

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang

1970/1971

no 5

januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oestgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 15,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nuhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Afscheid van redacteur

Dr. D. N. van der Neut

Wegens het bereiken van de pensioengerechtigde leeftijd heeft Dr. D. N. van der Neut zijn ambt als inspecteur voor het voortgezet onderwijs moeten neerleggen. Hij heeft gemeend nu ook te moeten aftreden als redacteur van Euclides. In de laatstgehouden redactievergadering hebben de redactieleden samen met de Heer van der Neut over deze beslissing gesproken en hebben ze zijn argumenten gerespecteerd. Ze hebben dus afscheid van hem genomen als mederedacteur. Toch menen ze dat in het tijdschrift zelf niet aan dit aftreden voorbijgegaan kan worden.

De Heer van der Neut trad niet in de eerste plaats als schrijvend redacteur op de voorgrond. Zijn grote betekenis voor de mederedactieleden bestond in de vele adviezen die hij gaf en zijn bezonnen oordeel in moeilijke situaties. Het spreekt vanzelf dat een inspecteur beschikt over veel 'inside-information'. Voor zover dat mogelijk was heeft hij vooral ook daarmee de redactie steeds geholpen zijn weg te bepalen.

Het was niet alleen via het redacteurschap van Euclides dat de Heer van der Neut zijn invloed aanwendde ten bate van de ontwikkeling van de didactiek van de wiskunde. Al kort na wereldoorlog II was hij een dergenen die een poging deden tot vernieuwing van het leerplan. Mede door zijn invloed zijn de heroriënteringscurssussen voor leraren tot stand gekomen. In de Stichting Jeugd en Wiskunde en als redacteur van de Torussreeks heeft hij meegeholpen aan de ontwikkeling van jeugdig wiskundetalent. Het is in dit verband misschien aardig te vermelden dat toen tien jaar geleden er een wiskundetijdschriftje voor jongeren zou worden opgericht en er over een naam werd gedelibereerd, de Heer van der Neut op een gegeven moment zei: 'Waarom noemen jullie het niet Pythagoras? Pythagoras naast Euclides dat kan toch best?' En zo werd het dan Pythagoras.

Het is te begrijpen dat de Heer van der Neut van de bovengenoemde contacten er een aantal blijft aanhouden. Dat hij gemeend heeft in de redactie van Euclides een plaats voor een jongere te maken moeten we respecteren. Tenslotte heeft hij al weer ongeveer 14 jaar deze plaats bezet. We zullen desondanks wel eens een beroep doen op zijn oordeel en adviezen, zoals trouwens enige tijd geleden al weer gebeurd is.

$\int_a^x f$ is op $[a, b]$ een primitieve van f als f continu is op $[a, b]$

W. AMSE

Heerenveen

In dit artikel zal ik proberen een antwoord te geven op de volgende vraag: Hoe confronteren we onze leerlingen met bovenstaande stelling? Ik stel deze vraag, omdat hier m.i. het kernprobleem in besloten ligt voor hen, die de behandeling van $\ln x$ vooraf zouden willen laten gaan aan die van e^x .

Ik wil evenwel eerst enige zaken noemen, die naar mijn mening het streven om beide functies in deze volgorde te behandelen, ook dienen te vergezellen.

a De leerlingen weten iets omtrent de enige grondeigenschap waarin $\mathbf{R}$ zich van $\mathbf{Q}$ onderscheidt, welke ik als de stelling van de kleinste bovengrens (grootste ondergrens) geïntroduceerd heb.

Enige fundamentele stellingen worden hiermee bewezen, doch we volstaan met het noemen van deze stellingen. Hiertoe reken ik in elk geval de hoofdstelling over continue functies, d.i.: Is f continu op $[a, b]$, dan neemt f hierop een maximum- en een minimumwaarde aan en elke hiertussen gelegen waarde tenminste één keer.

b Een differentieerbare functie is continu, maar continuïteit hoeft geen differentieerbaarheid te impliceren.

c De monotoniestelling, luidende: Is f continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) , dan is f monotoon toenemend op $[a, b]$ als f' definitief positief is op (a, b) en monotoon afnemend op $[a, b]$ als f' definitief negatief is op (a, b) . Deze stelling moet men wel bewijzen en wel via de stelling van Rolle en de middelwaardestelling. Verdediging hiervan:

Een toelichting op de premissen van de stelling van Rolle kan de nog prille kennis van de differentiaalrekening ten goede komen.

Het bewijs vergt uiterst nuttige denkwerk, terwijl aan het slot de confrontatie volgt met de gewetensvraag: Snap ik nu iets van de limietdefinitie of niet?

De middelwaardestelling is zeer welkom bij de introductie van $\int_a^b f(x)$. Het bewijs ervan loopt via een hulpfunctie; de kennismaking hiermee komt ons later van pas bij het bewijs van $\ln ab = \ln a + \ln b$. Wel lijkt het mij gewenst het bewijs

van de monotoniestelling achteraf te geven en eerst met de stelling te laten opereren via het schetsen van grafieken. Aan het onderwerp uiterste waarden wordt dan vanzelf voldoende aandacht besteed.

d Onbepaald integreren als omkering van het differentiëren introduceren. Een primitieve van een functie f is een functie, waarvan f de afgeleide is; het is een element van de verzameling, die aangeduid wordt met het symbool $\int f$.

Voor $n = -1$ is $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ zinledig.

Er zijn nu twee wegen om tot het symbool $\int_a^b f(x)$ te komen.

1 Uitgaan van de volgende voorlopige definitie:

f heet integreerbaar op $[a, b]$ als f hierop een primitieve heeft.

Daar alle primitieven van f een constante verschillen, is het verschil $F(b) - F(a)$ onafhankelijk van de keuze van de primitieve F . Dit verschil wordt met het symbool $\int_a^b f(x)$ aangeduid.

Waarom verdient dit verschil een eigen symbool?

Om dit te achterhalen gaan we het integratievak $[a, b]$ via de naar opklimmende grootte gerangschikte tussenpunten

$$a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = b$$

in segmenten verdelen.

De maximum afstand tussen twee opeenvolgende deelpunten noemt men de *grofheid* van de verdeling.

$$b - a \text{ is nu te schrijven als } \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})$$

$$F(b) - F(a) \text{ als } \sum_{k=1}^n \{F(a_k) - F(a_{k-1})\} \quad (1)$$

F voldoet als primitieve van f op ieder deelsegment ruimschoots aan de voorwaarden van de middelwaardestelling. Gevolg:

Ieder segment $[a_{k-1}, a_k]$ bevat een punt c_k , waarvoor geldt

$$\begin{aligned} \frac{F(a_k) - F(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} &= F'(c_k) = f(c_k) \\ \Leftrightarrow F(a_k) - F(a_{k-1}) &= (a_k - a_{k-1}) \cdot f(c_k) \end{aligned} \quad (2)$$

Substitutie van (2) in (1) leidt tot:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(c_k) \quad (3)$$

Bij *iedere* verdeling van $[a, b]$ behoort een uitdrukking (3), waarvan het rechterlid de volgende eigenschap heeft:

Als de grafiek van f de x -as niet snijdt op $[a, b]$, dan stelt het, afgezien van het teken, de oppervlakte van het vlakstuk S voor, dat de som is van de rechthoekjes, die $[a_{k-1}, a_k]$ als basis hebben en $f(c_k)$ als hoogte. Dit vlakstuk heeft der-

halve de *constante* oppervlakte $F(b) - F(a)$. Het vlakstuk O , dat begrensd wordt door de grafiek van f , de x -as en de loodlijnen in a en b op de x -as opgericht, staat in de volgende 'grafische relatie' tot S :

O komt in een steeds wurgender greep van S , naarmate de grofheid van de verdeling van $[a, b]$ afneemt.

Wat gebeurt nu? Met de absolute waarde van $F(b) - F(a)$ wordt de oppervlakte van het vlakstuk O gedefinieerd.

Hiervan getuigt het symbool $\int_a^b f(z)$, waarin tevens tot uitdrukking komt, dat één en ander via een element van $\int f$ gerealiseerd is.

Als toegangspoort tot de tweede weg diene het volgende:

Is f integreerbaar op $[a, b]$, dan stelt $\int_a^x f$ op $[a, b]$ de functie voor, die aan x het getal toevoegt, dat $F - F(a)$ er ook aan toevoegt. Hierin is F een willekeurige primitieve van f .

Derhalve: $\int_a^x f = F - F(a)$

In woorden: Is F een willekeurige primitieve van f , dan is $\int_a^x f$ de primitieve $F - F(a)$.

Nu luidt de belangrijkste stelling uit de integraalrekening:

$\int_a^x f$ is op $[a, b]$ een primitieve van f als f continu is op $[a, b]$

In onze versie is $\int_a^x f$ alleen gedefinieerd als f een primitieve heeft (d.i. integreerbaar is). Wij komen er dus niet verder mee dan:

Heeft f een primitieve op $[a, b]$, dan is $\int_a^x f$ er ook één.

Dit steekt wel heel bleekjes af tegen bovengenoemde stelling, want deze stelling leert toch maar:

Opdat bij een functie f een functie F bestaat, waarvoor op zeker segment $[a, b]$ geldt

$$F' = f$$

is voldoende, dat f continu is op dit segment.

Op ieder segment, waartoe $x = 0$ niet behoort heeft $f(x) = \frac{1}{x}$ dus een primi-

tieve. Met b.v. $a > 0$ is $\int_a^x \frac{1}{t}$ dus een *nieuwe* functie en op $[a, \infty]$ is de afgeleide

hiervan $\frac{1}{x}$.

Voordat we hiervan gaan profiteren, wenssen we er toch op z'n minst enig idee van te hebben waarom één en ander bij onze opzet verborgen blijft. Dit brengt ons bij de tweede weg, die naar het symbool $\int_a^b f(x)$ leidt.

2 We gaan nu van een functie f uit, waarvan alleen vaststaat, dat hij op $[a, b]$ begrensd is.

We kunnen nu sommen als $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(c_k)$ ad libitum vormen. Hiertoe hebben we op $[a, b]$ slechts een verdeling in segmenten $[a_{k-1}, a_k]$ aan te brengen

en op deze segmenten willekeurige punten c_k te kiezen. Van dit uitgangspunt uit is de weg opwaarts naar $\int_a^b f(x)$ echter zeer moeizaam. Om een kleinigheidje te noemen:

Welke zijn nu de punten c_k , die zo'n som tot het getal maken, waarmee we de oppervlakte van het vlakstuk O kunnen definiëren?

Bij onze eerste versie was eigenlijk alles al in kannen en kruiken op het moment, dat we vanuit onze definitie van integreerbaarheid begonnen te redeneren.

Nu is het zoeken naar de juiste punten c_k , zoals hierboven gesuggereerd werd, een onmogelijke opdracht.

In plaats hiervan beschouwt men de verzameling van alle sommen

$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(c_k)$, waarbij aan c_k geen andere eisen gesteld worden, dan dat het een punt van $[a_{k-1}, a_k]$ is.

Het gaat nu geheel en al om het volgende probleem:

Wanneer bestaat het getal I , dat de volgende eigenschap heeft:

Welke nauwkeurigheidsgraad van benadering ook voorgeschreven wordt, steeds is er een positief getal δ te bepalen zodanig, dat geldt:

Is de grofheid van de verdeling van $[a, b]$ kleiner dan δ , dan worden alle sommen

$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(c_k)$, waar zo'n verdeling aan ten grondslag ligt, nog nauwkeuriger door I benaderd, ongeacht de keuze van de punten c_k .

Opm. De eisen, die aan het getal I gesteld worden zijn nog weer gecompliceerder dan bij een limiet.

We bevinden ons met bovenstaand probleem natuurlijk weer geheel in het rijk van de stelling over de kleinste bovengrens, c.q. grootste ondergrens. We kunnen verder dus niet veel meer doen dan suggereren:

a I bestaat als f continu is op $[a, b]$.

b Met I is het oppervlakteprobleem even effectief uit de wereld te definiëren als het raaklijnprobleem met het afgeleide getal.

Het getal I wordt, zo het bestaat, als $\int_a^b f(x)$ genoteerd. Nog volkomen onopgelost is op het ogenblik de vraag: Hoe bepaal je dit getal? Het begrip primitieve, ja zelfs het begrip onbepaald integreren, hebben tot nu toe geen enkel aanknopingspunt met bovenstaande materie. Maar wel als de volgende stelling bewezen is:

Is f continu op $[a, b]$, dan is door $\int_a^x f$ op $[a, b]$ een differentieerbare functie gedefinieerd, waarvan f de afgeleide is. (4)

Met bovengenoemde begrippen leert deze stelling ons immers hoe we het getal $\int_a^b f(x)$ moeten berekenen.

Is F nl. een willekeurige primitieve van f op $[a, b]$, dan geldt hierop:

$$\int_a^x f = F + c$$

Substitutie van $x = a$ geeft: $\int_a^a f = 0 = F(a) + c \rightarrow c = -F(a)$. Op $[a, b]$

geldt derhalve:

$$\int_a^x f = F - F(a)$$

Substitutie van $x = b$ geeft ten slotte $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$.

Onze definitie $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ was dus wel bijzonder grof geschut.

Dat we hier al spoedig raak mee schoten, is dus geen wonder. Dat we er echter ook mee over ons doel heenschoten, blijkt nog eens aldus:

In onze eerste versie is $\int_1^{10} \frac{1}{x}$ niet gedefinieerd.

$f(x) = \frac{1}{x}$ is immers niet integreerbaar op $[1, 10]$. Overigens is de definitie van integreerbaarheid ook niet de exacte geweest. Deze luidt: f is integreerbaar op het segment $[a, b]$ als het getal I bestaat. Volgens deze definitie is $\int_1^{10} \frac{1}{x}$ dus

wel gedefinieerd, want de continuïteit van $\frac{1}{x}$ op $[1, 10]$ garandeert het bestaan van $I \left(= \int_1^{10} \frac{1}{x} \right)$.

Nu kennen we maar één gedaante voor de primitieven van $f(x) = \frac{1}{x}$ op $[1, 10]$ en deze is $\int_1^x f + c$.

Hiermee is het via het bovenstaande onmogelijk om van het getal $\int_1^{10} \frac{1}{x}$ meer te zeggen, dan dat het het getal $\int_1^{10} \frac{1}{x}$ is.

Nu is dit niet zo'n vreselijk mankement. Per slot van rekening is het getal altijd nog de oppervlakte van een haarscherp te omschrijven vlakstuk O .

Teneinde toch het 'ikserige' uit de notatie te kunnen bannen, is men overeengekomen het getal als $\ln 10$ te noteren, zijnde het beeld van 10 onder de functie $\ln x$.

$\ln x$ is niet meer en niet minder dan een tweede gedaante voor die primitieve op $(0, \infty)$ van $f(x) = \frac{1}{x}$, die ook als $\int_1^x f$ door het leven gaat. T.a.v. $0 < x < 1$

zouden we het volgende commentaar kunnen geven:

Per definitie geldt: $a < b \wedge \int_a^b f = I \rightarrow \int_b^a f = -I$.

