

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang

1970/1971

no 7

maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Helle - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt f 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nuhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezaand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 10,50. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Eerste interimrapport van de nomenclatuurcommissie

1 Inleiding

Het nieuwe wiskundeprogramma heeft grote veranderingen veroorzaakt in de wiskundige nomenclatuur, die bij het voortgezet onderwijs gebruikt wordt. Het is gewenst dat we trachten tot eenheid te komen ten aanzien van het gebruik van termen en symbolen. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft daarom een commissie samengesteld met de opdracht de eenheid tot stand te helpen brengen. Deze nomenclatuurcommissie vergaderde voor het eerst op 19 februari 1970. Velen zullen vinden dat de commissie eerder geconstitueerd had moeten worden. Dit is met opzet niet gebeurd. Wil men in staat zijn advies uit te brengen betreffende te volgen nomenclatuur, dan zal men eerst met het nieuwe programma de nodige onderwijservaring moeten opdoen. Vandaar dat de commissie betrekkelijk laat ingesteld is.

Het doel, dat ons bij de werkzaamheden voor ogen staat, is te komen tot aanbevelingen betreffende gebruik van bepaalde termen en symbolen. Meer doen dan aanbevelen kunnen we natuurlijk niet. Wel hopen we echter dat de auteurs van schoolboeken met onze aanbevelingen rekening zullen houden bij het samenstellen van kopij voor herdrukken. Zij zouden daardoor een belangrijke bijdrage leveren tot het verkrijgen van eenheid in het Nederlandse wiskunde-onderwijs. Verder hopen we dat de inspectie bij het redigeren van eindexamen-opgaven weer rekening zal willen houden met de adviezen van de nomenclatuurcommissie, zoals ze de afgelopen jaren ook rekening hield met de inhoud van het rapport van de vroegere nomenclatuurcommissie.

We hebben getracht niet een soort keurslijf te ontwerpen. We hebben aanbevelingen opgesteld daar waar we dat noodzakelijk vonden. Veel wordt echter nog aan de individuele smaak van de auteur of van de docent overgelaten. Zo is aanbevolen bij een afbeelding de termen domein en bereik te gebruiken. Voor het domein en voor het bereik van een afbeelding f is geen symbool voorgesteld. Men kan naar believen hiervoor geen symbool gebruiken of bijvoorbeeld D_f , dom_f , B_f , $B(f)$. Als geen symbool voorgesteld is dan is onze bedoeling dat ook in eindexamenopgaven geen symbool gebruikt zal worden.

Wie het rapport van de vroegere nomenclatuurcommissie, gepubliceerd in Euclides 35 (1959–60) pag. 49–78, nog eens doorleest zal merken dat het totaal verouderd is. Men moet het onderhavige rapport dan ook niet zien als een aanvulling van het vroegere, maar als een geheel nieuw rapport.

De commissie bestaat uit Dr. P. M. van Hiele (Voorburg), M. Kindt (Bennekom), D. Leujes (Delft), A. van Tooren (Den Haag) secretaris, G. Tromp (Haarlem), Dr. P. G. J. Vredenduin (Oosterbeek) voorzitter.

2 Algemene opmerking

Variabelen worden cursief gedrukt. Symbolen met een vaststaande betekenis worden romein gedrukt, ook als ze deel uitmaken van een cursief gedrukte tekst. Bijvoorbeeld

$$\sin(2x+a), {}^2\log(x+1), f: x \rightarrow x+3,$$

$$a \in V, V \cap W, \int_a^b (x^2+x)dx.$$

3 De logica

3.1. Verzamelingen

Verzamelingen kan men op twee manieren noteren.

a Door enumeratie van de elementen, bijvoorbeeld

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}.$$

Dat de volgorde geen rol speelt en dat geen enkel element twee of meer keren tussen de accoladen voorkomt is daarbij vanzelfsprekend.

b Door middel van de notatie $\{x | \dots\}$, waarin op de plaats van de stippen de eigenschap komt te staan waardoor de verzameling bepaald is. Bijvoorbeeld

$$\{x | x < 12 \wedge x \text{ heeft geen echte delers}\}.$$

Uit wetenschappelijk oogpunt bezien is deze schrijfwijze niet correct. Ze kan tot contradicties leiden. Deze worden veroorzaakt door de omstandigheid dat niet de beperking wordt opgelegd, dat de variabele x slechts betrekking heeft op elementen van een reeds bekende verzameling. De bovengenoemde schrijfwijze mag dus alleen gebruikt worden als van te voren aangegeven is van welke verzameling de te vormen verzameling een deel is. In ons voorbeeld is dat de verzameling van de positieve gehele getallen. Correct zou dus zijn de notatie

$$\{x \in \mathbb{Z}^+ | x < 12 \wedge x \text{ heeft geen echte delers}\}.$$

De eerstgenoemde notatie is echter wel bruikbaar als uit de context blijkt van welke verzameling een deel gevormd wordt.

Ongeoorloofd zijn dus de definities

$$V \cup W \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in V \vee x \in W\},$$

$$V \times W \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x \in V \wedge y \in W\}.$$

Bij een relatie moeten we van te voren vaststellen dat we te maken hebben met

een relatie van V naar W , waarin V en W bekende verzamelingen zijn. Eerst daarna kunnen we de relatie noteren in de vorm

$$\{(x, y) | \dots\}.$$

Bijvoorbeeld: de relatie van $\mathbb{Z}^+$ naar $\mathbb{N}$

$$\{(x, y) | y \text{ is het aantal echte delers van } x\}.$$

En: de relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$\{(x, y) | x > y\}.$$

Deze relaties zijn dan verzamelingen, die deel zijn van een vooraf vermelde verzameling, namelijk opvolgend van $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$ en van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Uit de beperking van de mogelijkheden verzamelingen te noteren tot de bovengenoemde twee methoden volgt dat verschillende andere notaties, die men wel eens tegenkomt, ongeoorloofd zijn. Zo is ongeoorloofd

$$\{\text{vierkanten}\} \text{ of } \{\text{alle vierkanten}\}$$

voor de verzameling van alle vierkanten.

Een moeilijkheid treedt op bij het noteren van de verzameling van alle geordende paren $(3a, a-2)$, waarin a de reële getallen doorloopt. Uit wiskundig oogpunt is de tekst van de vorige zin al niet fraai. Het woord 'doorlopen' is niet erg duidelijk. Men vertaalt de tekst vaak in symbolentaal door te schrijven

$$\{(x, y) | x = 3a \wedge y = a - 2, a \in \mathbb{R}\}.$$

Deze notatie is suggestief en in de onderbouw waarschijnlijk uit didactisch oogpunt aan te bevelen. Uiteindelijk is echter alleen geoorloofd precies te zeggen wat men bedoelt:

de verzameling van alle geordende paren (x, y) met de eigenschap dat er een reëel getal a bestaat zo, dat $x = 3a \wedge y = a - 2$.

Hiermee correspondeert de correcte schrijfwijze

$$\{(x, y) | \text{er is een } a \in \mathbb{R} \text{ zo, dat } x = 3a \wedge y = a - 2\}.$$

Met behulp van een kwantorsymbool kan dit desgewenst eenvoudiger geschreven worden.

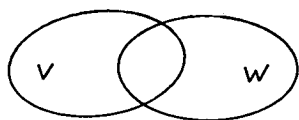
Ook de wel eens gebezigde schrijfwijze voor deze verzameling

$$\{(3a, a-2) | a \in \mathbb{R}\}$$

is ongewenst.

3.2. Venn diagrammen

Een venndiagram (van twee verzamelingen) ziet er als volgt uit:



Essentieel is dat het vlak in vier delen verdeeld wordt, die de gevallen $x \in V \wedge y \in W$, $x \in V \wedge y \notin W$, $x \notin V \wedge y \in W$, $x \notin V \wedge y \notin W$ representeren. Venn heeft zijn diagrammen op deze wijze samengesteld om er bewijskracht aan te kunnen ontleen als een uitspraak over verzamelingen in het algemeen aange- toond moet worden, bijvoorbeeld de eigenschap

$$V \subset W \Leftrightarrow V \cap W = V.$$

Andere figuren, zoals



voor het geval dat $V \subset W$, zijn onder omstandigheden geschikt illustratie- materiaal, maar het zijn geen venndiagrammen.

3.3. Deelverzameling

V is deelverzameling van W wordt doorgaans genoteerd: $V \subset W$. Sommigen geven de voorkeur aan $V \subseteq W$, wegens de analogie met het symbool $\leq$ voor 'kleiner dan of gelijk aan'. Wie echter eerst over deelverzamelingen praat om daarna pas de gelijkheid van verzamelingen te definiëren, zal uit didactisch oogpunt bezwaren hebben tegen het symbool $\subseteq$ en de voorkeur geven aan $\subset$. We zouden ons daarom willen aansluiten bij het meest verspreide gebruik en ' V is deelverzameling van W ' willen noteren: $V \subset W$.

Ten slotte zouden we nog willen opmerken dat de term 'alverzameling' in ons onderwijs gemist kan worden. Ook de term 'complement van een verzameling' kan men missen. In de sporadische gevallen waarin men wil opmerken dat een verzameling U het complement is van een verzameling W ten opzichte van de verzameling V kan men schrijven: $U = V \setminus W$. Als $W \subset V$ is dit immers gelijk- waardig met: U is het complement van W (t.o.v. V).

3.4. Logische operatoren

Omtrent het gebruik van de tekens $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ heersen tegenwoordig geen meningsverschillen meer.

Het teken $\Leftrightarrow$ kan men op verschillende manieren uitspreken: is gelijkwaardig met, is ekwivalent met, dan en alleen dan als. We geven de voorkeur aan 'is

gelijkwaardig met', omdat hierdoor het meest suggestief weergegeven wordt wat men bedoelt. De analyse van de uitspraak

A dan en alleen dan als B

is aanmerkelijk gecompliceerder. Hiermee wordt gezegd dat

A dan als B , d.w.z. $B \Rightarrow A$, en

A alleen dan als B , d.w.z. $A \Rightarrow B$.

En dit blijft altijd weer nodeloos moeilijk.

Om analoge redenen raden we af te zeggen dat A een noodzakelijke en voldoende voorwaarde is voor B .

Om haakjes uit te sparen spreken we af dat $\wedge$ en $\vee$ sterker binden dan $\Rightarrow$ en $\Rightarrow$. In plaats van

$$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$$

mogen we dus schrijven

$$A \vee B \Rightarrow C \wedge D.$$

Het gebruik van een bepaald symbool voor 'niet' zouden we niet graag willen voorschrijven. Wie aan een dergelijk symbool behoefte heeft zouden we het teken $\neg$ willen adviseren.

3.5. *Kwantoren*

Uitspraken van de vorm

er is een x , waarvoor

voor alle x geldt ,

zijn in het huidige onderwijs van veel belang. Men kan de notatie ervan bekorten door een symbool voor de existientiekwantor en voor de alkwantor in te voeren. Of en wanneer men dat wil doen is een kwestie van persoonlijk didactisch inzicht. We hopen dan ook dat symbolen voor kwantoren in eindexamensopgaven niet zullen voorkomen.

Velen zullen wel tot het gebruik van deze symbolen op de duur willen overgaan. Ze hebben dan de keus tussen

$\exists$, $\forall$ en $\vee$, $\wedge$.

'Voor alle geldt' heeft te maken met een conjunctie en 'er is een' heeft te maken met een disjunctie; vandaar de symbolen $\wedge$ en $\vee$, die vormverwantschap hebben met $\wedge$ resp. $\vee$. 'Er is' (existeert) begint met een e en 'alle' begint met een a ; vandaar de omgekeerde E en de omgekeerde A als symbolen voor 'er is' resp. 'alle'. Wat voor de leerlingen het meest suggestief en verreweg het gemakkelijkst is om te onthouden, heeft geen betoog. Vandaar onze voorkeur voor $\exists$ en $\forall$.

Als men zegt

voor alle x geldt ,

dan heeft deze x slechts betrekking op de elementen van een bepaalde verzameling. Als men zegt

voor alle x geldt: $x^2 > -1$,

dan bedoelt men dat dit geldt voor bijvoorbeeld alle reële getallen. Men bedoelt niet dat het voor alle complexe getallen geldt en zeker niet dat het voor alle punten geldt. Dit moet dan ook in de notatie vermeld worden. Indien uit de context reeds blijkt op de elementen van welke verzameling x betrokken is, dan kan men gemakshalve volstaan met te schrijven $\forall x$. Is dat niet het geval en men bedoelt dat x element is van de verzameling V , dan schrijft men

$$\forall x \in V \quad \text{of} \quad \forall_{x \in V}.$$

Hetzelfde geldt voor $\exists$.

Om haakjes uit te sparen kan men afspreken dat de kwantoren reiken tot het eind van de formule, tenzij het tegendeel is aangegeven.

4 De algebra

4.1. Verzamelingen van getallen

Het is nuttig voor de namen van de fundamentele getallenverzamelingen een afwijkend lettertype te gebruiken, namelijk

- $\mathbb{N}$ voor de verzameling van de natuurlijke getallen,
- $\mathbb{Z}$ voor de verzameling van de gehele getallen,
- $\mathbb{Q}$ voor de verzameling van de rationale getallen,
- $\mathbb{R}$ voor de verzameling van de reële getallen.

Door toevoeging van een $+$ of een $-$ worden de namen van de bijbehorende deelverzamelingen positieve of negatieve getallen verkregen:

- $\mathbb{Z}^+$ voor de verzameling van de positieve gehele getallen,
- $\mathbb{Q}^-$ voor de verzameling van de negatieve rationale getallen.

In overeenstemming met het heersende gebruik worden deze letters romein gezet (rechttop bij vaste betekenis).

De natuurlijke getallen worden opgevat als kardinaalgetallen van eindige verzamelingen. Dit houdt in dat 0 tot de natuurlijke getallen wordt gerekend. We verwijzen in dit verband naar de 'korrel' in Euclides 46 (1970–71), pag. 70–71, waar men de motivering voor dit advies vindt.

