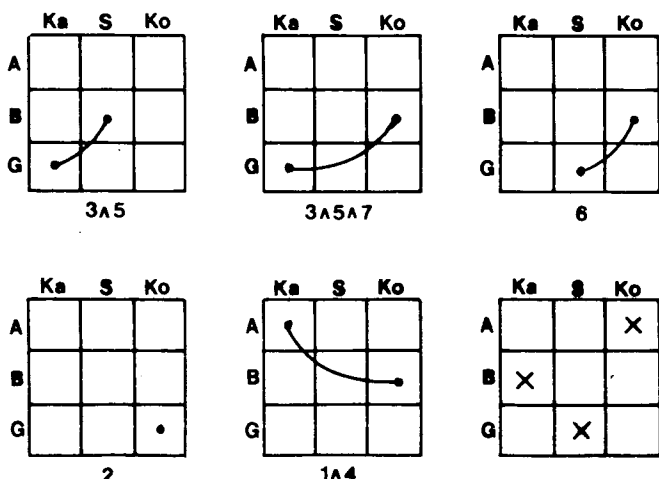
2 $Ko >_Z G$

4 $Ko >_Z Ka$

en ten slotte

6 $G = S \Rightarrow B = Ka$

Door sommige van deze gegevens of combinaties van gegevens worden bepaalde constellaties onmogelijk gemaakt. Zo maakt b.v. 2 onmogelijk, dat $G = Ko$. We geven dat in onderstaand diagram aan door in het vak (G, Ko) een stip te plaatsen en onder het diagram een 2. Verder maken 3 en 5 samen onmogelijk, dat $B = S$ en $G = Ka$. In het diagram plaatsen we dan stippen in (B, S) en in (G, Ka) en verbinden deze door een lijntje; onder het diagram zetten we $3 \wedge 5$. Dit levert:



$G = Ko$ is uitgesloten (2). $G = Ka$ kan niet volgens $3 \wedge 5$ en $3 \wedge 5 \wedge 7$. Dus $G = S$. Volgens 6 is dan $B = Ka$. Hetgeen ten slotte levert $A = Ko$. De oplossing is in het laatste diagram met kruisjes weergegeven.

Uit de redenering blijkt, dat $1 \wedge 4$ gemist kan worden. Laat men van de overige gegevens er nog één weg, dan verifieert men zonder moeite, dat er nevenoplossingen komen.

De conclusie $B = Ka$ had men ook uit $1 \wedge 4$ kunnen verkrijgen. Dan was 6 overbodig geweest. Weglaten van nog een gegeven levert weer nevenoplossingen.

Ten slotte levert weglating van 5 of 7 (dus van $3 \wedge 5 \wedge 7$) of van 2 uit het zevental weer nevenoplossingen.

De enige onafhankelijke verzamelingen gegevens zijn dus $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

269 Bij het domineren met een spel stenen vanaf 0-0 tot en met n - n bestaat de langste rij, die men krijgen kan, uit 243 stenen.

Gevraagd n .

Onderstel, dat n even is. Elk aantal ogen komt dan $n + 2$ keer, dus een even aantal keren, voor. Men kan dan maximaal alle stenen in een rij rangschikken. (Onderstel, dat men niet verder kan, doordat de rij b.v. met 3 begint en met 3 eindigt en alle 3'en verbruikt zijn. De resterende stenen bevatten dan elk aantal ogen ook een even aantal keren. Ook hiermee kan men een rij maken, die eerst vastloopt, als de rij met hetzelfde getal begint en eindigt, b.v. met 4. In de eerste rij komt nu naast elkaar 3-4 en b.v. 4-5 voor. De tweede rij kan men dan hiertussen in de eerste inschakelen.) het aantal stenen is dus $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.

Onderstel, dat n oneven is. Men kan elk aantal ogen dan slechts een even aantal keren laten voorkomen, dus $n + 1$ keer. Op twee uitzonderingen na, namelijk de beide aantallen, die aan de uiteinden van de rij komen. Het aantal stenen is nu dus $\frac{1}{2}(n + 1)^2 + 1$.

