



Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagei
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

47e jaargang

1971/1972

no 1

augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 15,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 15,—. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Tarieven: $\frac{1}{1}$ pag. f 130,—, $\frac{1}{2}$ pag. f 70,— en $\frac{1}{4}$ pag. f 40,—.

De familie der cos-achtigen

Drs. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest

1 In Euclides 42, p. 246 e.v., hield ik een pleidooi voor het introduceren van de functies $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met behulp van de opwindfunctie $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \{(x; y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

De bedoeling van dit artikel is het geven van voorbeelden van functies die op analoge manier kunnen worden gedefinieerd. Vandaar de naam van dit artikel.

2 De moeilijkheid van de opwindfunctie is dat hierbij de getallenlijn afgebeeld wordt op een kromme lijn en dat daarbij de lengte van een boog op die kromme lijn een rol speelt. Dergelijke booglengtes kun je niet op een primitieve manier meten met een maatlat, maar je moet ze door berekening te weten zien te komen.

Dit is een voorbeeld van een probleem dat wij in ons onderwijs vaker tegenkomen. De vraag naar de oplossing van een deelprobleem, in dit geval de lengte van een boog, vertroebelt het wezenlijke probleem, zoals hier de introductie van de goniometrische functies.

In zo'n geval kan de leraar kiezen uit een paar mogelijke strategieën. De eerste mogelijkheid is dat hij het wezenlijke probleem nog wat uitstelt en eerst zorgt dat zijn leerlingen voldoende vaardigheid en kennis hebben ten aanzien van het deelprobleem. Dat zou in dit geval een verlate introductie van de goniometrische functies inhouden, opdat eerst een degelijke kennis is aangebracht over de omtrek van een cirkel en de lengtes van bogen op die cirkel. Dit is wel een verstandige strategie, maar het nadeel is dat sommige belangrijke begrippen pas later aan de orde komen dan wenselijk zou kunnen zijn.

Een tweede mogelijkheid is dat het deelprobleem verdoezeld wordt en men zich tevreden stelt met een intuïtieve benadering. Zo zou men zich bij de opwindfunctie kunnen beperken tot de mededeling dat je met een meetlint gedeelten van de omtrek van een cirkelvormige schijf kunt meten. Deze strategie behoeft niet verwerpelijk te zijn. We doen iets dergelijks wel vaker, al hebben we er op formele gronden wel eens moeite mee.

Een derde mogelijkheid is het grotere probleem zodanig te vereenvoudigen, dat het deelprobleem niet meer optreedt. In plaats van de goniometrische func-

ties zou men dan andere functies kunnen behandelen die een analoge structuur hebben, maar die niet met behulp van een cirkel worden gedefinieerd, maar bijvoorbeeld met een vierkant (zie verder).

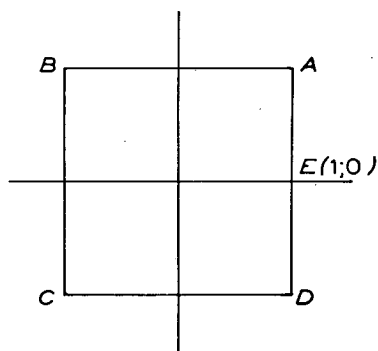
Het voordeel van een dergelijke strategie is dat men dergelijke functies (die ik hier cos-achtigen genoemd heb) al vrij vroeg kan introduceren. Men kan dan bepaalde interessante en belangrijke eigenschappen van die functies onderzoeken, zoals periodiciteit en de oplosbaarheid van $f(x) = y$ bij gegeven y .

Dat wil natuurlijk niet zeggen dat later niet de 'echte' cosinus behandeld zou moeten worden, al dan niet vooraf gegaan door een degelijke behandeling van de omtrek van de cirkel. Maar de leerlingen zullen in dat geval beschikken over zoiets als een referentiekader. De structuur van de functie cos kunnen ze snel herkennen.

Een bijkomende plezierige omstandigheid is, dat de cos-achtigen voorbeelden zijn van functies, die op een wat andere manier gedefinieerd worden dan de klassieke manier met behulp van een formule.

Het idee voor deze functie kreeg ik uit Johnson & Rising, *Guidelines for teaching mathematics*, p. 162-163 (1967, Belmont, Calif.).

3 Men kan bijvoorbeeld beginnen met een vierkant met hoekpunten $A(1; 1)$, $B(-1; 1)$, $C(-1; -1)$ en $D(1; -1)$. Het punt $(1; 0)$ noem ik E .



De opwindfunctie w wordt gedefinieerd als een functie van $\mathbb{R}$ op het vierkant door de getallenlijn als het ware op het vierkant op te winden. Daarbij komt het nulpunt van de getallenlijn op E . Met andere woorden: $E = w(0)$ is het beeldpunt van 0. Het positieve deel van de getallenlijn wordt tegenkloksgevijs op het vierkant gewonden en het negatieve deel met de klok mee. Zo zal bijvoorbeeld $C = w(5) = w(-3)$ zijn.

Nu kunnen we verschillende eigenschappen van w onderzoeken. De belangrijkste ervan is wel de periodiciteit:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{Z}} : w(x) = w(x + 8k)$$

Vervolgens kunnen de functies cov en siv gedefinieerd worden (cov en siv zijn samentrekkingen van cos en sin en van vierkant):

cov: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow \text{absis van } w(x)$

siv: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow \text{ordinaat van } w(x)$

Anders gezegd:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} : w(x) = (\text{cov}(x); \text{siv}(x))$$

Van deze functies zijn weer allerlei interessante eigenschappen te onderzoeken, zoals:

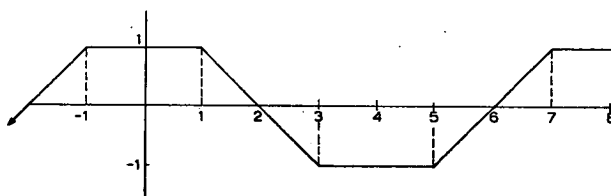
cov en siv zijn periodiek met periode 8;

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} : \text{cov}(x) = \text{cov}(-x);$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} : \text{siv}(4-x) = \text{siv}(x);$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} : \text{siv}(2-x) = \text{cov}(x); \quad \text{enz.}$$

Ook de grafieken zijn interessant. Bijvoorbeeld de grafiek van cov:

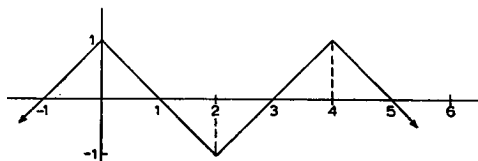


Opgave voor gevorderde lezertjes: definieer de functie tav en teken zijn grafiek.

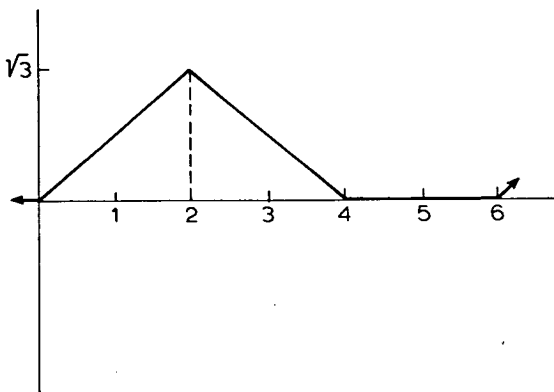
4 Soortgelijke functies kunnen worden bestudeerd door uit te gaan van andere grondfiguren.

Voorbeelden:

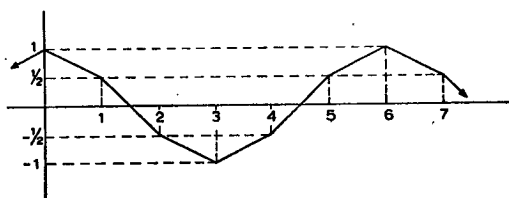
Bij de ruit met hoekpunten $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$ is te definiëren de functie cor:



Bij de driehoek met hoekpunten $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ kan men praten over de functie sid:



Als laatste voorbeeld, zij vermeld de functie $\cos$, die hoort bij een zeshoek met hoekpunten $(1; 0)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(-1; 0)$, $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3})$; $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.



5 De overgang naar de 'gewone' opwindfunctie en de daarbij behorende goniometrische functies geven nu geen bijzondere problemen. Door het volgen van de hier in het kort geschetste strategie heeft men de verschillende didactische moeilijkheden van elkaar gescheiden. Dat betekent dat niet in korte tijd veel nieuwe begrippen geleerd behoeven te worden.

6 De strategie is nog dusdanig aan te passen dat op natuurlijke wijze de omtrek van de eenheidscirkel verkregen wordt. Dit kan doordat men, na wat inleidende voorbeelden, achtereenvolgens de $\cos$ -achtigen op regelmatige drie-, vier-, vijf-, zes-, tien-, twintig-, dertighoeken laat onderzoeken. Deze veelhoeken moeten dan alle beschreven zijn in of om de eenheidscirkel en één van de hoekpunten in $(1, 0)$ hebben. Men krijgt dan als het ware de limiet van de omtrek van een regelmatige n -hoek (voor $n \rightarrow \infty$) cadeau, omdat steeds op de x -as de omtrek van die veelhoeken moet worden afgezet.

7 Ter voorkoming van misverstand: bovenstaande voorbeelden geven alleen maar een paar mogelijkheden die in de beschreven strategie passen. In de klas moet alles natuurlijk veel geleidelijker en ordelijker gebeuren.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

LXXXII Variaties over een formule.

Voor een viervlak $A_1 A_2 A_3 A_4$ waarvan de ribbe $A_i A_j$ de lengte a_{ij} ($= a_{ji}$) heeft en de inhoud V is geldt

$$F = 288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 1 & a_{31}^2 & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\ 1 & a_{41}^2 & a_{42}^2 & a_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (A)$$

welke symmetrische determinant van de *vijfde* orde de inhoud uitdrukt in de zes ribben. Zij is het analogon van de *s*-formule van Heron, die het kwadraat van de oppervlakte van een driehoek geeft als functie van de drie zijden. *A* wordt veelal bewezen door uit te gaan van de in de analytische meetkunde afgeleide determinant van de *vierde* orde voor de inhoud V van een viervlak waarvan de rechthoekige coördinaten der vier hoekpunten gegeven zijn en deze determinant te onderwerpen aan een bewerking waaraan het karakter van een kunstgreep niet vreemd is ¹).

Als men in *A* de tweede, de derde en de vierde rij elk vermindert met de vijfde, er daarna respectievelijk aftrekt de met a_{14}^2 , a_{24}^2 en a_{34}^2 vermenigvuldigde eerste rij en dan ontwikkelt naar de eerste en laatste kolom, dan komt er

$$F = \begin{vmatrix} 2a_{14}^2 & a_{14}^2 + a_{24}^2 - a_{12}^2 & a_{14}^2 + a_{34}^2 - a_{13}^2 \\ a_{24}^2 + a_{14}^2 - a_{21}^2 & 2a_{24}^2 & a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{23}^2 \\ a_{34}^2 + a_{14}^2 - a_{31}^2 & a_{34}^2 + a_{24}^2 - a_{32}^2 & 2a_{34}^2 \end{vmatrix}, \quad (B)$$

die het voordeel heeft F uit te drukken door middel van een (symmetrische) determinant van de *derde* orde. Behalve op de aangegeven wijze, uitgaande van *A*, kan men *B* ook rechtstreeks afleiden. Men heeft namelijk $V =$

¹ Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, II (Paris, 1931), p. 569.

$\frac{1}{6}a_{14}a_{24}a_{34}S_4$, waarbij S_4 de zogenaamde 'sinus' van de drievlakshoek $A_4(A_1A_2A_3)$ voorstelt, die men met de cosinusregel in de driehoeken $A_4A_2A_3$, $A_4A_3A_1$ en $A_4A_1A_2$ kan uitdrukken in de ribben. B mist de elegantie van A doordat aan één der hoekpunten nl. A_4 een bijzondere plaats is toegewezen; zij is dan ook niet uniek maar een van vier mogelijke gedaanten. Beter dan A is B geschikt om F expliciet als een veelterm in a_{ij}^2 te schrijven. Mede in verband met wat gaat volgen, wijzigen wij de notatie: wij duiden de zijden van het grondvlak $A_1A_2A_3$ aan met $A_2A_3 = a$, $A_3A_1 = b$, $A_1A_2 = c$ en hun overstaande ribben A_1A_4 , A_2A_4 en A_3A_4 met a_1 , b_1 , c_1 . Dan volgt uit B na enig rekenwerk:

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{2}F = & a^2a_1^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2-a^2+b^2+c^2)+ \\ & + b^2b_1^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2+a^2-b^2+c^2)+ \\ & + c^2c_1^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2+a^2+b^2-c^2)+ \\ & - a^2b_1^2c_1^2 - a_1^2b^2c_1^2 - a_1^2b_1^2c^2 - a^2b^2c^2. \end{aligned} \quad (C)$$

V^2 is daarmee bepaald als een veelterm van de zesde graad in de ribben; zij bevat 22 termen. Men kan de uitdrukking C zonder hulp van een determinant rechtstreeks afleiden; een niet al te veel werk eisende methode is afkomstig van Neuberg²).

De vorm C zal het uitgangspunt zijn voor een verdere variatie over ons thema. Wat opvalt is dat de eerste drie groepen van termen niet veranderen als men elke ribbe door haar overstaande vervangt. Met de laatste vier termen is dat echter niet het geval; met name komt een term $a_1^2b_1^2c_1^2$ niet, maar $a^2b^2c^2$ wel voor. G is de derde graad in de kwadraten der zes ribben; in a^2 , b^2 , c^2 is zij van de derde, maar in a_1^2 , b_1^2 , c_1^2 van de tweede graad. Het is deze kwadratische functie die wij beogen nader te bespreken daarbij de zijden a , b , c van het grondvlak als constanten beschouwend. Het onverwacht gunstige verloop van haar reductie tot de normaalvorm was de voornaamste aanleiding tot dit opstel. Wij voeren de volgende afkortingen in

$$x = aa_1^2, \quad y = bb_1^2, \quad c = cc_1^2, \quad w = abc \quad (1)$$

en krijgen, na herhaalde toepassing van de cosinusregel in $A_1A_2A_3$ waarvan wij de hoeken met α , β , γ aanduiden,

$$\begin{aligned} G = & -x^2 - y^2 - z^2 - w^2 + \\ & + 2(xw + yz)\cos \alpha + 2(yw + zx)\cos \beta + 2(zw + xy)\cos \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

² Zie b.v. J. Versluys, Handboek der Stereometrie, (Amsterdam, 1911), p. 127-129; vgl. ook Couderc et Balliccioni, Premier Livre du tétraèdre, (Paris, 1935), p. 103-106, 110-116.