Voor geordende paren en voor intervallen zijn allerlei notaties in gebruik. Om vergissingen en verwarringen te voorkomen stellen we voor de notaties voor geordende paren duidelijk verschillend te maken van die voor intervallen. De ronde haken worden gereserveerd voor geordende paren:

$$(a, b).$$

Bij intervallen geeft men het gesloten karakter aan door het gebruik van vierkante haken, het open karakter door dat van gebroken haken:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

Wanneer een van de twee grensgetallen van een interval ontbreekt, dan heeft dat interval aan die kant een open karakter en dan wordt daar dus een gebroken haak gebruikt in de notatie. Het ontbreken van het grensgetal wordt door een pijl aangegeven. Zo komen we bijvoorbeeld tot

$$\mathbb{R}^+ = \langle 0, \rightarrow \rangle.$$

Het woord 'gesloten' wordt ook gebruikt bij de bespreking van de structuur van de fundamentele getallenverzamelingen: $\mathbb{N}$ is gesloten voor de bewerking optellen. Bezwaar is hiertegen niet. Wel zouden we willen opmerken dat de term 'gesloten' in deze betekenis in ons onderwijs gerust gemist kan worden. Bezwaar hebben we wel tegen de termen 'eenheidselement' en 'nulelement'. Men kan beter spreken van het neutrale element (van een verzameling ten opzichte van een bewerking). Men komt dan niet tot vreemdsoortige uitspraken als: 0 is het eenheidselement van $\mathbb{R}$ t.o.v. de optelling. Tegen stippelnotaties, zoals

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

voor de verzameling $\mathbb{N}$, zijn wetenschappelijk gefundeerde bezwaren in te brengen. Toch zal iedereen ze aanvaarden om didactische redenen. Eveneens zal men de schrijfwijze

$$\{0, 1, 2, \dots, 100\}$$

toelaten voor

$$\{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 100\}.$$

'Enzovoorts' en 'tot en met' worden weergegeven door precies drie stippen.

4.2. *Vergelijkingen en ongelijkheden*

Dit onderwerp heeft de commissie weinig moeilijkheden gegeven. Er zijn geen principiële verschillen in schrijfwijze voorhanden, hoogstens enkele minder principiële verschillen in woordgebruik. En daar beperken we ons dus toe. Sommigen spreken van een vergelijking met onbekende x , anderen van een vergelijking met variabele of veranderlijke x . De laatstgenoemde terminologie

is door de Staatssecretaris gebezigd in het 'Voorlopig leerplan'. Ook wij zouden de voorkeur geven aan 'veranderlijke'. Wie spreekt in de onderbouw over een vergelijking met onbekende x wekt de indruk dat letters verschillende functie kunnen hebben, namelijk dat ze een willekeurig element uit een verzameling kunnen voorstellen maar ook wel een bepaald, maar voorlopig nog onbekend element. Om dit misverstand tegen te gaan, en te accentueren dat een (cursieve) letter *altijd* een willekeurig element uit een bepaalde verzameling voorstelt, zouden we de term 'onbekende' liever niet willen gebruiken.

De multivalentie van het woord 'oplossing' is kenmerkend voor de ontwikkeling van de Nederlandse taal in onze tijd. Vele woorden op -ing delen dat lot. Bij 'de verdeling van de buit' kan men denken aan het verdeelproces, maar ook aan het door dat proces opgeleverde eindresultaat. En 'de opstelling van het elftal' is een bezigheid vermeld in de taakomschrijving van de trainer en ook het resultaat van die bezigheid.

Wij leggen ons bij deze ontwikkeling neer en geven dus de voorkeur aan

$$(3, 5) \text{ is een oplossing van } 7x - 3y = 6,$$

boven bijvoorbeeld

$$(3, 5) \text{ is een wortelpaar (wortelvektor) van } 7x - 3y = 6.$$

Het is konsekwent dan ook te zeggen

$$3 \text{ is een oplossing van } 7x - 15 = 6,$$

maar tegen 3 is een wortel van $7x - 15 = 6$ hebben we geen bezwaar.

Het vinden van de oplossingsverzameling (en dat proces heet dan ook weer de oplossing) kan op twee gelijkwaardige manieren gebeuren. Men kan een rij gelijkwaardige beweringen of een rij gelijke verzamelingen construeren. Wordt bijvoorbeeld gevraagd de vergelijking $x^2 + 3x - 4 = 0$ in $\mathbb{N}$ op te lossen, dan schrijft men

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{N} | x^2 + 3x - 4 = 0\} &= \{x \in \mathbb{N} | (x+4)(x-1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} | x = -4 \vee x = 1\} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 4 = 0 \wedge x \in \mathbb{N} &\Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \wedge x \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow (x = -4 \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

In de eerste oplossing is de oplossingsverzameling het laatste exemplaar van de rij gelijke verzamelingen en dat lijkt dus enkele voordelen te bieden. Anderzijds verschaft ook de tweede oplossing alle informatie, die de steller van de opgave wenst, zodat men ook daarmee tevreden kan zijn.

Het lijkt nuttig nog een paar woorden te besteden aan de bijzondere gevallen, die zich bij het oplossen van vergelijkingen voer kunnen doen. Soms is de oplossingsverzameling leeg. Dit blijkt nadat men de vergelijking opgelost heeft,

zodat het een nodeloze taalverkrachting is die vergelijking dan onoplosbaar te noemen. Er is geen behoefte meer aan de termen vals en identiek. In plaats van

$$x^2 = 5 \ (x \in \mathbb{N}) \text{ is een valse vergelijking,}$$

of

$$x^2 = 5 \text{ is vals in } \mathbb{N}$$

gebruiken we immers toch

$$x^2 = 5 \ (x \in \mathbb{N}) \text{ heeft een lege oplossingsverzameling.}$$

De begrippen 'strijdigheid' en afhankelijkheid' willen we echter niet graag missen. Het eerste van die twee wordt zonder wijziging overgenomen uit de oude praktijk: een stelsel vergelijkingen heet strijdig indien de oplossingsverzamelingen van die vergelijkingen een lege doorsnede hebben, dus indien de oplossingsverzameling van het stelsel leeg is. Het begrip 'afhankelijkheid' is echter aan een herwaardering toe.

Vroeger kon men zeggen

$$\text{de vergelijkingen } 2x - 5y = 7 \text{ en } 4x - 10y = 14 \text{ zijn afhankelijk,}$$

terwijl men tegenwoordig in plaats daarvan gebruikt

$$2x - 5y = 7 \Leftrightarrow 4x - 10y = 14.$$

De oude afhankelijkheid had iets te maken met gelijkheid van oplossingsverzamelingen. Het gebruik van hetzelfde woord in wiskunde II pleit er voor nu een iets ruimere inhoud er aan te geven: een stelsel vergelijkingen heet afhankelijk indien er een echt deelstelsel bestaat waarmee het gelijkwaardig is. Een voorbeeld van een afhankelijk stelsel is dan:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

omdat elk deelstelsel, dat twee van de drie vergelijkingen bevat, gelijkwaardig is met het hele stelsel.

Tot slot van deze paragraaf nog een kleinigheid: om redenen, die in het hoofdstuk over functies vermeld worden, adviseren we voortaan de termen 'eerste-grads' en 'tweedegraads' te gebruiken in plaats van 'lineair' en 'kwadratisch'.

4.3. *Relaties*

Er zijn verschillende manieren voorhanden om in de onderbouw het begrip 'relatie van V naar W ' te introduceren. Op grond van didactische voorkeur maakt men daaruit een keuze. Zo kan men zowel tot de notatie

$$\text{de relatie } x + 2y = 6 \text{ van } \mathbb{N} \text{ naar } \mathbb{N},$$

komen als tot de daarvan afwijkende notatie

de relatie $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 2y = 6\}$.

Bij de eerste moet per traditie bekend zijn dat bijvoorbeeld het paar $(4, 1)$ wel aan de relatie voldoet en het paar $(1, 4)$ niet. Alleen de tweede notatie geeft alle bedoelingen duidelijk weer. Niettemin achten we in de onderbouw beide bovengenoemde versies bruikbaar en acceptabel. In examenopgaven geven we vanzelfsprekend de voorkeur aan de tweede.

Het genoemde voorbeeld vervult nog een tweede functie. Het staat natuurlijk iedereen vrij om in dit geval te spreken over een relatie *in* $\mathbb{N}$ in plaats van over een relatie *van* $\mathbb{N}$ *naar* $\mathbb{N}$. Voor officiële documenten adviseren wij echter konsekwent gebruik van de van-naar-terminologie.

Er bestaat veel verwarring ten aanzien van de begrippen 'domein' en 'bereik'. Het doorhakken van deze knoop behoort zeer bepaald tot de taak van de nomenclatuurcommissie. Na vele discussies kwam de volgende aanbeveling tot stand:

Het lijkt ons niet nodig de genoemde begrippen al meteen bij de behandeling van de relaties in te voeren (men kan wachten tot de functies en afbeeldingen aan de orde zijn). Maar als men het toch doen wil, dan gebruike men uitsluitend de woorden 'domein' en 'bereik' en wel in de volgende betekenis:

Bij een relatie van V naar W verstaat men onder het domein van die relatie de verzameling van de elementen van V , die als eerste element in een tot de relatie behorend geordend paar voorkomen. Onder het bereik van de relatie verstaat men de verzameling van de elementen van W , die als tweede element in een tot de relatie behorend geordend paar voorkomen.

Vanzelfsprekend zal men ook in de onderbouw al over de inverse van een gegeven relatie spreken. Later behandelt men de functies en afbeeldingen als bijzondere relaties en dan komen ook de inversen van functies aan bod. Nu doet zich daarbij de situatie voor dat een bepaalde functie van V naar W als *functie* geen inverse heeft, maar als *relatie* wel een inverse bezit (elke relatie bezit een inverse). Om die reden pleiten we er voor geen speciale notatie in te voeren voor inverse relatie, wel voor inverse functie.

Ook als men een relatie van V naar W niet wenst te definiëren als een deelverzameling van $V \times W$ zal men toch over die deelverzameling willen spreken. In dat geval zou men hem dan kunnen noemen: de oplossingsverzameling van de relatie. In navolging van Bourbaki wordt soms ook de benaming 'grafiek van de relatie' gebruikt. Deze term willen we echter reserveren voor het beeld van die verzameling in een coördinatenvlak.

4.4. Functies

Een functie van V naar W worde gedefinieerd als een relatie van V naar W ,

die de bijzondere eigenschap heeft dat elk element van V in *ten hoogste één* tot die relatie behorend geordend paar optreedt. Hierdoor wordt alweer een dikke knoop doorgehakt. Allerlei argumenten voor deze beslissing worden hieronder genoemd.

Aan de aard van de verzamelingen V en W worden hierbij geen bijzondere eisen gesteld. In de onderwijspraktijk komen functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ het meest frekwent voor. Maar bij het inrichten van een lijn g als getallenlijn hebben we te maken met een functie van $\mathbb{R}$ naar die lijn g , bij het inrichten van een vlak Π als coördinatenvlak gebruiken we een functie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar Π . In allerlei leerplannen en examenprogramma's komen de functies van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ als apart onderwerp voor. In de meetkundige onderwerpen van de leerstof treffen we spiegelingen, rotaties en translaties aan als functies van Π naar Π .

De woorden 'functie' en 'afbeelding' worden door ons als synoniem beschouwd. Het is nuttig ze in de klas door elkaar te gebruiken. We hadden natuurlijk ook wel het woord 'functie' kunnen reserveren voor bijzondere relaties naar $\mathbb{R}$ en voor alle andere gevallen het woord 'afbeelding' kunnen adviseren. We vonden het echter verstandig dat niet te doen.

Voor afschaffing van een van de twee woorden voelden we ook niet. Het woord 'functie' is erg diep geworteld in onze traditie en het woord 'afbeelding' heeft zo'n beeldende waarde, past zo goed bij begrippen zoals origineel en beeld. Met het woord 'transformatie' is het anders gesteld. Ook dit woord heeft een beeldende waarde. De beelden, die het oproept, hebben echter te maken met verplaatsing en met vormverandering. En dat zijn nu juist verkeerde beelden in de situatie waarin we dat woord vaak gebruikten. We vinden het dus nuttig de rotaties, spiegelingen en translaties voortaan te noemen afbeeldingen of functies van het vlak naar zichzelf.

In de vorige paragraaf werd al even vooruitgelopen bij de bespreking van de begrippen 'domein' en 'bereik'. Bij de relaties waren dat facultatieve onderwerpen, maar bij de functies behoren ze tot de verplichte stof. Ter verkrijging van de nodige eenheid raden we aan deze twee woorden te kiezen uit de ruime voorraad ekwivalente termen (bron, definitieverzameling, beeldenverzameling enzovoorts). Voor de definities verwijzen wij naar de vorige paragraaf.

Methoden om een functie te noteren:

Met de functie $f: x \rightarrow f(x)$ van V naar W bedoelen we een functie, waarvan het domein bestaat uit alle $x \in V$, waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.

Zo is het domein van de functie

$$f: x \rightarrow \sqrt{(100-4x^2)} \text{ van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R} \text{ de verzameling } [-5, 5].$$

Willen we het domein een extra beperking opleggen, dan moeten we dat vermelden.

Met de functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$g: x \rightarrow \sqrt{(100-4x^2)} \text{ voor } x \geq 0$$

bedoelen we een functie, waarvan het domein bestaat uit alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\sqrt{(100-4x^2)}$ betekenis heeft en bovendien geldt $x \geq 0$. Het domein van deze functie is dus $[0, 5]$.

Er kunnen desgewenst speciale notaties voor domein en bereik van een functie afgesproken worden. Bijvoorbeeld D_f of $D(f)$ en B_f of $B(f)$. Wij willen dat echter niet verplicht stellen. In examenopgaven kan men zonder bezwaar formuleringen opnemen zoals 'Wat is het domein van de functie f ?'

Als f een functie van V naar W is en $(a, b) \in V \times W$ is een tot die functie behorend geordend paar, dan noemt men b *het f -beeld van a* en omgekeerd a *een f -origineel van b* . Indien geen verwarring mogelijk is kan men natuurlijk ook kortweg over het beeld, een origineel spreken.