Naast (4) geldt: Is f continu op $[a, b]$, dan is $\int_x^b f$ op $[a, b]$ een differentieerbare functie, waarvan $-f$ de afgeleide is.

Voor iedere δ met $0 < \delta < 1$ geldt met $f(x) = \frac{1}{x}$ derhalve op $[\delta, 1]$ eveneens:

afgeleide van $\int_1^x f =$ afgeleide van $-\int_x^1 f = -(\text{de afgeleide van } \int_x^1 f) = f$.

Principe en ontwikkeling van de digitale computer*

Prof. ir. D. H. WOLBERS

Delft

1 Inleiding

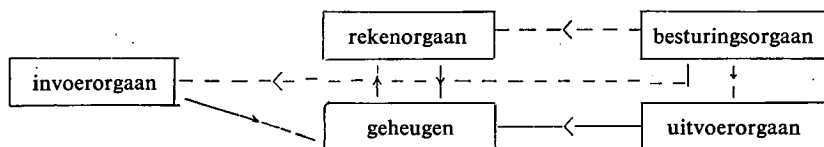
In voordrachten zoals deze wordt vaak naar voren gebracht, dat de digitale rekenmachine pas tot ontwikkeling is gekomen en van geschiedenis nog nauwelijks sprake is. Toch moet men zich langzamerhand afvragen of in deze tijd van steeds sneller voortschrijdende techniek deze uitspraak nog wel waar is. Immers, afgezien van enkele incidentele pogingen, is de eerste elektronische digitale rekenmachine kort na de 2e wereldoorlog ontstaan. Dit is echter reeds 25 jaar geleden zodat we de rekenmachine toch zeker niet meer als volkomen nieuwigheid kunnen beschouwen. Misschien zien we de computer wel zo nieuw omdat zelfs de meest moderne computer van vandaag nog een bijzonder grote mate van overeenkomst vertoont met het eerste exemplaar. Door toepassing van moderne technologieën mag de huidige computer dan veel sneller en betrouwbaarder zijn, er is echter geen sprake van dat het idee en principe van de digitale rekenautomaat door een nieuwe techniek zou zijn achterhaald. Wel is de kennis omtrent ontwikkeling en toepassing van computers in de loop der jaren enorm verdiept en toegenomen. Zo zeer zelfs dat men van een aparte tak van wetenschap, namelijk die van de *informatica* is gaan spreken. Een dergelijke ontwikkeling kan natuurlijk ook niet door het onderwijs onopgemerkt blijven. De computer met zijn toepassingen zal daarmee ook onderwerp van onderwijs in verschillende omvang en op verschillend niveau op vele schooltypen worden. Naast onderwijs over computers gaat in de toekomst ook de computer als hulpmiddel in het onderwijs een rol spelen. In de lezingen en demonstraties in het kader van deze cursus zal getracht worden deze verschillende facetten te belichten. In deze voordracht zal daarbij speciaal aandacht geschonken worden aan het principe van de digitale rekenautomaat, een ruwe schets van de ontwikkelingsgang tot aan de moderne computer alsmede de toepassing van de computer in het onderwijs.

* Voordracht gehouden voor de Vakantiecursus van het Mathematisch Centrum te Eindhoven (aug. 1970).

2 Hoofdorganen van de computer

Bij de beschrijving van het principe van de elektronische digitale computer willen we hier niet ingaan op de werking van de elektronische schakelingen en de daarin gebruikte onderdelen. Het is gebleken dat bij beoordeling van gebruiksmogelijkheden van de computer noodzakelijke kennis op dit gebied pas relevant wordt bij gedetailleerder uitwerking van een automatiseringsproject.

Dit betekent niet dat de elektronica op computergebied van ondergeschikt belang zou zijn. In de ontwikkeling van de computer hebben de grootste veranderingen zelfs binnen dit gebied plaats gevonden. De overgang van elektronenbuizen via transistoren en dioden naar gemicrominiaturiseerde onderdelen en geïntegreerde circuits is ook op computergebied van het grootste belang geweest. Naar gebruikerszijde is dit echter tot uiting gekomen in kleinere afmetingen, grotere snelheid en capaciteit, met tegelijkertijd betere betrouwbaarheid en bovenal een daling in de prijs/prestatie verhouding. Op het niveau van een functionele beschrijving van de computer komen deze verschillen niet meer tot uiting en is het schema van een moderne computer nog vrijwel gelijk aan dat van de eerste rekenmachine. Een dergelijk schema is aangegeven in fig. 1. Hierin kunnen we 5 onderdelen onderscheiden en wel rekenorgaan, geheugen, besturingsorgaan en tenslotte invoer- en uitvoerorgaan.



FIGUUR 1

In het *rekenorgaan* zijn de schakelingen geconcentreerd waardoor werkelijk gerekend kan worden. In de regel is dit beperkt tot de eenvoudigste bewerkingen zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen alsmede enkele andere manipulaties zoals het naar links of rechts schuiven van de cijfers in een getal. Een verdere beperking is meestal dat tegelijkertijd slechts één bewerking op twee getallen kan worden uitgevoerd. Dit betekent bijvoorbeeld dat het optellen van meerdere getallen moet plaats vinden door een overeenkomstig aantal successieve optellingen. Tegenover deze beperkingen staat het voordeel van de grote snelheid waarmee deze handelingen kunnen plaats vinden. Voor moderne machines gelden verwerkingstijden van 1 tot 10 microseconden per handeling. Ieder type computer is meestal geconstrueerd voor een bepaalde lengte van getallen (bijvoorbeeld 9 decimale cijfers) en men geeft dit wel aan met woordlengte. Deze woordlengte is bij het ontwerp zo gekozen dat voor de meeste toepassingen deze voldoende is en tegelijkertijd ook niet te veel overcapaciteit biedt. In de gevallen waarbij de woordlengte dan niet groot genoeg is moeten de getallen maar in delen gesplitst worden zodat ieder deel past binnen de woordlengte, terwijl de gewenste berekeningen dan moeten worden uitgevoerd

door opeenvolgende deelbewerkingen. Gezien de beperkte mogelijkheden van het rekenorgaan enerzijds en de grote snelheid hiervan anderzijds is een opslagorgaan nodig dat met grote snelheid getallen (woorden) kan toevoeren aan of ontvangen van het rekenorgaan. Dit is de primaire functie van het *geheugen*. Het is daartoe verdeeld in eenheden, die meestal gelijk gekozen worden aan de woordlengte. Voor kleine machines in de orde van 10.000, voor grote machines veelal 100.000 of meer woorden. Het aantal wordt bij de huidige stand van de techniek bepaald door de prijs. Voor referentiedoelinden worden deze eenheden genummerd (adressen), waardoor via een adres aangegeven kan worden welk getal bij een bepaalde bewerking betrokken moet worden. Waar rekenorgaan en geheugen werken met zeer grote snelheid en bovendien op elektronische wijze, waardoor de informatie in die vorm voor mensen ontoegankelijk is, zijn twee organen aanwezig om de correspondentie met de menselijke buitenwereld te verzorgen. Dit zijn de in- en uitvoerorganen.

Als *invoerorgaan* geldt in de meeste gevallen nog steeds de ponskaartenlezer. Daarnaast komen in gebruik apparaten voor direct lezen van gedrukt schrift en eventueel geschreven schrift. Onder invoerorgaan in het algemeen moeten we echter ook rekenen het toetsenbord van een elektrische schrijfmachine of telexapparaat mits direct met de computer verbonden. Weliswaar kan invoer van informatie dan slechts in zeer laag tempo plaats vinden. Het invoerorgaan behoeft fysisch echter niet tot één apparaat beperkt te blijven, zodat meerdere langzame apparaten ook parallel voor invoer van gegevens kunnen zorg dragen. Een soortgelijke situatie treedt op bij het *uitvoerorgaan*. Eén der meest gebruikte apparaten en in het bijzonder geschikt voor massale hoeveelheden is de regeldrukker (bijvoorbeeld 1000 regels per minuut met 120 tekens per regel). In langzamer vorm echter ook het bladschrijvend gedeelte van een typemachine of telexapparaat mits direct verbonden met de computer. Speciale vermelding verdient in dit opzicht nog de kathodestraalbuis (display-unit) waarbij informatie zowel in alphanumerieke vorm (letters en cijfers) als ook in getekende vorm kan plaats vinden. *Op dit moment is dit nog een vrij dure zaak.*

Van de vijf hoofdorganen blijft tenslotte over het *besturingsorgaan*, waarvan de functie duidelijk in de benaming blijkt opgesloten, namelijk het zorg dragen voor de gewenste werking van de computer. De wijze waarop dit gerealiseerd wordt, hangt direct samen met het onderwerp van de volgende paragraaf.

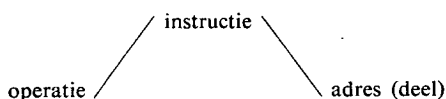
3 Instructies en programma

Nemen we aan dat als onderdeel van een grotere berekening een grootte x bepaald moet worden, zó dat $x = a \times b + c$. Op het moment dat x berekend moet worden, moeten de grootheden a , b en c dus bekend zijn. Dit betekent dat we mogen aannemen, dat de getallen die de waarden a , b en c aangeven op bepaalde plaatsen in het geheugen staan, bijvoorbeeld op de adressen 13000, 13001 en 13002. Ten behoeve van verdere berekeningen zal ook de berekende groot-

heid x wel een plaatsje in het geheugen moeten hebben, bijvoorbeeld op adres 13003. De benodigde handelingen kunnen we als volgt omschrijven:

- 1 haal getal van adres 13000 naar rekenorgaan;
- 2 haal getal van adres 13001 en vermenigvuldig met getal in rekenorgaan, waarna resultaat blijft staan in rekenorgaan;
- 3 haal getal van adres 13002 en tel op bij getal in rekenorgaan;
- 4 breng getal uit rekenorgaan naar geheugenplaats 13003.

Dergelijke elementaire handelingen worden *instructies* of *opdrachten* genoemd. Karakteristiek is daarbij dat we iedere instructie kunnen onderscheiden in twee delen. Ten eerste een omschrijving van de gewenste handeling, ten tweede een opgave van het adres in het geheugen, dat bij elke handeling betrokken is. Het eerste deel wordt wel genoemd de *operatie* en het tweede deel *adresdeel* of kortweg *adres*. Schematisch



Van een gegeven computer is het aantal mogelijke operaties beperkt. In de regel niet meer dan enkele honderden operaties. Deze operaties zijn genummerd waardoor een instructie geheel in getalvorm kan worden weergegeven, aangezien het adresdeel reeds in getalvorm aanwezig is. Een reeks getallen die na deze afspraak een serie instructies kan voorstellen, wordt een *programma* genoemd. Bovendien kan een programma in deze vorm in het geheugen worden opgeslagen (stored program computer). Daarmee heeft het geheugen ook een wezenlijke tweede functie. Naast opslagorgaan voor informatie waarmee gewerkt moet worden, wordt ook het programma in het geheugen bewaard. De totale werking van de computer en in het bijzonder van het bestuursorgaan is daarmee betrekkelijk eenvoudig. In het bestuursorgaan zijn tenminste twee delen (registers) aanwezig, die we zullen aangeven met de namen *opdrachtregister* en *instructieteller*. De instructieteller is niets anders dan een elektronisch uitgevoerd telmechanisme dat zo groot is dat het ieder mogelijk adres in het geheugen kan aangeven. Het opdrachtregister is veelal even groot als de woordlengte van de betrokken machine zodat het in ieder geval een complete instructie kan bevatten.

De executie van achtereenvolgende instructies vindt plaats door steeds drie opeenvolgende fasen in het bestuursorgaan:

- 1e aan de hand van de stand van de instructieteller wordt uit het geheugen een instructie gehaald en geplaatst in het opdrachtregister;
- 2e de inhoud van de instructieteller wordt met een eenheid verhoogd;
- 3e het opdrachtregister geeft, overeenkomstig de op dat moment aanwezige instructie in dit register, elektronisch opdracht aan alle daarbij betrokken onderdelen van de computer tot uitvoering van de genoemde instructie.

Nadat de derde (uitvoerings)fase is beëindigd begint het besturingsorgaan weer opnieuw met de eerste fase waardoor achtereenvolgens alle instructies in de volgorde waarin zij in het geheugen staan, worden uitgevoerd.

Deze sequentiële verwerking kan doorbroken worden door in de serie instructies één van een bepaald soort op te nemen, namelijk een *spronginstructie*. Ook een spronginstructie bestaat normaal uit operatie en adresdeel. In de derde fase van het besturingsorgaan heeft een spronginstructie echter tot gevolg dat het adresdeel van de instructie (op dat moment aanwezig in het opdrachtregister) wordt geplaatst in de instructieteller. In de eerste plaats wordt daarmee het resultaat na de verhoging in de 2e fase teniet gedaan en in de tweede plaats wordt expliciet bepaald waar de volgende instructie, die moet worden opgehaald, in het geheugen staat. Van principieel belang is dat dergelijke sprongoperaties ook bestaan in voorwaardelijke vorm. Daarbij kan de handeling van overbrenging adresdeel van opdrachtregister naar instructieteller afhankelijk gesteld worden van een of meerdere voorwaarden. Bijvoorbeeld de voorwaarde dat het resultaat in het rekenorgaan op dat moment groter of gelijk nul is. Afhankelijk van het vermeld zijn van de voorwaarde (waar of niet waar) wordt de instructieteller expliciet ingevuld met een ander adres of blijft gewoon staan op het juist verhoogde bedrag in de tweede fase. Dergelijke instructies worden ook wel genoemd *vertakkingsinstructies*, omdat ze de mogelijkheid bieden verschillende delen (takken) in een programma te onderscheiden, waaruit dynamisch een keuze gemaakt wordt op grond van op dat moment berekende resultaten.

Door slim gebruik van dergelijke instructies zijn in de praktijk soms zeer spectaculaire resultaten bereikt. Een verkeerde interpretatie is echter de computer intelligentie of eigen beslissingsbevoegdheid toe te schrijven. De mogelijkheden blijven duidelijk beperkt tot keuzen uit tevoren precies omschreven alternatieven. Dat men desondanks met de computer resultaten kan bereiken die zonder dit middel niet mogelijk zijn, ligt in het feit dat grote aantallen keuzen met daartussen gelegen berekeningen met bijna onvoorstelbare snelheid kunnen worden uitgevoerd.

4 Informatieverwerking en programmeertalen

Het is bekend dat computers niet alleen getalleninformatie verwerken, maar ook informatie in andere vorm, met name informatie gegeven door combinatie van letters, cijfers en leestekens. Echter ook in die gevallen wordt intern in de machine toch alleen met getallen gewerkt. Dit gebeurt door binnen de machine iedere letter en ieder teken te representeren door een bepaalde tevoren vastgelegde getalwaarde. De omzetting naar deze vorm gebeurt bij invoer van de gegevens, terwijl omgekeerd resultaten bij uitvoer weer worden geproduceerd in de ons vertrouwde vorm.