De bij deze kwadratische functie behorende coëfficiëntenmatrix is

$$M = \begin{vmatrix} -1 & \cos \gamma & \cos \beta & \cos \alpha \\ \cos \gamma & -1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha & -1 & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & -1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Om G in haar normaalvorm te brengen, moeten de eigenwaarden van M worden bepaald, dus de wortels van de karakteristieke vergelijking $|M - \lambda J| = 0$, waarin J de eenheidsmatrix aangeeft. De minoren van de termen in de hoofd-diagonaal van M zijn alle vier gelijk aan nul op grond van de tussen $\cos \alpha$, $\cos \beta$ en $\cos \gamma$ bestaande relatie. De coëfficiënten van λ^4 , λ^3 en λ^2 kunnen gemakkelijk worden bepaald; de bekende term, de determinantwaarde D van M , kost wat meer moeite maar geeft eveneens een eenvoudig resultaat, namelijk

$$\begin{aligned} D &= (-1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)(-1 + \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma) \\ &\quad (-1 - \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma)(-1 - \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma) \\ &= -4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \end{aligned} \quad (4)$$

Wij verkrijgen de volgende karakteristieke vergelijking

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)\lambda^2 + D = 0. \quad (5)$$

Om de wortels te bepalen kan men uiteraard de algemene methodes toepassen ter oplossing van een vierdegraadsvergelijking, een bewerkelijk procédé. Bedenkt men dat drie van de wortels door cyclische verwisseling van α, β, γ uit elkaar zullen volgen en de vierde symmetrisch zal moeten zijn, dan kan men gezien de som en het product der wortels, tot het volgende vermoeden komen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma = -4 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma \\ &= -r_a/R \\ \lambda_2 &= -1 - \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = -4 \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma \\ &= -r_b/R \\ \lambda_3 &= -1 - \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = -4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \\ &= -r_c/R \\ \lambda_4 &= -1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \\ &= r/R, \end{aligned} \quad (6)$$

waarbij R de straal van de omgeschreven, r die van de ingeschreven en r_a, r_b en r_c die van de aangeschreven cirkels van de driehoek $A_1 A_2 A_3$ voorstellen. Het vermoeden wordt bevestigd door te verifiëren dat niet alleen $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ en $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ maar ook $\sum \lambda_1 \lambda_2$ en $\sum \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ de door (5) voorgeschreven uitkomsten geven. Door de respectievelijke wortels λ_i in de karakteristieke

matrix te substitueren kan men de bijbehorende eigenvectoren bepalen. De berekening verloopt voorspoedig; men vindt achtereenvolgens $(1, -1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$ en $(1, 1, 1, 1)$. Daaruit volgt weer dat G door de (involutorische) transformatie

$$\begin{aligned} 2x &= x_1 - y_1 - z_1 + w_1 \\ 2y &= -x_1 + y_1 - z_1 + w_1 \\ 2z &= -x_1 - y_1 + z_1 + w_1 \\ 2w &= x_1 + y_1 + z_1 + w_1 \end{aligned} \quad (7)$$

overgaat in de normaalvorm, namelijk

$$G = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \lambda_4 w_1^2, \quad (8)$$

of wel

$$\begin{aligned} 4G &= \lambda_1 (x - y - z + w)^2 + \lambda_2 (-x + y - z + w)^2 \\ &+ \lambda_3 (-x - y + z + w)^2 + \lambda_4 (x + y + z + w)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Wij krijgen dus tenslotte de volgende formule voor de inhoud van het viervlak

$$\begin{aligned} (24V)^2 R &= r(aa_1^2 + bb_1^2 + cc_1^2 + abc)^2 - r_a(aa_1^2 - bb_1^2 - cc_1^2 + abc)^2 \\ &- r_b(-aa_1^2 + bb_1^2 - cc_1^2 + abc)^2 - r_c(-aa_1^2 - bb_1^2 + cc_1^2 + abc)^2. \end{aligned} \quad (D)$$

Het resultaat geeft aanleiding om naast de bekende bijzondere viervlakken, het *gelijkvlakkige* ($a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$), het *orthocentrische* ($a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$) en het *harmonische* ($aa_1 = bb_1 = cc_1$), enige aandacht te vragen voor dat waarbij $a_1^2 = bc$, $b_1^2 = ca$, $c_1^2 = ab$. Het heeft in elk geval een eenvoudige inhoudsformule, namelijk

$$(24V)^2 R = 16a^2 b^2 c^2 r \quad (10)$$

waaruit volgt dat voor de hoogte h geldt

$$h^2 = \frac{abc}{s} = 4Rr. \quad (11)$$

Huiswerk

Naar aanleiding van de rubriek 'Huiswerk' ¹⁾ in Euclides graag het volgende: Het is m.i. niet nodig, dat voor leerlingen het begrip 'groep' slechts een naam blijft voor een verzameling met zekere eigenschappen. Dat groep een wiskundige structuur is kan misschien, althans voor de meetkunde, duidelijk gemaakt worden op de volgende manier.

In de 'toelichting op het leerplan Wiskunde' (april 1968) wordt als definitie van congruente figuren gegeven: twee figuren zijn congruent als het mogelijk is de ene in de andere te doen overgaan door een translatie, rotatie, spiegeling of enkele van deze transformaties na elkaar uitgevoerd.

Als we één der genoemde transformaties of een produkt van twee of meer in het vervolg een transformatie noemen, dan zijn dus twee figuren A en B congruent als er een transformatie T is zodat $B = TA$. Op deze manier wordt een nauwkeurige definitie gegeven van wat bedoeld wordt als men (op een aanschouwelijke manier) zegt: twee figuren zijn congruent als de ene door beweging precies op de andere gelegd kan worden.

We gaan nu na of de verzameling V van de bovengenoemde transformaties aan de eisen van het aanschouwelijke begrip voldoet.

1 Uit het aanschouwelijke begrip congruentie volgt, dat een figuur congruent is met zichzelf. Dus V behoort een transformatie I te bevatten zodat $A = IA$ voor iedere A van V . Is T nu een willekeurige transformatie van V en is $B = TA$ dan is $IB = ITA$ of $B = ITA$, dus $T = IT$. Dus V behoort een eenheids element te bevatten. Dit is inderdaad het geval.

2 Het zal de leerling intuïtief duidelijk zijn, dat als A congruent is met B ook noodzakelijk moet gelden dat B congruent is met A . Dus als $B = TA$, dan is noodzakelijk dat er een T' is, zodat $A = T'B$ of $A = T'TA$, dus $T'T = I$, d.w.z. aan de verzameling V moet de eis gesteld worden, dat ieder element een inverse heeft. V voldoet aan deze eis.

3 Ook is aanschouwelijk duidelijk: Als figuur A figuur B kan bedekken en figuur B figuur C kan bedekken, dan kan figuur A figuur C bedekken, d.w.z. als $B = TA$ en $C = UB$ dan is er een transformatie W zodat $C = WA$. Hieruit volgt $W = UT$. De verzameling V behoort gesloten te zijn t.o.v. de produktvorming, wat eveneens het geval is.

Uit het aanschouwelijke begrip congruentie volgen dus de bovengenoemde drie belangrijke groepeigenschappen. Dat de associatieve eigenschap moet gelden is hieruit niet af te leiden. Maar daar elke verzameling transformaties deze eigenschap heeft, kan volstaan worden met aan de leerlingen mee te delen, dat een verzameling transformaties, die de drie genoemde eigenschappen heeft een *transformatiegroep* wordt genoemd.

Dr. M. Dorleijn
Kampen

¹⁾ Zie Euclides 46, 7, p. 263 (maart 1971).

Werkstukken voor het vak wiskunde

J.P. ALDERSHOF

Bergum

In het rondschrijven van Inspectie-MAVO-verband/Afd. V.W.O.-A.V.O. Landelijke Pedagogische Centra (TOS/988/70/70.71) over het schoolonderzoek, midden september 1970 aan alle scholen gezonden, wordt als een mogelijke vorm genoemd een werkstuk met nabespreking (blz. 4 1.3).

De voordelen:

1. Aan speciale belangstelling van een kandidaat kan tegemoet gekomen worden door vrijheid in het kiezen van en zich verdiepen in een wiskundig onderwerp.
2. De mogelijkheid wordt geboden tot het verrichten van min of meer zelfstandig onderzoek, dat tevens wordt gehonoreerd.
3. Er ontstaat de mogelijkheid voor een kandidaat een correctie aan te brengen op zijn cijfer.

Nadeel:

Het maken van een werkstuk eist veel tijd.

Het was dus zaak tijdig te beginnen.

Nadat ik eerst de zaak met een collega wiskunde had besproken, werd het probleem aan de klas voorgelegd. Het enthousiasme was groot en alle leerlingen gaven zich in eerste instantie op. Pas daarna werd de regeling voor het schoolonderzoek op schrift gesteld. Alleen aan de 4e klas MAVO-IV werd de kans gegeven hieraan mee te doen. De examenklas MAVO-III is m.i. minder geschikt omdat:

1. Het programma beperkter is.
2. Het probleem 'tijd' een veel grotere rol speelt (Nu al moet in grote haast het programma doorgewerkt worden).

Uit de 3e klas MAVO-III is geen enkele reactie gekomen, b.v. in de geest van waarom zij wel en wij niet.

Eind september werd de kandidaten de regeling van het schoolonderzoek bekend gemaakt. Wat wiskunde betreft, vermeldt deze:

Drie schriftelijke tentamens (28/10, 20/1 en 7/4) over de onderwerpen genoemd in het definitieve programma MAVO-IV. Als punt 4: 'Tentamen IV (vrijblijvend). Werkstuk met nabespreking. Iedere kandidaat wordt *vrijgelaten* zich al dan niet aan deze vorm van schoolonderzoek te onderwerpen. Ook een aanvankelijke opgave is *niet bindend*.

Als onderwerp van een werkstuk moet gekozen worden uit de stof van het examenprogramma. De nabespreking bestaat uit een korte inleiding of toelichting van de betreffende leerling en het beantwoorden van vragen gesteld door leraar en

medeleerlingen. De correctie geschiedt door de leraar en een collega wiskunde. Het werkstuk moet ingeleverd worden vóór 19 januari 1971. Werkstukken na deze datum ingeleverd worden buiten beschouwing gelaten. Kandidaten, die hun werkstukken tijdig hebben ingeleverd, kunnen na afloop van alle tentamens of het cijfer over werkstuk met nabespreking of een cijfer van één van de andere tentamens naar eigen keuze buiten beschouwing doen laten.

Opmerking. Het maken van een wiskundewerkstuk mag nooit ten koste gaan van de tijd, die besteed wordt aan andere vakken.

Schema van nabespreking: (Als een leerling zich niet aan deze vorm heeft willen onderwerpen, wordt in de voor hem/haar beschikbaar gestelde tijd les gegeven).

wo – 27 jan	de nummers:	2– 3– 9
wo – 10 febr.		10–14–16
wo – 17 febr.		27–18–20
wo – 24 febr.		24–25–26
wo – 3 mrt.		17–32–33
wo – 10 mrt.		34–35.

Bij het vaststellen van de cijfers wordt aan elk tentamen eenzelfde gewicht toegekend.

Nr. 34 trok zich later terug; 16 leerlingen leverden 18 januari een werkstuk in.

Opm.: Een zinsnede uit bovenstaande laat ik dit jaar vervallen n.l.: als onderwerp moet uit de stof van het examenprogramma gekozen worden.

Elke leerling kreeg een lijst van boeken. Tevens werden in het huiswerkschrift de volgende 'eisen' geschreven:

1. Nethheid – goed geschreven – denk om taalfouten – keurige tekeningen met potlood ev. kleur.
2. Het raadplegen van boeken is toegestaan.
3. Het letterlijk overnemen van een gedeelte van een boek *beslist niet*; het met eigen woorden navertellen wel.
4. Het overnemen / natekenen van een tekening / figuur, al dan niet gewijzigd, uit een boek is toegestaan, mits bij de tekening vermeldt staat: titel boek + blz.
5. Elk werkstuk moet een duidelijke titel hebben en moet zich daartoe beperken.
6. Elk werkstuk vermeldt als slot een lijstje van de gebruikte boeken.

Opm: Het maken van groepswerk heb ik niet aangeraden. De moeilijkheden bij de beoordeling leken mij erg groot.

Tijdens de twee lesuren op woensdagmorgen gaf ik de gelegenheid vragen te stellen over moeilijkheden. Ik gaf enkele aanwijzingen, verwees naar een boek, gaf wat suggesties.

Meestal kostte dit slechts 15 à 20 minuten. Van begin oktober tot aan de kerstvakantie heb ik de leerlingen tweemaal in de gelegenheid gesteld het ontwerp of het begin van hun werkstuk ter voorlopige beoordeling aan mij voor te leggen.

Slechts enkele leerlingen hebben dat gedaan.

De beoordeling beperkte zich tot het aanstrepen van taalfouten en het geven van een enkele aanwijzing (met potlood).

Een grote handicap voor de leerlingen was de beperkte hoeveelheid boeken, die op school aanwezig is. Het opvragen van een boek via de leeszaal duurde vaak erg lang.

18 januari werden dus 16 werkstukken ingeleverd met de volgende onderwerpen:

- a. Statistiek (5x)
- b. Pythagoras (6x)
- c. Verzamelingen (1x)
- d. Drie-dimensionale figuren (1x)
- e. Kwadratische functies (1x)
- f. Goniometrie (1x)
- g. Grafieken (1x)

Onafhankelijk van elkaar werden de werkstukken door een collega en door mij beoordeeld (een tijdrovende bezigheid).