Voor elke $b \in W$ verstaat men onder het volledig f -origineel van b de verzameling van alle f -originelen van b . Dit is in elk geval een deelverzameling van het domein van f . Het kan ook een lege verzameling zijn, namelijk als b geen element is van het bereik van f .

Voor elke $A \subset V$ verstaat men onder het f -beeld van A de verzameling van de f -beelden van de elementen van A . Hierin hoeft A geen deelverzameling van het domein van f te zijn.

Voor elke $B \subset W$ verstaat men onder het volledig f -origineel van B de vereniging van de volledige f -originelen van de elementen van B , dus de verzameling van de f -originelen van de elementen van B . Hierin hoeft B geen deelverzameling van het bereik van f te zijn.

Het begrip 'volledig f -origineel' kan nuttig zijn bij beschouwingen over continuïteit. Ook in de onderbouw kunnen we er profijt van hebben. Het stelt ons namelijk in staat de term 'nulpunten' te elimineren, die dubbelzinnig was en vaak begripsverwarringen veroorzaakte. In plaats van te vragen naar de nulpunten van een gegeven functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ kunnen we nu vragen naar het volledig origineel van 0. En bij een functie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is elke niveauverzameling (liever niet niveaulijn of niveaukromme) het volledig origineel van een of ander reëel getal.

In het bovenstaande werden geen speciale notaties gebruikt voor de genoemde elementen en deelverzamelingen. Dit gebeurde met opzet, omdat de nomenclatuurcommissie bezwaren heeft tegen bepaalde min of meer gangbaar geworden notaties.

Natuurlijk wordt de notatie $f(a)$ voor het f -beeld van a aanvaard. Is f een functie van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ naar W , dan zouden we voor het f -beeld van bijvoorbeeld $(3, 2)$ moeten schrijven (als we konsekvent waren) $f((3, 2))$. In dat geval aanvaarden we echter $f(3, 2)$.

Bezwaar hebben we echter tegen de overeenkomstige notatie $f(A)$ voor het f -beeld van de deelverzameling A van V . De functie f koppelt elementen van V aan elementen van W , niet deelverzamelingen van V aan deelverzamelingen van W . In $f(a)$ moet a domein-element zijn, in $f(A)$ daarentegen hoeft A geen domein-deel te zijn. Het gebruiken van een analoge notatie kan begrips-

verwarring in de hand werken.

Op grond van soortgelijke argumenten wordt het invoeren van ad-hoc-notaties voor origineel van een element, volledig origineel van een element of verzameling ontraden. Men treft hiervoor wel eens de f^{-1} notatie aan. Om de daaraan verbonden gevaren in te zien vraag men zich af wat $\sin^{-1}x$ betekent.

Aan het samenstellen van twee functies zijn bij het aanvaarden van de door ons voorgestelde functiedefinitie geen moeilijkheden meer verbonden. Bij gegeven functies f van U naar V en g van V naar W kan men in elk geval $g \circ f$ (uit te spreken als 'g na f') als functie van U naar W definiëren. Het is nu niet nodig de beperking op te leggen, dat het bereik van f deel is van het domein van g . Indien namelijk x behoort tot het domein van f en $f(x)$ niet tot het domein van g behoort, dan wordt aan x door $g \circ f$ geen enkel element van W toegevoegd. In dat geval zal x niet tot het domein van $g \circ f$ behoren en daar is bij de door ons voorgestelde functiedefinitie geen enkel bezwaar tegen. Zelfs mogen het beeld van f en het domein van g disjunct zijn; in dat geval is het domein van de functie $g \circ f$ leeg.

In een voorbeeld stellen we nog even naast elkaar de opvatting

een functie f van V naar W is een relatie van V naar W , die aan elk element van V precies één element van W koppelt

en onze opvatting

een functie f van V naar W is een relatie van V naar W , die aan elk element van V ten hoogste één element van W koppelt.

We beschouwen de functies f en g , die gedefinieerd worden door

$$f(x) = \sqrt{16-x} \quad \text{en} \quad g(x) = \sqrt{4-x^2}$$

en vragen naar de samengestelde functie $g \circ f$.

Omdat $\langle \leftarrow, 16 \rangle$ het domein van f is zou volgens de eerste opvatting ook $g \circ f$ het interval $\langle \leftarrow, 16 \rangle$ tot domein moeten hebben. Maar $f(0)$ is geen element van het domein van g en daarom bestaat $g \circ f$ niet.

Volgens onze opvatting is $g \circ f$ een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, met als koppelingsvoorschrift $x \rightarrow \sqrt{(x-12)}$ en met als domein het interval $[12, 16]$.

De didactische voordelen van onze opvatting zijn zeer duidelijk.

Een slotopmerking nog over het samenstellen van functies. In onze scholen wordt geen algebra in functieruimten bedreven. Er is dus geen enkele aanleiding om f^2 te gaan schrijven voor $f \circ f$. En dat is maar gelukkig ook, want daardoor kunnen we zonder gewetensbezwaren gebruik blijven maken van de vertrouwde $\sin^2 x$ en $\log^2 x$.

Een functie f van V naar W is een bijzondere relatie van V naar W en bezit als zodanig een inverse relatie van W naar V . We stellen voor de functie f omkeerbaar te noemen indien ook die inverse relatie een functie is. Voor die inverse relatie stellen we de naam 'inverse functie van f ' en het symbool f^{inv} voor.

We geven aan f^{inv} de voorkeur boven f^{-1} om redenen, die hierboven vermeld zijn.

Ook in dit geval springen de didactische voordelen van onze opvatting omtrent functies in het oog. Volgens de eerste opvatting zou de functie

$$f: x \rightarrow \sqrt{(x+2)} \text{ van } [-2, \rightarrow) \text{ naar } \mathbb{R}$$

geen inverse hebben, maar wel de functie

$$g: x \rightarrow \sqrt{(x+2)} \text{ van } [-2, \rightarrow) \text{ naar } [0, \rightarrow).$$

Als het functiebegrip op onze manier wordt ingevoerd ligt de vraag voor de hand hoe het staat met de wildernis van injecties, surjecties en bijecties.

Een duidelijke behoefte aan de termen injectie en surjectie blijkt niet te bestaan. We zien het nut van officialisering van die termen dus niet in.

De bijecties zijn in ons werk van fundamentele betekenis (we gebruiken het woord bijectie hier in de volgende betekenis: een bijectie van V naar W is een omkeerbare functie van V naar W , die V als domein en W als bereik heeft). Men denke bijvoorbeeld aan de bijecties die ten grondslag liggen aan coördinatenstelsels. Ook zou men in de combinatoriek een permutatie van een verzameling V kunnen definiëren als een bijectie van V naar V .

Wij menen echter dat we onze leerlingen een terminologie-jungle moeten besparen en willen daarom ook het gebruik van de term bijectie facultatief stellen.

Hierboven hebben we al verscheidene malen een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ in formuletaal aan de lezer voorgesteld. Niettemin is het verstandig aan deze notaties nog een paar regels apart te besteden.

In principe hebben we de beschikking over drie notatie-schema's: de pijlnotatie, de $f(x)$ -notatie en de verzamelingsnotatie. Ze worden hieronder getoond:

$$f: x \rightarrow \frac{x-4}{x+2}$$

$$\text{de functie } f, \text{ gedefinieerd door } f(x) = \frac{x-4}{x+2}$$

$$\text{de functie } f = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x-4}{x+2} \right\}.$$

De eerste twee zijn goed ingeburgerd en hebben daardoor bestaansrecht verkregen. De derde willen we met enige tolerantie tegemoet treden, maar voorlopig nog niet verkiesbaar stellen voor officiële taken.

Tegen

$$\text{de functie } f: x \rightarrow y = \frac{x-4}{x+2}$$

verzetten we ons. Dit wekt de indruk dat f een functie van $\mathbb{R}$ naar een verzameling vergelijkingen is.

De term 'lineaire functie' willen we verbannen omdat deze in wiskunde II een inhoud krijgt, die anders is dan de tot nu toe gebruikelijke. In plaats daarvan willen we 'eerstegraads functie' adviseren. Om konsekvent te zijn bevelen we tegelijkertijd aan voortaan over 'tweedegraads functies' te spreken en niet over 'kwadratische functies'.

4.5. *Rijen*

Een rij t is een functie, die $\mathbb{Z}^+$ als domein heeft (en meestal een deelverzameling van $\mathbb{R}$ als bereik).

Het t -beeld van $n \in \mathbb{Z}^+$ kan genoteerd worden als $t(n)$, maar ook als t_n . Het gebruik van het sigma-teken bij het sommeren wordt sterk aanbevolen.

Statistische examens

De examencommissie van de Vereniging voor Statistiek zal ook in 1971 in tegenwoordigheid van een rijksgecommitteerde, aangewezen door de Minister van Economische Zaken, een aantal examens afnemen, n.l.

- 1 *Algemene Statistiek* op maandag 17 mei 1971 in de Grote Zaal van de Stadsgehoorzaal Breestraat 60 te Leiden.
Aanmelden bij de secretaris van de examencommissie de heer J. Moeliker, Zeemanlaan 5 te Leiden. Het examengeld bedraagt fl. 40,—.
Inschrijvingen tot uiterlijk 17 april a.s.
- 2 *Statistisch Assistent-VVS* } op maandag 3 mei 1971 in Odeon, Rotterdam.
- 3 *Statistisch Analist-VVS* }
- 4 *Statisticus-VVS - tentamen Wiskunde* } op dinsdag 4 mei 1971
- 5 *Statisticus-VVS - tentamen Verplichte Capita* }
- 6 *Toepassingsgebieden (technologisch, economisch)* }

Aanmelden voor examens genoemd onder 2 t/m 6 bij de secretaris, de heer J. P. W. Ritchi, Burg. Zaneveldstraat 250, Maassluis.

Het examengeld voor de examens 2 t/m 5 bedraagt fl. 40,— en voor de examens genoemd onder 6 fl. 75,—.

Inschrijvingen tot uiterlijk 5 april 1971.

De mondelinge examens worden afgenomen op 9, 10 en 11 juni 1971.

De examenprogramma's- en reglementen zijn verkrijgbaar door overmaking van het bedrag op girorekening 202091 t.n.v. de Vereniging voor Statistiek te Rotterdam onder vermelding van het gewenste.

De kosten zijn voor het programma genoemd onder 1. fl. 4,16; voor 2, 3 en 4/5 fl. 6,24 per exemplaar.

Didactische oriëntatie voor Wiskundeleraren

G. KROOSHOF

Groningen

In het najaar van 1970 verscheen het derde deel van het boek DIDACTISCHE ORIËNTATIE VOOR WISKUNDELERAREN van Dr. Joh. H. Wansink. Hiermee werd een stuk werk voltooid, dat gerust uniek genoemd mag worden. Dit was dan ook de reden dat de redactie van EUCLIDES in zijn vergadering besloot dat aan dit werk niet 'zo maar' een boekbespreking zou worden gewijd, maar dat het in een apart artikel zou worden besproken.

Aan de inhoud van zijn delen 1 en 2 liet Wansink enkele motto's vooraf gaan. Bijvoorbeeld in deel 2:

*Although teaching should acquire a technology
it will remain an art; but an artist cannot
develop to the full unless he is master of
the available techniques.*

*We are concerned then with new mathematics,
new ways with old mathematics, contemporary
applications of the subject, and the
psychology of teaching it.*

Fletcher 1964

De aanleiding tot het schrijven van deze boeken vond Wansink in de didactiek-colleges die hij moest geven in Delft, Utrecht, Tilburg en Arnhem. Wat kan men anders doen in zulke colleges dan zijn toehoorders zich laten oriënteren in de problemen van het wiskundeonderwijs, iets te laten zien van de historische ontwikkeling van deze problemen en van hun mogelijke oplossingen, en verder te wijzen op de 'available techniques'.

Voor de lezer die eventueel de delen 1 en 2 niet mocht kennen, geef ik de korte inhoudsopgave:

deel 1: Over de leraar en zijn werk. Schoolorganisatie in Nederland. Het leerplan voor wiskunde. De taal van de wiskunde; logische aspecten; verzamelingsleer. Dril en inzicht; lesmethoden. Toetsingsproblemen. De stelling van Pythagoras.

deel 2: Over inleidende cursussen tot de meetkunde. Metrieken. Het inleidend algebraonderwijs. Uitbreiding van het getalbegrip. Functies en relaties. Vergelijkingen en ongelijkheidsopgaven. Logaritmen en de rekenliniaal. Het limietbegrip.

Toen Wansink in januari 1966 deel 1 en in mei 1966 deel 2 voltooid had, begon zo ongeveer in de wereld van het Nederlandse wiskundeonderwijs de nieuwe fase, die gekarakteriseerd kan worden met de zinnen uit het bovengenoemde motto: *We are concerned then with new mathematics, new ways with old mathematics, contemporary applications of the subject, and the psychology of teaching it.*

Het is dan ook begrijpelijk dat de auteur bezig is een grondige herziening van de delen 1 en 2 voor te bereiden, waardoor ze losser komen te staan van hun oorspronkelijke opzet en het geheel nog meer het karakter krijgt van een standaardwerk voor het hedendaagse Nederlandse wiskundeonderwijs.

Voor het vervaardigen van deel 3 heeft Wansink de medewerking verkregen van een aantal vakmensen op verschillende gebieden van de wiskunde, die elk een bijdrage leverden.

Het boek bestaat daardoor uit een aantal verhandelingen, waarvoor elk van de auteurs persoonlijk verantwoordelijk is. Er heeft dus geen coördinatie van de bijdragen plaatsgevonden.

Van elk van de verhandelingen volgt hieronder nu een korte karakteristiek.

1 *Prof. Dr. W. J. Brandenburg, De modernisering van het wiskundeonderwijs*

Aangezien het woord 'modern' ons aan de tijd bindt, is het niet mogelijk een definitie te geven van 'moderne wiskunde'. Brandenburg definieert: De wiskunde die men heden ten dage in binnen- en buitenland nuttig vindt voor scholieren van het voortgezet onderwijs zullen we 'modern' gaan noemen.