Deze gang van zaken impliceert dat ook in letterlijke zin met letters en tekens

gerekend kan worden. Bij het vaststellen van de coderingsconventies van letters en tekens houdt men hiermee meestal reeds rekening. Zo kiest men veelal voor de letters in volgorde van het alfabet waarden, die overeenkomstig in grootte toenemen. Dit betekent dat het probleem, een aantal namen in alfabetische volgorde te plaatsen, identiek is met het sorteren van de rij overeenkomstige getallen naar opklimmende waarde. Dit is met een programma van reken- en vertakkingsinstructies mogelijk. Een simpele methode verloopt als volgt. Van een rij getallen die op opeenvolgende adressen in het geheugen staan wordt het verschil bepaald van de eerste 2 getallen. Afhankelijk van het positief of negatief zijn van dit verschil (gebruik van vertakkingsinstructie) worden de twee getallen van plaats verwisseld of niet. Vervolgens wordt hetzelfde proces uitgevoerd met het tweede en derde getal enz. Heeft men alle opeenvolgende paren gehad dan is vanzelf het grootste exemplaar op de laatste plaats gekomen. Herhaalt men het geheel dan komt de op een na de grootste op de voorlaatste plaats en zo vervolgens. Na voldoende doorgangen staan dan alle getallen in de juiste volgorde. Aangezien het steeds hetzelfde proces is dat moet worden uitgevoerd, zij het met systematische opschuiving van adressen, kan dit gebeuren door één serie instructies die eindigt met een vertakkingsinstructie naar het begin van de serie (lusprogramma). Een betrekkelijk klein programma kan op deze wijze ondanks de grote snelheid per instructie toch nog een behoorlijke machinetijd in beslag nemen. Volledigheidshalve moet worden opgemerkt, dat voor sorteren betere, zij het ingewikkelder methoden bestaan, die minder machinetijd vergen dan de hier geschetste.

Een ander voorbeeld is het bepalen van bij elkaar behorende informatie. Neem aan dat men een lijst met namen en adressen heeft. Moet men dan bij een gegeven naam het adres weten dan wordt eerst door systematische vergelijking van de gegeven naam met opeenvolgende exemplaren in de lijst nagegaan, waar deze voorkomt. Daarna is zonder meer de daarbij behorende informatie in de vorm van adres en andere gegevens bekend. Als met elkaar corresponderende informatie kan men ook denken aan woorden in de ene taal en de overeenkomstige uitdrukkingen in een andere (dictionaire). Heeft men een gegeven tekst in de eerste taal, dan zou men die woord voor woord kunnen opzoeken en op die manier een vertaling in de andere taal kunnen trachten te bereiken. Voor een enigszins redelijke vertaling moet men echter van de gegeven tekst meer informatie gebruiken dan alleen de woord voor woord informatie. De gehele structuur, zinsopbouw, leestekens alsmede talloze taalregels en taalgebruiken moet men dan mede in rekening brengen. Hoewel op dit gebied reeds veel onderzoek is gedaan en nog wordt verricht, zijn de resultaten althans bij vertaling van de gebruikelijke talen nog beperkt.

Toch speelt het vertalen in de computerwereld een belangrijke rol. Kiest men namelijk talen die aan strenge regels gebonden zijn dan wordt het herkennen van uitdrukkingen en structuren aanzienlijk vereenvoudigd en wordt 'vertaling' goed realiseerbaar. Als taal waarin vertaald moet worden kiest men dan de 'taal' van de machine, dat wil zeggen de machinecode. Deze voldoet aan de

eisen van eenvoud en eenduidigheid. Met eenvoud is overigens bedoeld dat er slechts een beperkt aantal duidelijk omschreven regels zijn. Dit betekent echter in het geheel niet dat deze 'taal' of code ook voor mensen zo eenvoudig is te hanteren. Dit laatste is echter nodig om programma's te kunnen samenstellen. De machine is voor een groot deel echter bepaald door de eisen van de techniek en daarmee niet vrij te kiezen. Daarom wordt een andere taal voor programmeren gekozen, die enerzijds wel aan stringente regels is gebonden maar anderzijds ook betrekkelijk eenvoudig door mensen is te leren. De omzetting van een programma geschreven in een dergelijke programmeertaal (brontaal) naar de taal of code van de machine (objecttaal) verloopt dan volgens tevoren duidelijk vast te stellen regels. Dit laatste impliceert dat een dergelijke vertaling neerkomt op een informatie-transformatie, die op zich door een computer, aan de hand van een speciaal daarvoor geschreven programma (compiler), verricht kan worden. Een dergelijk vertaalprogramma kan dan toch nog wel gecompliceerd zijn en moet bovendien ook in de machinecode geschreven worden. Echter de hiermee gepaard gaande eenmalige arbeid geeft aan ieder volgend gebruik een zo grote besparing, dat zelfs zeer hoge kosten voor de bouw van dergelijke compilers ruimschoots worden vergoed door tijdsbesparing in de latere programmering.

Zoals opgemerkt zijn de regels van programmeertalen gericht op gebruik door de mens. Enerzijds door de gerichtheid naar verschillende gebruikersgebieden en anderzijds door de pogingen deze talen toch ook weer niet al te gecompliceerd te maken zijn er vele van dergelijke talen ontworpen. Een beperkt aantal heeft toepassing gevonden op grote schaal.

Hiervan dienen bij name genoemd te worden:

COBOL (Common Business Oriented Language) – deze taal is speciaal voor administratief gebruik van de computer.

FORTAN (Formulae Translator) en

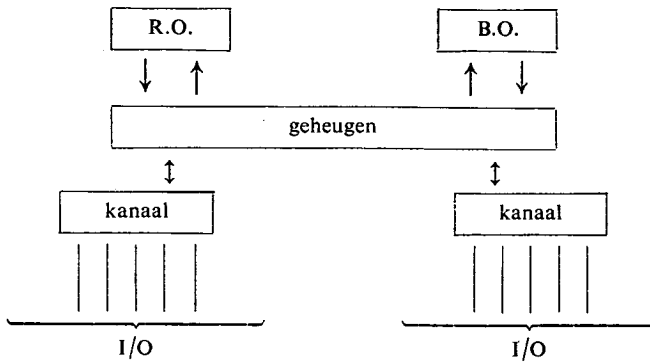
ALGOL 60 (Algorithmic Language)

in het bijzonder voor wetenschappelijke en technische toepassingen.

5 Tijdscharing en conversationeel gebruik

Bij de bespreking van de hoofdorganen is reeds gebleken dat er een groot verschil in snelheid bestaat tussen de centrale delen zoals rekenorgaan, geheugen en besturingsorgaan enerzijds en de in- en uitvoerapparaten anderzijds. Door gebruik van meerdere in- en uitvoerapparaten kan men aan de bezwaren die ontstaan tegemoet komen. Tussen in- en uitvoerapparaten en geheugen wordt daartoe nog een ander orgaan tussengeschakeld, namelijk een *kanaal* (zie fig. 2).

Via een kanaal worden een aantal I/O (Input/Output) lijnen aangesloten, waarbij aan iedere lijn een in- of uitvoerapparaat kan worden aangesloten. Het kanaal verzorgt op elektronische wijze vooral de parallelwerking van de



FIGUUR 2

verschillende aangesloten apparaten en zorgt voor doorgifte van informatie van invoerorganen naar geheugen en omgekeerd van geheugen naar uitvoerorganen. Bij grotere aantallen kunnen aan het geheugen ook meerdere kanalen worden aangesloten.

In de machine wordt er voor gezorgd dat gedurende enige tijd een programma door de machine gebruikt wordt dat betrekking heeft op één van de aangesloten apparaten. Door een ingebouwde elektronische klok, of beter gezegd wekker, wordt na een korte periode (b.v. 10 msec) het programma onderbroken, waarna een volgend programma een beurt krijgt. Na het laatste programma komt de eerste weer aan de beurt. Zo wordt de tijd, in kleine stukjes gehakt, cyclisch over een aantal programma's verdeeld. Dit noemt men *tijdscharing* (time-sharing). Indien de verschillende I/O apparaten bestaan uit telexapparaten, die zonodig dus ook op grote afstand van de computer kunnen zijn aangesloten, dan kan ieder apparaat betrekking hebben op een eigen programma. Verschillende gebruikers kunnen tegelijkertijd via verschillende I/O apparaten (terminals) van de computer gebruik maken. Weliswaar is de computer niet continu voor één gebruiker beschikbaar, maar krijgt iedere gebruiker steeds gedurende korte tijd de beschikking over het centrale gedeelte. Door de grote snelheid hiervan is dit voor de gebruiker in de regel niet merkbaar. Hij kan op ieder moment gegevens invoeren en resultaten uit de computer verkrijgen. Dit maakt een soort vraag en antwoord spel met de computer mogelijk dat men veelal aanduidt met *conversationeel* werken. Ook voor dit doel zijn vaak speciale programmeertalen geconstrueerd. Soms kan men vanaf een terminal complete programma's aan de computer aanbieden; in andere gevallen zijn de programma's binnen de computer gefixeerd en is het alleen mogelijk bepaalde in- en uitvoer te laten plaats vinden in vooraf voorgeschreven vorm. Voorbeelden van het laatste soort gebruik zijn de verschillende luchtvaartreserveringssystemen. Als invoer gebruikt men vaak speciale druktoetspanelen. Voor het snel verstrekken van overzichten kan als uitvoer vooral de beeldbuis goede diensten bewijzen. Het vastleggen van boekingen e.d. gebeurt soms ook door speciale drukmechanismen, waarmee de formulieren direct worden gedrukt.

6 *Computer als hulpmiddel in onderwijs*

Een speciale toepassing van conversationeel werken doet zich voor als mogelijkheid in het onderwijs. In Nederland is dit overigens nog niet en in Amerika en Canada slechts zeer beperkt gerealiseerd. De grondgedachte is speciaal samengesteld lesmateriaal in het geheugen van de computer op te slaan. Een leerling krijgt dan de beschikking over een bedieningsstation, dat in de meeste gevallen bestaat uit een beeldbuis met lichtpen en toetsenbord. Op de buis kunnen zowel tekeningen als tekst geprojecteerd worden. Met de lichtpen kunnen bepaalde plaatsen op het scherm worden aangewezen voor het geven van antwoorden of het kiezen uit mogelijke alternatieve vervolgen. Het toetsenbord dat overeenkomt met een normaal schrijfmachine klavier, dient voor het intikken van antwoorden en waar nodig het stellen van vragen.

De opbouw van de leerstof vertoont veel overeenstemming met die van geprogrammeerde instructie. Namelijk kleine schakels met geringe informatie, vraagstelling, controle op antwoord en afhankelijk hiervan doorgaan met volgende schakel, alternatieve schakel of terugkoppeling.

Het verschil met de bestaande geprogrammeerde instructie in boekvorm of met speciale apparaten is gelegen in de grote flexibiliteit van de computer. Registratie gedurende een cursus, grotere terugkoppeling, betere aanpassing aan individuele eisen, tijdmetering e.d. maken dat deze vorm van onderwijs toch niet opgevat kan worden als alleen een uitbreiding van geprogrammeerde instructie. Deze methode bekend als C.A.I. (Computer Assisted Instruction) vereist ook een andere aanpak dan geprogrammeerde instructie, hoewel ervaring in die richting uiteraard van belang is.

Vanzelfsprekend komen op één computer meerdere van dergelijke bedieningsstations voor, bijvoorbeeld 20 tot 30 stuks. Afhankelijk van het soort onderwijs worden veelal nog andere apparaten aangesloten zoals bandrecorder en filmprojector. Ook deze apparaten staan onder programmabesturing.

In principe kan en wordt C.A.I. gebruikt voor onderwijs in zeer uiteenlopende disciplines en op verschillend niveau. Van cursussen lezen en rekenen voor eerste klas lagere school, via algebra en biologie lessen voor middelbare school tot college cardiologie voor hogere jaars medische studenten.

Toepassing op grote schaal is voor het moment nog niet goed uitvoerbaar door een aantal oorzaken. De belangrijkste zijn:

- 1e samenstellen van cursusmateriaal vereist een enorme tijd en inspanning. Voor ieder lesuur via de computer is een voorbereiding nodig van 200 tot 400 uur. Deze grote voorbereidingstijd wordt bovendien ongunstig beïnvloed door onvoldoende programmatuur, die hiervoor beschikbaar is;
- 2e de uitvoering van de bedieningsstations, in het bijzonder de beeldbuis met lichtpen, is bij de huidige stand van de techniek nog te gecompliceerd en te duur voor toepassing op grote schaal.

Het is te verwachten dat aan beide bezwaren in de komende jaren tegemoet zal worden gekomen, waardoor ook in Nederland C.A.I. op grotere schaal zijn intrede zal gaan doen.

Dit betekent zeker niet dat het een remedie is voor iedere kwaal en moeilijkheid in het onderwijs. Het zal ook zeker niet het klassikale onderwijs geheel verdringen. Wel zal een verschuiving bij het lesgeven gaan optreden. Vooral zelfstandige oefeningen voor het verkrijgen van vaardigheid op verschillend gebied kan in vele gevallen beter door dit medium worden overgenomen, omdat het tot intensieve, individuele training in staat is.

De taak van de leraar verschuift daarmee van lesgeven naar onderwijsbegeleiding. Het zal ook nog een zoeken en tasten worden om de juiste tussenvorm te vinden. Men moet zich namelijk ook niet voorstellen dat een leerling of student gedurende de gehele studeertijd achter een terminal zit. Het werken via een dergelijk medium is zeer indringend, intensief en vermoeiend en wordt ook meestal maar hooguit een half uur achter elkaar toegepast.

Bij experimenten in Amerika werkt men voor een klas van 25 à 30 leerlingen bijvoorbeeld met 5 tot 10 terminals. Een deel van de leerlingen is dus maar bezig via de terminal, de overigen werken in hetzelfde lokaal aan tafels met b.v. boeken, waarbij de leraar de aanwijzingen geeft welke taak ieder heeft en individuele hulp biedt waar het systeem voor de betrokken leerling tekort schiet. Een andere vorm waarbij het onderricht weer teruggeschoven wordt naar speciaal lesmateriaal in boekvorm en waar de begeleiding of beter gezegd de sturing plaats vindt via de computer is bekend als C.M.I. (Computer Managed Instruction). Bij deze vorm maakt de leerling op regelmatige tijdstippen slechts kort (enkele minuten) gebruik van de computer. In die tijd beantwoordt hij een aantal vragen en het resultaat wordt door de computer snel geëvalueerd, waarna hij aanwijzingen ontvangt voor de volgende deeltaak, die hij verricht zonder hulp van de computer. Met deze vorm is nog bijzonder weinig ervaring opgedaan. Het is overigens ook geen substituut voor C.A.I., maar zeker momenteel is het voordeel dat C.M.I. veel lagere eisen aan de computer stelt, terwijl bovendien veelal met eenvoudige terminals in de vorm van bladschrijvers kan worden volstaan. Financieel is C.M.I. aanzienlijk goedkoper en daardoor aantrekkelijker. Bij de bespreking van de computer als hulpmiddel in het onderwijs is C.A.I. als toepassing het meest spectaculair. Daarnaast speelt de computer natuurlijk een rol bij diverse administratieve problemen rondom het onderwijsproces. Dit gaat van salarisberekening van de leraar via leerlingen examenadministratie tot hulp bij het samenstellen van lesroosters. Dergelijke toepassingen zijn ook in ons land reeds gedeeltelijk gerealiseerd en zullen in de toekomst steeds meer voorkomen.