In het eerste geval vindt men voor n geen gehele waarde, in het tweede $n = 21$.

Audio-visuele hulpmiddelen

Natuurlijk is het wat overdreven om te stellen dat 135 jaar ervaring met het onderwijs alleen maar een voorbereiding is geweest op het begeleiden van gebruikers van technische hulpmiddelen. Maar die ervaring is er, en waarom zouden we er geen gebruik van maken. Vooral bij onbekende nieuwigheden als technische hulpmiddelen. Praat u eens met ons over uw problemen op dit gebied. We zullen u graag helpen met onze kennis van prijzen, gebruiksmogelijkheden en software met betrekking tot

- bandrecorders en talenpractica
- film- en diaprojectoren
- overheadprojectoren
- videorecorders
- het Instant Response System

Alle inlichtingen bij
Wolters-Noordhoff nv
postbus 58
telefoon 150-188888 toestel 141
Groningen

en bij onze specialist
(ook buiten kantooruren)
D.H. Faber
Arnhemsestraat 34
Velp
telefoon 08302-4037



Wolters-Noordhoff

meetkunde met vectoren

L. R. J. Westermann,

MEETKUNDE MET VECTOREN

deel 1 ISBN 90 01 94920 7, ing. f 11,40

deel 2 ISBN 90 01 94921 5, ing. f 11,05

Een behandeling van vectoren in het platte vlak en in de ruimte.

Geschikt voor:

- de hoogste drie leerjaren van het v.w.o. (b-afdeling en wiskunde-II)
- hoger beroepsonderwijs
- wiskunde l.o. opleiding

Meetkunde met vectoren is voortgekomen uit een experiment van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever



Wolters-Noordhoff

STICHTING DE VRIJE LEERGANGEN

Opleiding voor
Middelbare Akten

Het nieuwe studiejaar

WISKUNDE M.O.-B

begint 14 januari 1972 in het
Hoofdgebouw van de Vrije Universiteit,
Amsterdam-Buitenveldert.

Inlichtingen bij:
Drs. P. Noordzij,
Sandbergstraat 12,
Abcoude;
tel. 02946-1950.

Aanmelding gaarne voor 1 januari 1972.

Zojuist verschenen:

B. FREY SCHOOLWISKUNDE VAN VANDAAG

voor ouders
en ieder die er meer van wil weten

Dit boek trekt — om in wiskundige termen te blijven — hulplijnen van verleden naar heden. Verleden is de tijd waarin de ouders — op MULO of middelbare school — worstelden met congruente driehoeken en de stelling van Pythagoras. Heden is de tijd waarin de leerlingen bij MAVO, HAVO en VWO over zaken praten als vectoren en venndiagrammen. Met wiskundige zekerheid mag worden vastgesteld, dat daardoor problemen ontstaan, bijvoorbeeld wanneer ouders hun kinderen met huiswerk willen helpen. Plotseling blijken zij elkaar niet te verstaan, blijkt ieder een andere taal te spreken. Daarmee is de essentie van dit boekje aangegeven. Want niet de wiskunde is veranderd, maar de taal die zij spreekt. In deze taal — de verzamelingenleer — worden de ouders op een lichtvoetige, maar doeltreffende manier ingewijd. Zij maakt dat wat nu nog voor velen geheimtaal is, de heldere, ongecompliceerde taal wordt van de schoolwiskunde van vandaag.