In enkele paragrafen behandelt hij nu de modernisering in verschillende Europese landen en in Amerika.

Daarna bespreekt hij: modernisering van de didactiek van de wiskunde, modernisering van het onderwijs in bijvoorbeeld wiskunde en daarbij in het bijzonder het model van Prof. van Gelder voor de onderwijs-leersituatie.

Tenslotte geeft hij een voorbeeld van een les in moderne wiskunde in de context van een didactisch onderzoek.

2 *Prof. Dr. B. van Rootselaar, Filosofische aspecten van het wiskundeonderwijs*

In deze verhandeling wordt de lezer in de eerste plaats een hoeveelheid achtergrondinformatie verstrekt betreffende de relatie tussen wiskunde en filosofische beschouwingen.

Onder meer worden besproken de gedachten van Frege, Russell en Whitehead, Hilbert, Gödel, Zermelo, Brouwer.

De auteur wijst op het belang van enige kennis van de formele logica voor een didactische oriëntering. Deze kennis doet nl. de principiële eenvoud van de wiskundige redeneringen uitkomen en geeft deze op overzichtelijke wijze weer. In een tweede hoofdstuk geeft de auteur een aantal praktische aanwijzingen en kritische toepassingen. Hij wijdt bijvoorbeeld paragrafen aan het begrip functie en het oplossen van vergelijkingen.

3 *Dr. Joh. H. Wansink, Psychologische aspecten van het wiskundeonderwijs*

Het is niet gemakkelijk van dit bijzonder rijke hoofdstuk een korte samenvatting te geven. Het is in de eerste plaats een pleidooi voor een grotere belangstelling voor de verschillende aspecten van de psychologie, zowel bij de leraarsopleiding als voor hen die al doceren. Op de laatste bladzijde van de verhandeling lezen we o.a.:

De structuur van het instructieproces zal nimmer door de toegepaste psychologie zelfstandig worden bepaald. Maar de leraar van nu zal naar ik verwacht met steeds meer recht bereid gevonden worden met de uitkomsten van psychologie en didactiek ook bij zijn dagtaak rekening te houden. Het geheel en al op eigen intuïtie vertrouwen zal misschien een begenadigd docent voor ongelukken kunnen vrijwaren, maar ik ken geen enkel geldig motief voor hem om niet van de systematische ervaringen van anderen te willen profiteren. Die ervaring van anderen zal hem o.a. kunnen leren, dat de moeilijkheidsgraad van enig stuk leerstof geen universele constante is, maar mede bepaald wordt door de wijze waarop die stof gestructureerd wordt en door de wijze waarop leerlingen ze te verwerken krijgen.

Dit citaat volgt op een uitvoerige bespreking van o.a.: de theorieën van Selz, Herbart, Kohnstamm, de Gestalttheoretische denkpsychologie (in ons land vooral bekend door de geschriften van Van Hiele), de school van Piaget (wiens invloed in Nederland minder groot is dan in het buitenland) en andere psychologen.

Een belangrijke paragraaf is gewijd aan het motivatieprobleem. Een andere aan de denkpsychologie en een aan de wiskundige begaafdheid.

4 *Prof. Dr. F. van der Blij, Structuren*

De auteur van dit hoofdstuk gaat van twee stellingen uit:

1 Voor de docent is het nuttig de structuren te kennen die verborgen zitten in de concrete objecten waar zijn onderwijs over handelt.

2 Wanneer een structuur in voldoende veel verschillende situaties voor-

gekomen is, kan het wenselijk zijn aan de leerlingen deze structuur duidelijk te maken.

Met het oog op deze twee stellingen behandelt de schrijver o.a. verschillende realisaties van abstracte structuren, interactie van structuren en samengestelde structuren. De beschouwingen worden geïllustreerd met verschillende voorbeelden uit de onderwijspraktijk.

5 *Dr. Th. J. Korthagen, Problemen inzake het meetkundeonderwijs*

In zijn inleiding behandelt de schrijver de tegenstellingen die openbaar worden in het huidige wiskundeonderwijs betreffende de plaats van de meetkunde. Enerzijds treffen we de verdedigers van het meetkundeonderwijs aan, die o.a. verwachten dat het bestuderen van meetkundige problemen zal bijdragen aan het ontwikkelen van een zekere inventiviteit. Anderzijds zijn er de wiskundigen, die ervan overtuigd zijn dat het met het meetkundeonderwijs binnen niet al te lange tijd gedaan zal zijn.

De schrijver zelf zegt in zijn hoofdstuk over de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs:

Hoewel de bijdrage van de meetkunde aan de ontwikkeling van de wiskunde steeds geringer zal worden, zal toch de meetkundige intuïtie in die ontwikkeling een grote rol blijven spelen. Aan die verminderende betekenis kan men dan ook geen argumenten ontleen om de meetkunde uit de schoolwiskunde te elimineren. Voor deze schoolwiskunde treedt de fusiegedachte, het uniciteitsstreven steeds meer op de voorgrond.

De volgende paragrafen zijn gewijd aan een bespreking van de analytische meetkunde en de meetkunde met vectoren. In deze paragraaf lezen we o.a.:

Van didactisch standpunt beschouwd verdienen de 'naïeve' behandelingswijzen van Bijl c.s. en Westermann de voorkeur boven de axiomatische van Athen en Bruhn.

Tenslotte wijdt de schrijver een paragraaf aan de mogelijkheden van de meetkunde als keuze-onderwerp.

6 *Drs. A. M. Koldijk, Problemen inzake het algebraonderwijs*

In zijn inleiding bekijkt de schrijver de invloed van de modernisering van de algebra (o.a. sinds het verschijnen van het boek *Moderne Algebra* van Van der Waerden) op de schoolalgebra. Hij constateert dat deze invloed nog niet erg groot is en vraagt zich bijvoorbeeld af of structuren zoals ring en lichaam geen plaats in de schoolwiskunde zouden moeten vinden. Het blijkt dat de schrijver een grote bewondering heeft voor Papy:

als het abstract kan, dan zeker zo!

In de schoolwiskunde wordt het accent verschoven van de algebra naar de analyse. In het programma voor de akte wiskunde l.o. wordt zelfs de algebra beschouwd als onderdeel van de analyse. De schrijver meent dat hiermee aan de algebra tekort wordt gedaan. De algebraïsche structuur behoort tenslotte tot de bourbakiaanse grondstructuren, zegt hij.

Uitgebreide paragrafen worden gewijd aan de functies en de equivalentierelaties. Bij het bespreken van Boole-algebra's komt de vraag op naar de betekenis van de axiomatic in de schoolwiskunde. Tenslotte wordt de plaats van de lineaire algebra in de schoolwiskunde besproken.

7 *Drs. J. van Dormolen, Problemen inzake het onderwijs in de analyse*

Een der aantrekkelijke kanten van dit hoofdstuk is, dat de auteur bij de meeste onderwerpen die hij bespreekt een aantal mogelijkheden overzichtelijk naast elkaar zet en vergelijkt. In de meeste gevallen doet hij geen keuze, maar bespreekt hij voor- en nadelen van elk der mogelijkheden. Bij de bespreking van het onderwerp limieten stelt hij bijvoorbeeld naast elkaar:

- een aritmetische definitie,
- een topologische definitie,
- een definitie met behulp van continuïteit.

De schrijver besteedt aandacht aan de vraag hoe streng de behandeling van de analyse in de schoolwiskunde kan (moet) zijn. Uitvoerig wordt gesproken over de definitie van differentieerbaarheid en over het gebruik van differentiaal. Ook hier weer een overzichtelijk uitstallen van mogelijkheden.

Verder besproken onderwerpen zijn: differentiaalvergelijkingen, invoering van het getal e , integraalrekening en inverse functies.

8 *Prof. Dr. J. Hemelrijk en J. J. Wouters, Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek in het voortgezet onderwijs*

Prof. Hemelrijk geeft in zijn aandeel aan dit hoofdstuk een methodische uiteenzetting o.a. over de onderwerpen: kans, steekproef, wiskundig model en werkelijkheid, het begrip aselector, de samenhang van dit begrip met een axiomatische opzet van de kansrekening en enkele andere onderwerpen die in de wiskundige statistiek in de school aan de orde kunnen komen.

De Heer Wouters begint met een kort historisch overzicht over de statistiek als nieuw leervak in de school. Onder meer wordt besproken het rapport dat een werkgroep van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde onder voorzitterschap van Prof. Hemelrijk in 1967 uitbracht. Verder bespreekt hij reacties op dit rapport en op besprekingen tijdens en na heroriënteringscursussen over statistiek.

De eerste vraag die de schrijver behandelt is: Waarom, aan wie, en wat voor computeronderwijs? (Antwoord op de vraag 'aan wie?': 'aan allen')

Aangezien bij het antwoord op de vraag 'wat voor computeronderwijs?' gekozen wordt voor de algoritmiek, gaat de auteur voort met het bespreken van de betekenis van algoritmen en van het programmeren. Hij pleit voor het laten vervaardigen van programma's door de leerlingen, waarbij er echter voor gewaakt moet worden dat het computeronderwijs niet onttaardt in een programmeercursus. Het programmeren moet middel zijn, geen doel.

Uitvoerig wordt daarna uiteengezet hoe het computeronderwijs zou moeten worden ingericht en welke praktische problemen daarbij overwonnen moeten worden.

Hierna volgen voorbeelden van relaties van het computeronderwijs met het wiskundeonderwijs: oplossen van hogeregraadsvergelijkingen, benaderend berekenen van integralen, mathematische constanten en functies, rijen en reeksen, approximatief rekenen.

10 Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis en Dr. Joh. H. Wansink, *Geschiedenis van de wiskunde*

In rapport nummer 7 van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde was een publikatie opgenomen van wijlen Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis onder de titel *The place of history in the training of a mathematics teacher*.

Met toestemming van Mevr. Dijksterhuis-Niemeijer is de Nederlandse tekst van dit artikel gebruikt voor dit hoofdstuk, dat de betekenis van de studie van de geschiedenis voor de leraarsopleiding en voor het voortgezet onderwijs wil doen uitkomen.

Voor Dijksterhuis is de studie van de geschiedenis van de wiskunde niet alleen een waardevol onderdeel van de opleiding tot wiskundeleraar, maar een noodzaak.

Wansink bespreekt in dit hoofdstuk het gebruik van het boek van Dr. L. N. H. Bunt, *Van Ahmes tot Euclides*. Hij constateert daarbij dat de Mammoetwet de mogelijkheid om in de toekomst dit boek te blijven gebruiken heeft getorpedeerd. Er blijven nog enkele mogelijkheden over om de geschiedenis van de wiskunde onder de aandacht van sommige leerlingen te brengen:

- a. de geschiedenis als keuzeonderwerp
- b. de geschiedenis van de wiskunde incorporeren in het gewone geschiedenis-
onderwijs
- c. de geschiedenis van de wiskunde als onderwerp stellen van scripties of
projectonderwijs.

In dit ongeveer 40 bladzijden tellende hoofdstuk wordt ruime aandacht gegeven aan drie groepen hulpmiddelen: onderwijsmiddelen, leermiddelen en die hulpmiddelen die niet in de eerste of tweede groep onder te brengen zijn.

Ruim een kwart van dit hoofdstuk is gewijd aan de betekenis van het leerboek. Een indeling in typen leerboeken wordt gegeven, er wordt gesproken over de vervaardiging van leerboeken, over de beoordeling daarvan door recensenten, enz.

Verder komen ter sprake leermachines en geprogrammeerde methoden.

Tenslotte hulpmiddelen als video-recorders en overheadprojectors.

Algemene opmerkingen

Een der grootste betekenissen van dit boek in de huidige periode van een ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs, die wel revolutionair genoemd kan worden, is dat het helpt de weg te vinden (oriënteert) in een, wat de schoolwiskunde betreft, grotendeels nog onbetreden gebied. Enkele van de auteurs zijn in dat gebied verkenner geweest. Uit hun ervaringen zijn de door hen geschreven hoofdstukken tot stand gekomen. Het is beslist noodzakelijk dat zij, die straks in de bovenbouw van havo en vwo de nieuwe onderwerpen met hun leerlingen moeten behandelen, kennis nemen van deze ervaringen. Zoals uit de bespreking van de afzonderlijke hoofdstukken wel gebleken is, geven de meeste auteurs geen pasklare oplossingen van de problemen, maar bespreken ze moeilijkheden en mogelijkheden zodanig dat ieder er naar zijn aard en aanleg aanwijzingen in kan vinden voor zijn eigen onderwijs.

Het is te begrijpen dat de oriëntatie die het boek geeft dikwijls geen didactische oriëntatie is. Er zal nog heel wat research moeten plaatsvinden voor een didactische oriëntatie meer gestalte krijgt. Daarom mag dit boek niet als een eindpunt beschouwd worden. Het is met al zijn kwaliteiten een verheugende eerste stap op de weg naar een methodologische en didactische begeleiding van hen die hun werk in de loop van deze jaren steeds moeilijker zien worden. Het moet daarom niet alleen gelezen worden en in een bespreking als deze objectief bekeken, maar het moet aanleiding geven tot aanvullende beschouwingen, tot commentaar, tot experimenten, tot kritische beschouwingen. Euclides is het tijdschrift dat voor commentaren en kritiek in de eerste plaats in aanmerking komt. Er staan hier en daar vragen in dit boek, die de moeite waard zijn om van verschillende zijde beantwoord te worden. Enkele van deze vragen zullen in dit of een volgend nummer van Euclides aan de lezers worden voorgelegd.

Evenals de delen I en II is dit deel III voorzien van een uitgebreide literatuur-opgave en een register.

Dr. Joh. H. Wansink, Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren is een uitgave van Wolters-Noordhoff te Groningen; deel 3 bevat 11 hoofdstukken, 398 bladzijden, waaronder een register en overzicht Personalalia van de auteurs. De prijs is f 32.50

Huiswerk

De redactie stelt zich voor zo nu en dan vragen op te nemen betreffende het wiskundeonderwijs, die bedoeld zijn als een soort huiswerk voor de lezers.