In een nog later stadium kan men verwachten dat deze verschillende deelt toepassingen gezamenlijk op een systeem geïntegreerd worden, waardoor een directe informatieuitwisseling kan optreden. Overigens moet nog zoveel onderzoek plaats vinden op de verschillende deelgebieden dat we aan een dergelijk overkoepelend systeem voorlopig nog niet behoeven te denken.

Het is wel goed ons te realiseren dat het computergebruik het onderwijssysteem van verschillende kanten benadert of anders gezegd ook binnen de onderwijssector begint de automatisering door te dringen.

Samen jarig

HANS FREUDENTHAL

Utrecht

In lezingen over kansrekening is het een bekende stunt, te wedden dat er twee in de zaal zijn, die op dezelfde dag jarig zijn. Als het gehoor niet te klein is, is het succes bij voorbaat verzekerd. De waarschijnlijkheid dat er onder n personen ten minste twee met dezelfde verjaardag zijn, is

$$\begin{aligned}\text{voor } n = 20 &: 0,411, \\ &= 40 : 0,891, \\ &= 60 : 0,994.\end{aligned}$$

Men rekent beter de kans uit, dat er onder de n personen geen twee met gelijke verjaardag voorkomen. De verdeling van de n mensen over de 365 dagen ¹ is een 1-1-afbeelding van die verzameling van n elementen in een verzameling van 365 elementen. Er bestaan $365!/(365-n)!$ van dit soort afbeeldingen, terwijl het aantal van *alle* afbeeldingen 365^n is. Het quotiënt

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

is de gevraagde waarschijnlijkheid.

In een gezelschap van 60 personen waar ik de proef nam, was de uitslag tot ieders verbazing:

6 duo's en 1 trio.

Zoiets lijkt wel onwaarschijnlijk, maar is het werkelijk zo onwaarschijnlijk?

We stellen de volgende opgave:

Zij Φ de verzameling van alle afbeeldingen van de verzameling A met n elementen in de verzameling B met N elementen. Als $f \in \Phi$ zo'n afbeelding is, kunnen we van elk element y van B nagaan hoeveel originelen het onder f heeft. Stel er zijn er net k_i elementen met precies i originelen ($i = 0, 1, \dots, p$);

$$\begin{aligned}\sum k_i &= N, \\ \sum ik_i &= n.\end{aligned}$$

¹ We verwaarlozen de complicatie van de schrikkeldagen.

Alle f met deze eigenschap vormen een deelverzameling Φ_k van Φ . Dus $f \in \Phi_k$ dan en slechts dan als het aantal elementen met i f -originelen precies k_i is ($i = 1, \dots, p$).

Een zaal met n personen bepaalt een afbeelding van de verzameling van die n personen in de verzameling van de $N (= 365)$ dagen van het jaar.

We willen nu de kans bepalen, dat deze afbeelding van het type Φ_k is; d.w.z. het quotiënt

$$\text{aantal } \Phi_k / \text{aantal } \Phi.$$

Hierbij is

$$\text{aantal } \Phi = N^n.$$

Waar het op aankomt is,

$$\text{aantal } \Phi_k$$

te bepalen, als het stel getallen $k_0, k_1, \dots, k_p$ gegeven is.

1 Zij P (met a elementen) op Q (met b elementen) zo afgebeeld, dat elk element van Q precies r originelen heeft. Dan is $a = br$. (Evident.)

2 Zij Θ de verzameling der afbeeldingen van A (met n elementen) in $\{0, 1, \dots, p\}$ waarbij i precies k_i originelen heeft. (Dus $\sum k_i = n$.) Dan is

$$\text{aantal } \Theta = \frac{n!}{k_0! k_1! \dots k_p!}.$$

(Een bekende formule; door inductie naar p te bewijzen.)

2' Een ietwat afwijkende formulering van 2: Zij Θ de verzameling der afbeeldingen van A (met n elementen) op B waarvan geëist is dat het aantal originelen van y gelijk aan $k(y)$ is (alle $y \in B$). Dan

$$\text{aantal } \Theta = n! / \prod_{y \in B} k(y)!.$$

3 Zij Φ_k de verzameling der afbeeldingen van A (met n elementen) in B (met N elementen) waarbij het aantal elementen met i originelen k_i is. Dan

$$\text{aantal } \Phi_k = \frac{N!}{k_0! k_1! \dots k_p!} \cdot \frac{n!}{1!^{k_1} 2!^{k_2} \dots p!^{k_p}}.$$

Bewijs: Zij $f \in \Phi_k$. Het aantal f -originelen van $y \in B$ wordt $f^*(y)$ genoemd. f^* behoort tot de verzameling Q van de afbeeldingen van B in $\{0, \dots, p\}$ waarbij i precies k_i originelen heeft ($i = 0, \dots, p$). Dus naar 2:

$$\text{aantal } Q = \frac{N!}{k_0! k_1! \dots k_p!}.$$

Door

$$f \rightarrow f^*$$

wordt de verzameling Φ_k , die we ook P willen noemen, afgebeeld op Q . Die afbeelding zal niet één-één zijn. Voor welke f, f_1 zal het gebeuren, dat $f^* = f_1^*$ is? Bij gegeven $f \in \Phi$ zal f_1 zo geschapen moeten zijn, dat voor elke $y \in B$ het aantal f_1 -originelen van y net $f^*(y)$ is; in 't bijzonder moet $fA = f_1A$ wezen. Hoeveel afbeeldingen f_1 van dit soort van A op f^*A zijn er? Volgens 2':

$$n! / \prod_{y \in B} f^*(y)!$$

Aangezien er bij f net k_i elementen met i originelen zijn, dus k_i -keer $f^*(y) = i$ ($i = 1, \dots, p$) is, is dit quotiënt

$$= n! / \prod_i i!^{k_i}.$$

De afbeelding $f \rightarrow f^*$ van $P (= \Phi_k)$ op Q heeft dus de eigenschap, dat elk element van Q evenveel, te weten

$$n! / \prod_i i!^{k_i},$$

originelen heeft. Dus naar 1:

$$\text{aantal } P = (\text{aantal } Q) \cdot n! / \prod_i i!^{k_i},$$

waaruit de te bewijzen formule volgt.

We hebben met het oog op ons uitgangspunt de formule geëvalueerd voor $N = 365$, $n = 60$.

In de volgende tafels is de waarschijnlijkheid vermeld dat onder 60 personen t.a.v. de verjaardagen net k_2 duo's, k_3 trio's, k_4 kwartetten voorkomen.

$k_3 = k_4 = 0$	$k_3 = 1, k_4 = 0$	$k_3 = 2, k_4 = 0$	$k_3 = 3, k_4 = 0$
$k_2 = 0$ 0,0059	$k_2 = 0$ 0,0021	$k_2 = 0$ 0,0003	$k_2 = 0$ 0,0000
1 0,0340	1 0,0111	1 0,0015	1 0,0001
2 0,0915	2 0,0266	2 0,0032	2 0,0002
3 0,1525	3 0,0395	3 0,0042	3 0,0002
4 0,1765	4 0,0405	4 0,0038	4 0,0002
5 0,1510	5 0,0305	5 0,0025	5 0,0001
6 0,0991	6 0,0176	6 0,0013	> 5 0,0001
7 0,0512	7 0,0079	7 0,0005	0,0009
8 0,0212	8 0,0028	8 0,0002	
9 0,0071	9 0,0008	> 8 0,0001	
10 0,0019	10 0,0002	0,0176	
11 0,0004	> 10 0,0001		
12 0,0001	0,1797		
0,7924			

$k_3 = 0, k_4 = 1$	$k_3 = 1, k_4 = 1$	$k_3 = 2, k_4 = 1$	$k_3 = 0, k_4 = 2$
$k_2 = 0$ 0,0001	$k_2 = 0$ 0,0000		
1 0,0005	1 0,0001		
2 0,0011	2 0,0003		
3 0,0016	3 0,0003	<u>0,0001</u>	<u>0,0001</u>
4 0,0016	4 0,0003		
5 0,0011	5 0,0002		
6 0,0006	6 0,0001		
7 0,0003	<u>0,0013</u>		
8 0,0001			
<u>0,0070</u>			

Samengevat

0,7924
 0,1797
 0,0176
 0,0009
 0,0070
 0,0013
 0,0001
 0,0001
0,9991 *

Dat trio's en 'erger' een waarschijnlijkheid van 20 % bezitten, zou men niet hebben bevroed. De gebeurtenis, waarvan we uitgingen, een trio met zes duo's (of 'erger') heeft een waarschijnlijkheid van ongeveer 3 %. Er is dus geen 'wonder' geschied.

¹ Het tekort is veeleer aan reken- dan aan afrondingsfouten te wijten.

een bijzondere uitgave is de

Handleiding bij de wet op het voortgezet onderwijs

onder eindredactie van Mr. J. L. Meertens, plv.
directeur A.V.O. van het ministerie van
onderwijs en wetenschappen.

In de handleiding zijn thans opgenomen:

Band 1: deel A Inleiding op de wet op het voortgezet onderwijs

deel B Tekst van de wet op het voortgezet onderwijs

deel C Parlementaire behandeling van de wet op het
voortgezet onderwijs

Band 2: deel C Vervolg

deel D In dit deel zijn o.a. opgenomen een model eind-
en herexamenregeling h.a.v.o. en m.a.v.o.,
alsmede de studierechten getuigscrift atheneum,
h.a.v.o. en m.a.v.o.

deel E Tekst overgangswet wet op het voortgezet
onderwijs

Band 3: } deel F Uitvoeringsmaatregelen te weten
Band 4: } voorschriften algemeen
voorschriften v.w.o., h.a.v.o., m.a.v.o.
voorschriften beroepsonderwijs
allen inhoudende diverse besluiten,
beschikkingen, enz.

De prijs van deze uitgave bedraagt, inclusief 4 solide ringbanden
en bijgewerkt tot en met de laatstverschenen aanvulling f 26,00
(incl. BTW).

Aanvullingen worden automatisch aan de abonnees toegezonden
en afzonderlijk berekend.

gemeenschappelijke uitgave van

Wolters-Noordhoff & Vuga-boekerij

besteladres: VUGA nv, postbus 1063, 's-Gravenhage
ook in de boekhandel verkrijgbaar

Leerplan in

(of hoe u door aandelen spare

Sparen?

De gulden wordt elke dag minder waard. Slechts weinig rentepercentages kunnen daar tegen op. Wat dan. Risico's nemen met investeringen? Dat kan geld kosten.

Beleggen in aandelen?

Aantrekkelijk. Maar hebt u tijd om elke dag beursberichten te bestuderen, uw aandelen te volgen?

Rolinco Plus-plan voor u ideaal.

Uitgerekend het mooiste Plan. Per maand betaalt u enkele tientallen guldens. Over 10, 15, 20 jaar hebt u een interessant aandelen-pakket Rolinco. En een flinke winst.

Wat is Rolinco?

Rolinco is ook internationaal een van de grootste beleggings-maatschappijen, met brééd gespreide belangen in alle grote groeifondsen ter wereld. Met gekwalificeerde beleggings-experts. Zwart op wit kunnen wij u aantonen dat Rolinco t.o.v. andere beleggingsfondsen de meest konstante en optimale groei vertoont!

Rolinco winsten zijn úw winsten.

Rolinco heeft als het ware de structuur van een coöperatie. Als u aandeelhouder bent hebt u alle inspraak. En het volle profijt van

de resultaten! Wij willen u graag uitleggen dat géén z.g. „managementcompany” met de grote winsten gaat strijken. Rolinco biedt u het laagste kostenpercentage.

Als ambtenaar verdient u een premie.

Van de Overheid krijgt u een premie als u in een aandelen-spaarplan spaart. Dat maakt het nog voordeliger. En interessant: het Plan is gebaseerd op een levensverzekering, dus gedurende de looptijd extra zekerheid voor u en uw gezin. Plus dat hierdoor het Rolinco Plus-plan de voordéligste manier is om aandelen Rolinco te verwerven. Dit kunnen wij u aantonen.

Rolinco
Plus-plan

Beleggingskunde

vijzer wordt).



COUPON Deze coupon brengt u het bewijs dat aandelen Rolinco voor u de beste belegging zijn. En dat het Rolinco Plusplan de makkelijkste en voordeligste manier is om ze te sparen.

Naam _____

Adres _____

Plaats _____ Tel. _____

In envelop zónder postzegel opsturen aan Roplusco
n.v. Antwoordno.1205 Amsterdam. U kunt ook bellen:
020 - 23 87 15.

EU

Didactische oriëntatie, deel 3

Zojuist is verschenen het derde deel van
**Didactische oriëntatie voor wiskunde-
leraren.**

ISBN 90 01 93767 5
400 blz. f 32,50

door Dr. Joh. H. Wansink,
m.m.v. Prof. Dr. F. van der Blij,
Dr. W. J. Brandenburg,
Drs. J. van Dormolen,
Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis (†),
Prof. Dr. J. Hemelrijk, Drs. A. M. Koldijk,
Dr. Th. J. Korthagen,
Prof. Dr. B. van Rootselaar,
Prof. Dr. A. van der Sluis en J. J. Wouters.

In dit boek worden vele facetten, achter-
gronden en de laatste ontwikkelingen van
het wiskunde-onderwijs belicht.

Een standaardwerk voor ieder die
wiskundeleraar is of dit wil worden.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en de
uitgever, postbus 567, Groningen.



Wolters-Noordhoff

Magische kwadraten

G. E. KIERS

den Haag

... je ne sais guère rien de plus beau en l'Arithmétique que quelques-uns appellent *planetarios* et les autres *magicos*.

Fermat. 1 april 1640
zie "Oeuvres de Fermat", t. 2 (Paris 1894), p. 194

Wanneer we een vierkant door $n - 1$ horizontale en $n - 1$ verticale lijnen verdelen in n^2 vierkanten en in deze vierkanten de getallen 1 t/m n^2 plaatsen zo, dat de sommen der getallen in alle rijen en kolommen, alsmede in de beide diagonalen aan elkaar gelijk zijn, dan spreken we van een *magisch kwadraat*. We spreken van een magisch kwadraat van even of oneven orde al naar gelang n even of oneven is.

Het samenstellen van magische kwadraten is al een zeer oud amusement. Men treft ze al aan bij de Chinezen, lang voor de Christelijke jaartelling. Ze zijn door Moschopulus, die in het begin van de 15e eeuw in Constantinopel woonde, naar Europa overgebracht.