Tenminste één week voor hun nabespreking ontvingen de leerlingen alleen hun werk terug. Mijn aantekeningen konden ze na hun bespreking even inzien. Hoe verliep zo'n nabespreking?

Voorbeeld van werkstuk Goniometrie.

1. 'Je hebt een eenvoudige sextant gemaakt. Hoe werkt dat apparaat? Geef eens een voorbeeld.
2. Leg eens uit hoe jij aan de sinus komt.
3. Idem cosinus.
4. Wat betekent het woord cosinus?
5. Welke formule drukt dit uit?
6. Welke overeenkomst is er tussen een sin- en een cos-tabel?
7. Driehoek met $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. Vertel iets van deze driehoek.
8. Waarvoor dient de eenheidscirkel?
9. Leg eens uit hoe je aan de tabel van de landmeter komt. (suggestie van mij: een kwadrant van 100° . Maak zo'n tabel ook eens).
10. Teken de grafieken voor $\sin x - \cos x - \operatorname{tg} x$. Wat is de $\cotg x$?
11. Geef eens een voorbeeld van een hoogteberekening.
12. Bewijs: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
13. Hoe luidt de afstandsformule?
14. Welke eigenschap bewijs je er mee?
15. Wanneer gebruik je de sinusregel?
16. Idem cos-regel.
17. Bewijs de oppervlakteformule.

De klas is er bij aanwezig en beoordeelt de juistheid van de antwoorden. Een enkele keer komt een leerling met een vraag. Nu verliep deze nabespreking uiterst vlot en goed, maar als er onjuistheden beweerd werden, liet ik de klas beslissen, waarbij ik zorgvuldig trachtte de klas te laten aanvoelen wanneer een werkstuk als voldoende of onvoldoende moest worden gekwalificeerd. Dit goniowerkstuk werd

een 9, een statistiek-werkstuk een 4. Voordat het vonnis 4 viel, resumeerde ik nog even kort enkele kardinale fouten, evenzo de goede dingen voor de 9 viel.

In het algemeen verliep het cijfer-geven goed en in volledige overeenstemming met de klas.

De beoordeling is geworden:

- a. 4-6-7-7-7
- b. 6-6-7-7-6½-5
- c. 7
- d. 6
- e. 5
- f. 9
- g. 6½

De werkstukken zijn alle ingeleverd. Elk tentamen moet ingeleverd worden, dus dit ook. Een werkstuk maken is zinvol, zolang de handel er in niet mogelijk is.

In klas 3 Mavo-IV is ter voorbereiding van het werkstuk van de examenklas een proefwerkstuk gemaakt. Een nabespreking is hier nog achterwege gebleven.

Gekozen onderwerpen: Pythagoras (4x), verzamelingen (2x), verzamelingen en relaties (1x), statistiek (6x), de lange weg van 0 naar 1. Dit laatste was het beste en origineelste.

Nog een paar losse opmerkingen:

- a. Eigen vondsten worden hoger gewaardeerd dan overgenomen gedeelten, ook al is het wiskundig peil minder hoog.
- b. Algemene verzorging telde mee.
- c. Bij de nabespreking moeten onderdelen van het examenprogramma zonder hulp van het werkstuk gereproduceerd kunnen worden.
- d. Onderwerpen die niet tot het examenprogramma behoren, mogen besproken worden met het werkstuk erbij.

EXTREEM DICHT MATERIE IN HET HEELAL

Witte dwergen, neutronen sterren en pulsars

Het boekje met de tekst van de voordrachten die in januari en februari 1971 te Utrecht gehouden werden in de Colleges Sterrekunde voor Afgestudeerden is thans verschenen en aan de deelnemers toegezonden.

Belangstellenden kunnen zich eveneens van toezending verzekeren door storting van f 3,— op gironummer 2900 van de AMRO Bank N.V. te Utrecht, onder vermelding van nummer 40205 t.n.v. Prof. Dr. C. de Jager.

C. de Jager

De Eindexamens 1971

In dit jaar werden voor het eerst examens afgenomen aan atheneae en gymnasia in de nieuwe stijl (dus vwo-examens). Het wiskundeprogramma is daarbij nog een overgangsprogramma (wiskunde I en II). Aan een aantal van deze scholen werd deelgenomen aan een experiment wiskunde I. De drie stellen opgaven zijn hieronder afgedrukt.

Ook aan sommige hogere burgerscholen en 'oude' gymnasia werd met een afwijkend wiskundeprogramma gewerkt. Voor de algebra werd daarbij analyse of statistiek onderwezen; daarom vindt u hierna twee stellen experimenteel-algebraopgaven. De stereometrie en analytische meetkundeopgaven betreffen vraagstukken uit de vectormetkunde. Ze zijn alle gemerkt 'hbs'.

Het havo-examen voor wiskunde is er in twee soorten: een overgangsprogramma en een experimentenprogram.

De lange rij opgaven wordt tenslotte gesloten door die van de mavo-examens, waarbij we voor mavo-4 alleen de serie B (modern) namen.

Wiskunde I – VWO (3 uur)

1. De functies f en g zijn voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gegeven door $f(x) = x + 2 \cos x$ en $g(x) = x - 2 \sin x + k$ waarin k een constante is.

- Bereken voor $k = 2$ de uiterste waarden van $g(x)$.
Ga na van welke aard deze uiterste waarden zijn.
- Teken voor $k = 2$ de grafiek van g .
- Voor welke waarden van k raken de grafieken van f en g elkaar?

2. De functies f en g zijn gedefinieerd door

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} \text{ en } g(x) = (4x + 2) \cdot e^{-x}.$$

- Los op de ongelijkheid $f(x) > g(x)$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B .
- Bewijs dat de punten A en B buigpunten van de grafiek van f zijn.
- Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel dat begrensd wordt door de bogen AB van de grafieken van f en g .

3. De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = x + 2$ en

$$g(x) = \frac{x^2 + px + 3}{x + 2} \text{ waarin } p \text{ een constante is.}$$

- Voor welke waarden van p heeft de functie g geen uiterste waarden?
De grafiek van f is asymptoot van de grafiek van g .
- Bereken p .
- Los op de ongelijkheid $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{100}$.

4. Van een rij $t_1, t_2, t_3, \dots$ is gegeven dat voor elk positief geheel getal k geldt dat $at_{k+1} + bt_k + c = 0$ waarin a, b en c constanten zijn en waarbij $a > 0$ en $b \neq 0$ is.

- Gegeven is dat de rij een rekenkundige rij is.
Aan welke voorwaarden voldoen a, b en c ?
- Gegeven is dat de rij een sommeerbare meetkundige rij is met som s waarvoor geldt dat $0 < s < 2$.
Aan welke voorwaarden voldoen a, b en c ?
Tussen welke grenzen, uitgedrukt in a, b en c , ligt t_1 ?

Wiskunde II – VWO (3 uur)

1. Van een vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 8. De ribbe TA staat loodrecht op het grondvlak en $TA = 8$.
Op het verlengde van de ribbe AB ligt een punt P zo dat $BP = 4$.
Punt Q is het midden van de ribbe TD .
De omgeschreven cirkel van vierkant $ABCD$ is grondcirkel van een rechte kegel waarvan de top M op de ribbe TC ligt.
 - a. Bereken de verhouding van de stukken waarin de ribbe BT verdeeld wordt door het raakvlak in A aan de kegel.
 - b. Construeer in een stereometrische figuur van de piramide de snijpunten van de lijn PQ met de kegel.
2. XOY is een rechthoekig assenstelsel.
Een verzameling hyperbolen is gegeven door de vergelijking.
$$x^2 - y^2 - 6px + 2py = 0 \text{ waarin } p \neq 0 \text{ is.}$$
 - a. Stel een vergelijking op van de verzameling van de brandpunten van deze hyperbolen. Teken deze verzameling.
 - b. De lijn met vergelijking $3x - y - 8 = 0$ heeft ten opzichte van elke hyperbool een pool. Stel een vergelijking op van de verzameling van deze polen. Teken deze verzameling.
3. Van een kubus $ABCD.EFGH$ is de ribbe 8.
Punt P is het midden van de ribbe AB .
Het lijnstuk GP is middellijn van een bol.
 - a. Bewijs dat deze bol vlak $ADHE$ raakt.
 - b. Construeer in een stereometrische figuur van de kubus het middelpunt van de snijcirkel van de bol met vlak AFH .
 - c. Bereken de straal van de cirkel gevormd door de raakpunten van de raaklijnen door E aan de bol.
4. XOY is een rechthoekig assenstelsel.
Een verzameling V van parabolen is gegeven door de vergelijking
$$y^2 - 2y - 2px - p^2 = 0 \text{ waarin } p > 0 \text{ is.}$$
 - a. Hoeveel parabolen uit V gaan door het punt $(-3, 2)$?
 - b. Gevraagd de verzameling van de punten van het vlak waardoor twee parabolen uit V gaan.
Geef deze verzameling aan ten opzichte van het assenstelsel.
 - c. Op elke parabool uit V ligt een punt K zo dat de raaklijn in K aan die parabool de richtingscoëfficiënt 1 heeft.
Stel een vergelijking op van de verzameling van de punten K .
Teken deze verzameling.

Wiskunde I (experiment) – VWO (3 uur)

1. De functies f en g zijn voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gegeven door
$$f: x \rightarrow x + 2 \cos x \text{ en } g: x \rightarrow x - 2 \sin x + k \text{ waarin } k \text{ een constante is.}$$

- a. Bereken voor $k = 2$ de uiterste waarden van $g(x)$.
Ga na van welke aard deze uiterste waarden zijn.
 - b. Teken voor $k = 2$ de grafiek van g .
 - c. Voor welke waarden van k raken de grafieken van f en g elkaar?
2. Gegeven is de differentiaalvergelijking $2(1 + y^2)x \cdot dx - (1 + x^2) \cdot dy = 0$.
- a. Gevraagd de verzameling van de punten waarin deze differentiaalvergelijking een lijnelement definieert dat evenwijdig aan de X -as is.
Gevraagd de verzameling van de punten waarin deze differentiaalvergelijking een lijnelement definieert dat evenwijdig aan de Y -as is.
 - b. Beschouw de lijnelementen die door deze differentiaalvergelijking in de punten van de X -as worden gedefinieerd.
Gevraagd de verzameling van de waarden van de richtingscoëfficiënten van deze lijnelementen.
 - c. Los de differentiaalvergelijking op.
3. De functies f en g zijn gegeven door $f: x \rightarrow x + 2$ en
 $g: x \rightarrow \frac{x^2 + px + 3}{x + 2}$ waarin p een constante is.
- a. Voor welke waarden van p heeft de functie g geen uiterste waarden?
De grafiek van f is asymptoot van de grafiek van g .
 - b. Bereken p .
 - c. Los op de ongelijkheid $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{100}$.
4. De functie f is gedefinieerd door $f: x \rightarrow x \cdot e^{2-x}$.
- a. Onderzoek of $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ bestaan.
- Teken de grafiek van f .
- b. Druk de oppervlakte O van het gesloten vlakdeel dat begrensd wordt door de grafiek van f , de X -as en de lijn met vergelijking $x = p$ waarin $p > 0$ is, uit in p .
 - c. Bereken $\lim_{p \rightarrow +\infty} O$.

Algebra (experiment) – HBS ($2\frac{1}{2}$ uur)

1. a. Beschouw voor $0 \leq x \leq \pi$ de functie $f: x \rightarrow x \sin x$.
Bereken de oppervlakte van de gesloten figuur begrensd door de grafiek van f en de X -as.
- b. De kromme K heeft ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY de vergelijking $x^2 + y^2 + xy + x + y = 1$.
In welke punten van K is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan -1 ?
- c. Van een differentieerbare functie f is gegeven dat de grafiek van f symmetrisch is ten opzichte van de lijn door de oorsprong O , loodrecht op de X -as.
Bewijs dat voor elke x geldt $f'(x) + f'(-x) = 0$.

2. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY stelt K_n voor elke gehele positieve waarde van n de kromme voor met vergelijking

$$y^n = x^n \ln x.$$

De verzameling van deze krommen is V .

- Bewijs dat geen enkele raaklijn aan K_2 door O gaat.
 - Bewijs dat elke kromme uit V precies één punt gemeen heeft met de lijn met vergelijking $y = x$.
 - Bewijs dat alle krommen uit V door de punten $A(e, e)$ en $B(1, 0)$ gaan en dat er verder geen enkel punt is waar alle krommen door gaan.
 - Slechts in één van de punten A en B hebben alle krommen uit V , op één uitzondering na, dezelfde raaklijn. Bewijs dit.
Welke is de gemeenschappelijke raaklijn en welke kromme is de ene uitzondering?
3. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is de kromme K bepaald door de parametervoorstelling

$$x = \frac{t^2 - 4}{2t - 5} \text{ en } y = 1 + \sqrt{t}$$

- Welke waarden neemt x aan?
- In welke punten van de kromme K staat de raaklijn loodrecht op de X -as?
- Onderzoek welk asymptoot K heeft.
- Teken de kromme K .

Algebra (experiment) – HBS ($2\frac{1}{2}$ uur)

1. De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = \sqrt{(2x - p)} \text{ en } g(x) = qx^2 + r.$$

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt $A(3, 1)$.

- Bewijs dat $p = 5$, $q = \frac{1}{6}$ en $r = -\frac{1}{2}$ is.
 - Door de X -as en de grafieken van f en g wordt een vlakdeel V ingesloten. Bereken de oppervlakte van V .
2. Gegeven is de betrekking $x^2 - 2xy + y^2 - x + 1 = 0$.
- Bij welke waarde van y behoren twee waarden van x die 3 verschillen?
 - Als bovendien gegeven is dat $y - x - 2 \geq 0$, welke waarden kunnen x en y dan aannemen?
 - Bereken het minimum van $x + y$.
3. Op zes kaarten staan respectievelijk de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 (dus op iedere kaart juist één getal).
Men trekt hieruit aselekt een tweetal kaarten.
De stochastische variabele X voegt aan ieder tweetal toe de som van de op deze twee kaarten voorkomende getallen.