U wordt namelijk verzocht deze vragen niet alleen te lezen en te overdenken, maar ook het resultaat van uw overdenkingen in te zenden. Net als bij het huiswerk van uw leerlingen zal het antwoord dat u geeft misschien te omslachtig of te beknopt zijn, niet helemaal correct of onvolledig. Maar evengoed als het huiswerk van uw leerlingen voor hen en voor u een aanleiding kan zijn tot een vruchtbare discussie, hoopt de redactie ook uit de binnengekomen antwoorden een artikel te kunnen samenstellen, dat een geheel of gedeeltelijk antwoord op de vraag verschaft.

Het is natuurlijk niet nodig dat de redactie het artikel maakt als één van u dat al kant en klaar instuurt, maar iedere bijdrage is welkom.

Hier volgen enkele vragen, voor een deel ontleend aan een van de bijdragen in het boek *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren* van Dr. Joh. H. Wansink.

- 1 Welke betekenis kan het begrip *groep* hebben in de schoolwiskunde? Blijft het voor de leerlingen een naam voor een verzameling met zekere eigenschappen of kan het ook functioneren, zodat de leerlingen er tijdens hun schooltijd mee kunnen opereren?
- 2 Heeft het zin in de schoolwiskunde ook begrippen als *ring* en *lichaam* in te voeren?
- 3 Een collega natuurkundeleraar beweerde onlangs dat de rekenliniaal uit de tijd is, omdat in de meeste bedrijven en laboratoria de tafelrekenmachines hun intree doen. Bent u het daarmee eens?
- 4 Welke volgorde van introduceren in de schoolwiskunde vindt u beter: eerst functie (afbeelding), dan relatie of omgekeerd?
- 5 Welke volgorde van introduceren in de schoolwiskunde vindt u beter: eerst goniometrische verhoudingen (al of niet met hoeken in graden) daarna de goniometrische functies (eventueel via 'wrapping-functions') of omgekeerd?
- 6 Moet de bewijsmethode volgens het principe van de volledige inductie een plaats vinden in de schoolwiskunde? Zo-ja, wanneer voor het eerst?
- 7 Drs. J. van Dormolen schrijft in *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren*, deel 3:
De vraag of men bij het v.w.o. strenger, d.w.z. exacter, dient te zijn dan in de bovenbouw van het h.a.v.o. kunnen we niet zonder meer bevestigend

beantwoorden. Leerlingen die bij het h.a.v.o. wiskunde als examenvak hebben gekozen, zullen dat gewoonlijk hebben gedaan met een weloverwogen doel. Men mag hen niet van dat doel afhouden door milder in het oordeel te zijn. Veeleer zal het verschil tussen de beide schooltypen in de omvang van het programma liggen dan in de diepte van behandeling, al moeten we erkennen dat deze aspecten niet steeds te scheiden zijn. Wat is hierover uw mening?

Genootschap voor Geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen

De voorjaarsvergadering zal gehouden worden op zaterdag 17 en zondag 18 april 1971 te Enschede.

Zaterdag: In de middag Algemene vergadering in een der gebouwen van de Technische Hogeschool; daarna rondleiding over de Campus.
Diner in de Mensa der Hogeschool.

's Avonds wetenschappelijke vergadering in het Hoofdgebouw der Hogeschool.

Zondag: 's Morgens bezoek aan het Natuurhistorisch museum te Enschede, waar zich de collectie Staring (eerste Nederlandse geologische onderzoeken, in de vorige eeuw in Overijssel) bevindt.

Gemeenschappelijke lunch in de Mensa der Hogeschool.

's Middags wetenschappelijke vergadering in het Hoofdgebouw der Hogeschool.

Belangstellenden kunnen zich voor inlichtingen wenden tot de secretaris, Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13 te Breda.

Probleme der Forschung in der Didaktik der Mathematik

Over dit onderwerp wordt een **Congres** gehouden (5. Bundestagung für Didaktik der Mathematik) van 14 tot 16 april 1971, (aankomst 13 april, vertrek 16 april na 13 uur) aan de Pädagogische Hochschule Bayreuth (W. Dld.).

Belangstellenden kunnen nadere informatie verkrijgen van Prof. dr. H. G. Steiner, Bayreuth, Geschwister Schollplatz 3.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

LXXIX De voetpuntscirkels van een driehoek

1 Is P een punt in het vlak van de driehoek $A_1 A_2 A_3$ en zijn P_1, P_2, P_3 de projecties van P op $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$ dan heet de omgeschreven cirkel van $P_1 P_2 P_3$ de *voetpuntscirkel* van P t.o.v. $A_1 A_2 A_3$.

Wij onderzoeken de verzameling v van de voetpuntscirkels, bij veranderlijke P en een vaste driehoek $A_1 A_2 A_3$.

Tot v behoren blijkbaar vier raakcirkels van de driehoek: de ingeschreven cirkel en de aangeschreven cirkels. Tot v behoort eveneens de negenpuntscirkel (die voetpuntcirkel is zowel van het hoogtepunt H als van het middelpunt M van de omgeschreven cirkel). Tot v behoren ook alle, als cirkels opgevatte, wallace-lijnen van de driehoek, als voetpuntscirkels van op de omgeschreven cirkel gelegen punten P .

2 De cirkels van een vlak kunnen eenduidig worden afgebeeld op de punten van een projectieve driedimensionale ruimte S_3 . Analytisch kan de afbeelding als volgt worden verkregen. De vergelijking van een cirkel (op enig coördinatenstelsel) bevat vier willekeurig te kiezen homogene coëfficiënten; men kan deze interpreteren als puntcoördinaten in S_3 . Daar $v \propto^2$ cirkels bevat, zal zij worden afgebeeld op een oppervlak V in de beeldruimte. Dit nader te onderzoeken is het doel van dit opstel. V is zeker geen plat vlak; dat zou betekenen dat de cirkels van v tot een *net* behoren en dus alle een vaste cirkel loodrecht zouden snijden. Dat de vier raakcirkels en ook nog de negenpuntscirkel een gemene normaalcirkel hebben lijkt onwaarschijnlijk, want wij zouden van deze merkwaardigheid zeker gehoord hebben. Overtuigender is: de rechten in een cirkelnet vormen een waaier, terwijl de wallace-rechten de hypocycloïde van Steiner omhullen.

3 Wij gebruiken driehoekscoördinaten: de verhoudingen der afstanden x_1, x_2, x_3 van een punt tot de zijden $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$. Zijn α_i de hoeken van

de driehoek, is $\sin \alpha_i = s_i$, $\cos \alpha_i = c_i$, en is voorts

$$L = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3, \quad (1)$$

$$K = s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2, \quad (2)$$

dan stelt $L = 0$ de oneigenlijke rechte l en $K = 0$ de omgeschreven cirkel k van $A_1 A_2 A_3$ voor. Een willekeurige cirkel heeft dan de vergelijking

$$p_0 K + (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) L = 0 \quad (3)$$

en wij zullen deze afbeelden op het punt (p_0, p_1, p_2, p_3) . Rechte lijnen zijn cirkels waarvoor geldt $p_0 = 0$; in de beeldruimte vullen zij een vlak.

Zij nu $P = (y_1, y_2, y_3)$ een willekeurig punt, waarvan wij voorlopig aannemen dat het niet met een hoekpunt A_i samenvalt en niet op l ligt. De hoogtelijn uit A_1 heeft de vergelijking $c_2 x_2 - c_3 x_3 = 0$; haar snijpunt H_1 met l is $(-1, c_3, c_2)$. De loodlijn uit P op $A_2 A_3$ is de verbindingslijn van P met H_1 , waaruit volgt dat P_1 het punt is met de coördinaten $x_1 = 0, x_2 = c_3 y_1 + y_2, x_3 = c_2 y_1 + y_3$; die van P_2 en van P_3 volgen daaruit door cyclische wisseling.

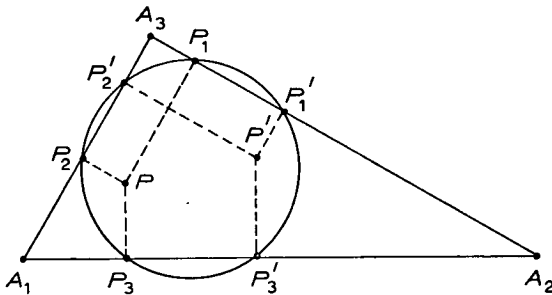
De punten P_1, P_2 en P_3 liggen op de cirkel (3) als de coëfficiënten p_i voldoen aan

$$p_0 s_1 (c_3 y_1 + y_2)(c_2 y_1 + y_3) + \{p_2 (c_3 y_1 + y_2) + p_3 (c_2 y_1 + y_3)\} (s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3) = 0, \quad (4)$$

en de beide analoge homogene lineaire vergelijkingen. De oplossing luidt

$$\begin{aligned} p_0 &= (y_1 + c_3 y_2)(y_2 + c_1 y_3)(y_3 + c_2 y_1) + (y_1 + c_2 y_3)(y_2 + c_3 y_1)(y_3 + c_1 y_2) \\ &= (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) y_1 y_2 y_3 + s_2 s_3 y_1 (y_2^2 + y_3^2) + s_3 s_1 y_2 (y_3^2 + y_1^2) \\ &\quad + s_1 s_2 y_3 (y_1^2 + y_2^2), \\ p_1 &= s_2 s_3 \{(1 + c_1^2) y_1 y_2 y_3 + c_1 y_1 (y_2^2 + y_3^2)\}, \\ p_2 &= s_3 s_1 \{(1 + c_2^2) y_1 y_2 y_3 + c_2 y_2 (y_3^2 + y_1^2)\}, \\ p_3 &= s_1 s_2 \{(1 + c_3^2) y_1 y_2 y_3 + c_3 y_3 (y_1^2 + y_2^2)\}, \end{aligned} \quad (5)$$

waarmee de coördinaten p_i van de voetpunts cirkel $C(P)$ van $P(y_1, y_2, y_3)$ zijn afgeleid.



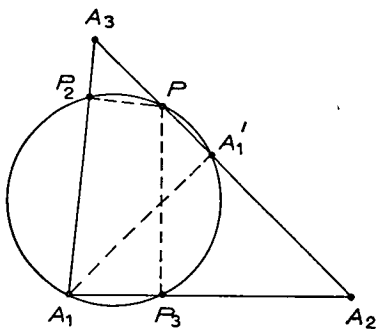
FIGUUR 1

4 We merken allereerst op dat (als $y_1 y_2 y_3 \neq 0$) de verhoudingen der getallen p_i niet veranderen als men de coördinaten y_i elk door hun omgekeerde vervangt. Dat is de analytische bevestiging van de bekende stelling: *isogonaal toegevoegde punten hebben dezelfde voetpuntsirkel*. (fig. 1.)

Als P op $A_2 A_3$ ligt is $y_1 = 0$ en men heeft

$$p_0 = (s_2 y_2 + s_3 y_3), p_1 = 0, p_2 = s_3 c_2 y_3, p_3 = s_2 c_3 y_2, \quad (6)$$

waaruit volgt dat $C(P)$ gaat door $A_1 = (1, 0, 0)$ en door de projectie $A'_1 (0, c_3, c_2)$ van A_1 op $A_2 A_3$, wat ook meetkundig evident is (fig. 2). Valt P met A_1 samen (dus is $y_2 = y_3 = 0$) dan verliezen de uitkomsten (5) hun zin; dat was te verwachten want de voetpuntsdriehoek van A_1 is de ontaarde driehoek ($A'_1 A_1 A_1$) en van A_1 is dus elke cirkel door A_1 en A'_1 een voetpuntscirkel, wat het feit bevestigt dat in de isagonale verwantschap elk punt van $A_2 A_3$ met A_1 geconjugueerd is.



FIGUUR 2

Wij merken verder op dat voor p_0 uit (5) ook kan worden geschreven

$$\begin{aligned} p_0 &= (s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3)(s_1 y_2 y_3 + s_2 y_3 y_1 + s_1 y_1 y_2) \\ &= L(y_1, y_2, y_3) \cdot K(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Daaruit volgt dat van een punt P op de omgeschreven cirkel k (waarvoor $K = 0$) de voetpuntscirkel een rechte is, de wallace-rechte van P . Wij hebben nu de mogelijkheid om ook aan een punt P op de oneigenlijke rechte l , waarvoor de gewone constructie faalt, een voetpuntscirkel toe te kennen, nl. die van het op k gelegen aan P isogonaal toegevoegde punt.

Samenvattend hebben wij dus: *alle van A_1 , A_2 en A_3 verschillende punten P (ook de oneigenlijke) hebben één welbepaalde voetpuntscirkel; omgekeerd behoren bij elke voetpuntscirkel twee punten P , die met elkaar isogonaal verwant zijn. De punten A_1 , A_2 en A_3 hebben elk een bundel van voetpuntscirkels; elk exemplaar daarvan delen zij met een bepaald punt van de overstaande zijde.*

5 Door (5) worden de coördinaten p_i van een voetpuntscirkel lineair uitgedrukt in de vier grootheden

$$q_0 = y_1 y_2 y_3, q_1 = y_1(y_2^2 + y_3^2), q_2 = y_2(y_3^2 + y_1^2), q_3 = y_3(y_1^2 + y_2^2). \quad (7)$$

Omgekeerd kunnen q_i uit (5) worden opgelost als lineaire functies van p_i ; daarvoor is nodig dat de determinant der betrokken matrix ongelijk aan nul is. De lezer kan zichzelf uitdagen dat rechtstreeks aan te tonen, maar zich ook op het feit beroepen dat p_0, p_1, p_2 en p_3 lineair onafhankelijk zijn omdat – zoals boven is opgemerkt – de verzameling v geen cirkelnet is. Wij hebben dan in (7) een toevoeging van de voetpuntscirkel van $P(y_1, y_2, y_3)$ aan een punt in de beeldruimte van eenvoudiger karakter dan door middel van de getallen p_i . De vergelijkingen (7) kunnen worden gelezen als een parametervoorstelling van de door ons te onderzoeken variëteit V ; daarbij wijst y_1, y_2, y_3 hetzelfde punt aan als $(y_1^{-1}, y_2^{-1}, y_3^{-1})$.