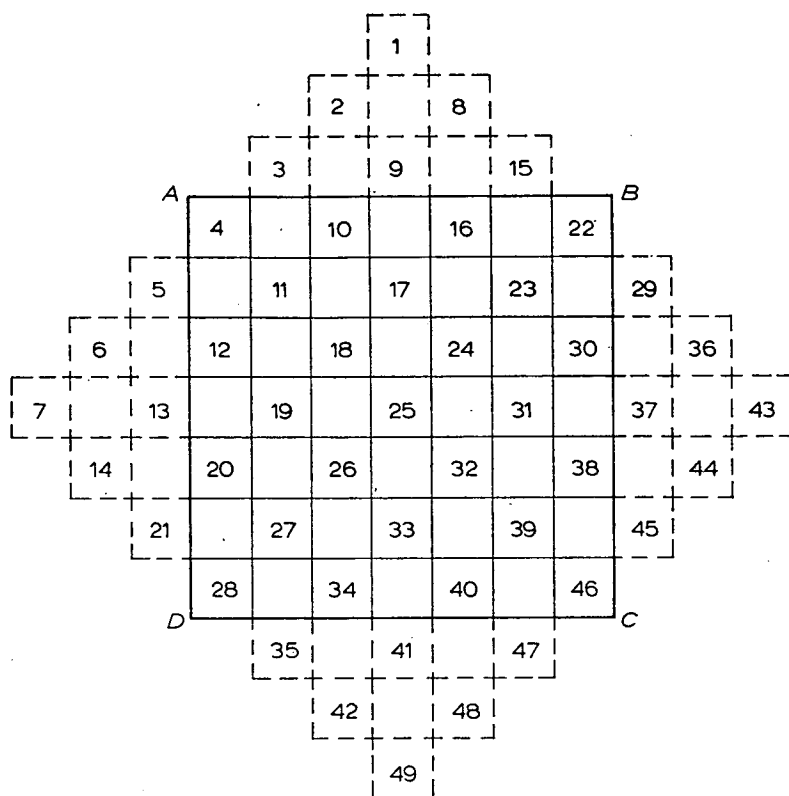
Er bestaan verschillende methoden om magische kwadraten van even en oneven orde samen te stellen. Daarbij beperkt men zich meestal bij n^2 vakken tot de getallen 1 t/m n^2 , wat evenwel geen vereiste zal blijken te zijn. In het hieronder volgende zullen we ons beperken tot magische kwadraten van oneven orde en daarvan de samenstelling alsmede het bewijs leveren.

Voor uitgebreider studie over dit onderwerp wordt verwezen naar:

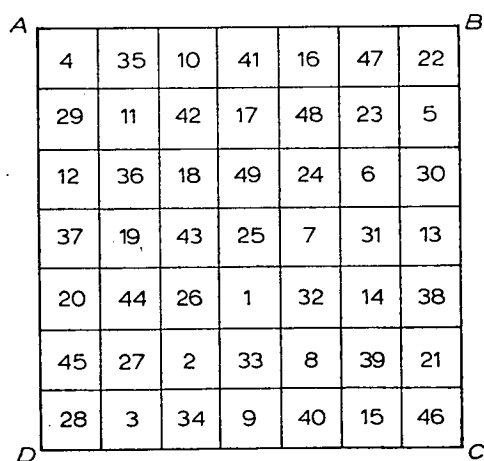
- 1 W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, 2, B. G. Teubner, Leipzig 1918.
- 2 W. W. Rouse Ball, *Mathematical recreations and essays*, New York, the Macmillan Company, 1947.

Om aan te geven op welke wijze een magisch kwadraat van oneven orde kan worden samengesteld nemen we als voorbeeld er een met 7 rijen en kolommen. Plaatsen we hierin de getallen 1 t/m 49 dan is de som van alle getallen $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50$, zodat de som der getallen van iedere rij, kolom en diagonaal gelijk moet zijn aan $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 50 = 175$.

Het vierkant $ABCD$ in figuur 1 gaan we buitenwaarts uitbreiden en daarin vervolgens de getallen 1 t/m 49 plaatsen zoals in de figuur is aangegeven. Het gedeelte links van de zijde AD verschuiven we nu naar rechts tot aan de zijde BC . De verschoven getallen vullen op die manier juist de open plekken aan de rechter kant op. Het zelfde doen we met de 3 andere uitstekende delen. Het deel



FIGUUR 1



FIGUUR 2

boven AB gaat naar beneden naar DC enz. Zo is nu ontstaan het gevraagde magische kwadraat (zie fig. 2). Bij natelling blijkt inderdaad de som der getallen van iedere rij, kolom en diagonaal gelijk te zijn aan 175.

Uit het voorgaande leiden we nu af de volgende eigenschappen:

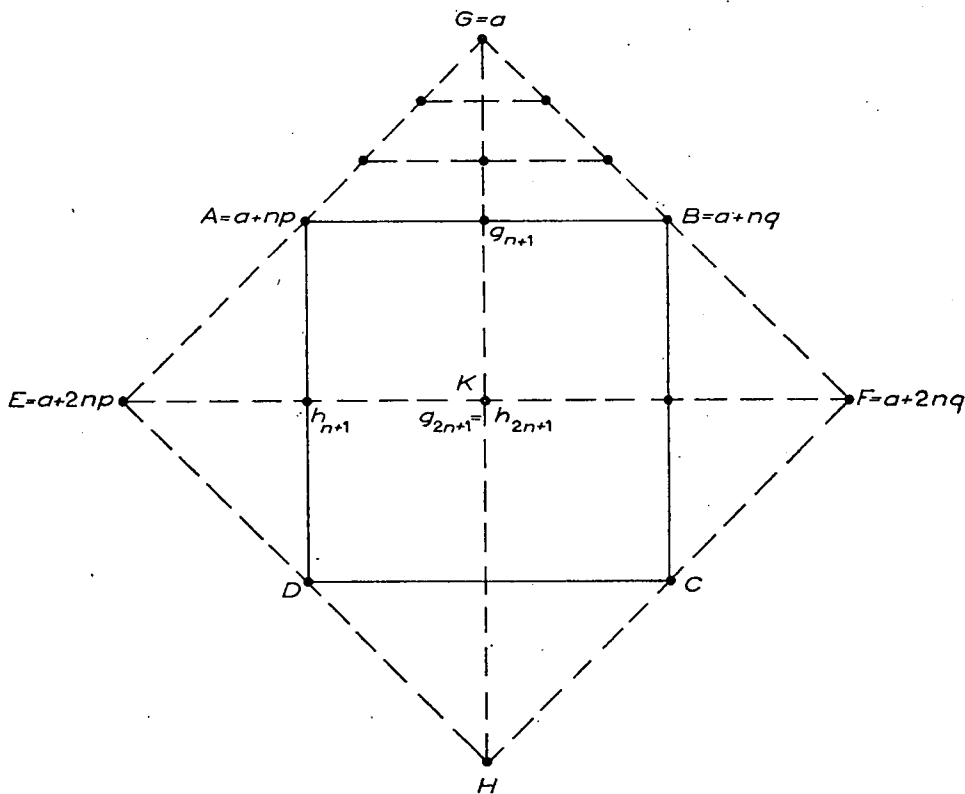
1 Als we alle getallen 1 t/m 49 uit fig. 2 met een zelfde getal a vermenigvuldigen worden ook alle sommen a maal zo groot en blijft figuur 2 een magisch kwadraat.

2 Als we alle getallen met een zelfde getal b vermeerderen, worden alle sommen $7b$ groter. Ook hier blijft dus fig. 2 een magisch kwadraat.

3 De rekenkundige rij (r.r.) 3, 8, 13, 18, ..., 243 ontstaat uit de rij getallen 1 t/m 49 door deze laatste eerst met 5 te vermenigvuldigen en vervolgens de uitkomsten met 2 te verminderen. Als we dus nu bovenstaande r.r. in figuur 1 invullen en deze figuur overbrengen in fig. 2 blijft deze laatste een magisch kwadraat volgens de eigenschappen 1 en 2. Gemakkelijk is in te zien, dat dit geldt voor elke r.r.:

Elke rekenkundige rij van 49 termen geeft een magisch kwadraat.

4 Het aantal mogelijkheden om een magisch kwadraat met 7 rijen en 7 kolommen samen te stellen is volgens eigenschap 3 ongelimiteerd.



FIGUUR 3

In het volgende gedeelte zullen we aantonen, dat de mogelijkheden tot de samenstelling van een magisch kwadraat nog kunnen worden uitgebreid. Daarbij gaan we uit van figuur 3, waarbij de letters $A, B, \dots$ de getallen voorstellen, die in de vierkanten op die plaatsen moeten worden ingevuld.

In het bovenste vakje plaatsen we het getal a . Dus $G = a$. Op de lijn GE plaatsen we een r.r. met $v = p$. Als het te maken magische kwadraat uit $2n+1$ rijen en $2n+1$ kolommen bestaat, staan er op de lijn GE $2n+1$ termen en is

$$A = a + np \quad E = a + 2np. ^1$$

Op de lijn GF komt een r.r. met $v = q$, waarbij

$$B = a + nq \quad F = a + 2nq.$$

De getallen op de lijn GF nemen we nu als begintermen van rekenkundige rijen alle met $v = p$ en die gelegen zijn op de lijnen evenwijdig met GE . Dit heeft tengevolge, dat op de lijnen evenwijdig met GF rekenkundige rijen staan met $v = q$.

Op de 2e horizontale rij van fig. 3 komen nu 2 getallen te staan, n.l.:

$$a+p \text{ en } a+q.$$

Op de 3e horizontale rij staan 3 getallen en wel:

$$a+2p, \quad a+p+q \quad \text{en} \quad a+2q. \text{ Enz.}$$

We krijgen figuur 1 terug, indien we $a = p = 1, n = 3$ en $q = 7$ stellen.

Met behulp van fig. 3 kunnen we de volgende eigenschappen afleiden.

1 Uit figuur 3 halen we een willekeurig stuk van 9 aaneengesloten vakjes (fig. 4) en beschouwen daarin nader de getallen P, Q, R en S . Voor deze getallen

P		Q
	S	
R		

FIGUUR 4

gelden de volgende eigenschappen:

$$S = P + q, \quad S = Q + p \quad \text{en} \quad S = R - p,$$

waaruit dan volgt:

$$Q - P = q - p \quad \text{en} \quad R - P = q + p.$$

D.w.z.: De rijen in fig. 3 vormen r.r. met $v = q - p$ en de kolommen r.r. met $v = q + p$.

¹ Figuur 3 wekt de indruk dat $n = 3$. Dat is niet de bedoeling. De 2e en 3e hokjesrijen zouden wat hoger getekend kunnen zijn.

2 Nummeren we in figuur 3 de horizontale rijen van bovenaf gerekend 1, 2, 3, . . . , dan heeft de rij AB als rangnummer $n+1$ en de rij EF als rangnummer $2n+1$. Elke rij tot en met de rij EF heeft een aantal termen, dat gelijk is aan het rangnummer van die rij.

3 De paren rijen uit fig. 3, die samen gevoegd moeten worden om het magische kwadraat te voltooien, hebben rangnummers die $2n+1$ verschillen. De rij x ($x \leq 2n$) en dus boven EF gelegen moet zodoende samengevoegd worden met de rij met rangnummer $2n+1+x$ onder EF gelegen. Van de waarde van x hangt af welke van deze twee rijen gedeeltelijk binnen resp. geheel buiten het vierkant $ABCD$ is gelegen. Deze laatste moet nu naar de eerste verschoven worden. De rij x heeft x termen. De rij $2n+1+x$ heeft evenveel termen als zijn spiegelbeeld t.o.v. EF . Van deze laatste is nu het rangnummer $2n+1-x$ en het aantal termen eveneens $2n+1-x$. M.a.w.:

De rij met rangnummer $2n+1+x$ heeft $2n+1-x$ termen.

4 Daar op iedere rij een r.r. staat is het gemiddelde g van elke rij gelijk aan de halve som van de eerste en laatste term van die rij. Tot en met de rij EF zijn de eerste en laatste van een rij steeds resp. p en q groter dan de eerste en laatste term van de voorgaande rij. Voor de rijen vanaf EF worden ze resp. q en p groter. In beide gevallen is het gemiddelde van elke rij $\frac{1}{2}(p+q)$ groter dan het gemiddelde der voorgaande rij. M.a.w.:

De getallen $g_1, g_2, g_3, \dots$ vormen een r.r. met $v = \frac{1}{2}(p+q)$ en $g_1 = a$.

5 Uit het bovenstaande volgt nu:

$$g_x = a + \frac{1}{2}(x-1)(p+q) \quad \text{en} \quad g_{2n+1+x} = a + \frac{1}{2}(2n+x)(p+q),$$

waaruit nu volgt

$$S_x = x \cdot g_x = x \cdot \left\{ a + \frac{1}{2}(x-1)(p+q) \right\}.^1$$

$$S_{2n+1+x} = (2n+1-x) \cdot g_{2n+1+x} = (2n+1-x) \left\{ a + \frac{1}{2}(2n+x)(p+q) \right\}.$$

De som der getallen in de rij x (of de rij $2n+1+x$, dit hangt af van de waarde van x) van het uit fig. 3 afgeleide magische kwadraat bedraagt nu

$$S = S_x + S_{2n+1+x}.$$

Vullen we de hierboven gevonden waarden in deze betrekking in dan krijgen we na enige herleiding

$$S = (2n+1)(a+np+nq). \quad (1)$$

In deze uitkomst ontbreekt de grootheid x , m.a.w.:

Alle rijen van het uit fig. 3 afgeleide magische kwadraat hebben gelijke sommen.

¹ Onder S_x verstaan we de som der getallen van de rij x in fig. 3.

Opmerking: De uitkomst (1) krijgen we ook als volgt. Uit de waarde van E volgt $H = a + 2np + 2nq$.

De som der termen van de rij GE bedraagt:

$$\frac{1}{2}(2n+1)(G+E) = \frac{1}{2}(2n+1)(2a+2np) = (2n+1)(a+np).$$

De som der termen van de rij FH bedraagt:

$$\frac{1}{2}(2n+1)(F+H) = \frac{1}{2}(2n+1)(2a+2np+4nq) = (2n+1)(a+np+2nq).$$

De som van alle termen uit figuur 3 bedraagt dus:

$$\frac{1}{2}(2n+1)(GE+FH) = \frac{1}{2}(2n+1)^2(2a+2np+2nq) = (2n+1)^2(a+np+nq).$$

Nemen we nu aan (hetgeen hierboven juist is bewezen), dat de sommen van alle rijen aan elkaar gelijk zijn dan volgt hieruit dat voor elke rij geldt

$$S = (2n+1)(a+np+nq).$$

Deze uitkomst klopt met (1) in eigenschap 5 hierboven gevonden.