INHOUD

1. VERZAMELINGENLEER 2. MODULUSREKENEN 3. GETALSYSTEMEN EN -STRUCTUREN; ACHTERGRONDEN VAN HET REKENEN 4. RELATIES; AFBEELDINGEN; FUNCTIES 5. TRANSLATIE; SYMMETRIE; ROTATIE 6. LOGICA 7. VERGELIJKINGEN MET ONBEKENDEN; FUNCTIES; GRAFIEKEN 8. COMMUTATIVITEIT; ASSOCIATIVITEIT; DISTRIBUTIVITEIT 9. MEETKUNDE 10. MATRICES EN VECTOREN.
TOEPASSINGEN VAN DE MODERNE WISKUNDE IN DE PRAKTIJK
HUISWERKBEGELEIDING

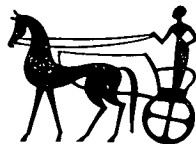
23 × 15 cm; 140 blz.; rijk geïllustreerd; paperback f 14,75

Verkrijgbaar via de erkende boekhandel

Een uitgave van

AGON ELSEVIER

Postbus 211
AMSTERDAM



Uitgaven voor de school- bibliotheek

Kunnen dieren tellen? De uitkomst van studies aan dit onderwerp gewijd zijn onbevredigend. Tellen schijnt een uitsluitend menselijke bekwaamheid te zijn. En van tellen tot de vorming van het abstracte begrip getal, waar we dan wiskunde mee kunnen bedrijven, is weer een lange weg.

Prof. dr. D.J. Struik is er volledig in geslaagd een boeiende en leesbare beschrijving te geven van deze ontwikkelingsgang in

Tellen: zonder en met cijfers,

ISBN 90 01 82105 7

ing. f 6,85

Torus-reeks

In deze serie zijn reeds verschenen:

Inductie en iteratie

Prof. dr. H.J.A. Duparc

ISBN 90 01 26150 7

ing. f 5,40

Versnelling en beweging

Dr. J. van Tiel

ISBN 90 01 86350 7

ing. f 4,50

Rekenen met kansen

Dr. J. Wessels

ISBN 90 01 86350 7

ing. f 6,—

Computers en algoritmen

Prof. dr. A. van der Sluis

ISBN 90 01 79970 1

ing. f 6,25

Meetkunde gewoon en anders

Prof. dr. O. Bottema

ISBN 90 01 14110 2

ing. f 6,55

Prijswijzigingen voorbehouden

Deze uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel en bij Wolters-Noordhoff, postbus 567, Groningen.

Vermeldt bij uw bestellingen steeds titel, auteur en ISBN.

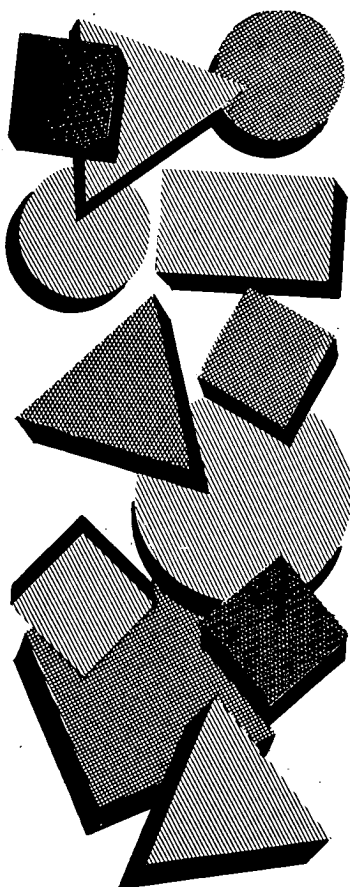


Wolters-Noordhoff nv

244 25 50/606

Opdrachten logica

Voor de brugklas



Ideeën van prof. dr. Z.P. Dienes, voor Nederland bewerkt door drs. C.A.J. Bouwmeester en drs. B. van der Krogt.