Om de graad van V te bepalen moet zij worden gesneden met de snijlijn van twee vlakken $\sum B_i q_i = 0$ en $\sum C_i q_i = 0$. Deze vergelijkingen stellen in het y_i -vlak kubische krommen voor, die dus negen snijpunten hebben. Daaronder zijn echter de vaste (van B_i en C_i onafhankelijke) punten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; daar elk snijpunt (y_1, y_2, y_3) der overige zes gepaard gaat met het snijpunt $(y_1^{-1}, y_2^{-1}, y_3^{-1})$, liggen op de proefrechte *drie* punten van V die dus *van de derde graad* is.

Men kan uit (7) ook de expliciete vergelijking van V afleiden door de parameters y_i te elimineren. Dat kan misschien het meest systematisch gebeuren door de elementaire symmetrische functies van q_1, q_2, q_3 in die van y_1, y_2, y_3 uit te drukken. Het resultaat is

$$4q_0^3 - q_0(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_1 q_2 q_3 = 0. \quad (8)$$

Op V liggen de beeldpunten van de vier raakcirkels van $A_1 A_2 A_3$; zij zijn de voetpuntscirkels van de punten $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ en $(1, 1, -1)$ en de beeldpunten zijn derhalve volgens (7) resp. $Q_0 = (1, 2, 2, 2)$, $Q_1 = (-1, -2, 2, 2)$, $Q_2 = (-1, 2, -2, 2)$ en $Q_3 = (-1, 2, 2, -2)$. Men kan gemakkelijk verifiëren dat elke rechte door Q_0 met V twee in Q_0 vallende punten gemeen heeft; Q_0 is dus een dubbelpunt van V en hetzelfde geldt voor Q_1, Q_2 en Q_3 . *Daarmee is V gedetermineerd als het, veelal naar Cayley genoemde, kubische oppervlak met vier dubbelpunten.*

Het is welbekend dat op zo'n oppervlak negen rechten liggen en wel de ribben van het tetraëder $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3$ en nog drie andere. Voor ons wil dat zeggen: *tot de verzameling v van voetpuntscirkels behoren negen cirkelbundels.* Drie daarvan kenden wij al: die met de basispunten (A_1, A'_1) , (A_2, A'_2) en (A_3, A'_3) . Zij corresponderen resp. met $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$ en de beeldrechten op V zijn dus $q_0 = q_1 = 0, q_0 = q_2 = 0, q_0 = q_3 = 0$. De andere zes zijn die cirkelbundels waartoe telkens twee raakcirkels behoren. De lijn $Q_0 Q_1$ b.v. heeft de vergelijkingen $q_1 - 2q_0 = q_2 - q_3 = 0$ en de betrokken cirkelbundel is die der voetpuntscirkels van de punten der bissectrice $y_2 = y_3$.

Bij een analytische behandeling van het oppervlak van Cayley kiest men veelal de dubbelpunten Q_i als hoekpunten van het coördinatentetraëder. Door de lineaire transformatie

$$\begin{vmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

gaat (8) over in

$$r_1 r_2 r_3 + r_0 r_2 r_3 + r_0 r_3 r_1 + r_0 r_1 r_2 = 0, \quad (10)$$

de bekende standaardvorm voor V . De verzameling v van voetpuntsirkels is dan beschreven in een cirkelcoördinatensysteem dat de vier raakcirkels van de driehoek als fundamenteel-elementen heeft.

6 Met de afleiding van de vergelijking (8) voor de beeldfiguur V van v is een weg geopend voor nadere bestudering van de verzameling der voetpunts-cirkels van driehoek $A_1 A_2 A_3$. Wij beperken ons tot enkele voorbeelden. Een rechte in de beeldruimte heeft met V drie punten gemeen; dus: tot een cirkel-bundel behoren drie voetpunts-cirkels; of anders gezegd: *door twee gegeven punten gaan drie dergelijke cirkels*. Ook een verzameling concentrische cirkels is een bundel; daaruit volgt: *er zijn drie voetpunts-cirkels met een gegeven middelpunt*. Is P een willekeurig punt en M het middelpunt van zijn voetpunts-cirkel dan bestaat derhalve tussen P en M een (1, 3) verwantschap. Een andere toepassing is de volgende. Welke is de verzameling v' van v bestaande uit de voetpunts-cirkels van de punten P gelegen op een gegeven rechte m ?

Is $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0$ de vergelijking van m , dan is (voor $m_3 \neq 0$) $y_3 = -m_3^{-1} (m_1 y_1 + m_2 y_2)$; substitutie in (7) geeft

$$\begin{aligned} q_0 &= -m_1 m_3 y_1^2 y_2 - m_2 m_3 y_1 y_2^2 \\ q_1 &= m_1^2 y_1^3 + 2m_1 m_2 y_1^2 y_2 + (m_2^2 + m_3^2) y_1 y_2^2 \\ q_2 &= (m_1^2 + m_2^2) y_1^2 y_2 + 2m_1 m_2 y_1 y_2^2 + m_2^2 y_2^3 \\ q_3 &= -m_1 m_3 y_1^3 - m_2 m_3 y_1^2 y_2 - m_1 m_3 y_1 y_2^2 - m_2 m_3 y_2^3 \end{aligned} \quad (11)$$

waaruit merkwaardigerwijze volgt

$$(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) q_0 + m_2 m_3 q_1 + m_3 m_1 q_2 + m_1 m_2 q_3 = 0, \quad (12)$$

zodat v' wordt afgebeeld op een *vlakke doorsnede van V* . Dat wil zeggen: *de voetpunts-cirkels van de punten van m behoren tot een cirkelnet*. Dit is een bekende stelling afkomstig van T. Lemoyne¹, die tevens bewees dat het middelpunt van de normaalcirkel van het net samenvalt met de zogenaamde *orthopool* van de

¹) T. Lemoyne, Nouv. Ann. de Mathém. (4), 4 (1904), 401–402; Recherches de géométrie contemporaine I (Paris, 1968), 3–5, 13–14. Encycl. Math. Wiss. III, 1, 7 (1920) (Berkhan-Meyer), 1225.

lijn m t.o.v. $A_1 A_2 A_3$. De genoemde vlakke doorsnede is een kromme van de derde graad en wel, zoals uit (11) blijkt een rationale kromme. Zij heeft dus een dubbelpunt en dat is ook anderszins duidelijk, daar op m twee isogonaal verwante punten liggen: de snijpunten van m en de aan m isogonaal toegevoegde kegelsnede door A_1 , A_2 en A_3 . Het dubbelpunt kan een knooppunt, een keerpunt of een geïsoleerd punt zijn.

7 Over de realiteit der optredende figuren zijn nog interessante beschouwingen mogelijk, maar om dit opstel niet te lang te maken beperken wij ons tot een enkele opmerking. Een reëel punt P heeft uiteraard een reële voetpunts-cirkel en deze heeft ook een reëel beeldpunt. Er zijn echter ook imaginaire punten P met een voetpunts-cirkel die een reëel beeldpunt heeft. Daarvoor is nodig en voldoende dat P en het isogonaal verwante punt P' toegevoegd complex zijn, dus dat de verhoudingen der coördinaten y_1 , y_2 en y_3 complexe getallen zijn met modulus één dus dat $y_1 : y_2 : y_3 = e^{i\varphi^1} : e^{i\varphi^2} : 1$. De voetpunts-cirkel van P heeft dan een reële vergelijking en dus in elk geval een reëel middelpunt. Dat ook de straal reëel kan zijn blijkt uit een eenvoudig voorbeeld. Neem voor $A_1 A_2 A_3$ een gelijkzijdige driehoek en beschouw een cirkel die in het midden van $A_2 A_3$ aan deze zijde raakt, maar $A_1 A_2$ en $A_1 A_3$ niet snijdt; men ziet onmiddellijk in dat deze reële, tot v behorende cirkel de voetpunts-cirkel is van twee op de bissectrice uit A_1 gelegen imaginaire punten.

Korrel CLXX

Cartesius - cartesisch - cartesiaans

(Een kanttekening bij Korrel CLXVII, door een schoolmeester - nietpurist.)

Het is met de uitgangen 'ius', 'isch', 'iaans' iets ingewikkelder gesteld dan het op 't eerste gezicht lijkt.

De uitgangen 'ius', 'nus', 'ianus' zijn oorspronkelijk latijn; ze duiden een afkomst aan (Aegyptius, iemand die uit Egypte komt; Romanus iemand uit Rome; Justinianus afstammeling van Justinus). De uitgang 'jus' is later bijzonder produktief geweest; men heeft ermee namen uit de levende talen gelatineiseerd (*Vossius* van *Voss*, *Cartesius* van *des Cartes*, *Hondius* van *de Hondt*, *Corstius* van *de Corst*).

De uitgang 'isch' is van duitse oorsprong, hetgeen nog blijkt in de uitspraak van de 'i'; hij is vooral gebruikelijk ter vernederlandsing van de latijnse uitgang 'icus' (*arabisch*, *baltisch*, *mathematisch*), waarbij hij concurrentie ondervindt van de vernederlandsing 'iek' via het Franse 'ique' (*artistiek*, *classiek*, *ludiek*) met dubbelvormen (*komisch* naast *komiek*, waarbij het tweede als beter nederlands aan gevoeld wordt).

Tenslotte is er de Nederlandse uitgang 's' (bij de Vries en te Winkel 'sch'), die uiteindelijk van dezelfde oorsprong is als 'isch', ongeveer dezelfde functie vervult als Duits 'isch', maar wel minder wordt gebruikt (ik prefereer *Hilbert-ruimte* of *ruimte van Hilbert* boven *Hilbertse ruimte*, alleen al omdat je dan aan de eigenlijke naam niet hoeft te knoeien).

Dat bij een Nederlandse naam die op 'ius' eindigt, een bijvoeglijk naamwoord met 'iaans' wordt gevormd, is niet juist. De voorbeelden die in Korrel CLXVII gegeven worden, zijn geen van alle overtuigend. Het zijn allemaal gevallen, waar de vorming van het bijvoeglijk naamwoord in 't Latijn heeft plaats gehad en het Latijnse woord dat al de uitgang 'ianus' had, vernederlandsd is (Juliaans, Gregoriaans, Arminiaans, Ariaans). De overgang van 'ius' naar 'iaans' is in het Nederlands niet produktief, misschien nooit produktief geweest. Niemand denkt eraan, van Voss, Hondius, Corstius de bijvoeglijke naamwoorden *vossiaans*, *hondiaans*, *corstiaans* te vormen. Er is geen sprake van dat wij het huis of de hond van, of een instrument ontworpen door, de Nederlandse fysicus Julius Juliaans zouden noemen. *Cartesiaans* heeft zich nog net kunnen handhaven, maar spoedig een andere functie gekregen, namelijk als bijvoeglijk naamwoord bij *Cartesiaan* (volgeling van Descartes – Nederland telde er in de 17e eeuw vele). *Janseniaans* (van Jansenius) en *Calviniaans* (van Calvinus) hebben nooit een kans gemaakt. *Neutoniaans* (van Neutonium) is in onbruik geraakt. *Bernouliaans* wordt nog wel eens gehoord – ik zou een poosje zo kunnen doorgaan.

Voorzover 'iaans' produktief kan zijn, is het dat niet als bijvoeglijk-naamwoord-uitgang bij een naam die op 'ius' eindigt. Hegels en Hegeliaans verschillen duidelijk van betekenis; het eerste heeft op Hegel, het tweede op de Hegelianen betrekking; dat Hegel in 't Latijn Hegelius zou heten, is hier geen punt. De uitgang 'iaans' bij een eigennaam, voorzover produktief, heeft heel duidelijk de functie van 'eigenschap van volgeling van ...'

Het is wel merkwaardig dat *cartesisch* het oorspronkelijke *cartesiaans* heeft verdrongen. Dit is zonder twijfel allereerst in het Duits geschied. Ook voor het Duits, waar men analoog aan het Nederlands *Julianisch*, *Gregorianisch*, *Arminianisch*, *Arianisch* zegt, is *cartesisch* (*kartesisch*) eigenlijk een wat vreemde vorm. Waar zou die vandaan komen? Ik waag een gissing. Zou *cartesisch* ontstaan kunnen zijn onder de invloed van *artesisch*? In natuurkundeboeken van 't begin van deze eeuw komen die woorden nog naast elkaar voor, namelijk waar de luchtdruk behandeld wordt: als *cartesisch* duiveltje en *artesisch* put.

Hoe dan ook, *cartesisch* is een lettergreep korter dan *cartesiaans* en dus een verdedigings-korrel van duizend lettergrepen waard.

Hans Freudenthal, Utrecht.

Zo doe ik het

Nogmaals: Differentialen

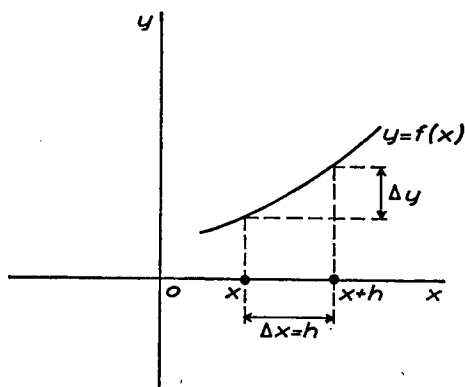
Drs. JOH. RUNHAAR

Eindhoven

Kort na elkaar verschenen in Euclides twee doorwrochte artikelen over de introductie van het differentiaalbegrip (mei 1970, blz. 300 en aug./sept. 1970, blz. 19). Als de redactie het niet te veel vindt worden zou 'k er graag een stukje aan toe willen voegen. Tegen beide artikelen voel ik namelijk wat bezwaren: Het eerste artikel zal bij leerlingen de indruk wekken dat differentialen aan parameters gekoppeld zijn. In het tweede wordt eenzelfde nieuw symbool, 'd', direct voor *verschillende* grootheden ('primaire' en 'toegevoegde' differentiaal) gebruikt, waarna een lang verhaal (ook weer over parameters) nodig is om dit gelijk te breien. Deze beschouwingen over parameters zijn op zichzelf uiteraard zeer juist en waardevol, maar m.i. bij de *introductie* van het differentiaalbegrip niet gewenst. Wellicht heeft het daarom zin te vertellen 'hoe ik het doe' (voor eerste klassen H.T.S.).