6 Op overeenkomstige wijze leiden we de volgende uitkomsten voor de kolommen af.

a de gemiddelden $h_1, h_2, h_3, \dots$ der kolommen vormen een r.r. met $v = \frac{1}{2}(q-p)$.

b $h_1 = E = a + 2np$.

$$h_x = a + 2np + \frac{1}{2}(x-1)(q-p)$$

c $S_x = x \cdot h_x = x \cdot \{a + 2np + \frac{1}{2}(x-1)(q-p)\}$

$$\begin{aligned} S_{2n+1+x} &= (2n+1-x) \cdot h_{2n+1+x} = \\ &= (2n+1-x) \cdot \{a + 2np + \frac{1}{2}(2n+x)(q-p)\}. \end{aligned}$$

De som der getallen in de kolom x (of de kolom $2n+1+x$) van het uit fig. 3 afgeleide kwadraat bedraagt nu

$$S = S_x + S_{2n+1+x}$$

Vullen we de hierboven gevonden waarden in deze betrekking in dan krijgen we ook hier na enige herleiding

$$S = (2n+1)(a+np+nq). \quad (2)$$

7 $g_{2n+1} = h_{2n+1} = g_1 + n \cdot (p+q)$.

De getallen in beide diagonalen BD en AC vormen rekenkundige rijen, beide met $2n+1$ termen. De sommen der termen van beide diagonalen bedragen dus

$$S = (2n+1) \cdot g_{2n+1} = (2n+1)(a+np+nq) \quad (3)$$

8 Uit (1), (2) en (3) volgt:

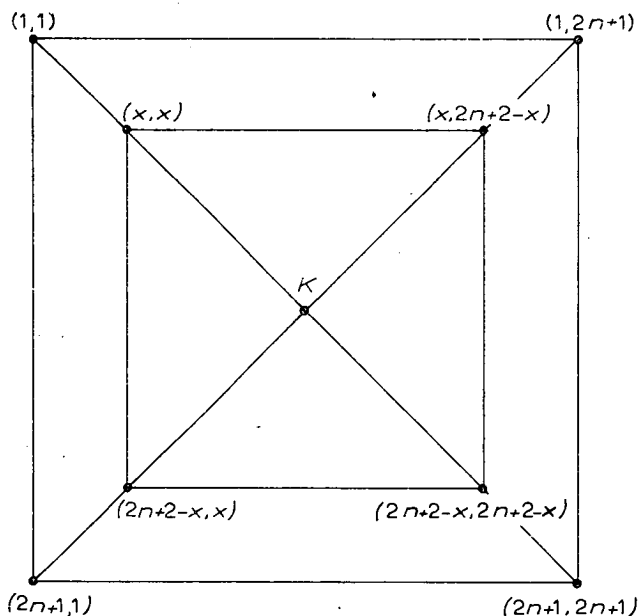
De sommen der getallen van alle rijen, kolommen en diagonalen zijn aan elkaar gelijk en iedere som is gelijk aan;

$$S = (2n+1)(a+np+nq)$$

Gevolg:

Wanneer we twee kolommen in het uit figuur 3 afgeleide magische kwadraat (zie fig. 5) en die symmetrisch liggen t.o.v. het middelpunt K met elkaar verwisselen, dan behouden we een magisch kwadraat.

Daar bij deze verwisseling alle rijen en kolommen dezelfde getallen blijven bevatten veranderen de sommen hiervan niet. Hoewel echter de diagonalen niet dezelfde getallen behouden, blijven de sommen onveranderd, zoals hieronder zal worden aangetoond. Verstaan we onder (x, y) het getal in de rij x en in de kolom y van het magisch kwadraat, dan zijn de getallen in de hoekpunten van het vierkant



FIGUUR 5

$$\begin{aligned} (1, 1) &= a + np & (1, 2n+1) &= a + nq \\ (2n+1, 1) &= a + 2np + nq & (2n+1, 2n+1) &= a + np + 2nq \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} (1, 1) + (2n+1, 2n+1) &= 2(a + np + nq) \text{ en} \\ (1, 2n+1) + (2n+1, 1) &= 2(a + np + nq). \end{aligned}$$

Bij verwisseling van de buitenste kolommen gaan beide bovenstaande getallenparen naar de andere diagonaal. Maar daar hun sommen aan elkaar gelijk zijn, blijven ook de sommen der getallen van de beide diagonalen ongewijzigd.

Verwisselen we de kolommen met rangnummer x en $2n+2-x$, die dus symmetrisch liggen t.o.v. het middelpunt K , dan vormen de getallen, die van dia-

gonaal verwisselen weer de hoekpunten van een vierkant. Het zijn de getallen:

$$\begin{matrix} (x, x) & (x, 2n+2-x) \\ (2n+2-x, x) & \text{en} & (2n+2-x, 2n+2-x). \end{matrix}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} (x, x) &= (1, 1) + (x-1).q \\ (x, 2n+2-x) &= (1, 2n+1) + (x-1).p \\ (2n+2-x, x) &= (2n+1, 1) - (x-1).p \quad \text{en} \\ (2n+2-x, 2n+2-x) &= (2n+1, 2n+1) - (x-1).q \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$(x, x) + (2n+2-x, 2n+2-x) = (1, 1) + (2n+1, 2n+1) = 2.(a+np+nq)$$

en

$$(x, 2n+2-x) + (2n+2-x, x) = (1, 2n+1) + (2n+1, 1) = 2.(a+np+nq).$$

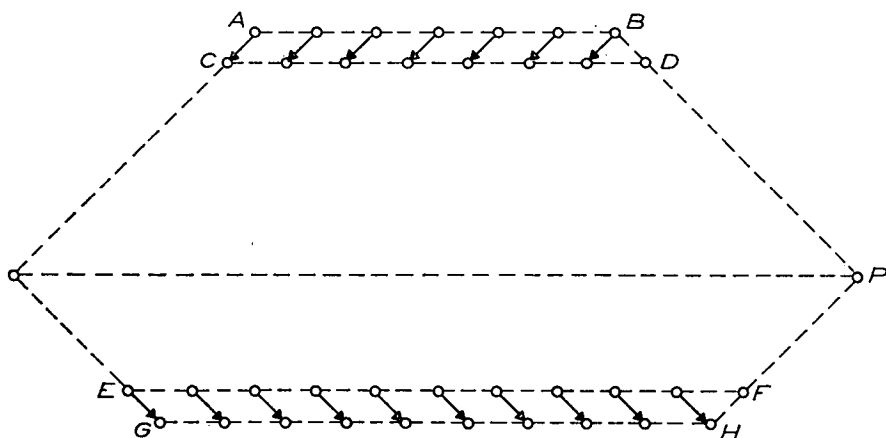
Dientengevolge is:

$$(x, x) + (2n+2-x, 2n+2-x) = (x, 2n+2-x) + (2n+2-x, x).$$

Bij de verwisseling der 2 kolommen wordt dus ieder der beide diagonalen met evenveel verminderd als vermeerderd. De som der getallen van beide diagonalen blijft dus ook hier ongewijzigd.

Op dezelfde manier zal blijken, dat we bij verwisseling van twee rijen, symmetrisch gelegen t.o.v. het middelpunt K van het vierkant, een magisch kwadraat behouden.

Hieronder volgt nog een tweede bewijs voor de algemene geldigheid van het uit fig. 3 afgeleid magisch kwadraat. Zie fig. 6.



FIGUUR 6

De rijen x en $2n+1+x$, evenals de rijen $x+1$ en $2n+2+x$ moeten ter voltooiing van het magische kwadraat worden samengevoegd. Zijn AB , CD , EF

en GH deze rijen, dan zijn de aantallen termen van AB en EF resp. x en $2n+1-x$. Nu gaat AB over in CD door bij alle termen p op te tellen en aan deze uitkomst toe te voegen de term $D = a+qx$. Dus

$$CD = AB + px + a + qx.$$

Zo gaat EF over in GH door bij $2n-x$ termen q op te tellen en de laatste term F te laten vervallen. Nu is

$$P = a + 2nq, F = P + px = a + 2nq + px, \text{ zodat}$$

$$GH = EF + (2n-x) \cdot q - a - 2nq - px.$$

Na enige herleiding volgt hieruit:

$$CD + GH = AB + EF.$$

D.w.z.:

De sommen der getallen van de rijen in het uit fig. 3 afgeleide magische kwadraat zijn aan elkaar gelijk.

Elke som is nu het $(2n+1)$ de deel van de reeds eerder afgeleide totaalsom, waaruit volgt:

$$S = (2n+1)(a + np + nq).$$

Voor de kolommen geldt een soortgelijk bewijs. De sommen der getallen der diagonalen worden bepaald zoals bij het eerste bewijs is aangegeven.

Korrel CLXVIII

Hoek van twee cirkels

Ik heb er heel wat schoolboeken van anderen op nagekeken; twee cirkels snijden elkaar in S ; onder welke hoek? Slechts drie geven de bepaling.

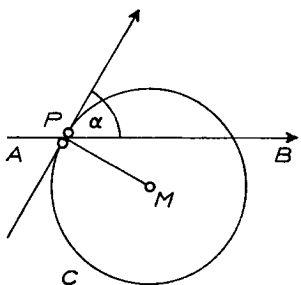
1) Onder de hoek van twee cirkels verstaan we de hoek van de raaklijnen in één van de snijpunten aan beide cirkels. Zonder figuur.

2). De hoek van twee cirkels is de hoek, die de raaklijnen in een der snijpunten met elkaar maken. Zonder figuur.

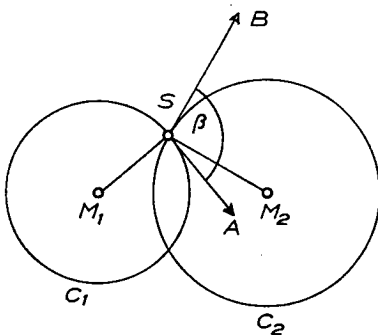
In beide wordt gesproken over *de* hoek van de raaklijnen; maar die maken 4 hoeken; behalve als ze elkaar rechthoekig snijden, zijn er twee scherpe en twee stompe hoeken; over *de* hoek is dus niet goed.

3) Het moet, zoals we zien op deze figuren; fig. 147 en fig. 148 uit mijn Nieuwe schoolmeetkunde I.

De cirkels worden in dezelfde zin doorlopen; links beginnen dan naar boven; zie de pijltjes op fig. 1 en fig. 2.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Als twee cirkels elkaar inwendig raken in S' , dan maken ze een hoek 0; als ze elkaar uitwendig raken, dan een gestrekte hoek.

P. Wijdenes
Amsterdam

Korrel CLXIX

Grafieken in gonio- en algebrakes.

Een aardig voorbeeld, hoe men bij behandeling van goniometrische grafieken verschillende algebraïsche begrippen repeteren kan, is de functie

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Stelt men de teller nul om nulpunten te vinden, dan voldoet $x = 0$, stelt men de noemer nul om polen te vinden, dan eveneens $x = 0$! Verbazing bij de klas, na enig peinzen komt er een op het idee dat de bij substitutie van $x = 0$ verkregen onbepaalde waarde van de functie ertoe noodt, de limiet voor $x \rightarrow 0$ te gaan bepalen! Dit nu geeft gelegenheid, een flink stuk limietentheorie te herhalen:

1e de $\frac{0}{0}$ wees er in de algebra op dat de breuk te vereenvoudigen was: volgens

de factorstelling moet het mogelijk zijn, teller en noemer door eenzelfde factor te delen. Ontbinding van onze noemerfunctie $\sin x$ kan wel niet anders dan door aan de verdubbelingsformule van deze functie te denken, hier toegepast in de vorm van de 'halveringsformule': $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x$. Vanzelfsprekend moet dan in de teller ook de cosinus met behulp van de halve hoek worden geschreven en komt men tot de vereenvoudigde schrijfwijze van de breuk: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x$.

2e in de algebraïsche limietentheorie werd geleerd, wortelvormen te behandelen, zoals

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}.$$

Zou dat hier ook kunnen? Laten wij eens in het oog vatten de vergelijking

$$1 - \cos x = \sin x$$

en trachten die door substitutie tot een algebraïsche vergelijking te herleiden. Stel daartoe $\sin x = u$, dan blijkt $\cos x$ inderdaad in wortelvorm op te treden! Wat zullen we dus doen om de onbepaaldheid eruit te krijgen? Teller en noemer vermenigvuldigen met $1 + \sqrt{1 - x^2}$, in casu met $(1 + \cos x)$! We krijgen

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

De limiet blijkt weer 0 te zijn.

Spannender nog wordt de behandeling, indien geen der leerlingen op de gedachte komt, de limiet naar $x = 0$ te bepalen. We laten dan eenvoudig dit punt voorlopig buiten beschouwing, stellen het tekenschema van y vast (gaat bij u van positief in negatief over) en vinden uit het tekenschema van y' dat de functie monotoon stijgend is. Brengt men deze resultaten in tekening, dan dringt zich al gauw de gedachte aan een tangenscurve op!

J. Snoep

Tiel

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Mathematica & Paedagogia (39–44; 1969–1970).

L. Sart, Nombre de partitions P_n d'un ensemble fini E de cardinal $n \neq 0$;

R. Broeckx, Iets over grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud;

R. Broeckx en D. Joye, Aantal equivalentierelaties in een verzameling, aantal partities van een verzameling;

J. De Ries, La mathématique moderne est-elle inutile?

J. De Ries, Programma's voor de vijfde van de humanoria.

W. de Roover, De nephroïde als omhullende van een schaar vierdegraadskrommen;

R. Gauthier, Expérimentation en mathématique;

F. Broeckx, Kansrekening volwaardig in het m.o.?

R. Broeckx, De stelling van Menelaos;

J. Boutriau, Compte-rendu des travaux du congrès du 9 novembre 1969.

A Willy Servais, Voorlopig afscheid;

A. Haimovici, Sur quelques problèmes numériques élémentaires;

R. Broeckx, Invloedssferen van stedelijke of regionale centra;

R. Ledent, Un exemple de codage.

P. Vredenduin, Meetkunde-onderwijs in Nederland;

G. Delande et J. Mersch, Sur une définition axiomatique des nombres réels;

G. Bosteels, Priemgetallen;

R. Wilryckx, De exclusieve disjunctie;

W. Servais, Approximation des intégrales par des sommes.

J. Lievens, La géométrie dans le nouveau programme du cycle inférieur;

R. Wilryckx, Anti;

P. V. Grosjeau, Identité en logique formelle;

R. Laumen, Structuren;

R. Broeckx, Over het invoeren van cirkelfuncties;

G. Noël, Coupons les fractions en quatre.

Boekbespreking

Ch. Boormeester, B. Burger, P. van Hiele, *Van A tot Z*, werkboek der Wiskunde voor mavo en havo, deel M⁴H-2b, 160 bladz., geb. f 7,75, J. Muusses N.V., Purmerend.

Dit leerboek voor de wiskunde is een vervolg van M⁴H-2a en behandelt de stof bestemd voor het tweede halfjaar van het tweede leerjaar van de vierjarige mavo.

Zoals in deel 2a wordt de theorie geleidelijk aan en duidelijk naar voren gebracht, gevolgd door een aantal zorgvuldig gekozen vraagstukken.