- a. Maak een tabel van de mogelijke waarden van X en hun bijbehorende kansen.
Laat zien dat $P(X \leq 6) = 0,4$.
- b. Bereken de verwachting en de variantie van X .
- c. Men voert het experiment 10 maal uit.
Bereken de kans dat het resultaat $X \leq 6$ ten minste zes maal optreedt.
4. In een doos bevinden zich vijf lootjes genummerd 1, 2, 3, 4, 5.
Men trekt aselekt drie lootjes uit de doos zonder teruglegging.
De stochastische variabele X voegt aan zo'n drietal toe het grootste van de op de drie lootjes voorkomende getallen.
- a. Gevraagd de kansverdeling van X .

Men trekt nu *met teruglegging* aselekt drie lootjes uit de doos.
De stochastische variabele Y voegt weer aan zo'n drietal toe het grootste van de op die lootjes voorkomende getallen.

- b. Bereken: $P(Y < 2)$; $P(Y < 3)$ en $P(Y = 3)$.
Bewijs dat $P(Y = k) = \frac{k^3 - (k-1)^3}{5^3}$, ($k = 1, 2, \dots, 5$)
- c. Bereken, met gebruikmaking van de onder b. afgeleide formule, de verwachting van Y .

Tabel van $10^3 \cdot b(x, n, p)$ voor $n = 10$ en voor verschillende waarden van p .

p	kans voor X gelijk aan										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1											1000
0,95							001	010	075	315	599
0,90						002	011	057	194	387	349
0,85					001	008	040	130	276	347	197
0,80				001	006	026	088	201	302	268	107
0,75				003	016	058	146	250	282	188	056
0,70			001	009	037	103	200	267	233	121	028
0,65		001	004	021	069	154	238	252	176	072	013
0,60		002	011	042	111	201	251	215	121	040	006
0,55		004	023	075	160	234	238	166	076	021	003
0,50	001	010	044	117	205	246	205	117	044	010	001
0,45	003	021	076	166	238	234	160	075	023	004	
0,40	006	040	121	215	251	201	111	042	011	002	
0,35	013	072	176	252	238	154	069	021	004	001	
0,30	028	121	233	267	200	103	037	009	001		
0,25	056	188	282	250	146	058	016	003			
0,20	107	268	302	201	088	026	006	001			
0,15	197	347	276	130	040	008	001				
0,10	349	387	194	057	011	002					
0,05	599	315	075	010	001						
0	1000										

De vermelde bedragen moeten door 1000 worden gedeeld.
Op de opengelaten plaatsen moet de cijfergroep 000 worden gedacht, die een kans kleiner dan 0,0005 aangeeft.

Stereometrie (experiment) – HBS ($2\frac{1}{2}$ uur)

In de vraagstukken 1, 2 en 3 hebben de gegevens betrekking op een positief georiënteerde en orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ van de ruimte.

1. Gegeven zijn de lijnen l , m en n met opvolgende de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a. Op de lijn n ligt een punt P dat gelijke afstanden tot l en m heeft.
Bereken de coördinaten van P .
- b. Van een lijn q is gegeven: q gaat door het punt $A = (2, 0, 0)$,
 q snijdt n en $\varphi(q; l) = \frac{\pi}{4}$.
Stel een vectorvoorstelling van q op.

2. Gegeven zijn de punten $A = (-1, 4, 0)$, $B = (6, 5, 0)$, $C = (0, 0, 2)$ en $D = (1, 3, 3)$ en

de lijn l met vectorvoorstelling
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Op de lijn l ligt een punt P zo dat $AC \perp BP$.
Bereken de coördinaten van P .
- b. Op de lijn l ligt een punt Q zo dat de inhoud van het viervlak $ABCQ$ tweemaal zo groot is als de inhoud van het viervlak $ABCD$.
Bereken de coördinaten van Q .

3. Gegeven zijn de punten $P = (0, 5, 0)$, $Q = (0, 3, 4)$, $R = (2, 5, 0)$ en

de lijn l met vectorvoorstelling
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a. Een bol B_1 gaat door de punten P , Q en R en heeft een straal die minimaal is.
Stel een vergelijking van B_1 op.
- b. Een bol B_2 gaat door de punten P , Q en R en snijdt van de lijn l een koorde af met lengte $2\sqrt{2}$.
Stel een vergelijking van B_2 op.

4. Gegeven is het onafhankelijke stelsel vectoren $\left\{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\}$.

De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn de plaatsvectoren van respectievelijk de punten A , B en C .

De oorsprong is O .

De punten P , Q , R en S zijn respectievelijk de middens van de lijnstukken OA , AB , BC en OC .

- a. Bewijs dat de lijn door P en R en de lijn door Q en S elkaar snijden.
Druk de plaatsvector van dat snijpunt uit in $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.
- b. Bovendien is gegeven dat $d(O; A) = d(B; C)$.
Bewijs dat de lijn door Q en S gelijke hoeken maakt met de lijn door B en C en met de lijn door O en A .

Goniometrie en analytische meetkunde (experiment) – HBS (2 $\frac{1}{2}$ uur)

In de vraagstukken 1 en 2 hebben de gegevens betrekking op een orthonormale basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ van het vlak.

1. Gegeven zijn de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix},$

de lijn m met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

en het punt $P = (-3, 3).$

- a. Punt P is het midden van een lijnstuk AB waarbij punt A op l en punt B op m ligt.
Bereken de coördinaten van A en B .

- b. De lijnen l en m snijden elkaar in punt S .

Vierhoek $PQRS$ is een parallellogram waarbij punt Q op de drager van $\vec{e}_2$ en punt R op m ligt.

Bereken de oppervlakte van parallellogram $PQRS$.

2. Gegeven zijn de lijn a met vergelijking $3x_1 + x_2 = 0$,
de lijn b met vergelijking $x_1 + 3x_2 = 0$,
de lijn l met vergelijking $3x_1 - x_2 = 0$
en de cirkel C met vergelijking
 $x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 + 10 = 0.$

- a. Bewijs dat de lijnen a en b de cirkel C raken.

- b. Een lijn m gaat door de oorsprong O .

Eén van de bissectrices van de hoeken die de lijnen l en m vormen, raakt cirkel C .

Stel een vergelijking van m op.

3. Van de vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ is gegeven: $\varphi(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{3}\pi$ en $\|\vec{q}\| = 2\|\vec{p}\|$

- a. Bewijs dat het stelsel $\{\vec{p} + (\alpha - 1)\vec{q}, \vec{q} - \alpha\vec{p}\}$
onafhankelijk is voor elk reëel getal α

- b. Bewijs dat het stelsel $\{\vec{p}, \vec{q} - \vec{p}\}$ orthogonaal is.

- c. Bereken de waarden van α , waarvoor het stelsel
 $\{\vec{p} + (\alpha - 1)\vec{q}, \vec{q} - \alpha\vec{p}\}$ orthogonaal is.

4. De functie f is voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gedefinieerd door
 $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x.$

De functie g is voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gegeven door de afgeleide
 $g'(x) = -f(x)$ en door $g(0) = -f(0).$

- a. Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken in een punt waarvan de x -coördinaat π is.

- b. In welk interval zijn de functies f en g beide stijgend?

Wiskunde – HAVO (3 uur)

1. De functies f en g zijn gedefinieerd door
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 8 \text{ en } g(x) = x + 7.$$
 - a. Los op de ongelijkheid $f(x) > g(x)$.
 - b. Teken in één figuur de grafieken van f en g .
 - c. Op de grafiek van f ligt een punt P zo dat de lijn die de grafiek van f in het punt P raakt loodrecht staat op de grafiek van g .
Bereken de coördinaten van P .
2. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(2,0)$ en $B(0,4)$ en de lijn l met vergelijking $x - y = 0$.
 - a. Stel een vergelijking op van de parabool die door A en B gaat en waarvan de as samenvalt met de X -as.
 - b. Stel een vergelijking op van de cirkel die door A en B gaat en waarvan het middelpunt op l ligt.
3. De functies f en g zijn voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gegeven door
$$f(x) = \sin x \text{ en } g(x) = p + \cos x \text{ waarin } p > 0 \text{ is.}$$
 - a. De grafieken van f en g raken elkaar.
Bewijs dat hieruit volgt dat $p = \sqrt{2}$ en teken in één figuur de grafieken van deze functies.
 - b. Voor welke waarden van p hebben de grafieken van f en g twee verschillende punten gemeen?
4. Van een rij $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ is gegeven dat $t_n = (2^{\log x})^n$
 - a. Voor welke waarden van x is deze rij sommeerbaar?
 - b. Voor welke waarden van x is de som van deze sommeerbare rij kleiner dan 1?
5. Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is $AB = 8$ en $AT = 9$. Het midden van de ribbe AD is punt P en het midden van de ribbe CT is punt Q .
De diagonalen van het grondvlak snijden elkaar in punt R .
 - a. Construeer in een stereometrische figuur van de piramide het snijpunt S van de lijn RT en het vlak BPQ .
 - b. Bereken de inhoud van viervlak $BDQT$.
 - c. Bereken de afstand van de lijnen RT en BQ .
6. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de parabool met vergelijking $y^2 = x$ en de lijn l met vergelijking $x + y = 6$.
 - a. Bereken de coördinaten van de snijpunten A en B van l en de parabool.
 - b. Bereken de oppervlakte van driehoek ABO .
 - c. Bereken de coördinaten van de punten P gelegen op de parabool zo dat de oppervlakte van driehoek ABP gelijk is aan de oppervlakte van driehoek ABO .

Wiskunde (experiment) – HAVO (3 uur)

1. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven het punt $A(4, 2)$.

- Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt A die de X -as raakt.
- Stel een vergelijking op van de lijn t die deze cirkel raakt en die de X -as in O snijdt.
- Beschouw een lijnspiegeling met als as de lijn die $x = 4$ tot vergelijking heeft.
Stel een vergelijking op van het beeld van t bij die lijnspiegeling.

2. De functie f met domein R is gedefinieerd door $f(x) = 4 - \frac{5}{x^2 + 1}$

- In welk interval is f een stijgende functie?
- Bereken de nulpunten van f en de minimale waarde van $f(x)$.
- Wat is het bereik van de functie f ?
- Teken de grafiek van f .
Welke lijn is asymptoot van die grafiek?
- Stel een vergelijking op van de lijn die de grafiek van f raakt in het punt met x -coördinaat 2.

3. De functies f en g zijn op $\{x \in R \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$ gedefinieerd door

$$f(x) = 1 - \cos x \text{ en } g(x) = 1 + \sin 2x$$

- Bereken de uiterste waarden van deze functies.
- Los op de vergelijking $f(x) = g(x)$.
- Teken in één figuur de grafieken van f en g .
- Los op de ongelijkheid $f(x) > g(x)$.

4. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 1$ en de parabool p met vergelijking $y = x^2 - 2x - 3$.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten A en B van k en p .
- Stel een vergelijking op van de lijn die p raakt en die loodrecht staat op k .
Bereken de coördinaten van het raakpunt.
- Het punt C varieert op de parabool p tussen A en B .
Bereken de coördinaten van C in het geval dat de afstand van C tot k maximaal is.

5. Beschouw de functies $f: x \rightarrow {}^2\log(1+x)$ en $g: x \rightarrow \sqrt{4-x}$ die elk een zo groot mogelijke deelverzameling van R als domein hebben.

- Wat is het domein van f en wat is het domein van g ?
- De samengestelde functie $f \circ g$ is h .
Los op de ongelijkheid $h(x) < 1$.
- De inverse functie van h is k .
Los op de vergelijking $k(x) = -5$.

Wiskunde I – MAVO (1½ uur)

- Gegeven een vlieger $ABCD$, waarvan de diagonalen AC en BD elkaar in punt E snijden.
 $AE = BE = CE = 3$ en $DE = 4$.
 E wordt gespiegeld in CD ; het beeldpunt is F .
 - Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$.
 - Bereken de grootte van $\angle BAD$ in graden nauwkeurig.
 - Bereken de lengte van EF .
- $V = \{ (x, y) \mid 3x + 2y = 13 \}$ en $W = \{ (x, y) \mid px + y = 3 \}$, waarbij $x \in R, y \in R$ en $p \in R$.
 - Neem $p = -2$ en bereken $V \cap W$.
 - Teken een deel van de grafiek van V .
 Teken in dezelfde figuur de lijn door $(0, 3)$ die evenwijdig is met de grafiek van V .
 - Voor welke waarde van p is $V \cap W$ de lege verzameling?
- Bij een bedrijf telt men op vijftig achtereenvolgende werkdagen het aantal personen dat te laat komt.
 Het resultaat van de tellingen is:

aantal telaatkomers per dag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	2	5	9	9	11	7	4	2	1

 - Teken een histogram (staafdiagram) van deze resultaten.
 - Bepaal de modus.
 - Bepaal de mediaan.
 - Hoeveel personen komen gemiddeld te laat?
- Een functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2 - x - 2$,
 met $\{ x \in R \mid -3 \leq x \leq 3 \}$ als domein
 - Los op $f(x) = 0$.
 - Bereken de kleinste functiewaarde.
 - Teken de grafiek van f .
 - Door spiegeling in de X -as gaat de grafiek van f over in de grafiek van een functie g .
 Noem een functievoorschrift van g .
- Gegeven een balk $ABCD.EFGH$.
 $ABCD$ is een vierkant waarvan een zijde de lengte 6 heeft.
 De lengte van ribbe CG is $6\sqrt{2}$.
 - Bereken de lengte van de lichaamsdiagonaal AG .
 - De lichaamsdiagonalen AG en BH snijden elkaar in S .
 Bereken de grootte van $\angle ASB$.
 - Bereken de grootte van de hoek die de lichaamsdiagonalen AG en CE met elkaar maken.

Wiskunde II – MAVO 3 (1½ uur)

Bij elk van de volgende opgaven staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters a, b, c en d. Eén van de antwoorden is goed. Teken een kringetje om de letter van het goede antwoord.