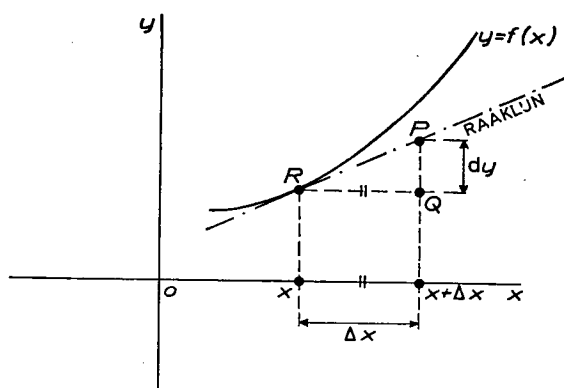
1 Het verschil van twee niet-gelijke x -waarden heet een *differentie* van x . De tweede van die x -waarden noemen we de 'uitgangswaarde', de daarbij gekozen differentie van x duiden we aan met het symbool Δx ofwel met h . Een, bij een vaste uitgangswaarde van x gekozen Δx induceert, als $y = f(x)$, een differentie van y , $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Deze differentie van y is, grafisch gesproken, gelijk aan het verschil van de lengten van de bij $x + \Delta x$ en bij x behorende ordinaten, dus populair gezegd, gelijk aan 'de bij de overgang van x op $x + \Delta x$ behorende aangroeiing van de ordinaat, gemeten tot aan de grafiek van $y = f(x)$ '. (Zie figuur 1.)

2 Een, zowel voor praktische toepassingen (bv. vereenvoudigende benaderingen bij o.a. fysische berekeningen) als voor de theorie (o.a. van de integraalrekening) bijzonder belangrijke grootheid is de *lineaire benadering* van die differentie Δy , die verkregen wordt door in een δ -omgeving van de uitgangswaarde x (waarbij $\delta \geq \Delta x$) de door $y = f(x)$ gedefinieerde functie te vervangen door de functie, waarvan de grafiek de raaklijn in het punt $(x, f(x))$ aan de grafiek van $f(x)$ is. Deze lineaire benadering van Δy heet de *differentiaal* dy ofwel $df(x)$.



FIGUUR 1

Blijkbaar is dy dus de 'bij de overgang van x op $x + \Delta x$ behorende aangroeiing van de ordinaat, gemeten tot aan de *raaklijn* in het punt R aan de grafiek van $f(x)$ '. (Zie figuur 2.)



FIGUUR 2

- 3 Uit figuur 2 volgt: $\tan \angle PRQ = \frac{PQ}{RQ}$, dus $f'(x) = \frac{dy}{\Delta x}$, dus

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

Deze formule kunnen we als formele *definitie* van dy beschouwen. Toepassing van die definitie levert bv. dat:

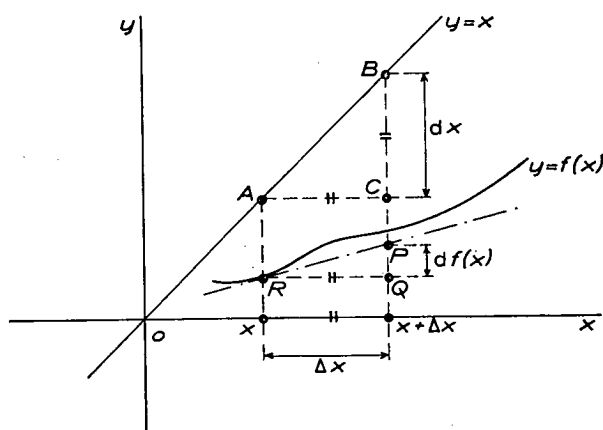
$$\begin{aligned} d \sin x &= (\cos x) \cdot \Delta x, \\ d(x^3) &= 3x^2 \cdot \Delta x, \\ d(2x^2 - x) &= (4x - 1) \cdot \Delta x, \\ dx &= 1 \cdot \Delta x, \quad \text{dus} \quad dx = \Delta x \end{aligned} \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$, ofwel

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

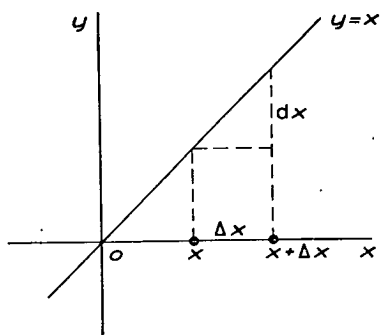
In woorden: De differentiaal van de (functiewaarde van de) door $y = f(x)$ gedefinieerde functie is gelijk aan (de functiewaarde van) de afgeleide, $f'(x)$, van die functie, vermenigvuldigd met de differentiaal van de identieke functie.

(Zie figuur 3: $f'(x) = \frac{PQ}{RQ} = \frac{PQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{df(x)}{dx}$.)

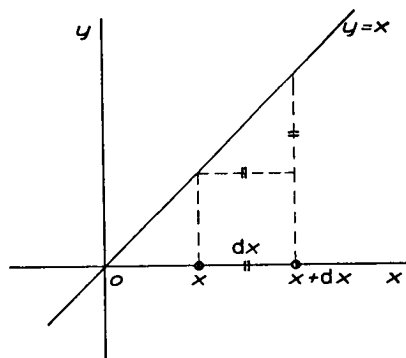


FIGUUR 3

N.B. In meetkundige beschouwingen wordt vaak eenzelfde symbool zowel voor de naam als voor het lengtegetal van een lijnstuk gebruikt. (Bijvoorbeeld: a/c en $a = 2c = 20$).



FIGUUR 4a



FIGUUR 4b

Als *namen* zijn Δx en dx essentieel verschillend en mogen ze niet elkaars plaats innemen (zie figuur 4a), het *getal* Δx echter is gelijk aan het *getal* dx , en in deze zin wordt dx vaak op de plaats van Δx gezet (figuur 4b).

Opmerking: Het in dit 'N.B.' gestelde, gecombineerd met het in één figuur tekenen van de grafieken van $y = f(x)$ en van $y = x$ (zoals in figuur 3) is meestal voldoende om klaarheid te verschaffen aan degenen, die tegen de combinatie van formule (2) met formule (1) protesteren op grond van hun misverstand, dat ' $dx = \Delta x$ wél waar is *als* $y = x$, maar helemaal niet als $y = f(x)$ '.

Boekbespreking

Dr. Hermann Athen, bewerkt door Prof. Dr. Heinz Griesel. *Unterrichtshefte zur Mathematik von heute*; Heft O5; Analysis II, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover 1970. 87 blz., bestelnummer 85025.

(Zie ook Euclides 9, 44e jaargang voor de bespreking van Heft 1).

Aan het slot van de bespreking van Heft 1 merkte ik op met veel belangstelling uit te zien naar het verschijnen van Heft II. Nu dit voor mij ligt ben ik enerzijds geïmponeerd door de hoeveelheid stof die in slechts 87 bladzijden wordt aangeboden, anderzijds wat teleurgesteld in de behandeling ervan.

Aan de orde komen de volgende onderwerpen.

1. De begrippen bovenste en onderste grens.
2. De omkering van het differentiëren.
3. Integraalrekening.
4. Logaritme en exponentiële functie.
5. Oneindige reeksen.
6. Het lichaam van de reële getallen.

De stelling van de bovenste grens in 1 gebruikt, wordt in 6 bewezen met behulp van een inkrimpende rij segmenten (Intervallschachtelung). Dat een 'Intervallschachtelung' juist één reëel getal bepaalt, wordt als axioma gegeven. Verder worden in 1 de bekende stellingen over continue functies kort en bondig afgeleid.

Het 2e hoofdstuk, over de primitieve functies, is eveneens kort gehouden. Maar in 3 (Integraalrekening) wordt een lange en zwaarwichtige theorie opgebouwd via trapfuncties, boven- en ondertrapfuncties, boven- en onderintegralen, om dan heel veel later op de definitie van bepaalde integraal te komen. In dit gedeelte van het boekje (26 bladzijden) komen veel storende drukfouten voor.

In x en e worden in 4 weer vlot behandeld waarna in 5 een wat moeizaam verlopende verhandeling van reeksen (convergentiekenmerken, absolute convergentie, machtreeksen, reeks van Taylor met de restterm in integraalvorm) wordt aangeboden.

In 6 komen nog de tussenwaardestelling, Rolle en de middelwaardestellingen van de differentiaalrekening en de integraalrekening aan de orde. In ons land zouden de Hefte I en II een goede aanloop vormen voor de studie voor wiskunde M.O. A. Het kost mij moeite om in te zien dat deze z.g. Unterrichtshefte op de Duitse gymnasia in een behoefte voorzien. Wel zullen de beide Hefte ongetwijfeld een nuttig hulpmiddel kunnen zijn voor die leraren die een wat diepgaande presentatie van de analyse voor hun v.w.o. leerlingen willen ontwikkelen. De vele vraagstukken die in en na de hoofdstukken worden aangeboden kunnen hiertoe ook veel bijdragen.

J. J. Wouters

Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis, *Simon Stevin. Science in the Netherlands around 1600*, Martinus Nijhoff, The Hague, 1970, 145 blz., f 27,—.

Gedurende enkele decennia reeds geniet het werk van Simon Stevin ruime belangstelling. Na de studies van Henry Bosmans noemen we de aandacht, die Mevr. A. Romein-Verschoor aan hem schonk in *Erflaters van onze beschaving* (1938) en het in 1943 verschenen standaardwerk van wijlen Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis. De door deze laatste uitgesproken wens om voor Stevin het enige monument hem waardig, namelijk een uitgave van zijn verzamelde werken, op te richten is inmiddels in vervulling gegaan: *The principal works of Simon Stevin*, 5 delen, zijn in de jaren 1955 tot 1966 verschenen. Van 1948 dateert nog een Belgisch werk van de hand van A. J. J. van de Velde e.a., een bibliografie van werken van en over Stevin.

Het genoemde boek van Dijksterhuis is niet meer verkrijgbaar. Zelf werkte hij aan een verkorte Engelse uitgave ervan. Deze is nu, nog juist in het 350e sterfjaar van Stevin, verschenen dank zij het werk van Prof. Dr. R. Hooykaas en de onlangs overleden Prof. Dr. M. G. J. Minnaert. De omvang is aanzienlijk verminderd; het boek van 1943 telde bijna 400 pagina's. Dit kon door het weglaten der noten en een flinke inkrimping van sommige hoofdstukken. Zo is het bijv. begrijpelijk, dat in een Engelse uitgave maar weinig aandacht geschonken wordt aan 'Stevin en de Nederlandse taal' (3 pagina's, tegenover 23 in de uitgave van 1943). Gelukkig is de bespreking van Stevins belangrijkste bijdragen, namelijk die op het gebied van wiskunde, mechanica en zeevaartkunde, amper verkort. Daarom is deze nieuwe uitgave hier in de kring van wiskundeleraren zeer aan te bevelen. In *Euclides* hebben wij onlangs (februari 1970, pag. 187) al over Stevin geschreven. Wie meer wil weten neme deze nieuwe uitgave ter hand. Vaak wordt daarin verwezen naar *The principal works*. Ook daar hoort een aanbeveling bij. Stevin schreef zeer duidelijk en zijn werk is nu nog steeds zeer goed leesbaar.

In de lijst van Stevins werken (pag. 134–139) is, zoals de bewerkers al aangeven, de vermelding van herdrukken en vertalingen onvolledig. Zo ontbreekt, naast de Duitse vertaling van 1965 van *De Thiende*, de Nederlandse facsimilé uitgave van hetzelfde jaar; in de inleiding bij deze laatste staat de, ook in *The principal works* nog niet vermelde, eerste herdruk van *De Thiende*, Rotterdam 1621, genoemd.

A. J. E. M. Smeur

Reinhold Baer, *Gruppen mit abzählbaren Automorphismengruppen*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 2, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970, 122 pag., DM 28.

In deze monografie worden bepaalde klassen groepen gekarakteriseerd door aftelbaarheids-eigenschappen van automorfismengroepen. Als voorbeeld van de bereikte resultaten noem ik de volgende stelling, een van de weinige waarvan ik de formulering niet hoeft te laten voorafgaan door een lijst definities: een groep G heeft de eigenschap dat Aut B aftelbaar is voor elk epimorf beeld B van G , dan en slechts dan als G aftelbaar is en elk epimorf beeld B van G een eindige deelverzameling E heeft zodanig dat elk automorfisme van B volledig bepaald is door zijn beperking tot E .

Het lijkt mij niet waarschijnlijk dat dit boek gewaardeerd zal worden door iemand die zich niet speciaal voor oneindige groepen interesseert.

H. W. Lenstra jr.

B. Hornfeck en L. Lucht, *Einführung in die Mathematik*, W. de Gruyter en Co., Berlijn 1970, 127 blz., DM 12.—.

Het boekje is bedoeld om door zelfstudie een brug te slaan tussen de schoolwiskunde en de moderne wiskunde.

Vooraf gaan enkele inleidende hoofdstukken over grondslagen, moderne notatie, som- en produktnotaties, combinatoriek en ongelijkheden (43 blz.).

Daarna volgen: groepen (8 blz.), ringen (8 blz.), vectorrekening (23 blz.), aftelbaarheid resp. niet-aftelbaarheid van verzamelingen (7 blz.), complexe getallen, equivalentie- en congruentierelaties en het getalbegrip.

Het boek besluit met een hoofdstuk 'Lösungen der Aufgaben'.

Een uitstekend leerboekje voor hen die zich gedeeltelijk zelf willen voorbereiden op de nieuwe examens b.v. wiskunde-10 of als begeleiding bij de opleiding voor de examens.