Aan de orde komen: vectoren, Pythagoras, irrationale getallen, kwadratische vergelijkingen, verzamelingen van punten, grafieken, rechte lijn, parabool, cirkel, in- en omgeschreven cirkel en oppervlakte, enkele transformaties, relaties en functies, een korte inleiding tot het bewijzen van meetkundige stellingen en tot slot iets over draaiing en rotatie.

De algemene herhaling aan het einde van het boek geeft de docent alle gelegenheid te onderzoeken of de behandelde stof ook begrepen en goed verwerkt is.

Een goed boek geheel in moderne geest geschreven en aangepast aan de capaciteiten van de mavo-leerlingen.

J. F. Christophe

J. Siepeling, G. Tromp, C. J. Klessner, C. Rijnders, *Gemoderniseerde Algebra I*, voor brugklas mavo, havo en vwo, 117 bladz., prijs f 7,25, Wolters-Noordhoff, Groningen.

Deze algebramethode is ontworpen op aandrang van gebruikers van de methode 'Gemoderniseerde meetkunde op basis van afbeeldingen'.

In dit boek worden behandeld: het begrip afbeelding, getallenlijn, bewerkingen in $\mathbb{N}$, verzamelingen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ en bewerkingen daarin, letters in de algebra, origineel en beeld bij een afbeelding, vergelijkingen en ongelijkheden, veeltermrekenen, ontbinden in factoren, tweetallig stelsel. Na elk nieuw behandeld onderdeel volgen een serie vraagstukken.

De nogal pittige vraagstukken zijn met een sterretje aangegeven.

Het geheel maakt een verzorgde indruk en er is getracht de voorbeelden zo concreet mogelijk te houden.

Voor de mavo-leerling is het geen al te gemakkelijk boek, daarom zal veel oefenen nodig zijn. Het is daarom jammer dat een algemene herhalingsparagraaf aan het einde van het boek ontbreekt.

J. F. Christophe

A. van Dop, B. Groeneveld, L. W. van der Horst, J. Meester, *Moderne Algebra*, voor mavo deel 3 M, 99 bladz., Wolters-Noordhoff, Groningen.

Ook in dit derde deel van *Moderne Algebra* voor mavo hebben de auteurs zich weer gericht naar het 'Interimrapport van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde'.

Aan de orde komen: vergelijkingen en ongelijkheden in $\mathbb{R}$, rekenliniaal, lineaire functie, kwadratische functie, statistiek, binair rekenen.

Met dit deel is de stof voor de driejarige mavo geheel afgerond.

Aan het eind is een algemene herhaling opgenomen, waarin ook de eindexamens 1969 Wiskunde I en Wiskunde II voor de driejarige mavo, programma B zijn verwerkt.

Evenals in de delen 1 en 2 wordt ook in dit deel de theorie afgewisseld met veel oefenmateriaal. Een goed boek dat zeker een bijdrage kan leveren aan de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs op de mavo-scholen.

J. F. Christophe

Frédérique (Papy): *Les enfants et la Mathématique* 1, Uitg. Marcel Didier - Bruxelles, Montreal, Paris '70

Met dit typografisch op een hoog peil staand boek geeft Frédérique o.a. aan hoe zij zich een bijscholing van leerkrachten bij het basisonderwijs voorstelt. De onderwijzer(es) wordt geconfronteerd met kleurrijke voorbeelden van leerlingenwerk, het draaiboek van de lessen waarin dit is ontstaan en mathematische opmerkingen.

Ervaringen, opgedaan in heroriënteringscursussen voor leerkrachten bij het basisonderwijs, lager- en middelbaar beroepsonderwijs, mavo, vwo en kweekschoolonderwijs stellen naar onze mening de auteur in het gelijk. Onderwijzers en leraren worden in het bijzonder gemotiveerd vanuit activiteiten die hun dagelijkse onderwijspraktijk betreffen!

Het boek geeft een beschrijving van het cursusjaar 1967/1968. Frédérique geeft zelf de lessen aan leerlingen van 5 à 6 jaar. Enige onderwijzeressen maken het protocol dat tenslotte het stramien van dit boekwerk zal worden. (350 pagina's)

Vooraf dient opgemerkt dat de wijze waarop Frédérique met de klas omgaat vrij traditioneel is te noemen. Onder het motto (van Gattegno) 'la classe est plus riche que les plus intelligent de ses éléments' spreekt ze voortdurend met de gehele klas. Hierna worden de kinderen individueel aan het werk gezet.

De potentiële onderwijs-vernieuwer zal meer van zijn gading vinden als hij leest over het gebruik van concrete materialen (staafjes van Cuisenaire, tekenbladen met viltstiften, de minicomputer, logiblokken) en de daarbij zelfwerkzaamheid van de kinderen.

Vooraanstaande onderwijsverbetersaars komen aan het woord; we noemen *Dienes* (via het principe van de multiple embodiment, in dit geval in verband gebracht met het aftrekken), *Hull-Vigotsky-Dienes* (via het gebruik van de logiblokken), *Piaget* (als het conserveren van hoeveelheden in verband gebracht wordt met de bijectieve afbeelding tussen twee gelijk-machtige verzamelingen), *Cuisenaire* (door zijn 'getallen in kleuren' als basis voor Papy's minicomputer).

We achten het mogelijk dat tegen de interpretatie van deze figuren door Frédérique van verschillende zijden bezwaren kunnen worden gemaakt. Uit alles blijkt dat Frédérique onderwijzeres is in hart en nieren. Het boek bevat ook voor de huidige onderwijspraktijk in Nederland belangrijke suggesties en aanwijzingen; aanwijzingen die overigens pas overgenomen kunnen worden na een diepgaande studie van de mathematische achtergronden.

Voor hen, die een poging in deze richting willen wagen, nog deze opmerking: in afwijking van de gang van zaken in het Nederlandse aanvankelijke rekenonderwijs zijn de kinderen hier meer dan 8 maanden bezig met de wiskundige begrippen en handelingen, zonder dat steeds weer voorbeelden en toepassingen in hun eigen wereldje worden gezocht. Het is hier de leerstof zelf die de kinderen (naast het mooie materiaal, de goede sfeer in de klas en niet in het minst het enthousiasme van Frédérique) moet motiveren.

Hoewel ze niet expliciet worden uitgesproken, is het duidelijk dat de doelstellingen van Frédérique verschillen van die ten aanzien van ons rekenonderwijs. Het lijkt dan ook niet verstandig de resultaten van haar en ons onderwijs te gaan vergelijken. Wel zou het heel nuttig zijn om de beide verzamelingen doelstellingen naast elkaar te zetten om na te gaan in hoeverre ze zinvol zijn. Voorts kan men onderzoeken of men in staat is het onderwijs zo in te richten dat ze ook bereikt worden. Om een indruk te geven van de mathematische achtergrond van de lessen in dit boek laten we nu enige begrippen volgen:

Bijectie – Venndiagram – Natuurlijk Getal – Ordinaal Getal – Totale Ordening – Relatie – Vereniging van Disjuncte Verzamelingen – De Functie (+1) – De graph van een Functie – Positioneel Stelsel – Binaire – Binaire representatie van Decimale Getallen – Partitie – Commutativiteit – Associativiteit – Samenstellen van Functies – De Groep Z , $+$ – Vergelijken $-x+a = b$ of $x-a = b$ – Even of Oneven – Breuken – Transitiviteit – ...

Een en ander resulteert in een aanvankelijk wiskunde-onderwijs, waarin we toch aspecten van ons aanvankelijk rekenonderwijs kunnen herkennen. Daarnaast komen onderwerpen ter sprake die de Nederlandse onderwijzer tevergeefs in zijn eigen opleiding zal zoeken. Soms is

de titel van een hoofdstuk van een zo zwaar (mathematisch) kaliber, dat zelfs de wiskundeleeraar bij het v.o. zijn wenkbrauwen moet fronsen. (Samenstellen van functies op pagina 148, vergelijkingen in de groep Z , $+$ op pagina 230). Wij doen hetzelfde bij het lezen van de lessen betreffende de minicomputer, de 'strijd' tussen de positieve en de negatieve getallen, de notatie bij de Cuisenaire-staafjes, de meetkundige interpretatie van leerlingewerk en het introduceren van kommagetallen.

Voegen we hier onmiddellijk aan toe dat in de overige delen van dit boek zeer veel waardevol materiaal aanwezig is voor het onderwijs aan leerlingen van 5 à 6 jaar, dan is de conclusie evident: we bevelen dit boek van harte aan voor diegenen die nader geïnformeerd willen worden over nieuwe inhoud van het wiskunde-onderwijs voor jonge kinderen.

Fred Goffree.

A. R. Jonker, H. J. Zijdeveld, A. W. G. Schrier, *Linea Recta*, Meetkunde voor mavo-scholen, deel M 2, 100 bladz., geb. f 7,25, Wolters-Noordhoff, Groningen.

Dit boekje behandelt de onderwerpen die in het Rijksleerplan zijn aangegeven voor mavo III en mavo IV.

Onderwerpen zijn: kubus en balk, driehoeken, grondconstructies, bewijzen transformaties en congruentie, toepassing congruentie en constructies, Pythagoras, trapezium, oppervlakten, middenparallel, bijzondere puntverzameling.

Om het inzicht in de meetkundige transformaties te bevorderen wordt veel gebruik gemaakt van roosters. De tekeningen zijn duidelijk. Bij elk onderwerp is er niet teveel theorie maar juist wel veel opgaven.

Aan het eind van het boek staat een overzicht in vragen van *Linea Recta* M 1 en M 2 en wederom een aantal (herhalings)vraagstukken.

Van alle opgaven staat het antwoord in de op de laatste bladzijden afgedrukte antwoordenlijst.

Een niet te moeilijk boekje voor de mavo-leerling, die enig inzicht in de meetkunde heeft.

J. F. Christophe

A. R. Jonker, H. J. Zijdeveld, A. W. G. Schrier, *Wis en Zeker*, Algebra voor mavo-scholen, deel M 2, 109 bladz., geb. f 6,75, Wolters-Noordhoff, Groningen.

Bij dit deeltje wordt het accent gelegd op het grafisch oplossen van vergelijkingen. Voor de relaties en de geordende getallenparen wordt een belangrijke plaats ingeruimd. De getallenverzamelingen worden aangevuld met die van de irrationale. Volgens de iteratieve methode worden de wortels geschat en benaderd. Een uitbreiding van de verzamelingen met de vereniging, de universeel en het complement wordt gevolgd door een korte inleiding op de statistiek. Ook aan de notatie wordt veel aandacht besteed. Na elk hoofdstuk volgt voldoende oefenstof en het geheel sluit met tien stel herhalingsopgaven.

In dit deel wordt vastgehouden aan het principe eenvoudige voorbeelden direct naast de theorie te plaatsen.

Al met al een boek waardig om gebruikt te worden.

J. F. Christophe

M. Kindt e.a., *Moderne algebracursus* dl. III vwo, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1970, 121 blz., f 7,75.

Meer dan de helft van dit boekje is besteed aan een behandeling van de opbouw van de verzameling van de reële getallen (R) uit die van Z en Q inclusief de rekenregels voor de operaties $+$ en $\times$.

De schrijvers gaan uit van $\mathbb{Z}$ via een afbeelding op een rechte lijn. Een verdeling van de intervallen in tien delen levert dan de verzameling: D_1 , de verzameling van de getallen, die met een decimaal geschreven kunnen worden (een 0 als laatste decimaal niet meegeteld). Daarna volgen $D_2, D_3 \dots$ en tenslotte $D = \bigcup D_i$. (In de definitie van D op blz. 16 moet het woordje 'van' vervallen, de suggestie voor een definitie van een asymptoot van een kromme op blz. 56 wekt de indruk dat deze de kromme niet mag snijden).

Of de leerlingen in staat zijn te bevatten wat nu precies D voor een verzameling is betwijfel ik, maar dat is niet mijn grootste bezwaar.

De vraag of D de getallenlijn vult is n.l. aan de orde. Het is duidelijk te maken, dat b.v. $\frac{1}{3}$ niet een element van D is, maar dit had men m.i. anders moeten aantonen dan nu geschied is. Dat elke breuk met een noemer die slechts uit factoren 2 of 5 bestaat geschreven kan worden als een breuk met slechts factoren 10 in de noemer is eenvoudig begrijpelijk te maken.

Tracht men deze methode op $\frac{1}{3}$ toe te passen, dan is de poging tot mislukking gedoemd.

$$\frac{1}{3} = \frac{10/3}{10} = \frac{3+\frac{1}{3}}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10 \cdot 3}$$

en men is dus stap verder gekomen.

De auteurs passen echter de methode van de 'staartdeling' toe:

$$\begin{array}{r} 3/1,00 \dots \backslash 0,333 \dots \text{ en dit gaat zo door.} \\ \underline{9} \\ 10 \end{array}$$

Het is een fundamentele fout de leerling nu wijs te maken: $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$

$$0, \dot{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} 3 \cdot 10^{-i}$$

en dit stadium hebben de leerlingen nog niet bereikt.

Stel je voor, dat een leerling de volgende dag met het volgende verhaal komt.

'Meneer, mijn vader is erg knap in staartdelen. Moet u eens kijken:

$$\begin{array}{r} 1-x/1 \quad \backslash 1+x+x^2+\dots \text{ en dat gaat zo door.} \\ \underline{1-x} \\ x \end{array}$$

dus (ja, dus!) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$. Nemen we nu $x = 2$ dan vinden we $-1 = 1+2+4+\dots$

Het hele kaartenhuis stort ineen.

Het wordt tijd dat men zich bezint.

Men wil de wetenschap naar het kind brengen i.p.v. het kind naar de wetenschap.

Dit laatste kan alleen in fasen geschieden en deze fasen kan men nu eenmaal niet overslaan.

Burgers

L. B. J. Westermann, *Meetkunde met vectoren*, dl. II, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1970, blz. 162, f. 10, 75.

Het lang verbeide tweede deel is nu verschenen. Voorlopig zal dit boek van Westermann wel toonaangevend zijn voor de voorbereiding en ook de orientatie op de nieuwe examens.

Dit deel begint met een bespreking van afhankelijkheid van vectoren, afbeeldingen en coördinatie-transformaties. Het grootste deel neemt het hoofdstuk afbeeldingen in beslag (82 blz.), waarin systematisch formules worden afgeleid voor translaties, spiegelingen, rotaties, vermenigvuldigingen en uit de aard der zaak matrixrekening.

Het lijkt me, dat de indruk wordt gewekt dat het de bedoeling zou zijn al deze formules te memoriseren. De figuren bij de afleiding zijn duidelijk en informatief, maar ook verleidelijk. Het valt n.l. op, dat de vector $\vec{n}$ in $(\vec{n} \cdot \vec{x}) + n_0 = 0$ in elke figuur steeds gericht is 'naar de lijn toe'. Het was dus zonder aan de algemeenheid te kort te doen, wel nodig geweest de voorwaarde $n_0 < 0$ toe te voegen. Bovendien zou men de formule over de projectie op een lijn (resp. vlak) vòòr die van de spiegeling kunnen plaatsen, omdat deze laatste onmiddellijk uit de eerste voortvloeit.