Deze logica-cursus, die losbladig is en opgeborgen is in een ringband, bestaat uit twee delen:

- * Een basiscursus (Serie I). Hierin wordt een aantal grondbegrippen uit de logica geleerd:
 1. de negatie of ontkenning
 2. de conjunctie
 3. de disjunctie
 4. de implicatie
 5. de equivalentie of gelijkwaardigheid
- * Een cursus redeneervormen (Serie II). Hierin wordt een aantal redeneervormen behandeld, die berusten op een van de volgende principes of op een combinatie daarvan:
 1. het deelverzameling-principe
 2. het gelijke verzamelingen-principe
 3. het doorsnede-principe

Beide series zijn zo samengesteld dat de leerlingen de opdrachten zelfstandig kunnen uitvoeren. Zij kunnen daarbij gebruik maken van Malmbergs mini-logiblokken.

(f 4,75; bij 20 ex. f 4,25)

Vraag nadere inlichtingen bij



MALMBERG 's-HERTOEGENBOSCH

postbus 233 Telefoon (04100)-23311

getal en ruimte

Een moderne wiskunde methode voor mavo, havo en vwo door
**K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz, H. Steur,
A. H. Syswerda en R. A. J. Vuijk.**

De serie is geheel nieuw geschreven in overeenstemming met de voorstellen van de commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en het Leerplan voor de rijksscholen.

SERIE-SAMENSTELLING VOOR HET MAVO, HAVO EN VWO

Brugklas

B 1 : Algebra voor de brugklas
B 2 : Meetkunde voor de brugklas

Mavo

2 HM 1 : Wiskunde voor de tweede klas havo/mavo, deel 1
2 M 2 : Wiskunde voor de tweede klas mavo, deel 2
3 M III-1 : Wiskunde voor de derde klas mavo III, deel 1
3 M III-2 : Wiskunde voor de derde klas mavo III, deel 2
3 M IV-1 : Wiskunde voor de derde klas mavo IV, deel 1
3 M IV-2 : Wiskunde voor de derde klas mavo IV, deel 2
4 M 1 : Wiskunde voor de vierde klas mavo, deel 1
4 M 2 : Wiskunde voor de vierde klas mavo, deel 2

Havo

2 HM 1 : Wiskunde voor de tweede klas havo/mavo, deel 1
2 H 2 : Wiskunde voor de tweede klas havo, deel 2
3 H 1 : Wiskunde voor de derde klas havo, deel 1
3 H 2 : Wiskunde voor de derde klas havo, deel 2
3 Hbp : Wiskunde voor de derde klas beperkt programma
4/5 H 1 : Analyse voor de vierde klas havo
4/5 H 2 : Meetkunde en Statistiek voor de vierde en vijfde klas havo

Vwo

2 V 1 : Wiskunde voor de tweede klas vwo deel 1
2 V 2 : Wiskunde voor de tweede klas vwo deel 2
3 V 1 : Wiskunde voor de derde klas vwo deel 1
3 V 2 : Wiskunde voor de derde klas vwo deel 2
4 V 1 : Wiskunde voor de vierde klas vwo
4 V 2 : Wiskunde II voor de vierde klas vwo
4/5 V 0 : Analyse voor de 4e of 5e klas vwo (verschijnt in januari 1972)
5/6 V 1 : Wiskunde I voor de vijfde en zesde klas vwo, deel 1 (verschijnt in mei)
5/6 V 2 : Wiskunde I voor de vijfde en zesde klas vwo, deel 2 (verschijnt in mei)
5/6 V 3 : Wiskunde II voor de vijfde en zesde klas vwo, (verschijnt in februari 1972)

Uitgaven van **TJEENK WILLINK-NOORDUIJN**

verkoop

educaboek nv

culemborg

WISKUNDE IN WORDING

Nederlandse bewerking: W. den Hartog

Een van de belangrijkste kenmerken van de huidige ontwikkeling in het onderwijs is de nadruk op inzicht in plaats van feitenkennis.

De serie *Wiskunde in wording* bedoelt het inzicht in de wiskunde te bevorderen.

Hoewel deze serie in eerste instantie gebruikt zal worden in de hoogste klassen van het basisonderwijs, zal zij ook in de laagste klassen van het voortgezet onderwijs dienst kunnen doen.