1. Bij spiegeling in de X -as gevolgd door spiegeling in de Y -as is het beeld van (p, q)

a (p, q) b $(p, -q)$ c $(-p, q)$ d $(-p, -q)$

2. $x^2 - x - 2 = 0$ is gelijkwaardig met.

a $x = -2$ of $x = -1$ b $x = -1$ of $x = 2$ c $x = 1$ of $x = -2$ d $x = 2$ of $x = 1$

3. $V = \{ (x, y) \mid 3x + 2y = 7 \}$ en $W = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 7 \}$.

Als $V \cap W = \{ (p, q) \}$, dan geldt

a $p < 0$ en $q < 0$ b $p < 0$ en $q > 0$ c $p > 0$ en $q < 0$ d $p > 0$ en $q > 0$

4. Van vijftientig worpen met één dobbelsteen zijn de resultaten in onderstaande frequentietabel gegeven:

aantal ogen	1	2	3	4	5	6
aantal keer	7	5	4	0	0	9

De modus is a 0 b 3 c 6 d 9

5. De bewering $3(2x - \frac{1}{6}) - 2(3x - \frac{1}{6}) = 0$ is waar voor

a geen enkele waarde van x b precies één negatieve waarde van x
c precies één niet-negatieve waarde van x d alle waarden van x

6. Voor $x = p$ bereikt de functie $x \rightarrow x^2 - 4x + 3$ de uiterste functiewaarde q . Dan is

a $p = 0$ en $q = 3$ b $p = 1$ en $q = 0$ c $p = 2$ en $q = -1$ d $p = 3$ en $q = 0$

7. In een rechthoekige driehoek ABC is CD de hoogtelijn op de schuine zijde.

Als $CD : AC = 4 : 5$, dan is de cosinus van $\angle B$ gelijk aan

a $\frac{3}{5}$ b $\frac{3}{4}$ c $\frac{4}{5}$ d $\frac{5}{3}$

8. De middens van de zijden van driehoek ABC zijn de hoekpunten van driehoek PQR . De verhouding van de oppervlakten van $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ is

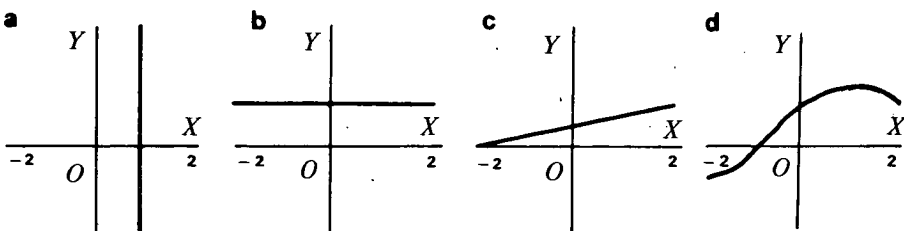
a 2 : 1 b 3 : 1 c 4 : 1 d 9 : 1

9. In R is de oplossingsverzameling van $-x - 3 > 3x - 1$

a $\{x \in R \mid x < -\frac{1}{2}\}$ b $\{x \in R \mid x > -\frac{1}{2}\}$ c $\{x \in R \mid x < 1\}$ d $\{x \in R \mid x > 1\}$

10. In onderstaande rechthoekige assenstelsels XOY zijn lijnen getekend voor $\{x \in R \mid -2 < x < 2\}$.

Welke lijn is *niet* de grafiek van een functie?



11. Welke van de onderstaande getallenparen (x, y) levert bij substitutie in $x - 2y = 1$ een ware bewering op?

a $(1, -3)$ b $(1, 3)$ c $(3, -1)$ d $(3, 1)$

12. De translatie $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gevolgd door de translatie $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ kan vervangen worden door de translatie

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

13. $x + 2$ is een factor van

a $x^2 + 2x + 4$ b $x^2 + 4x + 4$ c $x^2 + 2x + 2$ d $x^2 + 4x + 2$

14. In een driehoek is $\alpha > \beta$ en $\gamma = 90^\circ$.

Welke van de onderstaande beweringen is waar?

a $\sin \alpha < \cos \beta$ b $\sin \alpha > \cos \beta$ c $\sin \alpha < \sin \beta$ d $\sin \alpha > \sin \beta$

15. Elke gelijkzijdige driehoek is

a lijnsymmetrisch en ook puntsymmetrisch b lijnsymmetrisch maar niet puntsymmetrisch
c niet lijnsymmetrisch maar wel puntsymmetrisch d niet lijnsymmetrisch en ook niet puntsymmetrisch

16. Van driehoek ABC is $AB = 10$, $AC = 10$ en $BC = 12$.

D is het midden van de zijde AB .

E is het midden van de zijde BC .

De omtrek van driehoek ADE is gelijk aan

a 18 b 19 c 20 d 21

17. De functies f en g zijn voor $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = -x^2 + 1$ en $g(x) = -2x + 1$. Welk van onderstaande punten ligt op de grafiek van f en op die van g ?
- a $(-3, 2)$ b $(-2, 5)$ c $(2, -3)$ d $(3, -5)$
18. Een vierkant en een kubus hebben gelijke oppervlakten. De lengte van een ribbe van de kubus is 2. De lengte van een zijde van het vierkant is
- a 2 b $\sqrt{24}$ c $\sqrt{32}$ d $\sqrt{72}$
19. Een functie f is voor $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 4$. Nu geldt $f(-p) = f(p)$
- a alleen voor $p = 0$ b alleen voor $p = -2$ en $p = 2$ c alleen voor $p = -2, p = 0$ en $p = 2$
d voor alle waarden van p
20. Van een ruit $ABCD$ snijden de diagonalen AC en BD elkaar in S . Voor de punten P van het binnengebied van driehoek ABS geldt
- a $PA < PC$ en $PB < PD$ b $PA < PC$ en $PB > PD$ c $PA > PC$ en $PB < PD$
d $PA > PC$ en $PB > PD$
21. R is de verzameling van de rechthoekige driehoeken,
 S is de verzameling van de stomphoekige driehoeken,
 T is de verzameling van de gelijkbenige driehoeken.
- Voor de verzamelingen $R \cap S$, $S \cap T$ en $T \cap R$ geldt:
- a geen van deze is leeg b precies één van deze is leeg c precies twee van deze zijn leeg
d alle drie zijn leeg
22. Van een functie met R als domein zijn -3 en 2 de originelen van 0 . Deze functie kan zijn
- a $x \rightarrow (x + 3)(x + 2)$ b $x \rightarrow (x + 3)(x - 2)$ c $x \rightarrow (x - 3)(x + 2)$ d $x \rightarrow (x - 3)(x - 2)$
23. V_p is de verzameling van de veelvouden van p . V_{12} is gelijk aan
- a $V_2 \cap V_3$ b $V_2 \cup V_3$ c $V_4 \cap V_6$ d $V_4 \cup V_6$
24. Gegeven is de functie $x \rightarrow -x^2 + 2$ met $\{-2, -1, 0, 2\}$ als domein. Hoeveel elementen hebben zichzelf als beeld?
- a nul b één c twee d drie
25. In een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven de lijn met vergelijking $y = -x + 2$. De beeldfiguur van deze lijn onder de translatie $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ heeft als vergelijking
- a $y = -x - 2$ b $y = -x$ c $y = -x + 2$ d $y = -x + 4$

Wiskunde I – MAVO 4 – serie B (2 uur)

- Met $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$ als domein zijn de functies f en g gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\frac{1}{2}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.
 - Los op $f(x) = g(x)$.
 - Teken in één figuur de grafieken van f en g .
 - Voor welke waarden van x is $f(x) \geq g(x)$?
- Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 8$, $BC = 6$ en $CG = 3$.
Op de ribbe HG ligt een punt P zo, dat $HP = 2$.
 - Bereken de lengten van AH , AP en BP .
 - Bereken de grootte van $\angle APB$ in graden nauwkeurig.
- $V = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$ en $W = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{4}x^2 - 6\frac{1}{4}\}$ zijn puntenverzamelingen, waarbij $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$.
 - Teken V en W in één figuur.
 - Lees uit de figuur af welke punten tot $V \cap W$ behoren; noem de coördinaten van deze punten.
Controleer de antwoorden door substitutie.
 - Arceer of kleur in de figuur de puntenverzameling $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\} \cap \{(x, y) \mid y < \frac{1}{4}x^2 - 6\frac{1}{4}\}$.
- De aantallen absents van een school op vijftig achtereenvolgende schooldagen zijn:

10	10	11	8	7	9	12	9	5	6
9	7	5	7	5	7	6	7	12	5
4	5	6	7	6	9	11	5	7	7
6	6	8	6	7	7	5	7	5	10
6	8	6	9	8	5	8	8	11	10

 - Maak een frequentietabel van de aantallen absents.
 - Teken een histogram (staafdiagram) van deze waarnemingen.
 - Bereken het gemiddelde.
 - Op hoeveel dagen wijkt het verzuim minder dan 25% van het gemiddelde af?
- Gegeven een parallellogram $OPQR$.
 $\vec{OP} = \vec{u}$ en $\vec{OR} = \vec{v}$.
 - Druk $\vec{OQ}$ en $\vec{PR}$ uit in $\vec{u}$ en $\vec{v}$.
 - Voor een aantal punten S is $\vec{OS} = (1 - a)\vec{u} + (1 + a)\vec{v}$.
Neem voor a achtereenvolgens 1, 0 en -1 en teken de bijbehorende punten.

Wiskunde II – MAVO 4 – serie B (2 uur)

De items 1 t/m 10 zijn geheel gelijk aan het eerste tiental van Mavo-3 – Wiskunde II.

11. $x + 1$ is een factor van

a $x^2 + 1$ b $x^2 + x$ c $x^2 + 2$ d $x^2 + 2x$

12. De functies f en g zijn met R als domein gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 3x + 4\frac{1}{2}$ en $g(x) = -x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}$.
Nu geldt $f(x) = g(x)$ voor

a geen enkele waarde van x b precies één waarde van x c precies twee waarden van x
d meer dan twee waarden van x

13. $V = \{x \in R \mid -2 < x < 1\}$ en $W = \{x \in R \mid -1 < x < 0\}$
 $V \cap W =$

a V b W c $\{0\}$ d $\emptyset$

14. De functie f is voor $x \in R$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 4$.
Nu geldt $f(-p) = f(p)$ voor

a precies één waarde van p b precies twee waarden van p
c precies drie waarden van p d meer dan drie waarden van p

15. Als $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ en $\sin \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = 1$, dan is

a $\sin \alpha = 0$ b $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ c $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ d $\sin \alpha = 1$

16. P is de verzameling van de gelijkbenige driehoeken,
 Q is de verzameling van de gelijkzijdige driehoeken,
 R is de verzameling van de rechthoekige driehoeken,
 S is de verzameling van de stomphoekige driehoeken.

Welke van de volgende verzamelingen is leeg?

a $S \cap P$ b $P \cap Q$ c $Q \cap R$ d $R \cap P$

17. Van een kwadratische functie wordt voor $x = 2\frac{1}{2}$ de kleinste functiewaarde $-3\frac{1}{2}$ bereikt.
De nulpunten van zo'n functie kunnen zijn

a -2 en -3 b -1 en -6 c 1 en 6 d 2 en 3

18. Van een ruit hebben de diagonalen de lengten 60 en 80.
De afstand van het snijpunt van de diagonalen tot een zijde is

a 24 b 25 c 30 d 40

19. In R is $x^2 - 2x + 1 < 0$ voor

- a alle waarden van x kleiner dan 1 b alle waarden van x groter dan 1
c alle waarden van x behalve 1 d geen enkele waarde van x

20. x en y zijn elementen van $\{0, 1, 2, 3\}$.
 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$ bevat

- a geen elementen b precies twee elementen c precies drie elementen
d meer dan drie elementen

21. Beschouw de volgende twee beweringen:

- (1) Sommige driehoeken zijn lijnsymmetrisch.
(2) Sommige driehoeken zijn puntsymmetrisch.

- a (1) en (2) zijn beide waar b (1) is waar en (2) is niet waar
c (1) is niet waar en (2) is waar d (1) en (2) zijn beide niet waar

22. Achtereenvolgens worden translaties over de vectoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ toegepast.
Het beeld van (p, q) bij deze translaties is

- a $(p - 1, q - 4)$ b $(p - 1, q)$ c $(p + 1, q - 4)$ d $(p + 7, q)$

23. Driehoek ABC is rechthoekig in A .

We beschouwen alleen punten binnen $\triangle ABC$.

V is de verzameling van de punten die dicht bij C dan bij A liggen.

W is de verzameling van de punten die dicht bij BC dan bij AC liggen.

De doorsnede van V en W bestaat uit de punten van het binnengebied van

- a een driehoek zonder een rechte hoek b een driehoek met een rechte hoek
c een vierhoek zonder een rechte hoek d een vierhoek met een rechte hoek

24. In een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven de lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
Onder de translatie $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft de beeldfiguur van deze lijn als vergelijking

- a $y = -\frac{1}{2}x - 1$ b $y = -\frac{1}{2}x$ c $y = -\frac{1}{2}x + 1$ d $y = -\frac{1}{2}x + 2$

25. Gegeven de vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De lengte van de vector $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ is

- a 0 b $2 - \sqrt{2}$ c $2\sqrt{2}$ d $2 + \sqrt{2}$

26. De doorsnede van $\{(x, y) \mid x^2 = 9\}$ en $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$ bevat

- a geen elementen b precies één element c precies twee elementen
d meer dan twee elementen

27. Als x en y gehele getallen zijn, dan bedraagt het aantal elementen van $\{ (x, y) \mid x^2 - 2x \leq y < 0 \}$
- a 1 b 2 c 3 d 4
28. Met R als domein is de functie f gedefinieerd door $f(x) = x^2$.
Welke van de onderstaande beweringen is waar voor *alle* waarden van p ?
- a $f(2p) + f(p) = f(3p)$ b $f(2p) - f(p) = f(p)$ c $f(2p) \times f(p) = f(2p^2)$
d $f(2p) : f(p) = f(2)$
29. In een kubus is α de hoek tussen een lichaamsdiagonaal en een ribbe uit hetzelfde hoekpunt.
- Nu is
- a $0^\circ < \alpha \leq 30^\circ$ b $30^\circ < \alpha \leq 45^\circ$ c $45^\circ < \alpha \leq 60^\circ$ d $60^\circ < \alpha \leq 90^\circ$
30. Gegeven is de functie f , gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 1$ met als domein $\{-1, 0, 1\}$.
De functie g , gedefinieerd door $g(x) = 2x + 1$, heeft als domein de verzameling functiewaarden van f .
- De verzameling functiewaarden van g is
- a $\{-1, 0\}$ b $\{-1, 1\}$ c $\{0, 1\}$ d $\{-1, 0, 1\}$

EXAMEN OPERATIONELE RESEARCH ANALYST 1971/'72

Het door de Vereniging voor Statistiek ingestelde examen voor het diploma Operationele Research Analyst zal in januari 1972 wederom worden afgenomen.