Burgers

C. J. Alders †, K. Cohen e.a., *Wiskunde voor vwo*, 3 V, Wolters-Noordhoff N. V., Groningen, 1970, 154 blz., f 9,75.

Dit deel is bestemd voor de leerlingen van de derde klas van het vwo. Het bestaat uit negen hoofdstukken, t.w. vectoren, relaties, functies en afbeeldingen, vermenigvuldiging, lineaire en kwadratische functies, gelijkvormigheid, ongelijkheden, goniometrie en herhaling. De trigonometrie is bij de goniometrie ondergebracht.

De auteurs beperken zich tot getalverzamelingen wat m.i. een winstpunt is. De strengheid is aangepast aan de leeftijd van de leerlingen. (het is natuurlijk niet fraai als een definitie van b.v. de som van twee vectoren gegeven wordt aan de hand van een figuur. Maar zo'n definitie kritisch bekeken in samenspraak met de klas geeft de leerlingen de kans de exactheid op te voeren).

Een redelijk aantal opgaven besteedt ook zorg aan het doen verkrijgen van technische vaardigheid.

Burgers

M. E. Kok e.a., *Nieuwe wiskunde voor havo*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970, deel 2^a, 165 blz., f 10,25.

Deel 2^a is bestemd voor de derde klas havo. Het is verdeeld in zes hoofdstukken handelend over de rekenliniaal, vergelijkingen met één veranderlijke, vierkants- en gebroken vergelijkingen, vectoren, functies, transformaties en goniometrie (waaraan de trigonometrie is toegevoegd). Het boek besluit met enkele mededelingen over de rekenkundige en meetkundige rijen. De uitvoering is voortreffelijk, duidelijke druk, goede kwaliteit papier.

Enkele opmerkingen:

Zoals ik al eens eerder opmerkte, vindt men bij vele auteurs een niet-consequente behandeling van de oplossing van een vierkantsvergelijking. Men zou kunnen zeggen: smaken verschillen. Zo vind ik op blz. 21, naast elkaar:

$$\begin{array}{rcl}
 3x^2 = 15 & & 3x^2 = 15 \\
 x^2 = 5 & \uparrow & x^2 = 5 \\
 x^2 - 5 = 0 & & x = +\sqrt{5} - \sqrt{5} \\
 (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 & \downarrow & \\
 \{-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\} & & \{+\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}
 \end{array}$$

Deze tweede methode is 'de kortere'. Nu zal de ervaring toch wel geleerd hebben, dat deze 'kortere methode' aanleiding geeft tot nare gewoonten en tot nare fouten. Zo vind ik op blz. 32:

$(x - \frac{1}{4})^2 = 3\frac{9}{16} = \frac{57}{16}$ en dit 'treintje spelen' nog eens bij de afleiding van de 'abc-formule' op dezelfde bladzijde.

Het wordt 'erger' op blz. 79, 81 en 83 waar het volgende wordt voorgedaan.

De functie $x^2 - 2x - 3$ wordt herleid tot $(x-1)^2 - 4$

Om nu de nulpunten te vinden, wordt men getraceerd op $x^2 - 2x - 3 = 0$ opgelost met het 'abc-kanon'.

Een moeilijk te verteren zaak.

De algemene behandeling van de kwadratische functies, nog wel verdeeld in zes gevallen, kan mij niet bekoren. Het gewoon trainen van het 'gezonde verstand' met concrete voorbeelden lijkt me juist, dan het te pas en veelal te *onpas* argumenteren met de discriminant.

Op blz. 48 had ik graag een duidelijke definitie willen zien van 'het verschil $a-b$ ' onafhankelijk van het feit of a en b nu vectoren of getallen zijn.

Tenslotte zou ik in het aanhangsel over rijen het 'constante getal' in de definities willen aanvullen met 'onafhankelijk van de rang-nummers'.

Burgers

H. Wiersma, *Wiskunde Havo 2*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970, 172 blz., f 10,50.

Het boek bestaat uit elf hoofdstukken waarin behandeld worden: functies, vierkantsvergelijkingen, kwadratische functies, kwadratische ongelijkheden, transformaties, vectoren, vermenigvuldigingstransformaties, gelijkvormige transformaties (bedoeld is blijkbaar gelijkvormigheidstransformaties; gelijkvormige transformaties veroorzaken dezelfde deformaties bij verschillend gekozen bases), goniometrische verhoudingen, meetkundige toepassingen en de beginselen van de beschrijvende statistiek.

Om niet in herhaling te vallen, verwijs ik wat het oplossen van vierkantsvergelijkingen betreft, alsook wat de algemene behandeling van de kwadratische functies aangaat, naar de bespreking van het boek van Kok e.a., 'Nieuwe wiskunde voor havo'¹). De uitvoering is goed verzorgd.

Burgers

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

256 Bij een spel wordt alleen met hele guldens gespeeld. Iemand wint $\frac{1}{2}$ deel van zijn bezit minus 135 gulden. Dit gebeurt vier keer achter elkaar. Elke keer wint hij daarbij iets. Met welk bedrag eindigt hij minstens? (B. Kootstra)

Ik kan u alvast mededelen, dat de heer Kootstra door middel van deze opgave de lezers van deze rubriek een gelukkig nieuwjaar wenst².

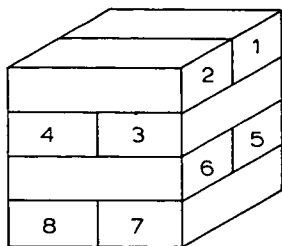
257 Op een ronde galerij komen 27 deuren uit. Van deze deuren worden er 9 groen, 9 paars en 9 bruin geschilderd zo, dat rondgaande elk patroon van 3 kleuren precies éénmaal voorkomt. Onder een patroon van 3 kleuren verstaan we b.v. 'groen, groen, paars', 'groen, bruin, paars'. Hoe kan men dat doen? (Mevr. B. C. Dijkstra-Kluyver)

Oplossingen

254 Op hoeveel manieren kunnen twee rode, twee groene, twee blauwe en twee zwarte stenen gestapeld worden op onderstaande manier?

¹ hiervoor geplaatst.

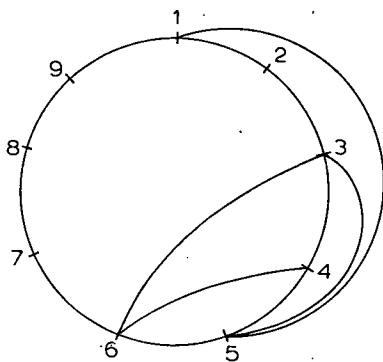
² Tot mijn spijt bereikte deze opgave mij veel te laat (AMK).



De 8 stenen kunnen op $8!$ manieren gepermuteerd worden. Permutaties, die uit elkaar ontstaan door afwisseling van stenen met dezelfde kleur, moeten geïdentificeerd worden. Er zijn dus $\frac{8!}{2^4} = 2520$ stapelingen mogelijk. Door verplaatsing kan men 1 doen overgaan in 2, 7 of 8.

Telkens zullen dus 4 stapelingen geïdentificeerd moeten worden, omdat ze door verplaatsing in elkaar over kunnen gaan. Blijft over 630 verschillende stapelingen. Nu hebben we een fout gemaakt. We hebben namelijk stapelingen geïdentificeerd, die reeds identiek waren. Een stapeling, waarbij kleur 1 = kleur 2, kleur 3 = kleur 4, kleur 5 = kleur 6, kleur 7 = kleur 8, gaat niet door de verplaatsing die 1 in 2 doet overgaan in een nieuwe stapeling over, maar in dezelfde. Dergelijke stapelingen zijn er $4!$. En eveneens $4!$, waarbij 1 in 7 resp. 1 in 8 overgaat. Zodat we ten slotte vinden: $630 + 3 \cdot 4! = 702$ verschillende stapelingen.

255 De ruimtelijke ordening van de negen punten is van geen belang. Men kan zonder de algemeenheid te schaden ze op een cirkel kiezen en nu vragen een zodanige volgorde van de negen punten te kiezen, dat deze door een gesloten kromme in de gegeven volgorde verbonden kunnen worden, welke kromme met de cirkel alleen de negen gegeven punten gemeen heeft en die bovendien zichzelf niet snijdt.



Dat dit soms mogelijk is, is triviaal. Kies als volgorde 1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en men ziet de mogelijkheid.

Kies nu als volgorde 1, 5, 3, 6, 4, 2, ... en het zal niet meer lukken. Laat nu 15 b.v. door het buitengebied van de cirkel lopen. Dan moet 36 door het binnengebied lopen, 64 door het binnengebied, 35 dus door het buitengebied. En nu is er geen mogelijkheid voor de verbinding 42 meer (zie fig.).

Didactische literatuur

uit *Buitenlandse Tijdschriften*

School Science and Mathematics (613–620; nov. 1969–juni 1970).

W. A. Miller, Quadratic extensions of finite fields;
Cecil B. Read, The treatment of the concept of function;
M. Goran, The kinds of scientists;
W. B. Moody and G. H. Wheatly, Evaluating mathematic courses for prospective elementary school teachers.

R. Hunkler, A mantissa is a mantissa is a mantissa;
W. R. Spickerman, Constructing base n addition and multiplication;
D. Hendrickson, What can children tell us about the teaching of science and mathematics;
Cecil B. Reud, Why was my article not published?
R. D. Kerr e.a., A study of selected characteristics of secondary mathematics teachers;
J. O. Johnston e.a., When to correct arithmetic problems – a critical variable;
J. O. Schnur, A study of the possible improvement of problem solving ability in migrant children.

W. D. Romey, What is your creativity quotient?
S. Assad, Variations on variation;
D. J. Zinn, The creation of new knowledge and our way of life;
Ch. T. Manguin and C. W. Knight, Doctoral dissertations research;
J. M. Moser, A note on some irrationals;
R. W. Prielipp, The many pearls of number theory;
L. H. Kanter, On an element of a right circular cone as a degenerate parabola.

D. M. Shafer, Hamming it up;
G. H. Miller, Theory or practice in arithmetic;
M. E. Dahmus, How to teach verbal problems;
A. L. Taylor, In-service training for mathematical and science teachers;
J. W. Alsbaugh, Curriculum change in secondary school mathematics.
D. R. Byrkit, A note on $x^2 - y^2 = 4n$;
C. H. Scott and T. Rude, Plane geometry by vector methods;
J. L. Ginther, An application of Cuisenaire rods in advanced mathematics;
R. W. Burns and N. M. Ellis, What *is* creativity?

H. F. Fehr, The secondary school mathematics curriculum improvement study;
G. S. Hanna e.a., Moderator variables in predicting geometry succes;
R. G. Clason, Multiplication of rate pair;
E. R. Ranucci, Aspects of combinatorial geometry;
B. H. Litwiller, Enrichment.

L. Macarow, New math;
E. F. and R. Karplus, Deductive logic;
F. Vest, Model switching in lessons in subtraction in the elementary grades;
Cecil B. Read, Periodical articles dealing with the history of mathematics;
Ch. W. Trigg, Another type of third order magic squares.

E. Kornhafer en D. Kappus, Designing an algebra I performance curriculums for a heterogeneous student population;
D. Rappaport, Environ mental mathematics;
F. Pavlick, A plausibility argument for an inverse function theorem;
M. H. Ahrendt, The flight of Apollo 11 analyzed with high school mathematics.

Wiskunde en de Gouden Eeuw

Voor de 17e eeuw is op vele punten aan te wijzen hoe maatschappelijke drijfveren grote ontwikkelingen in de wiskunde stimuleerden en hoe omgekeerd deze evolutie van zeer groot belang was voor de economische ontplooiing van de samenleving.

Dit proces beschrijft *drs. H. Pleysier* in zijn openbare les:

Een beschouwing over de ontmoeting tussen wiskunde en maatschappij in de Gouden Eeuw.

f 2,90 ISBN 9001713106

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.



Wolters-Noordhoff

Gids voor A.V. Les- materiaal

Deze uitgave bevat adressen van een groot aantal producenten en leveranciers van audio-visueel lesmateriaal, met een omschrijving van het produkt.

Deze produkten zijn overzichtelijk per onderwerp achter de daarbij behorende tabkaarten gerangschikt, waardoor de gebruiker snel en doelmatig alle gewenste gegevens kan vinden.

De 'Gids voor A.V. Lesmateriaal' is vooral afgestemd op de lespraktijk in het onderwijs maar kan ook van nut zijn bij bedrijfsopleidingen en in de bibliotheken.

Een uitvoerige folder van de uitgave is op aanvraag verkrijgbaar.

Bij intekening - à f 35,00 - ontvangt u de basisinhoud, de tabbladen en de ringband, terwijl u automatisch geabonneerd bent op de toezending van de aanvullingen, die afzonderlijk in rekening worden gebracht. Ook via de boekhandel verkrijgbaar.

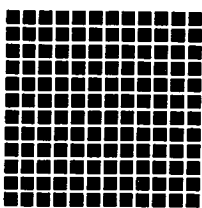
Een uitgave van

Muusses/Wolters-Noordhoff

Besteladres:

Wolters-Noordhoff, Postbus 58, Groningen





Malmbergs

Mathematisch

Project

**Vraag de informatieve brochure
aan bij**



Antwoordnummer 4 's-Hertogenbosch

Modern wiskunde-onderwijs tussen
kleuterschool en universiteit.

Dit project is de Nederlandse naam
van een internationaal opgezet project
dat door een groep van educatieve
uitgevers uit dertien verschillende
landen wordt verzorgd.

Het steunt op onderzoek dat o.a. door
de Unesco in een aantal landen is
verricht.

Op grond van dit onderzoek zijn de
pedagogisch-didactische aspecten
van het wiskunde-onderwijs (en van
het rekenonderwijs dat bij de wiskunde
thuishoort) opnieuw geformuleerd.

De resultaten in de Nederlandse
scholen zijn zeer positief!

Inhoud

Eerste interimrapport van de nomenclatuurcommissie 241

Statistische examens 255

G. Krooshof: Didactische oriëntatie voor Wiskundeleraren 256

Huiswerk 263

Genootschap voor Geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en
natuurwetenschappen 264

Probleme der Forschung in der Didaktik der Mathematik 264

Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 265

Korrel 271

Zo doe ik het 272

Boekbespreking 275

Recreatie 278

Didactische literatuur 280