De serie *Wiskunde in wording* (van oorsprong een Longmans uitgave) bestaat uit twaalf deeltjes en één handleiding.

Titels van de deeltjes:

Stuart E. Bell

1. Mozaïek, oppervlakte en omtrek
2. Talstelsels
3. Veelhoeken en veelvlakken
4. Hoeken
5. Kromme lijnen
6. Kaarten en plattegronden
7. Transformaties
8. Topologie
9. Getallen
10. Relaties

G. Long en K.A. Hides

11. Grafieken
- Irene Campbell**
12. Statistiek



Wiskunde in wording wordt uitgegeven door

MALMBERG 's-HERTOGENBOSCH

Postbus 233 telefoon (04100)-23311

Didactische oriëntatie wiskunde- leraren

In de afgelopen jaren hebben in het wiskunde-
onderwijs grote veranderingen plaatsgevonden:
nieuwe leermiddelen, nieuwe leermethoden,
nieuwe programma's.

Deze recente ontwikkelingen worden op
uitvoerige wijze belicht in de volledig herziene
edities van de delen 1 en 2 van

Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren
onder redactie van
dr. Joh. H. Wansink

Deel 1, 2e druk, 340 pagina's, gebonden f 28,50
ISBN 90 01 93765 9
Met een bijdrage van J. Timmer over
studietoetsen.

Deel 2, 2e druk, 464 pagina's gebonden f 39,50
ISBN 90 01 93766 7
Met bijdragen van G. Krooshof over Moderne
Wiskunde,
dr. P. M. van Hiele over Van A tot Z,
dr. R. Holvoet over Papy.

Deel 3, 398 pagina's gebonden f 32,50
ISBN 90 01 93767 5
Met bijdragen van tien prominente wiskundigen
en didactici.

Onmisbaar voor een ieder die wiskundeleraar is,
of dit wil worden. Meer gedetailleerde informatie
vindt u in ons uitgebreid prospectus, dat u op
aanvraag kan worden toegezonden.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij
Wolters-Noordhoff, postbus 567, Groningen.
Vermeldt bij bestellingen steeds titel, auteur en
ISBN.



Wolters-Noordhoff

244 59 50/607

Een nieuw hulpmiddel bij uw wiskunde-les



CONSTRUCTIERIETJES VOOR WISKUNDE-ONDERWIJS

Het materiaal uit de hierboven afgebeelde doos is voor vele doeleinden geschikt. Toepassingsmogelijkheden zijn o.a.: tellen, rekenkundige bewerkingen, plaatswaarden, symmetrie, vormen, hoeken, omtrek, veelhoeken, tegelpatronen, topologie en ruimtemodellen.

Prijs per doos: f 59,50 (bestelnr. 7365)

Achtergrondliteratuur:

Verkenning van de ruimte en praktisch meten door Z.P. Dienes en E.W. Golding

Dit boek is het derde deel uit de serie: De eerste stappen in de wiskunde, welke serie op zijn beurt deel uitmaakt van de reeks: Wiskunde-paperbacks, onder redactie van drs. B. van der Krogt.

(Prijs van deze paperback f 5,25: bij 20 ex. f 4,75)

Presentexemplaren zijn niet beschikbaar.



**Elementair
wiskundig rekenen
voor basisscholen**

van gorcum
Assen/Amsterdam

INHOUD

Prof. Dr. O. Bottema 70 jaar 121

Ten geleide 122

G. Krooshof: Relaties 124

Joh. H. Wansink: De inrichting van de vakbibliotheek voor wiskunde op elke school 131

Hans Freudenthal: Kanttekeningen bij de nomenclatuur 139

P. G. J. Vredenduin: Antwoord aan Freudenthal 141

J. van Dormolen: Het bewijs door volledige inductie 147

Wiskundig Genootschap 153

Openingsrede van de voorzitter van de NVWL voor de vergadering van
16 oktober 1971 154

Didactische literatuur 158

Recreatie 159