Het examen bestaat uit twee delen. Het eerste deel is een Statistische propedeuse in de vorm van het examen Statistisch Analyst Algemeen gedeelte, of eventueel een andere in het examenreglement van het examen Operationele Research Analyst nader gespecificeerde prestatie. Het tweede deel betreft de eigenlijke operationele research. De schriftelijke zitting van dit examen zal in principe in *januari 1972*, en de mondelinge zitting omstreeks *begin maart* plaatsvinden. Het voor het examen vereiste werkstuk dient vóór 1 november 1971 te worden ingeleverd.

Een volledig beeld van de eisen voor en de gang van zaken bij het examen geeft de uitgave "Examen Operationele Research Analyst, Examenreglement en Examenprogramma" dat verkregen kan worden door f 4,16 incl. OB over te maken op girorekening 202091 ten name van de Vereniging voor Statistiek, Weena 700, te Rotterdam.

Aanmelding voor het examen Operationele Research Analyst dient te geschieden vóór 1 oktober 1971 door een inschrijfformulier dat verkrijgbaar is bij de Administratie van de Vereniging voor Statistiek, Weena 700 te Rotterdam, ingevuld te retourneren.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

EINDEXAMENS V.W.O. 1971

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zal op *zaterdag 4 september 1971 van 14.00 tot 17.00 uur* een forumbijeenkomst houden over de wiskunde-eindexamens voor het v.w.o. in 1971, waarbij tevens informatie zal worden verstrekt over het experimentele eindexamen voor h.a.v.o.

Het bestuur van de Vereniging nodigt alle leden en andere belangstellenden hiervoor uit.

De bijeenkomst vindt plaats in de witte zaal van Transistorium I van het universiteitscentrum De Uithof, ingang Heidelberglaan, te Utrecht. Om 13.40 uur vertrekt een extra bus van station NS in Utrecht naar De Uithof.

EINDEXAMENS M.A.V.O. 1971

De sectiecommissie m.a.v.o. van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseert een vijftal forumbijeenkomsten over de moderne wiskunde-eindexamens in 1971 voor m.a.v.o.-3 en m.a.v.o.-4.

Na korte inleidingen volgt bespreking van de opgaven door forumleden en aanwezigen, waarbij bemerkingen en suggesties ten goede kunnen komen aan de samenstelling van opgaven in volgende jaren. Bovendien zal de mening van de aanwezigen worden gepeild inzake het organiseren van regionale bijeenkomsten door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De bijeenkomsten vinden plaats op zaterdagen *van 14.00 uur tot 17.00 uur* in de volgende plaatsen.

4 september 1971 in Utrecht

In de blauwe zaal van Transistorium I van het universiteitscentrum De Uithof, ingang Heidelberglaan. Het universiteitscentrum is gelegen tussen Utrecht, De Bilt, Zeist en Bunnik. Vanaf het verkeersplein Oudenrijn is het bereikbaar via E8 richting Amersfoort; het wordt op ANWB-borden aangeduid met 'De Uithof'. Om 13.40 vertrekt een extra bus van station NS in Utrecht naar De Uithof.

11 september 1971 in Breda

In de Julianazaal van Oranjehotel, Stationsplein 7.¹⁾

25 september 1971 in Zwolle

In hotel-café-restaurant Van Gijtenbeek, Stationsplein 13-15.

2 oktober 1971 in Weert

In recreatiecentrum Tranché, Tranchéweg 9. Komend van Roermond richting Weert na de brug over de Zuid-Willemsvaart linksaf en komend van Eindhoven richting Weert voor de brug rechtsaf. Langs kanaal richting Lozen; onder spoorbrug door. Volgende brug letterlijk links laten liggen; ongeveer 50 meter verder eerste weg rechts. Deze weg volgen tot over een onbewaakte overweg; na ongeveer 25 meter links inrijlaan Tranché. Het recreatiecentrum ligt ongeveer 6 km van station NS in Weert en is van daaruit per taxi te bereiken. Bij voldoende belangstelling kan een autobus ingezet worden; deelnemers worden verzocht dit per briefkaart te melden aan de secretaris van de sectiecommissie m.a.v.o., Lijsterbeslaan 17 te Rosmalen.

9 oktober 1971 in Haarlem

In hotel-café-restaurant Lion d'Or, Kruisweg 34-36 bij station NS.

Het bestuur van de Vereniging nodigt alle leden en andere belangstellenden uit voor het bijwonen van een van deze bijeenkomsten.

Alle deelnemers wordt in overweging gegeven te onderzoeken of de mogelijkheid bestaat hun reiskosten vergoed te krijgen van het bevoegd gezag van hun school.

¹⁾ In afwijking van de eerder vermelde plaats.

CONTRIBUTIE

De penningmeester verzoekt de leden hun contributie voor het lopende verenigingsjaar 1971-1972 te betalen. Op de ledenvergadering van 19 december 1970 is deze contributie vastgesteld op f 15,—. Leden die Euclides niet via de vereniging ontvangen, betalen f 8,—. De betaling kan plaatsvinden door storting of overschrijving op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

In verband met verhoogde kosten van Euclides zal op de eerstkomende jaarvergadering voorgesteld worden de contributie voor het volgend jaar (1972-1973) te verhogen.

J. van Dormolen

VERSLAG VAN HET VERENIGINGSJAAR 1 AUGUSTUS 1971 – 31 JULI 1971

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. J.K. van den Briel, secretaris drs. J.W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, L. van Beek, M. Kindt, L.A.G.M. Muskens, dr. P.G.J. Vredenduin.

Op 13 en 14 augustus 1970 werd te Eindhoven de vakantie cursus van het Mathematisch Centrum gehouden met als onderwerp 'Computer en Onderwijs'. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren was vertegenwoordigd in de adviescommissie.

Op 5 september 1970 werd in De Uithof te Utrecht een forumbijeenkomst gehouden over het nieuwe leerplan wiskunde voor v.w.o. en het nieuwe leerplan voor m.a.v.o. Aan de hand van de experimentele eindexamens heeft een bespreking van de nieuwe eindexamenprogramma's plaats gevonden.

De jaarvergadering is gehouden in De Uithof te Utrecht op 19 december 1970; sprekers waren prof. dr. J. C. H. Gerretsen, M. Sjamaar en G. A. Vonk. De presentielijst werd getekend door 80 personen.

In het april-nummer van 'Euclides' verscheen het eerste interim-rapport van de nomenclatuurcommissie.

Dr. J. K. van den Briel en dr. P. G. J. Vredenduin hebben de vereniging op de paasconferentie A.T.M. in Lancaster vertegenwoordigd.

Samen met de overige bij de Raad van Leraren aangesloten vakgroepen heeft de vereniging een brief aan de Raad van Leraren geschreven, waarin nogmaals haar standpunt ten opzichte van het ongedeelde v.w.o. is medegedeeld; bovendien is er ons bezwaar tegen een basistabel met tien uren wiskunde in de onderbouw kenbaar gemaakt en is er verklaard dat de vereniging minder dan zeven examenvakken niet acceptabel vindt.

Het bestuur vergaderde dit jaar negen maal.

Notulen van de Algemene Vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op 19 december 1970 in het 'Transitorium II' van het Universiteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.

Om 10.40 uur opent de voorzitter, dr. J.K. van den Briel de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden prof. dr. O. Bottema en dr. J.H. Wansink, de inspecteur E.H. Schmidt, de vertegenwoordiger van Velines drs. F.Th.H. Dekkers, de sprekers prof. dr. J. C. H. Gerretsen, M. Sjamaar en G. A. Vonk en de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff drs. A. B. Oosten.

De voorzitter spreekt hierna zijn jaarrede uit; deze is gepubliceerd in 'Euclides'.

De notulen van de algemene vergadering van 22 december 1969 en de jaarverslagen worden goedgekeurd. De penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden mej. drs. S. Vrijburg en de heer T.J.J. Boogaard benoemd.

Zonder stemming worden de heren drs. J. van Dormolen en M. Kindt als bestuurslid herkozen.

De contributie voor het jaar 1971/1972 wordt vastgesteld op vijftien gulden.

Hierna wordt de vergadering in twee delen gesplitst en krijgt de heer prof. dr. J.C.H. Gerretsen het woord over 'Enkele toepassingen van de Identificatietopologie' en de heer G.A. Vonk over 'Lineair programmeren'.

Na de middagpauze heet de voorzitter allereerst de vertegenwoordigers van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren dr. A. Broeckx en echtgenote en de vertegenwoordiger van de redactie van 'Euclides' G. Krooshof hartelijk welkom en geeft vervolgens het woord aan de heer M. Sjamaar, die spreekt over 'Gebruik van de overhead-projector bij het wiskunde-onderwijs'.

Hierna volgt de rondvraag.

De heer E.H. Schmidt bedankt voor de uitnodiging en betreurt het dat zijn collega's dr. H.A. Gribnau, dr. D.N. van der Neut en drs. B.J. Westerhof, met wie hij zo'n goede samenwerking heeft, verhinderd zijn.

Hij is zeer dankbaar voor het beleid van de Vereniging wat betreft het samengaan van de verschillende schooltypen en constateert hier reeds veel succes.

De heer G. Krooshof bedankt namens de redactie van Euclides voor de uitnodiging en wijst op de zwaarte van de beslissing bij het kiezen van een examenpakket door leerlingen van zowel v.w.o. als h.a.v.o. en m.a.v.o. Hij dringt er op aan de schooldecanen, door middel van een brochure, te informeren over de vele richtingen waarin wiskunde nodig is. Tevens wijst hij op de kortsluiting tussen de verschillende vakken, bijvoorbeeld de wiskunde-eisen in de boeken voor het vak economische wetenschappen. De voorzitter meent dat wij nog in een overgangstijd zitten, waarin nog veel onduidelijk is. Hij ziet meer in een artikel in het blad Decanoloog van de schooldecanen dan in een brochure.

De heer M. Sjamaar deelt mede dat schooldecanen de door het hoger onderwijs

gewenste vakkenpakketten kennen en dat het verrassend is hoeveel wiskunde vereist wordt.

De heer dr. P.G.J. Vredenduin bedankt voor de uitnodiging namens Liwenagel en Velines. Hij wijst er op dat het in verband met de opheffing van Liwenagel de laatste keer is geweest dat zij vertegenwoordigd was. Hij dankt hartelijk voor de samenwerking. Terwijl vroeger Liwenagel de vereniging voor de docenten aan de gymnasia was en Wimecos voor docenten aan h.b.s.-en, is nu Liwenagel nog slechts een rudiment. Hij hoopt dat een dergelijke groep in een nieuwe algemene lerarenvereniging niet meer zal optreden.

De heer drs. A.B. Oosten dankt namens Wolters-Noordhoff voor de uitnodiging en wijst op te verwachten kostenstijgingen en verhoging van abonnementsgelden voor Euclides.

De heer C.W. Oors vraagt of op het h.a.v.o. de combinatie handelswetenschappen en wiskunde in verband met een urenindeling mogelijk is. De heer M. Sjamaar zegt dat dit met een goede urentabel te verwezenlijken is. Op de vraag van de heer Oors of wiskunde eventueel als keuzevak naast de examenvakken gegeven kan worden deelt de heer drs. H.G.B. Broekman mee dat hiervoor eventueel de zogenaamde 0-uren gebruikt kunnen worden.

De heer J. de Jong vraagt om bevordering van uniformiteit in nomenclatuur. De voorzitter verwijst naar de werkzaamheden van de nomenclatuurcommissie.

De heer Oors vraagt of er een tendens is naar een langere brugperiode. De heer drs. J.W. Maassen deelt hierop mede dat hij zelf op een programmaschool les geeft waar in de praktijk blijkt dat het mogelijk is dat leerlingen voor v.w.o. en h.a.v.o. langer dan één jaar gemeenschappelijk les krijgen. Hij meent dat het te verwachten eindniveau van een h.a.v.o.-leerling veronderstelt dat deze leerling enige jaren het v.w.o.-niveau moet kunnen volgen.

De heer M. Sjamaar onderstreept dit door te wijzen op de toelatingseisen van een h.t.s.

De voorzitter wijst op de mogelijkheid om voor parallelklassen de wiskundelessen op dezelfde uren te plaatsen en eventueel op verschillende niveaus les te geven en vraagt zich af of dit ook voor natuurkunde nodig is.

De heer drs. F.Th.H. Dekkers deelt mee dat de natuurkunde in de lagere klassen niet zoveel wiskunde gebruikt dat hier al niveauverschillen in onderwijs nodig zijn.

De heer Sjamaar verzoekt de didactiekcommissie te overdenken dat wiskunde door het abstracte karakter sterk determinerend werkt en er daarom een duidelijk bepaald minimum moet worden gesteld.

De voorzitter vraagt of ook niet-wiskundigen het over de determinerende waarde van de wiskunde eens zijn. De heer M.A. Kroon vindt dat leerlingen zichzelf determineren en voorsorteren naar een laag wiskundeniveau terwijl ze het onderwijs wel aan zouden kunnen. De heer drs. J. van Dormolen ziet ook een mogelijkheid om binnen klasseverband te differentiëren waarbij men geen

gemeenschappelijke proefwerken meer geeft maar tests op door leerlingen zelf gekozen tijden. Hiervoor is het echter noodzakelijk dat ook andere vakken dit doen, terwijl men moet leren in projectrichting te werken.