Stelt men n.l. $P(\vec{x}) = \vec{x} + \mu \vec{n}$, dan is het zonder enig gereken wel duidelijk dat $\mu = \pm \{(\vec{n}, \vec{x}) + n_0\}$, slechts enige twijfel kan bestaan over het teken. Met enig overleg blijkt echter direct, zonder te rekenen, dat $\mu = -\{(\vec{n}, \vec{x}) + n_0\}$. Dat dan $S(\vec{x}) = x + 2\{(\vec{n}, \vec{x}) + n_0\}\vec{n}$ is zonder meer duidelijk.

De indruk van het 'memoriseren' wordt nog versterkt door de invoering van de vector $\vec{x}^0$ in de formule voor $R(\vec{x}) = \vec{c} + (\cos \varphi)(\vec{x} - \vec{c}) + (\sin \varphi)(\vec{x} - \vec{c})^0$, waarbij deze notatie blijkbaar alleen direct om de formule 'rond' te krijgen.

Deze kritiek sluit niet mijn grote waardering uit voor het vele goede dat de auteur biedt.

Burgers

M. G. Kuipers, J. Siepelina, R. Troelstra, G. Tromp, C. J. Klessner, C. Rijnders, *Gemoderniseerde Meetkunde op basis van afbeeldingen*, deel 3 M, prijs f 8,50, 133 bladz., Wolters-Noordhoff, Groningen.

In dit deel komt de stof aan de orde, die zowel het wiskundeprogramma voor de driejarige als dat voor de vierjarige mavo-opleiding afrondt.

De hoofdstukken 1 tot en met 3 zijn voor beide afdelingen en ze behandelen: de afbeelding vermenigvuldiging, de gelijkvormigheidsafbeelding, de afbeelding projectie en de goniometrie. In hoofdstuk 4 volgt een serie herhalingsopgaven, voor examenkandidaten mavo 3. Enkele opgaven hiervan geven een uitbreiding van de theorie en zijn aangegeven met een ster. De hoofdstukken 5 tot en met 8 zijn uitsluitend voor de mavo 4 kandidaten bestemd en behandelen de sinus- en cosinusregel, vectoren, vergelijkingen rechte lijn en cirkel, goniometrische functies en hoekmeting in radialen.

Als herhaling en voorbereiding op het examen sluit het boek met een hoofdstuk extra opgaven.

Een niet te gemakkelijk boek wat aan de eisen van het moderne wiskundeprogramma voldoet. Voor docenten die graag aparte boeken voor algebra en meetkunde willen gebruiken, is het zeker de moeite waard er kennis van te nemen.

J. F. Christophe

H. J. Jacobs, W. J. Kniep, G. Krooshof, L. A. Muskens, R. Troelstra, A. F. van Tooren, H. A. van Wely, B. J. Westerhof, *Moderne Wiskunde voor mavo, havo en vwo*, deel A 3, 45 bladz., prijs f 2,50, Wolters-Noordhoff, Groningen.

Dit boek is speciaal bedoeld voor leerlingen die moeten overschakelen van de oude op de moderne methode. In dit boekje komen alleen die nieuwe begrippen voor, die de leerling dikwijls zal moeten hanteren.

De inhoud bestaat uit:

Verzamelingen I, relaties, afbeeldingen in de meetkunde, vectoren en verzamelingen II.

Om de leerling te laten controleren of alles begrepen is, zijn ruim 80 opdrachten opgenomen.

Toch zal de docent nog al eens met aanvullende opdrachten moeten komen.

Het is een goed hulpboekje om de overschakeling van klassiek naar modern te vergemakkelijken.

Tevens zou het gebruikt kunnen worden voor leerlingen, die nog wat moeite hebben met de nieuwe wiskunde.

J. F. Christophe

L. L. Helms, *Introduction to potential theory*; Wiley Interscience, New York/London, 1969; 282 blz., prijs 140/-.

Het belang van de potentiaaltheorie voor de moderne ontwikkeling van de waarschijnlijkheidsrekening (o.a. de theorie der Markov-processen) is duidelijk naar voren gekomen. De auteur tracht in deze inleiding de lezer vertrouwd te maken met de klassieke potentiaaltheorie die de basis van de meer recente ontwikkeling is. Daarbij wordt van de lezer verwacht dat hij op de hoogte is van de beginselen der maattheorie en van de theorie der Lebesgue-integratie. De potentiaaltheorie wordt in n -dimensionale ruimten ontwikkeld, waarbij de behandeling typisch mathematisch is; de niet-ingewijde zal niets direct de fysische oorsprong van een aantal problemen zien. Dit is enigszins een bezwaar van de overigens fraaie behandeling van de stof. De auteur heeft dit bezwaar enigszins aangevoeld; in de uitvoerige aantekening, op blz. 269-271, bij Hoofdstuk 7 over capaciteit gaat hij meer dan op andere plaatsen op de samenhang met de fysische problematiek in.

In het boek wordt aandacht geschonken aan harmonische en superharmonische functies, aan functies van Green en Green-potentialen, aan Dirichlet-problemen, energiekwesties bij een gegeven lading- of massaverdeling en ook aan topologische problemen.

Voor hen die zich interesseren in de mathematische aspecten van de potentiaaltheorie is deze inleiding stellig wáardevol.

W. J. Claas

Colleges Sterrekunde voor Afgestudeerden

Gewoontegetrouw zal het Sterrekundig Instituut te Utrecht ook in het jaar 1971 colleges Sterrekunde voor Afgestudeerden houden. Het onderwerp is:

WITTE DWERGEN, NEUTRONEN STERREN EN PULSARS

(Extreem dichte materie in het heelal)

De volgende voordrachten zullen worden gehouden:

donderdag 21 januari 1971; C. de Jager: 'Witte dwergen'

donderdag 28 januari 1971; H. Rosenberg: 'Pulsars en supernovaresten'

donderdag 4 februari 1971; E. van den Heuvel: 'Fysische grondslagen; toepassing op witte dwergen'

donderdag 11 februari 1971; J. Heise: 'Neutronensterren.'

De voordrachten zullen worden gehouden in het Universiteitsgebouw te Utrecht van 19.30 precies tot 21.15 uur.

Om een indruk te krijgen over de verwachte belangstelling wordt belangstellenden verzocht zich van tevoren schriftelijk op te geven bij de Administratie van het Laboratorium voor Ruimte-Onderzoek van het Sterrekundig Instituut, Beneluxlaan 21, Utrecht. Zij krijgen geen verder bericht, tenzij onverhoopt wijzigingen in het programma zouden optreden.

Leraren zullen hun reiskosten vergoed kunnen krijgen.

C. de Jager

FYSISCH ONDERZOEK VAN DE STERREN

Het boekje met de tekst van de voordrachten die in januari 1970 te Utrecht gehouden werden in de colleges sterrekunde voor afgestudeerden is thans verschenen en aan de deelnemers toegezonden. Belangstellenden kunnen zich eveneens van toezending verzekeren door storting van f 2,50 op gironummer 2900 van de AMRO Bank N.V. te Utrecht onder vermelding van nr 40205 t.n.v. Prof. Dr. C. de Jager.

C. de Jager.

Teleac

Oppervlakte, volume, raaklijn

Aanschouwelijke inleiding tot de integraal- en differentiaalrekening.

Een televisiecursus van 11 lessen met de bedoeling om in ruime kring een indruk te geven van methoden van de wiskunde welke steeds weer bij praktische toepassingen worden gebruikt. Het integraalbegrip zal worden ingevoerd op basis van de historische ontwikkeling. De cursus heeft daardoor een uitgesproken didactisch karakter.

De cursus is in beginsel geschikt voor ieder die een wiskundige voorkennis heeft op redelijk niveau. Uiteraard zal hij zich de moeite moeten geven een niet te moeilijk betoog te volgen. Door de originele behandelingswijze van de stof kan de cursus in 't bijzonder van belang zijn voor leraren van het voortgezet onderwijs.

De cursus zal zich niet louter tot theorie beperken, maar ook enkele sprekende toepassingen behandelen. Bovendien wordt inzicht gegeven van de wijze waarop de analoogmachine in dit onderdeel van de wiskunde functioneert.

Door Teleac zal een syllabus worden uitgegeven, welke tijdens de cursus zal verschijnen. Vóór de eerste les zal aan iedere cursist een résumé van elke les worden toegezonden.

Aantal lessen: 11

Uitzendperiode: januari–maart 1971.

Uitzendtijden: zaterdag 9.30–10.00, Ned. 1;

Herhaling: dinsdag na het laatste NOS-journaal, Ned. 2.

Redactie en presentatie: Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen – Groningen.

Regie: Jop Pannekoek.

Prijs: f 9,50 over te maken op giro 544232 ten name van Teleac – Utrecht met vermelding van 'cursus wiskunde'.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en
correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25,
Oosterbeek.

252 V is een verzameling jongens, W een verzameling meisjes. Elke jongen uit V vindt één of meer van de meisjes uit W aardig. Bij elke deelverzameling V_1 van V kunnen we de deelverzameling W_1 van W vormen, die bestaat uit alle meisjes, die door minstens één jongen uit V_1 aardig gevonden wordt. Hoe we V_1 ook kiezen, gelukkig is het aantal meisjes uit W_1 minstens even groot als het aantal jongens uit V_1 . Het is nu mogelijk monogame huwelijken te sluiten tussen de jongens uit V en de meisjes uit W zo, dat elke jongen een huwelijkspartner krijgt, die hij aardig vindt. Wordt gevraagd aan te tonen, dat deze optimistische bewering op waarheid berust.

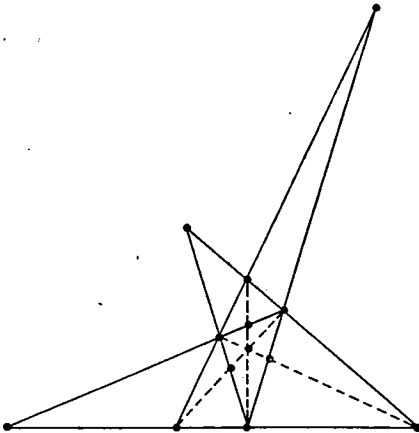
253 Als een notaris iets onder twee erfgenamen moet verdelen, dan laat hij de een delen en de andere kiezen. Welke strategie volgt de notaris, als hij de partij (laten we zeggen dat het een koek is) moet verdelen onder drie, vier, vijf, ... erfgenamen?

Oplossingen

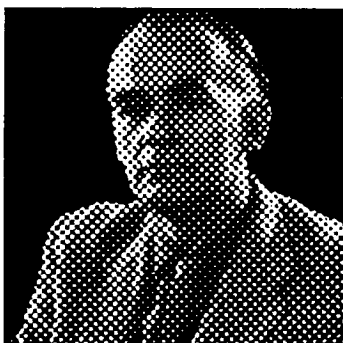
250 A en B spelen 'ganzebord'. B legt de dobbelsteen op een door hem te bepalen aantal ogen. A kantelt de dobbelsteen en gaat zoveel plaatsen vooruit, als de dobbelsteen aanwijst. Enz. Terugkantelen mag niet. Bereikt A het vak 62, dan wint hij. Komt hij hoger dan 62 uit, dan verliest hij. Zou A beginnen, dan is de zaak eenvoudig. Hij legt de dobbelsteen op 6 en draait daarna achtereenvolgens 1, 6, 1, 6, ..., totdat hij op 62 komt. B kan de winst niet verhinderen. Voor A winnende vakken zijn dus 6, 13, ..., 55. B legt de dobbelsteen daarom bij het begin op 6 (of 1). A kantelt b.v. op 2. B kantelt op 4 (of 3), A op 1, B op 3 (of 4), A op 2, B op 1 en nu is A verplicht vak 6 te passeren. In het algemeen: komt A b.v. op $48 - 4 = 44$ en is zijn laatste worp 4, dan kan hij de volgende keer 48 niet bereiken. Zijn laatste worp was niet 3, want dan kwam hij van een winnende stand. Was zijn laatste worp niet 4, dan kantelt B de dobbelsteen op 4, enz. B kan zo A steeds verhinderen een winnende stand te bereiken. A zal dus verliezen.

Veel leuker is A en B op deze manier tegen elkaar op het bord te laten spelen. Daar ben ik echter niet uitgekomen. Mocht een van de lezers een oplossing vinden, dan houd ik mij aanbevolen. Er is nu geen bezwaar de pot op 63 te handhaven.

251 Plaats 13 bomen in 9 rijen van 4.



Een driehoek met zijn voetpuntdriehoek geeft de gevraagde oplossing.



NIEUW! WISKUNDE PAPERBACKS

Onder redactie van
drs. B. van der Krogt.

De ideeën van prof. dr. Zoltan Paul Dienes over wiskunde- en rekenonderwijs.

De eerste stappen in de wiskunde
door prof. dr. Zoltan Paul Dienes,
m.m.v. E. W. Golding, hoofd van een
Australische experimenteerschool.

U kunt met bijgaande bon voor
rekening bestellen.

 **MALMBERG**
's-HERTOGENBOSCH

Verkrijgbaar bij boekhandel
en uitgever.

- 1 **LOGICA EN LOGISPELEN**
vertaald door mevr. M. J. A. Bouw-
meester-de Witte.
f 6,95; bij 20 exemplaren f 6,30
- 2 **VERZAMELINGEN, GETALLEN
EN MACHTEN**
vertaald door mevr. M. J. A. Bouw-
meester-de Witte.
f 7,95; bij 20 exemplaren f 7,20.
- 3 **VERKENNING VAN DE RUIMTE
EN PRAKTISCH METEN**
vertaald door mevr. M. J. A. Bouw-
meester-de Witte.
f 5,25; bij 20 ex. f 4,75

ook verschenen:

WIJ BOUWEN WISKUNDE OP
door Z. P. Dienes

vertaald door mevr. S. van der Krogt-
Terstegge.
f 6,95; bij 20 exemplaren f 6,30

ANTWOORDCOUPON

Gelieve mij te zenden voor rekening:

- ex. Logica en logispelen.
..... ex. Verzamelingen, getallen en machten.
..... ex. Verkenning van de ruimte en praktisch meten (na verschijnen).
..... ex. Wij bouwen wiskunde op.

Naam:

Adres:

Plaats: **School:**

Deze bon kunt u ongefrankeerd inzenden aan Antwoordnummer 4,
's-Hertogenbosch.

Inhoud

G. Krooshof: Afscheid van redacteur Dr. D. N. van der Neut	161
W. Amse: $\int_a^x f$ is op $[a, b]$ een primitieve van f als f continu is op $[a, b]$	162
Prof. ir. D. H. Wolbers: Principe en ontwikkeling van de digitale computer	167
Hans Freudenthal: Samen jarig	177
G. E. Kiers: Magische kwadraten	181
Korrel	190, 191
Didactische literatuur	192
Boekbespreking	193
Colleges Sterrekunde voor afgestudeerden	198
Teleac	199
Recreatie	200