De heer L.A.G.M. Muskens verwijst naar twee interimverslagen van het project Schagen, verkrijgbaar bij het A.P.S., Buitenveldertselaan 106 te Amsterdam.

De heer C.W. Oors vraagt naar de aansluiting van de vijfde klas h.a.v.o. naar de vijfde klas atheneum. De heer drs. J.W. Maassen heeft hiermee binnen de scholengemeenschap goede ervaringen. Voor een leerling die tevens van school verandert is de aansluiting moeilijker. Men moet overigens niet denken dat de doorstromingsmogelijkheden die de mammoetwet biedt nu ook elke leerling aan een atheneumdiploma kunnen helpen. Ook de heer L. Wijnolts heeft goede ervaringen met doorstroming.

Hierna doet de voorzitter mededelingen over de didactiekcommissie.

Hij wijst er op dat zowel wensen binnen de vereniging alsook een opmerking van de heer drs. B.J. Westerhof in de vorige algemene vergadering tot de instelling van een didactiekcommissie hebben geleid, en geeft een beeld van de opzet en de bedoeling van deze commissie, zoals dit ook is beschreven op blz. 8 t/m 11 van de 46e jaargang van 'Euclides'.

Hij deelt mede dat de heer F. Goffree zich wegens vele werkzaamheden uit de commissie heeft teruggetrokken.

De heer dr. J.H. Wansink is zeer dankbaar voor de initiatieven. Hij meent echter dat de commissie — gezien de vrijheid van de Nederlandse leraren — niet kan decreteren. De voorzitter is het hier mee eens; men kan slechts aangeven welke boeken bepaalde onderwerpen goed behandelen.

Volgens de heer drs. H.G.B. Broekman is de derde fase, de integratie, het moeilijke punt. In Amerika geeft de S.M.S.G. openbare adviezen.

Na een opmerking dat het moderne wiskundeprogramma het begin van een revolutie kan zijn, merkt de voorzitter op dat de klap gevallen is en we nu moeten bijsturen.

De heer G. Krooshof vraagt of men niet in Europees verband zou moeten werken. Volgens de voorzitter neemt men dan te veel hooi op de vork. Men moet wel het buitenland raadplegen maar nationaal is de taak al zwaar genoeg.

De heer drs. A.B. Oosten, sprekend namens de onderwijs-industrie, vermeldt dat het aantal media gaat toenemen, waaruit hogere kosten voor uitgevers resulteren, zodat men het in internationale samenwerking zoekt. Hij ondersteunt de vraag van de heer Krooshof. De onderwijs-industrie heeft belangstelling voor fase 3; hij hoopt dat de commissie en de onderwijs-industrie elkaar niet zullen doorkruisen en ziet gaarne samenwerking. De voorzitter deelt mede dat de resultaten van de commissie in zo klein mogelijke stappen zullen worden gepubliceerd.

De heer drs. A.B. Oosten zegt dat de onderwijs-industrie mee wil financieren en investeren.

De heer drs. H.G.B. Broekman doet nogmaals een oproep tot mensen uit de praktijk om te voorkomen dat de ontwikkeling los van de praktijk komt.

Om 16.00 uur sluit de voorzitter de vergadering.

Boekbespreking

Ronald J. Wonnacott en Thomas H. Wonnacott: *Econometrics*, John Wiley & Sons, New York enz., 1970, 445 bladzijden; f 60,40.

De titel 'econometrics' vraagt voor de buitenstaander om enige uitleg. Op zijn kortst dekt hij de nadere uitwerking van de methode van de kleinste kwadraten. Voor velen is dit een kunstgreep van Gauss om een rechte lijn aan te passen aan een aantal punten die er niet exact aan voldoen, maar in de mathematische statistiek van jongere datum vindt de methode een plaats in de schattingstheorie. Bij het statistisch onderzoek van economische samenhangen zijn de regressie- en correlatietekening vanaf het begin als standaardtechnieken gehanteerd, en hun aanpassing aan de bijzondere eigenschappen van niet-experimentele gegevens waarmee men in dit geval moet werken is dan ook in dit toepassingsgebied ver ontwikkeld. Een en ander is al vaker als 'econometric methods' te boek gesteld. Ook de gebroeders Wonnacott beperken zich tot statistische methoden, en men zal in hun boek niets vinden over de feitelijke toepassing op economische problemen, laat staan over de resultaten van empirisch werk.

In het standaardmodel van de regressietekening beschouwt men een variabele Y als een lineaire functie van een of meer X_j waar een additieve stochastische storingsterm aan is toegevoegd. De opgave luidt dan om de coëfficiënten van deze functie uit de waargenomen ($Y; X_1 \dots X_n$) te schatten. Het eenvoudige geval van twee variabelen – één X – correspondeert met de traditionele aanpassing van een rechte aan een puntenverzameling. Het algemene geval met meerdere variabelen X kan het fraaist worden behandeld in matrixnotatie. Verschillende varianten komen aan de orde als men aan de stochastische storingsterm minder eenvoudige maar voor economische gegevens realistischer eigenschappen toekent. Veel ingrijpender zijn de complicaties als er tussen de beschouwde variabelen nevenrelaties moeten worden verondersteld van hetzelfde type, dus ook lineair en van een stochastische storing voorzien. De waarnemingen zijn dan bepaald door een stelsel van simultane vergelijkingen, ieder met een additieve stochast. De schatting van de afzonderlijke coëfficiënten is dan soms onmogelijk, soms ook kan het wel maar alleen met behulp van geavanceerde methoden; dit hangt af van de gedaante van het vergelijkingstelsel.

Het boek van de Wonnacott's behandelt praktisch alles wat op dit gebied bekend is. Het is typisch een produkt van de tweede generatie, geen handboek dat verspreide resultaten meezamen codificeert maar een leerboek dat het de lezer in alle opzichten gemakkelijk maakt om snel ver in de stof door te dringen. Er is nogal een groot niveauverschil tussen de twee rondes, waarin de behandeling uiteenvalt; voor het eerste deel hoeft men niet eens te kunnen differentiëren, in het tweede wordt matrixalgebra kwistig gebruikt. Beide vooronderstellen enige kennis van de mathematische statistiek. Het boek is typisch voor een eerste kennismaking geschreven en heeft de verdienste dan het heel ver gaat en praktisch de hele stof bestrijkt; maar het gaat niet altijd erg diep, en het is wel duidelijk dat de lezer die verder wil een handboek moet raadplegen. Hij heeft dan echter al een heel goed inzicht van de vragen waar het om gaat. Voor dit beperkte doel voldoet het boek mijns inziens beter dan enig ander bestaand werk. Het is met grote didactische zorg geschreven; in het bijzonder noem ik de tekeningen, die precies aangeven wat er bedoeld wordt.

Ik vind het niet de moeite waard van punt tot punt aan te geven waar ik met de schrijvers van mening verschil over de vraag of men al dan niet voor nader bewijs naar de handboeken moet verwijzen. Wel merk ik op dat de passage over covariantie-analyse deze techniek geen recht doet en dat de berekening van R^2 voor een multi-pele regressie blijkbaar gewoon vergeten is.

J. S. Cramer

De ondertitel van het boek luidt '*Een persoonlijkheidstheoretische benadering van onderwijsprocessen*'.

Reeds eerder heeft de auteur de nederlandse leraar een dienst bewezen door zijn publikaties op het terrein van de toegepaste groepspsychologie en gesprekstechniek. De problematiek van de relaties in de schoolklas, relaties tussen leraar en leerlingen, relaties tussen leerlingen onderling, relaties waarbij externe instanties in het geding zijn, heeft in het verleden niet de aandacht van onderwijsmensen gehad die ze verdient. Als een eenvoudige introductie ertoe noemen we de bijdrage die Van de Griend geschreven heeft in het in 1963 verschenen boekje '*De leraar en zijn klas*'.

In '*Leren doceren*' slaagt de auteur erin een typologie te ontwerpen van tussenmenselijke relaties en groepsrelaties die verhelderend kan werken bij ons streven begrip te krijgen voor de complexiteit van tal van onderwijssituaties.

De auteur verdeelt de talrijke communicatietheorieën die er zijn in twee groepen, de monologische en de dialogische en rekent de theorie door hem in dit boek ontwikkeld tot de laatste. Hieruit volgt reeds dat wij de titel '*Leren doceren*' niet moeten misverstaan. De 'doceer'-methode toch komt in de onderwijspraktijk, terecht, steeds meer in diskrediet. Ze is in het verleden vaak in een monologische communicatie ontaard en maakt in 'de jongste tijd' meer en meer plaats voor didactisch beter verantwoorde werkvormen. Dat de auteur het begrip trouwens veel ruimer wenst op te vatten dan in die naam doceermethode tot uitdrukking komt, wordt reeds onderstreept door het motto dat hij zijn boek meegeeft:

The poor teacher explains
The good teacher teaches
The great teacher inspires.

Het boek bevat een psychologische theorie die volgens de auteur nieuw is voor vakmensen en behandelt daarnaast een groot aantal praktijksituaties uit het onderwijs die voor alle leraren van belang zijn. Doel is uitdrukkelijk geweest een brug te slaan tussen psychologische theorie en onderwijspraktijk. De schrijver analyseert de affectieve structuren die zich manifesteren in personen, in tussenmenselijke relaties en in groepen van personen. Hij komt tot een classificatie waarin de begrippen autonomie en homonomie fundamentele bouwstenen zijn. Autonomie onderstelt steeds een omgeving waarbinnen die autonomie zich kan manifesteren, homonomie wijst op gelijkheid van op zichzelf ongelijke onderdelen. Van de Griend komt nu tot een typologie waarin een viertal combinaties op de voorgrond treden:

$A^+H^+, A^-H^+, A^+H^-, A^-H^-$.

De mintekens wijzen op frustratie die er op het desbetreffende gebied aanwezig is.

Duiden we met kleine letters *a* en *h* het streven aan naar compensatie van deficiënties ten opzichte van de optredende grondhoudingen, dan komen we, theoretisch althans, tot een zestiental spanningsvelden, waarvan bijvoorbeeld

$A^-H^- \rightarrow a^+h^+$

de repressieve tolerantie karakteriseert.

Het boek is rijk aan voorbeelden die iedere leraar zullen aanspreken. Vele ervan houden verband met het ordeprobleem, maar ook los daarvan kan de communicatie in de klas op tal van manieren gestoord worden.

De auteur wijst erop dat diagnose alleen weinig zinvol is en dat diagnose zonder therapie zelfs belemmerend kan werken. Heilzame invloed blijkt uit te gaan van positieve verwachtingen

die de leraar van zijn klas heeft, van vertrouwen in gunstige ontwikkelingen: de selffulfilling prophecy doet zijn werk. Een congruente houding van de leraar is van fundamenteel belang. De auteur wijst op de risico's die leraren lopen, als er op een psychologische diagnose van een classesituatie geen adequate therapie volgt. Hij noemt in dit verband De Groots gerucht-makende publikatie 'Vijven en zessen' en zegt daar o.a. over: '... een publikatie die ik juist acht en waarvoor ik mede materiaal aandroeg. Maar het risico bestaat, dat juist de beste docenten die de zaak het meest au serieux nemen, ook het meest onzeker worden, geen duidelijke uitweg zien, maar wel verslappen in hun gangbare procedures, die misschien juist bij hen nog niet zo slecht waren. – Intuïtieve zekerheid op het gebied van affectieve factoren en tussenmenselijke relaties kan een gevoelige knauw krijgen, wanneer men zich realiseert, hoe complex dat gebied is, welke voetangels overal verborgen zijn en aan welke klemmen men ternauwernood of net niet ontsnapte. Verlies van zekerheid als gevolg van aandacht voor en studie van dit gebied is mij dan herhaaldelijk gemeld door aanstaande, beginnende en ervaren docenten'. Aldus Van de Griend, die in verband hiermee constateert, dat het scheppen van gunstige voorwaarden voor een goede therapeutische procedure belangrijker is dan de psychologische diagnose zelf.

In het derde, het vierde en het vijfde hoofdstuk behandelt de auteur achtereenvolgens de versterking van de autonomie, de versterking van de homonomie en de groeps counseling. Er zijn in deze hoofdstukken uitgebreide discussieverslagen opgenomen die dank zij het gebruik van een bandrecorder vele interessante aspecten van de gevoerde gesprekken goed doen uitkomen. Zo zien we o.a. dat er in de discussies weliswaar vaak belangrijke opinies naar voren kunnen worden gebracht, zonder dat na de discussie de deelnemers de meningen van anderen behoorlijk weten te formuleren. Men is alleen onder de indruk van de eigen inbreng uit het gesprek!

De protocollen die o.a. gaan over de problematiek van orde en straf en over onderwijsdoelen zullen ongetwijfeld vele lezers weten te boeien.

Het boek is waard gelezen en herlezen te worden. Eenvoudig is het niet, maar de analyse van tal van onderwijssituaties in het licht van de door Van de Griend ontworpen theorie maakt het boek ongetwijfeld tot een waardevol bezit voor iedere leraar die behoefte heeft aan enige theoretische doordenking van zijn dagelijks werk.

Joh. H. Wansink.

Robert B. Ash, *Basic Probability Theory*, John Wiley and Sons, Inc. N. Y., London, 1970, 332 bladzijden, 115 sh.

Uit de titel blijkt dat het boek zich voornamelijk met kansrekening bezig houdt. In hoofdstuk 8 (het laatste) wordt een inleiding gegeven in de statistische methoden.

De opzet van de kansrekening wijkt af van het gewone patroon: maattheorie – axioma's – een beetje discrete verdelingen – een grote hoeveelheid over continue verdelingen, etc.

De eerste paragrafen geven enig inzicht in de Boolse algebra en stippen de sigma-algebra's aan. Verdere maattheoretische beschouwingen komen aan de orde daar waar er behoefte aan is. Als de diepgang wat te groot wordt zijn de paragrafen, bewijzen en opgaven met een sterretje aangegeven. Er zijn 41 bladzijden gewijd aan de oplossingen van de aangeboden opgaven. Nu de kansrekening binnenkort deel uitmaakt van het leerplan voor wiskunde I zal de belangstelling voor boeken op dit terrein groter worden. Dit boek, gebaseerd op een reeks colleges gegeven aan de Universiteit van Illinois gedurende 5 jaren, voorziet stellig in een behoefte. De drukspiegel is plezierig, de tekst is met veel grafieken toegelicht en zonder al te veel nevenstudie is een heel goed beeld van het moeilijke onderwerp kansrekening te verkrijgen. De prijs is bepaald niet aantrekkelijk maar dat is in deze tijd nauwelijks een verrassing meer.

J. J. Wouters

Erwin Kreyzig, *Introductory Mathematical Statistics, Principles and Methods*; John Wiley and Sons, Inc. 1970, 462 bladzijden, 120 sh.

Dit lijvige boek bestaat uit drie gedeelten.

I. Beschrijvende Statistiek, 26 bladzijden, is erg eenvoudig van opzet. De gebruikelijke zaken als tabelleren van steekproefresultaten, grafische voorstellingen, het gemiddelde en de afwijking worden besproken.

II. Kanstheorie. 123 bladzijden. Dit gedeelte biedt een prettig leesbaar stuk kanstheorie, uitgaande van de drie axioma's, zonder maattheorie en zonder moeilijke bewijzen. Enkele stellingen, o.a. de limietstelling van de Moivre en Laplace worden in een appendix bewezen. Naast de binomiale en hypergeometrische verdelingen worden nog behandeld: de Poisson-, de normale-, de Chi-kwadraat-, en de Student's t-verdelingen.

Vooraf voor hen die de kanstheorie op een niet te moeilijk niveau willen leren een prachtig gedeelte.

III. Statistische methoden. In dit gedeelte worden de meeste belangrijke methoden behandeld, zoals o.a.

punt- en intervalschattingen,

testen van hypothesen;

kwaliteitscontrole;

variantieanalyse;

regressie en correlatieanalyse en foutenanalyse.

Diverse tabellen besluiten dit fraai opgezette boekwerk waarvan alleen de prijs wellicht minder aantrekkelijk is.

J. J. Wouters.

Drs. H. Pleysier, *Een beschouwing over de ontmoeting tussen wiskunde en maatschappij in de gouden eeuw*, Wolters-Noordhoff, Groningen en Universitaire Pers, Rotterdam, 1970: 14 pag., f 2.90

Dit is de tekst van de openbare les van de schrijver op 19 XI 70 bij de aanvaarding van het ambt van lector aan de N. E. H. te Rotterdam.

Het probleem voor de wiskundige, hoe bij een dergelijke les niet uitsluitend voor vakgenoten te spreken, accentueert zich, wanneer vrijwel geen vakgenoten te verwachten zijn. Met deze zeer aan de omgeving aangepaste beschouwing heeft drs. Pleysier de moeilijkheid op fraaie wijze opgelost; de ondergetekende is er getuige van geweest, dat de toehoorders van het begin tot het eind geboeid hebben geluisterd.

H. W. Lenstra sr.

M. Jeger en B. Eckmann, *Vector Geometry and Linear Algebra* (for engineers and scientists), Interscience Publishers, division of John Wiley and Sons, 254 bladzijden, 63 sh.

Het boek is een vertaling van de in 1966 verschenen: Einführung in die vectorielle Geometrie und lineare Algebra. Er zijn 5 hoofdstukken, waarvan het eerste een heel goede behandeling geeft van de vectoralgebra. Hierbij noem ik o.a. de behandeling van determinanten en de vele vectoridentiteiten. Hoofdstuk 2 biedt een aardige toepassing van de vectoralgebra op de driedimensionale analytische meetkunde met een appendix over het differentiëren van vectoren. Het derde hoofdstuk over determinanten en lineaire vergelijkingen lijdt, als zo vaak, aan het euvel zich wat moeizaam te ontplooiën. De laatste hoofdstukken, orthogonale coördinatentransformaties en lineaire transformaties zijn ietwat conventioneel opgezet.

Het boek biedt in totaal zeker voldoende voor degenen voor wie het geschreven is. Als naslagwerk is het minder geslaagd, daarvoor wordt te vaak verwezen naar eerder afgeleide stellingen.

De verzorging is uitstekend en de prijs is nu eens heel redelijk.

J. J. Wouters.

Ontvangen boeken

Dr. J. Bijl, Dr. D. Kijne, Drs. W. J. H. Salet, *Basis voor de analytische meetkunde*, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1970, 4e dr., 122 blz., f 5,75.

D. Leujes, *Noorduijns Wiskundige tafels*, Tjeenk Willink-Noorduijn, Culemborg, f 1,90. Deze tafel bevat 14 tabellen waaronder gewone logaritmen, goniometrische functies (argumenten in graden of radialen), machten, wortels, omgekeerden, exponentiële functies, omzetting van graden in radialen.

B. Coster, Dr. A. van Dop, Dr. H. Streefkerk, *Nieuwe algebra-vraagstukken*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970, 6e druk, f 5,40.

B. Coster, Dr. A. van Dop, Dr. H. Streefkerk, *Antwoorden bij de Nieuwe algebra-vraagstukken*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 7e dr., f 2,15.

Drs. Chr. Boormeester e.a., *Van A tot Z*, deel 1b, J. Muusses, Purmerend, 1971, 3e druk, 135 blz., f 6,70.

Antwoorden Moderne wiskunde, deel 6 vwo, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971, f 2,50.

K. de Bruin e.a., *Antwoorden bij Getal en Ruimte*, delen 3V2, 3MIII2, 3H2, 3MIV2, Educaboek NV, Culemborg. Prijs per deel f 1,00.

LIWENAGEL

Voor abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel, is het abonnementsgeld voor de 47e jaargang f 10,— (dus niet meer f 7,— !).

Men wordt verzocht dit bedrag over te schrijven op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede. Spoedige afwerking zal zeer gewaardeerd worden.

GENOOTSCHAP voor GESCHIEDENIS der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen

De najaarsvergadering zal zijn op zaterdag 6 en zondag 7 november te Haarlem. De voordrachten zullen gewijd zijn aan de periode van omstreeks 1875. Belangstellenden kunnen zich voor verdere inlichtingen wenden tot de secretaris Dr. A.J.E.M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität; XVII, 1; 1970.

Peter Hilton, Kategorien, Funktoren und natürliche Transformationen;

W. Martiensen, Grundlagen und Anwendungen der Holographie;

A. Dold, Einfacher Beweis des Jordanschen Kurvensatzes;

M. Kneser, Witts Satz über quadratische Formen und die Erzeugung orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen;

P. Mönnig, Ein Beitrag zur Darstellung endlicher Körper;

A. Kirsch, Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren;

W. Metzler, Eine Einführung der positiven rationalen und positiven reellen Zahlen auf Grund von Meszvorgängen;

A. Schönhage, Von den ganzen zu den reellen Zahlen;

H. Brass, Ein Kapitel aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme.

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaerheuveel 73. Oosterbeek.

264 Vijftien directeuren zitten in twintig commissies. In elke commissie zitten precies drie directeuren. Iedere directeur is lid van precies vier commissies. Elk tweetal directeuren is van hoogstens één commissie samen lid. Hoe kan dat?

265 Een 'kwadraat' bestaande uit oneindig veel rijen en oneindig veel kolommen moet zo met getallen $1, 2, \dots, 25$ gevuld worden, dat elk deelskwadraat van 25 getallen magisch is.

(B. Kootstra)

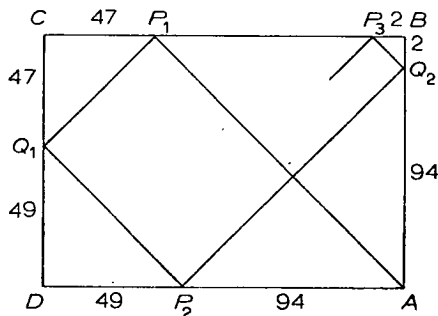
Oplossingen

262 Een rechthoekig biljart is 1,43 m lang en 0,96 m breed. Een biljartbal wordt uit een hoek weggeschoten in een richting, die met de zijanten hoeken van 45° maakt. Na hoeveel terugkaatsingen is de bal voor het eerst weer in een hoekpunt aangekomen?

In bijgaande figuur is het begin van de weg getekend, die de bal aflegt. We zien, dat

$$BP_1 = 96, P_1C + DP_2 = 96, P_2A + BP_3 = 96, \dots$$

P_x zal dus het eerste punt zijn, dat met een hoekpunt samenvalt, als voor het eerst $x \cdot 96$ een veelvoud van 143 is. Omdat 96 en 143 relatief priem zijn, is dan $x = 143$. Het aantal terugkaatsingen tegen de lange kant is dus 142. Analoog vinden we, dat het aantal terugkaatsingen tegen de korte kant 95 is. In totaal dus 237 terugkaatsingen.



263 Iemand heeft onbeperkt veel muntstukken van a en van b gulden; $2 < a < b$, a en b zijn relatief priem. Hij koopt $a-1$ artikelen van verschillende prijzen, die telkens 1 gulden verschillen. Elk artikel betaalt hij afzonderlijk met gepast geld. Hoeveel kost het goedkoopste artikel minimaal?

We vragen eerst: wat is de prijs p van het duurste artikel, dat hij niet met gepast geld zou kunnen betalen (en waarvan de prijs wel een geheel aantal guldens is)?

Omtrent p weten we:

p is niet deelbaar door a en niet door b ,

$p+a$, dat wel met gepast geld te betalen is, is dus deelbaar door b ,

$p+b$ is deelbaar door a ,

$p < ab$.

Er zijn dus natuurlijke getallen x en y , waarvoor

$$xb = p+a \text{ en } ya = p+b.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}xb-a &= ya-b, \\(x+1)b &= (y+1)a\end{aligned}$$

en in verband met $p < ab$,

$$\begin{aligned}x+1 &= a \text{ en } y+1 = b, \\x &= a-1, \\p &= (a-1)b-a, \\p &= (a-1)(b-1)-1.\end{aligned}$$

De prijzen $p+1, p+2, \dots, p+(a-1)$ zijn nu alle met gepast geld betaalbaar. Omdat $p+a$ deelbaar is door b , zijn $p+1, \dots, p+(a-1)$ geen van alle door b deelbaar. Elk van deze getallen is dus opgebouwd uit een positief aantal a 's en eventueel één of meer b 's. Noem het minimum van dit aantal a 's k . Het getal, dat zo min mogelijk a 's bevat, bevat zo veel mogelijk b 's en dus $a-2$ b 's (want het is kleiner dan $p+a$ en $p+a = (a-1)b$). Dus

$$\begin{aligned}(a-2)b+ka &> p, \\(a-2)b+ka &> (a-1)b-a, \\k &> (b-a)/a, \\k &\geq b/a.\end{aligned}$$

Dus is k het quotiënt van de deling van a op b (staartdeling).

Verminder nu de serie prijzen $p+1, p+2, \dots, p+(a-1)$ met ka . We krijgen dan weer een serie van $a-1$ opvolgende prijzen, die alle met gepast geld te betalen zijn.

Onder de getallen

$$p+1-ka, p+2-ka, \dots, p+(a-1)-ka$$

is er nu één, die alleen uit b 's bestaat. Ook is er onder hen één, die alleen uit a 's bestaat (omdat dit bij de rij getallen $p+1, \dots, p+(a-1)$ het geval is). Ze kunnen dus niet meer alle met eenzelfde getal verminderd worden en toch aan de voorwaarde van betaalbaarheid met gepast geld blijven voldoen. Het gevraagde goedkoopste artikel heeft dus als prijs

$$p+1-ak \text{ gulden,}$$

dus

$$(a-1)(b-1)-ak \text{ gulden.}$$

meetkunde met vectoren

L. R. J. Westermann,

MEETKUNDE MET VECTOREN

deel 1 ISBN 90 01 94920 7, ing. f 11,40

deel 2 ISBN 90 01 94921 5, ing. f 11,05

Een behandeling van vectoren in het platte vlak en in de ruimte.

Geschikt voor:

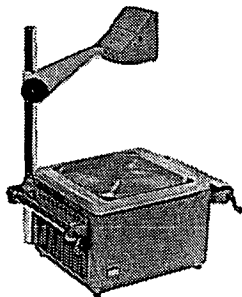
- de hoogste drie leerjaren van het v.w.o. (b-afdeling en wiskunde-II)
- hoger beroepsonderwijs
- wiskunde l.o. opleiding

Meetkunde met vectoren is voortgekomen uit een experiment van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever



Wolters-Noordhoff



U kent de overheadprojector

maar kent u ook

- de mogelijkheden in kleine lokalen
- de mogelijkheden van permanente en semi-permanente opstelling
- de vele toepassingen
- de bijbehorende transparanten
- de accessoires

WN zal u er graag alles over vertellen

Inlichtingen bij

Wolters-Noordhoff nv, postbus 58, Groningen

telefoon 050-188888

of bij onze specialist

D.H. Faber, Arnhemsestraat 34, Velp

telefoon 08302-4037



Wolters-Noordhoff

Wiskunde en de Gouden Eeuw

Voor de 17e eeuw is op vele punten aan te wijzen hoe maatschappelijke drijfveren grote ontwikkelingen in de wiskunde stimuleerden en hoe omgekeerd deze evolutie van zeer groot belang was voor de economische ontplooiing van de samenleving.

Dit proces beschrijft *drs. H. Pleysier* in zijn openbare les:

Een beschouwing over de ontmoeting tussen wiskunde en maatschappij in de Gouden Eeuw.

f 2,90,- ISBN 9001713106

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.



Wolters-Noordhoff

Drs. J. van Dormolen: De familie der cos-achtigen	1
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	5
Huiswerk	9
J. P. Aldershof: Werkstukken voor het vak wiskunde	10
Extreem dichte materie in het heelal	13
De Eindexamens 1971	14
Examen Operationele research analyst	30
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	31
Boekbespreking	36
Ontvangen Boeken	40
Didactische literatuur	41
Liwenagel	41
Genootschap voor Geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen	41
Recreatie	42